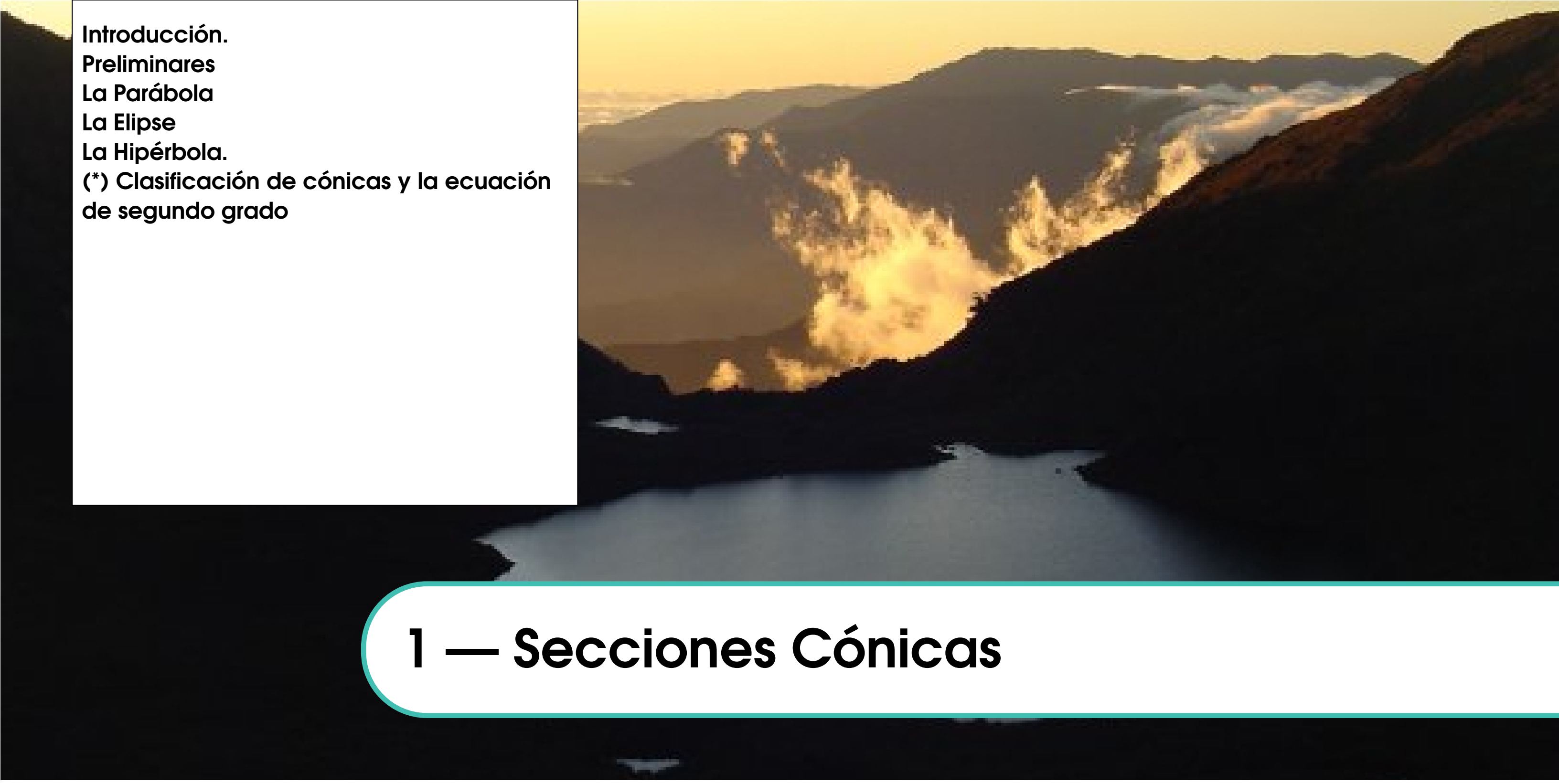
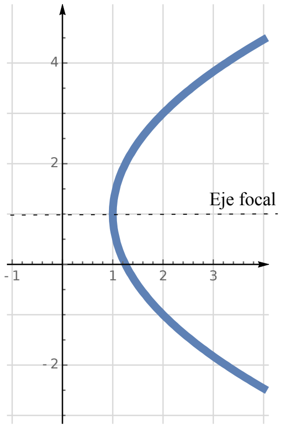


1 — Secciones Cónicas

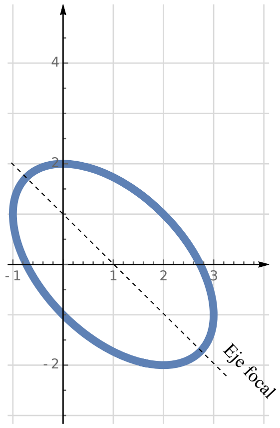
La parábola, la elipse y la hipérbola son llamadas “secciones cónicas”. La circunferencia es un caso especial de elipse. Todas estas curvas se pueden obtener como curvas de intersección entre un plano y un cono. Se atribuye a Menecmo (320 a. C.) su descubrimiento inicial. En el siglo III a.C., Apolonio de Perga estudia las cónicas como una sección de un cono circular y caracteriza los puntos de la cónica según sus distancias a dos líneas y deduce una gran cantidad de propiedades geométricas a partir de su caracterización, todo en términos geométricos, sin notación algebraica (la manipulación de las cónicas es esencialmente algebraica, disfrazada en forma geométrica). Sus tratados sobre cónicas fueron una joya de las matemática antigua.

En coordenadas rectangulares, una cónica tiene “ecuación general”

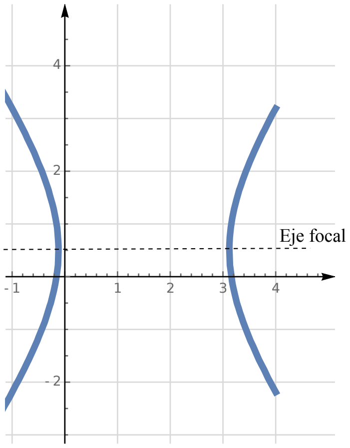
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$



Parábola $y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$



Elipse $2x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$



Hipérbola $2x^2 - y^2 - 6x + y - 1 = 0$

Sin embargo, hay casos en los que esta ecuación no tiene solución (no hay lugar geométrico) o el conjunto solución es una "cónica degenerada": Un punto o una o dos rectas.

Usando la teoría de formas cuadráticas podemos obtener un criterio para clasificar las cónicas a partir de su ecuación general.

Si $\Delta = 4ACF - AE^2 - B^2F + BDE - CD^2$, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.1

Consideremos la cónica de ecuación $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, entonces:

a.) Si $B^2 - 4AC = 0$ y $\Delta \neq 0$, tenemos una parábola.

b.) Si $B^2 - 4AC < 0$ y $\Delta \neq 0$, tenemos una elipse.

c.) Si $B^2 - 4AC > 0$ y $\Delta \neq 0$, tenemos una hipérbola.

En coordenadas rectangulares, una hipérbola tiene ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

con $B^2 - 4AC > 0$ y $\Delta \neq 0$.

Si $B \neq 0$, el "eje focal" no es paralelo a los ejes X ni Y y la cónica presenta una rotación respecto a estos ejes. Esta rotación se puede "eliminar" haciendo un cambio de variable.

Por ejemplo, si la cónica presenta una rotación de ángulo θ respecto al eje X, entonces el cambio de variable puede ser $x = x' \cos\theta - y' \operatorname{sen}\theta$ y $y = x' \operatorname{sen}\theta + y' \cos\theta$. De esta manera la cónica aparecerá sin rotación en el sistema $X'Y'$.

Si $B = 0$, el "eje focal" es paralelo al eje X o es paralelo al eje Y. En este caso decimos que la cónica está en "posición estándar" y podemos simplificar la ecuación de la hipérbola de tal manera que podamos ver mucha información con solo inspeccionar la ecuación.

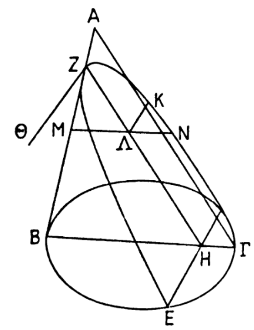
1.1 Introducción.

Además de la rectas, los círculos, los planos y las esferas; los griegos se interesaron por las curvas obtenidas como secciones de un cono (parábolas, elipses e hipérbolas). No es totalmente claro el por qué del interés en estas curvas ([17], [14]).

Las referencias que están disponibles parecen relacionar las cónicas con el problema de duplicación del cubo (problema de Delos): Dado un cubo de lados de medida s y por tanto de volumen s^3, encontrar un cubo de lados de medida x y volumen $2s^3$. Hay que entender que solo se podía usar las condiciones auto-impuestas en la época: Las construcciones debían hacerse solo con regla (sin marcas) y compás. Hipócrates redujo el pro-blema a un problema de proporciones,

$$s : x = x : y = y : 2s \tag{1.1}$$

De aquí se deduce que los valores x, y deben estar en la parábola $x^2 = sy$ y en la hipérbola $xy = 2s^2$. La solución se obtiene como la intersección de estas curvas, $x = \sqrt[3]{2}s$ que es un número que no se puede construir con regla y compás (como se demostró un 2000 años después). En la época griega, estas curvas aparecen como relaciones geométricas.



$$K\Lambda^2 = M\Lambda . \Lambda N = Z\Lambda . \frac{BH}{ZH} . H\Gamma = \frac{HE^2}{ZH} . Z\Lambda .$$

Figura 1.1: Derivación de la ecuación de la parábola según Apolonio de Perga ([14]).

Menecmo (320 a. C.) parece ser el primero en encontrar estas curvas, en sus esfuerzos por resolver el problema de Delos de manera geométrica. No es claro como pudo llegar a estas curvas (aunque hay varias conjeturas). Es probable que fuera de una manera similar a la manera en la que Apolonio de Perga (262 a.C.) las deduce en sus libros.

En el siglo III a.C., Apolonio estudia las cónicas como una sección de un cono circular y caracteriza los puntos de la cónica según sus distancias a dos líneas y deduce una gran cantidad de propiedades geométricas a partir de su caracterización, todo en términos geométricos, sin notación algebraica (la manipulación de las cónicas es esencialmente algebraica, disfrazada en forma geométrica). Sus tratados sobre cónicas fueron una joya de las matemática antigua.

Pappus de Alejandría (a.C.290 - a. C.350) publicó una obra en la que se resume los conocimientos matemáticos de su época, recogiendo fragmentos, a veces íntegros, de las obras que constituían los fundamentos de la enseñanza de las matemáticas en la ciudad de Alejandría, hoy en gran parte perdidas. En lo que respecta a cónicas, su contribución más importante fue la introducción de los conceptos de foco, directriz y excentricidad de una cónica con lo que se puede dar una definición equivalente en términos de la proporción entre la distancia de los puntos de la cónica a un foco y la distancia a una directriz; esta proporción es constante y se denota con e y se le llama *excentricidad* de la cónica.

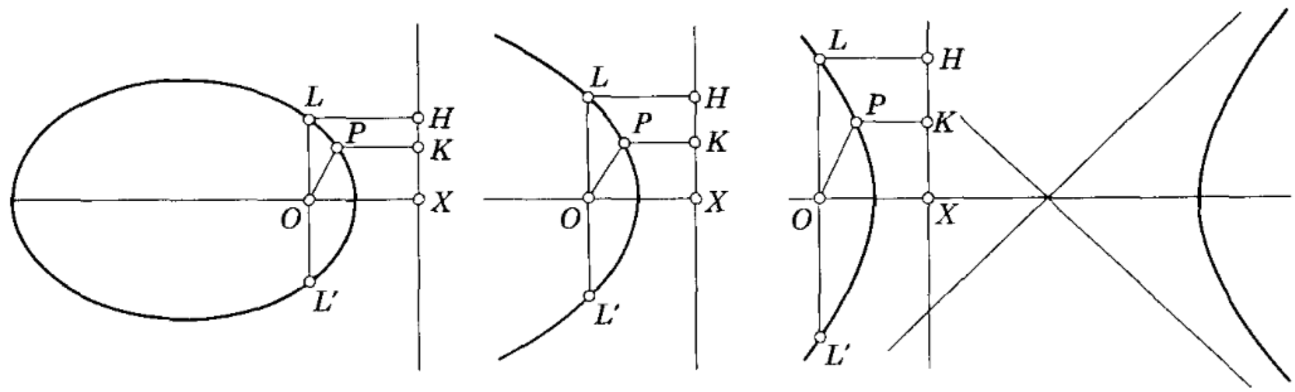


Figura 1.2: Definición de una cónica usando foco, directriz y excentricidad.

Después de Pappus pasaron doce siglos en el que hubo una total pérdida de interés por las cónicas (desde los tiempos de Pappus hasta el siglo XVII). Luego vino un renovado interés en una época en que se tenían nuevos métodos (los de Desargues y los de al geometría analítica) y las necesidades de la nueva astronomía, por ejemplo.

Para los pioneros de la ciencia moderna (Galileo, Kepler, Huygens y Newton), los estudios de Apolonio sobre la parábola, hipérbola y la elipse fueron el punto de partida para su exploración de las leyes de la naturaleza. Con la introducción de la geometría analítica (geometría con coordenadas más la posibilidad de manipular y resolver ecuaciones algebraicas), las curvas planas se podían definir por una ecuación de dos variables. J. Wallis fue el primero en probar de manera clara, en 1655, que la ecuación

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

es la representación algebraica de las cónicas. Según los coeficientes A,B,C,D,E y F, hay curvas de diversa naturaleza. Por ejemplo, $x^2 + y^2 = 0$ la satisface solo el punto $(x,y) = (0,0)$ mientras que $x^2 + y^2 + 1 = 0$ no tiene solución. Si la ecuación factoriza como $(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ tendríamos un par de rectas, es decir, los puntos que están sobre las rectas de ecuación $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ o $A_2x + B_2y + C_1 = 0$ satisfacen el caso reducible. Fuera de estos 'casos degenerados' y del caso reducible, queda el caso irreducible que corresponde a las parábolas, elipses e hipérbolas.

En este capítulo se introducen las cónicas como lugares geométricos[1] y luego se pasa a la versión analítica. En la primera parte solo consideramos cónicas con eje focal paralelo a los ejes coordenados, es decir, cónicas de ecuación $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. En la segunda parte se considera la ecuación general $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ que, en el caso no degenerado, corresponde a cónicas con rotación. Haciendo un cambio de variable, se "elimina la rotación" y volvemos al caso estándar en un nuevo sistema de ejes.

[1]Las definiciones que se presentan son equivalentes a la definición original de las "cónicas" como una sección de un cono. Una demostración elegante de esta equivalencia fue presentada en 1822 por el matemático belga G.P. Dandelin. Aunque es sencilla, en este texto no se incluye la demostración. Se puede consultar [11].

Graficador de cónicas. Una manera fácil de obtener la representación gráfica de una cónica es introducir su ecuación (o sus propiedades) en WOLFRAM ALPHA, en http://www.wolframalpha.com/input/?i=conics

1.2 Preliminares

Distancia entre dos puntos. La distancia euclidiana de un punto $A=(a_1,a_2)$ a otro punto $B=(b_1,b_2)$ se puede obtener usando el teorema de Pitágoras: $d(A,B)=||A-B||=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$

Ejemplo 1.1

Sean $A=(1,1)$ y $B=(5,3)$. Entonces,

$$d(A,B)=||A-B||=\sqrt{(1-5)^2+(1-3)^2}=\sqrt{20}$$

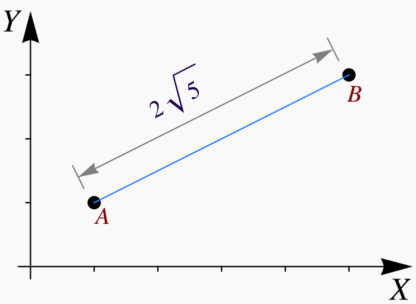


Figura 1.3: $||B-A||=\sqrt{20}$

Punto Medio. El punto medio entre A y B es $M=\dfrac{A+B}{2}$. La distancia de A a M es $d(A,M)=\dfrac{||A-B||}{2}$.

Ejemplo 1.2

Sean $A=(1,1)$ y $B=(5,3)$. El punto medio es $M=\dfrac{(1+5,\ 3+1)}{2}=(3,2)$.

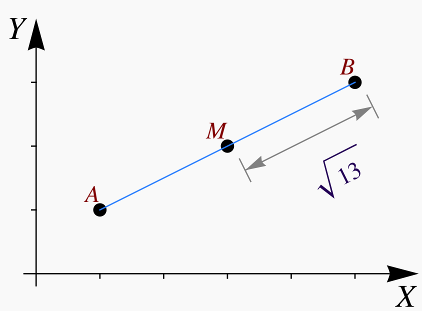


Figura 1.4: $d(M,B)=\sqrt{13}$

Completar el cuadrado. En el tema de cónicas es muy útil la "completación de cuadrados" pues nos permite reducir ecuaciones del tipo $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ a una ecuación más natural y con más información. Una manera de completar cuadrados es

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

Ejemplo 1.3

a.) Completar el cuadrado en $4x^2 - 8x$

Solución:
$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x &= 4\left(x + \frac{-8}{2\cdot 4}\right)^2 - \frac{(-8)^2}{4\cdot 4} \\ &= 4(x-1)^2 - 4 \end{aligned}$$

b.) Completar el cuadrado en $y^2 + 4y - 8$

Solución: $y^2 + 4y - 8 = \left(y + \frac{4}{2}\right)^2 - \frac{(4)^2}{4\cdot 1} - 8 = (y+2)^2 - 12$

Lugares geométricos. Informalmente, un "lugar geométrico" es el "rastro" o la "huella" que deja un punto que se mueve de acuerdo a una ley especificada. En lo que a nosotros concierne, usaremos esta definición: Un "lugar geométrico" es el conjunto de todos los puntos (usualmente los puntos de una curva o una superficie) que satisfacen algún criterio o propiedad.

Ejemplo 1.4 (Lugar geométrico).

Una circunferencia en el plano es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto O llamado "centro".

Nos interesa *la ecuación cartesiana* de la curva que se forma: Una circunferencia de radio a está formada por todos los puntos (x,y) que están a una distancia "a" del centro $O = (h,k)$. Entonces

$$\begin{aligned} ||(x,y) - (h,k)|| = a &\implies \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = a \\ &\implies (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \end{aligned}$$

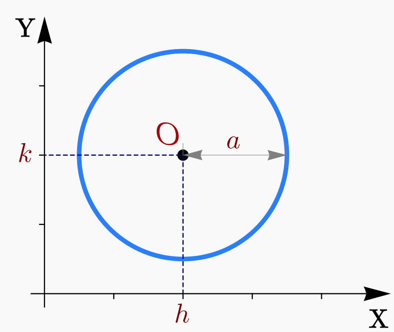


Figura 1.5: Lugar geométrico

La ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ es la versión "analítica" para una circunferencia de centro (h,k) y radio a.

1.3 La Parábola

Ver con CFDPlayer Requiere FreeCDF Player

Definición 1.1 (La parábola como lugar geométrico).

En un plano, una parábola es el lugar geométrico de todos los puntos Q equidistantes de un punto fijo F (llamado *foco*) y de una recta fija ℓ (llamada *directriz*) que no contiene a F, es decir, $d(Q,F) = d(Q,\ell)$.

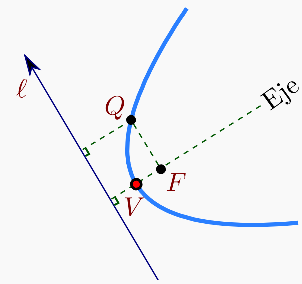
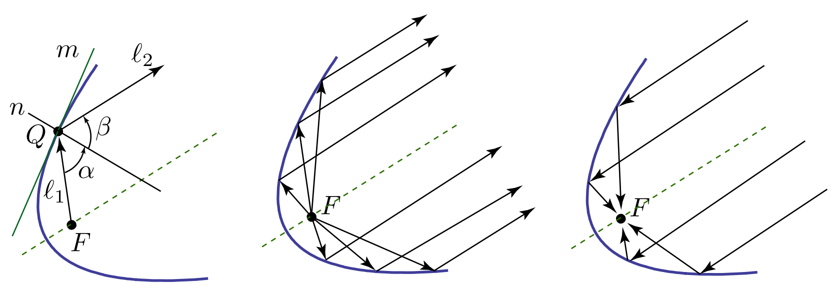


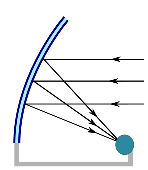
Figura 1.6: Parábola

Propiedad focal de la parábola: En Física, la ley de reflexión establece que si un rayo de luz ℓ_1 toca una superficie pulida m en un punto Q, este rayo es reflejado a lo largo de otra recta ℓ_2 de tal manera que si n es la recta normal a m en Q, el ángulo de incidencia α es igual al ángulo de reflexión β. Esta ley combina muy bien con la llamada "propiedad focal" de la parábola: *La normal a la parábola en cualquier punto Q de la parábola forma ángulos iguales con el segmento FQ (que corresponde a ℓ_1) y la recta que pasa por Q y es paralela al eje de simetría de la parábola (que corresponde a ℓ_2).*



Aplicaciones. Las antenas utilizadas preferentemente en las comunicaciones vía satélite son las antenas parabólicas. Las señales que inciden sobre su superficie se reflejan y alimentan el foco de la parábola, donde se encuentra el elemento receptor (también podría ser un elemento emisor). Son antenas parabólicas de foco primario.

Se usa también otro tipo de antena que no es redonda, sino oval y simétrica y se obtiene como un corte de la antena parábolica; el receptor queda en el punto focal, pero recibe alimentación a un lado (antena offset) del plato resultante del corte, esto se hace así para evitar eliminar la 'sombra' del receptor (con lo que el rendimiento es algo mayor que en la de foco primario).



La propiedad focal de la parábola también se usa para el diseño de los focos de los automóviles, en este caso se debe usar un lente para desviar la luz de tal manera que no afecte a los conductores que vienen de frente,

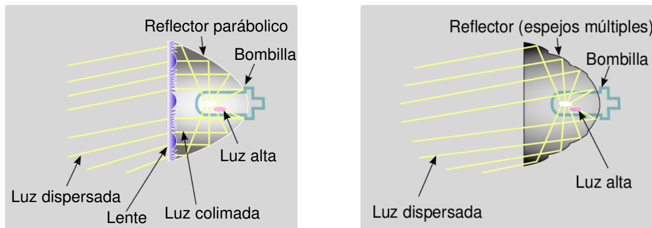
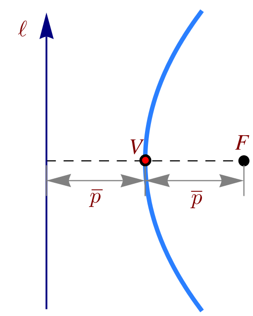
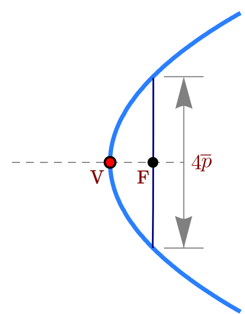


Figura 1.7: Reflectores parábolicos (Wikipedia Commons)



Directriz, eje, vértice y foco. La recta que pasa por F y es perpendicular a L se llama "eje" o "eje de simetría". El punto de la parábola que está sobre este eje transversal se llama *vértice* y lo denotamos con V. Por la definición de la parábola, el vértice está a la misma distancia de la recta ℓ y del Foco. Esta distancia la denotamos con $\overline{p}$



Latus Rectum: El *latus rectum* de la parábola es la cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje. La longitud del *latus rectum* es $4\overline{p}$.

Tratamiento analítico.

En coordenadas rectangulares, una parábola tiene ecuación general (1.1)

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \text{con} \quad B^2 - 4AC = 0 \quad \text{y} \quad \Delta \neq 0$$

Si $B \neq 0$, el "eje focal" no es paralelo al eje X ni al eje Y. En este caso, la parábola presenta una rotación respecto a estos ejes. La rotación se puede eliminar (respecto a los nuevos ejes X', Y') haciendo el cambio de variable $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$ y $y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$.

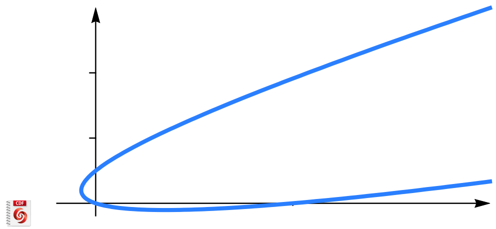
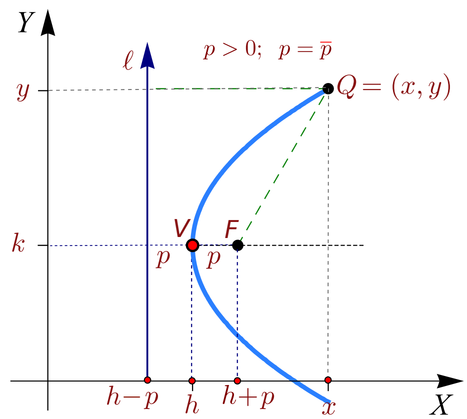


Figura 1.8: Parábola con rotación

La versión analítica, en posición estándar, requiere colocar la directriz paralela al eje X o paralela al eje Y.

Directriz paralela al eje Y. Si la directriz es paralela al eje Y y si $V=(h,k)$, entonces hay dos posibilidades: la parábola abre a la izquierda o abre a la derecha.



En el caso de que la parábola abre a la derecha, el foco es

$$F=(h+\overline{p},k)$$

Los puntos $Q=(x,y)$ de la parábola satisfacen $d(Q,F)=d(Q,\ell)$, es decir,

$$\begin{aligned}\sqrt{(x-h-\overline{p})^2+(y-k)^2} &= x-h+\overline{p}\\ (x-h-\overline{p})^2+(y-k)^2 &= (x-h+\overline{p})^2\\ (y-k)^2 &= 4\overline{p}(x-h)^2\end{aligned}$$

Como $\overline{p}>0$, entonces $x\geq h$ como se espera. Así, si la parábola abre hacia la derecha, su *ecuación canónica* es

$$(y-k)^2=4p(x-h)\quad\text{con}\quad p>0.$$

En el caso de que la parábola abra a la izquierda, el foco es $F=(h-\overline{p},k)$. Los puntos $Q=(x,y)$ de la parábola satisfacen $d(Q,F)=d(Q,L)$. Procediendo como antes,

$$\sqrt{(x-h+\overline{p})^2+(y-k)^2}=x-h-\overline{p}\implies(y-k)^2=4p(x-h)\quad\text{con}\quad p=-\overline{p}.$$

Como $p=-\overline{p}$, el foco es $F=(h+p,k)$ nuevamente.

En ambos casos, la ecuación simplificada es $(y-k)^2=4p(x-h)$ donde $\overline{p}=|p|$. Con esta notación, si $p>0$, la parábola abre a la derecha y si $p<0$, la parábola abre a la izquierda. Esta ecuación es llamada *ecuación canónica* o *natural*. Esta ecuación es especial pues contiene la información del vértice, el foco y la directriz.

Parábola $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

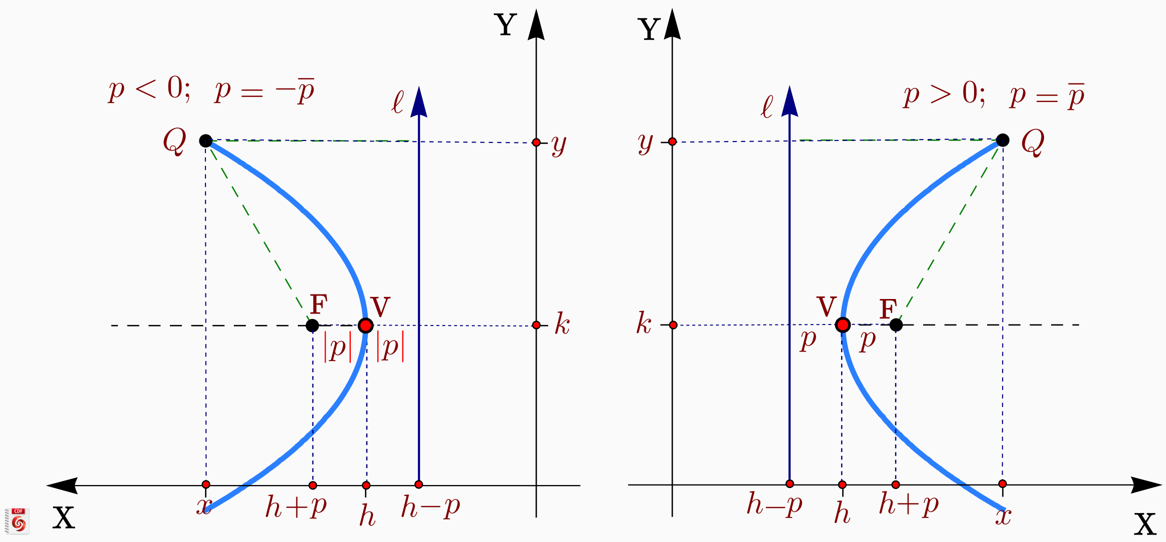


Figura 1.9: Parábola con directriz ℓ paralela al eje Y.

Directriz paralela al eje X. De manera análoga al caso anterior, si la directriz es paralela al eje X, entonces la *ecuación canónica* de la parábola es

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

de tal manera que si $p > 0$, la parábola abre hacia arriba y si $p < 0$, la parábola abre hacia abajo. En resumen, si la directriz es paralela al eje X o paralela al eje Y, y si el vértice es $V = (h,k)$, la ecuación canónica es

Ver con CFDPlayer Requiere FreeCDF Player

Parábola $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

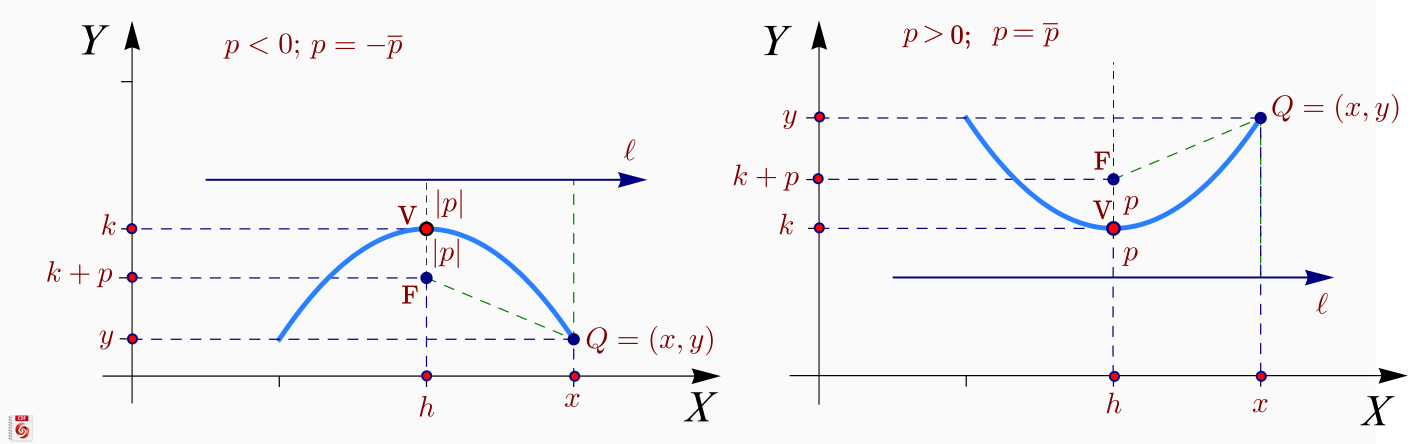


Figura 1.10: Parábola con directriz ℓ paralela al eje X.

Ecuación general de la parábola en posición estándar. La ecuación general de la parábola es de la forma $Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $C \neq 0$ y $D \neq 0$ o de la forma $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ con $A \neq 0$ y $E \neq 0$. Completando el cuadrado obtenemos la ecuación canónica. También podríamos obtener el vértice, el foco y la ecuación de la directriz en términos de C, D, E y F.

Ejemplo 1.5

Verificar que el vértice de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ es el punto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Solución: Completando cuadrados obtenemos

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c - y &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c - y \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a} - y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} - y \quad \text{si} \quad \Delta = b^2 - 4ac. \end{aligned}$$

Entonces, $ax^2 + bx + c - y = 0 \implies \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{\Delta}{4a}\right)$ y el vértice es $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Ejemplo 1.6

Hallar la ecuación canónica, el vértice, el foco y la directriz de la parábola cuya ecuación es $y^2 - 6y - 2x + 17 = 0$. Además realice la gráfica.

Solución: Para hallar la ecuación canónica debemos completar cuadrados.

$$\begin{aligned} y^2 - 6y - 2x + 17 &= 0 \\ (y-3)^2 - 9 - 2x + 17 &= 0 \\ (y-3)^2 &= 2(x-4) \end{aligned}$$

El vértice es $V = (4,3)$ y como $4p = 2 \Rightarrow p = 1/2 > 0$.

La parábola abre hacia la derecha y tiene el foco en $F = (4.5, 3)$.

La directriz es la recta de ecuación $x = 3.5$. La gráfica se muestra en la figura.

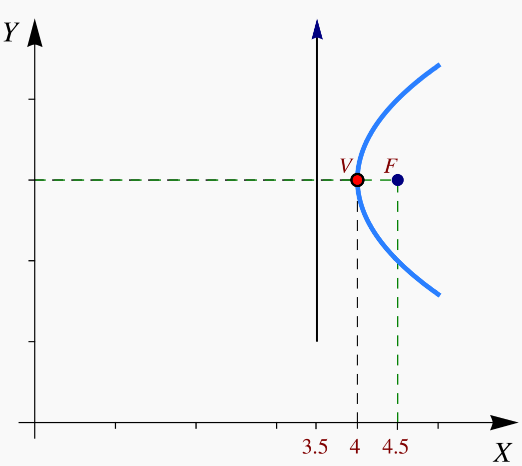


Figura 1.11: Parábola $(y-3)^2 = 2(x-4)$

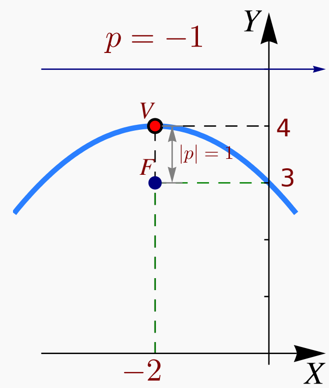
Ejemplo 1.7

Hallar la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-2,4)$ y foco en $(-2,3)$. Realizar la gráfica.

Solución: Dado que el vértice y el foco tienen igual abscisa, el eje de la parábola es vertical, además las distancia entre el foco y el vértice es $|p| = 1$ y como abre hacia abajo, $p = -1$. Entonces la ecuación canónica es,

$$(x+2)^2 = -4(y-4)$$

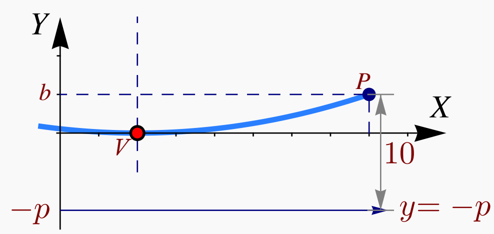
La directriz es la recta $y = 5$. La gráfica se muestra en la figura.



Ejemplo 1.8

Determine la ecuación canónica y el foco de la parábola (o las parábolas) que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

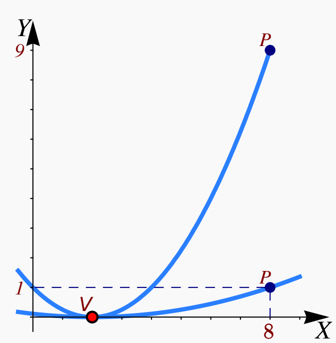
a.) vértice en $(2,0)$,
b.) contiene al punto $P = (8,b)$ con $b > 0$,
c.) la distancia de P a la directriz es 10,
d.) eje de simetría paralelo al eje Y.



Solución: De acuerdo a **d.)** la parábola abre hacia arriba o hacia abajo. Por la posición del vértice y el punto $(8,b)$, solo podría abrir hacia arriba. El vértice es $(h,k) = (2,0)$ por lo que lo que la ecuación de la parábola es $(x-2)^2 = 4p(y-0);\ \ p > 0$.

La directriz es $y = k - p = -p$. Para determinar p y b tenemos dos datos

- La distancia de $(8,b)$ a la directriz es 10, es decir $b + p = 10$
- El punto $(8,b)$ está en la parábola, es decir, $(8-2)^2 = 4p(b)$



$$\begin{aligned} b &= 10 - p \\ 36 &= 4pb \implies 36 = 4p(10-p) \implies 36 - 40p + 4p^2 = 0 \end{aligned}$$

Con lo que $p = 1$ o $p = 9$. Por lo tanto, las parábolas que cumplen estas condiciones son $(x-2)^2 = 4y$ (cuando $b = 1$) o $(x-2)^2 = 36y$ (cuando $b = 9$). Ambas parábolas se muestran en la figura de la derecha.

Ejemplo 1.9

Hallar las parábolas que contienen los puntos $(4,4),(4,-4)$ de la circunferencia $(x-6)^2 + y^2 = 20$ y la distancia de su vértice al centro de esta circunferencia es 6 unidades.

Solución: La situación, según los datos, es la que se presenta en la figura de la derecha. La ecuación es, en ambos casos, $(y-k)^2 = 4p(x-h)$.

- Si el vértice es $(h,k) = (0,0)$: Como $(4,4)$ está en la parábola, entonces

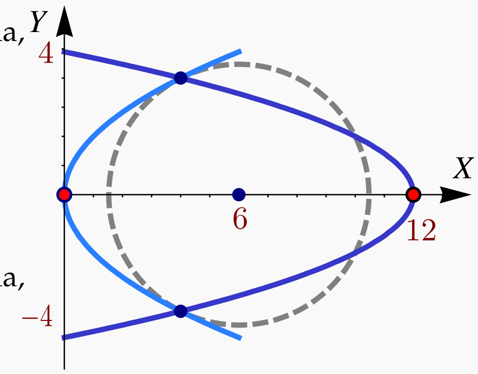
$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \implies 4^2 = 16p \implies p = 1.$$

La ecuación de la parábola es $y^2 = 4x$.

- Si el vértice es $(h,k) = (12,0)$: Como $(4,4)$ está en la parábola, entonces

$$y^2 = 4p(x-12) \implies 4^2 = 4p(-8) \implies p = -1/2$$

La ecuación de la parábola es $y^2 = -2(x-12)$



1 Ejercicios

1.1 Determine la ecuación del lugar geométrico de los puntos Q del plano XY tales que equidistan del punto $(2,3)$ y de la recta de ecuación $x = 4$.

1.2 Determine la ecuación canónica de las siguientes parábolas,

a.) $y = 2x^2 - 4x + 1$.

b.) $-9y^2 - 8x - 3 = 0$

c.) $y^2 + 2y - 4x = 7$

d.) $x^2 + 2x - 2y + 5 = 0$

e.) $x^2 - y + 2 = 0$

1.3 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(1,3)$ y foco en $(2,3)$.

1.4 Determine la ecuación canónica de la parábola con eje focal paralelo al eje X y que pasa por los puntos $(0,0)$, $(-1,2)$ y $(-2,-2)$

1.5 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(-1,1)$ y directriz $y=0$.

1.6 Determine la ecuación canónica de la parábola con foco en $(3,4)$ y directriz $x=7$.

1.7 Determine la ecuación canónica de la parábola con vértice en $(2,3)$, eje focal paralelo al eje Y y que pasa por el punto $(4,5)$.

1.8 Hay *tres* parábolas que satisfacen simultáneamente las siguientes condiciones:

a.) Vértice en $(2,0)$,
b.) contiene al punto $P=(b,8)$ con $b>2$,
c.) la distancia de P a la directriz es 10.

Determine la ecuación canónica de cada una de estas parábolas y el valor de b en cada caso.

1.9 En la definición de la parábola como un lugar geométrico se indica que el foco no está en la directriz. ¿Qué pasa si el foco está en la directriz?

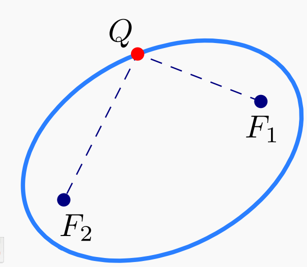
1.4 La Elipse

Ver con CFDPlayer Requiere FreeCDF Player

Definición 1.2 (La elipse como lugar geométrico).

En un plano, una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos Q cuya suma de distancias a dos puntos fijos, F_1 y F_2, (llamados *focos*), es constante (una constante mayor que $d(F_1,F_2)$). Si la suma es la constante $2a$, con $2a > d(F_1,F_2)$, entonces

$$d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=2a$$



Propiedad focal de la elipse. La elipse también tiene una "propiedad focal" análoga a la de la parábola: *La normal a la elipse en cualquier punto Q de la elipse forma ángulos iguales con el segmento F_1Q y el segmento F_2Q*

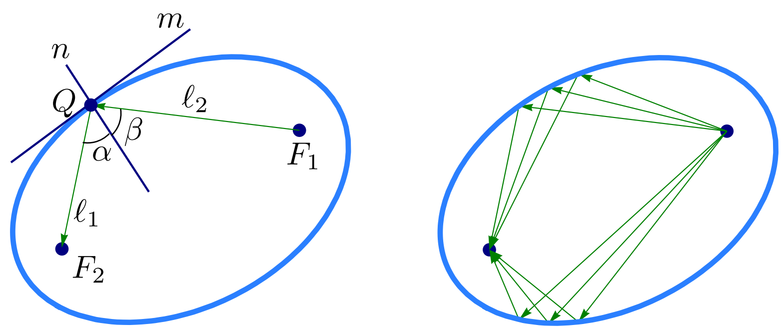
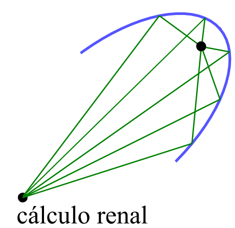
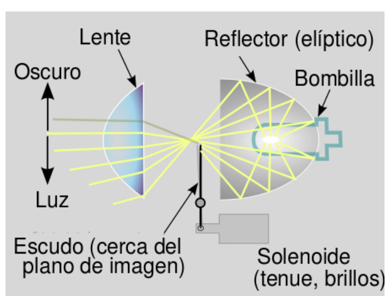


Figura 1.12

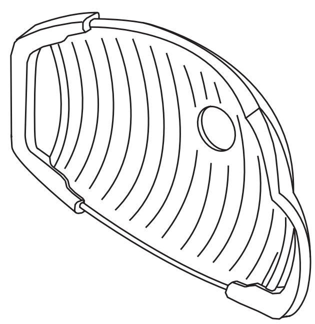
Esta propiedad se usa por ejemplo en medicina para tratar cálculos ("piedras") que se forman en el riñón, vejiga y uréteres; con ondas de choque. La "litotricia extracorpórea" por ondas de choque consiste en la emisión de ondas desde un aparato emisor de ondas. El paciente se acuesta sobre una mesa y el emisor de ondas se acopla en un sistema reflector apropiado con forma elíptica, de tal manera que el emisor esté en un foco y el cálculo renal en el otro. De esta forma las ondas de choque (que casi no sufren pérdidas en agua y tejidos corporales) al reflejarse en la pared elíptica, inciden directamente en el cálculo.



Como en el caso de la parábola, también la propiedad focal de la elipse se usa para el diseño de focos para automóvil y de reflectores para las lámparas que vemos en el consultorio del dentista,

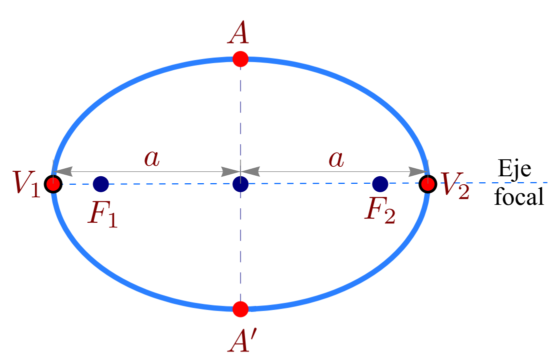


Foco moderno



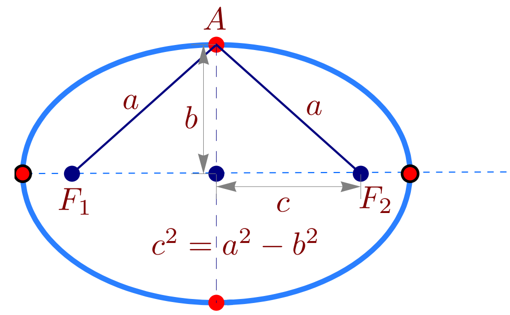
Lámpara de dentista

Ejes, centro y vértices. Supongamos que los focos de la elipse son F_1 y F_2. Además, $d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=2a$ con $2a > d(F_1,F_2)$. La recta que pasa por los focos se llama *eje focal.* Este eje focal corta a la elipse en dos puntos V_1, V_2 llamados *vértices.* El segmento de recta que une los vértices se llama *eje mayor.* El punto en la mitad del eje mayor se llama *centro* de la elipse. El *eje normal* es el eje que pasa por el centro y es perpendicular al eje focal. Este eje normal corta a la elipse en dos puntos A y A'. El segmento que une estos dos puntos se llama *eje menor.*



De acuerdo a la definición de la elipse, la distancia entre los vértices es $2a$ y cada vértice está a una distancia de a unidades del centro.

Si la longitud del semieje menor es b, entonces como el triángulo $\triangle F_1AF_2$ es isósceles, entonces $d(A,F_1)=a$ y se obtiene que la distancia de cada foco al centro es c con $c^2=a^2-b^2$.



Excentricidad. La excentricidad de la elipse se define como $e=\dfrac{c}{a}$ y describe la forma general de la elipse, además $0<e<1$. Para una circunferencia la excentricidad es cero y valores cercanos a 1 corresponden a elipses más alargadas y achatadas (ver sección 8.1).

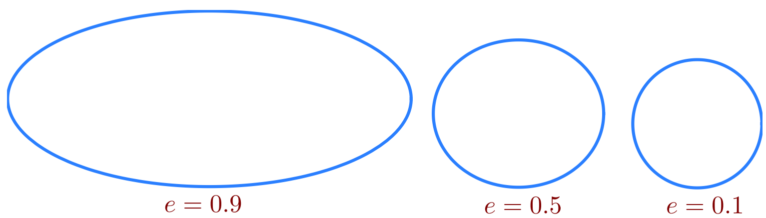
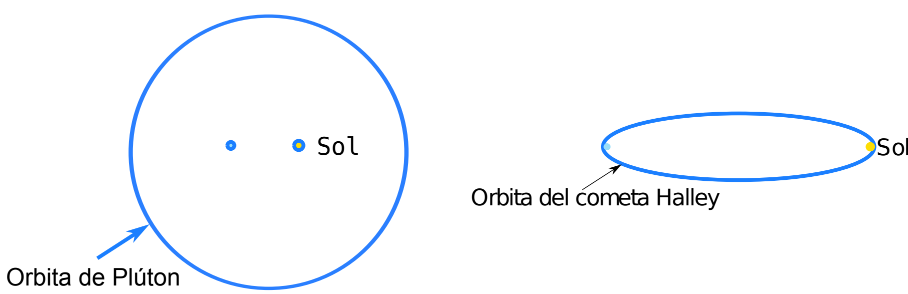
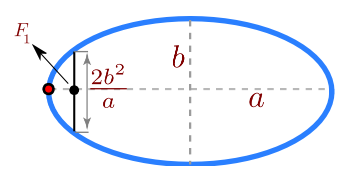


Figura 1.13: Excentricidad de la elipse

La excentricidad de las órbitas planetarias varían mucho en el sistema solar. La excentricidad de la tierra es 0.017 lo que la hace casi circular. La excentricidad de Plutón es 0.25 y es la más alta del sistema solar. La excentricidad del cometa Halley es 0.97 lo que hace que su órbita sea muy alargada, tanto que tarda 76 años en completar su órbita y la mayoría del tiempo permanece invisible para nosotros.



Latus Rectum. Los *latus rectum* en la elipse corresponden a las cuerdas perpendiculares al eje focal y que pasan por cada uno de los focos. Si a es la longitud del semieje mayor y b es la longitud del semieje menor, la longitud de cada cuerda es $\dfrac{2b^2}{a}$



Tratamiento analítico.

En coordenadas rectangulares, una elipse tiene ecuación general (ver 1.1)

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad \text{con} \quad B^2-4AC<0 \quad \text{y} \quad \Delta \neq 0$$

Si $B \neq 0$, el "eje focal" no es paralelo al eje X ni al eje Y. En este caso, la elipse presenta una rotación respecto a estos ejes. La rotación se puede eliminar (respecto a los nuevos ejes X', Y') haciendo el cambio de variable $x = x'\cos\theta - y'\operatorname{sen}\theta$ y $y = x'\operatorname{sen}\theta + y'\cos\theta$.

La versión analítica, en posición estándar, requiere poner el eje mayor paralelo al eje X o paralelo al eje Y.

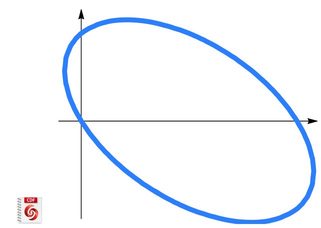


Figura 1.14: Elipse con rotación

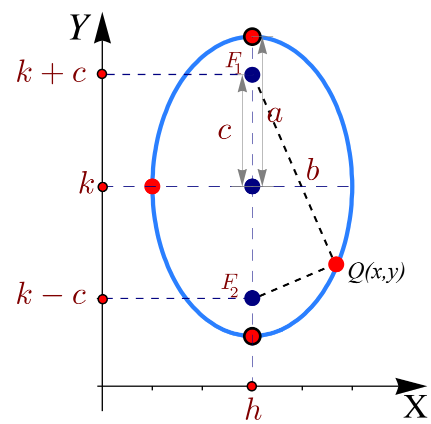
Eje mayor paralelo al eje Y. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1=(h,k+c)$ y $F_2=(h,k-c)$. Los puntos (x,y) de la elipse satisfacen

$$d((x,y),F_1)+d((x,y),F_2)=2a,$$

es decir,

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}+\sqrt{(x-h)^2+(y-k-c)^2}=2a$$

Ahora simplificamos la ecuación,



$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x-h)^2+(y-k-c)^2}\right)^2 \\
a^2-c(y-k) &= a\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}, \\
&\text{elevamos al cuadrando,} \\
a^4+2a^2c(y-k)+c^2(y-k)^2 &= a^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2+2a^2c(y-k)+a^2c^2, \\
&\text{sustituyendo } c^2=a^2-b^2, \\
-b^2(y-k)^2 &= a^2(x-h)^2-a^2b^2 \implies \frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1
\end{aligned}$$

La ecuación simplificada $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$, se le llama *ecuación canónica* o *natural.* Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, la longitud c, focos y vértices.

Eje mayor paralelo al eje X. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1=(h-c,k)$ y $F_2=(h+c,k)$. Los puntos (x,y) de la elipse satisfacen

$$d((x,y),F_1)+d((x,y),F_2)=2a,$$

es decir,

$$\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}=2a.$$

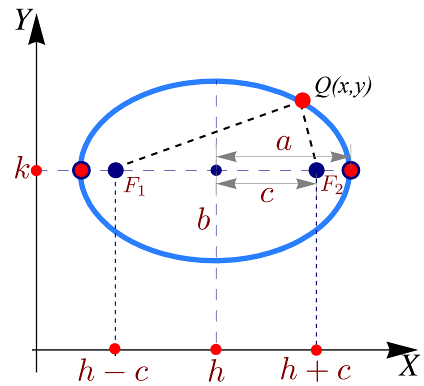
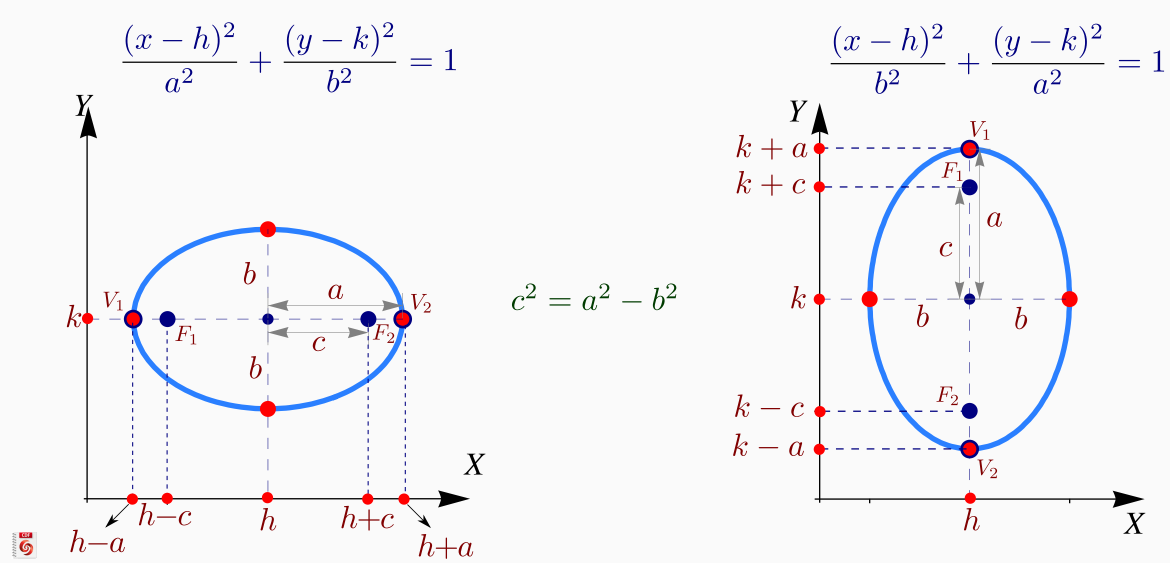


Figura 1.15: Elipse con eje mayor paralelo al eje X

Como antes, la ecuación simplificada queda $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1.$ A esta ecuación se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, la longitud c, focos y vértices.,En resumen,

Ver con CFDPlayer Requiere FreeCDF Player

Elipse sin rotación. "a" es la longitud del semieje mayor



Circunferencia de radio a. Formalmente, la curva que delimita un círculo se llama *circunferencia*. Por abuso del lenguaje se habla de un "círculo de radio a". La circunferencia es un caso especial de elipse en la que los focos son iguales y coinciden con el centro de la circunferencia. En este caso, $a^2=b^2=a^2$. Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia de un círculo con centro en $O=(h,k)$ y radio a, es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \quad \text{o también} \quad (x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

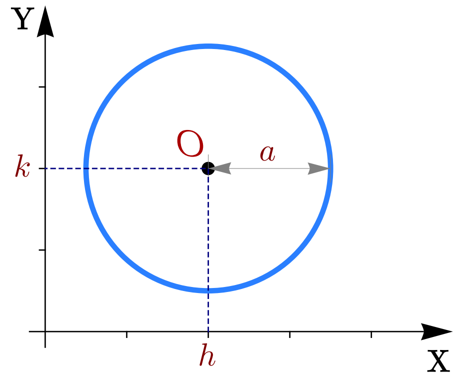


Figura 1.16: Circunferencia de radio a centrada en (h,k)

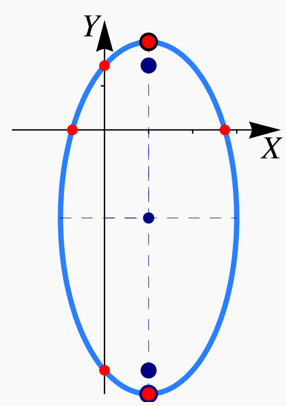
Ecuación general de la elipse en posición estándar. La ecuación general de un elipse con eje mayor paralelo al eje X o al eje Y es $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, con A y C no nulos y del mismo signo. Sin embargo, esta ecuación también podría tener como conjunto solución una cónica degenerada. *Si la ecuación corresponde a una cónica propia*, basta con que $AC>0$ para decir que es una elipse. La manera práctica de decidir si es una elipse es obtener la ecuación canónica completando cuadrados. El estudio de la ecuación general se hace en la sección (1.6).

Ejemplo 1.10

Hallar la ecuación canónica de la elipse $4x^2+y^2-8x+4y-8=0$. Realizar su gráfica identificando los vértices, los focos y el centro.

Solución: Para hallar la ecuación canónica debemos completar el cuadrado de la expresión en ambas variables x e y.

$$\begin{aligned}
4x^2+y^2-8x+4y-8 &= 0\\
4x^2-8x+y^2+4y-8 &= 0\\
4(x-1)^2+(y+2)^2 &= 16\\
\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{16} &= 1
\end{aligned}$$



El centro es $(h,k)=(1,-2)$. La elipse tiene eje mayor paralelo al eje Y. Como $a^2=16$ y $b^2=4$, entonces $a=4$ y $b=2$. Ahora, $c^2=16-4 \implies c=\sqrt{12}$. Los focos son $(1,-2\pm\sqrt{12})$ y los vértices son $(1,-6)$, $(1,2)$. Las intersecciones con los ejes son $y\approx-5.46$, $y\approx 1.46$, $x\approx-0.73$ y $x\approx 2.73$.

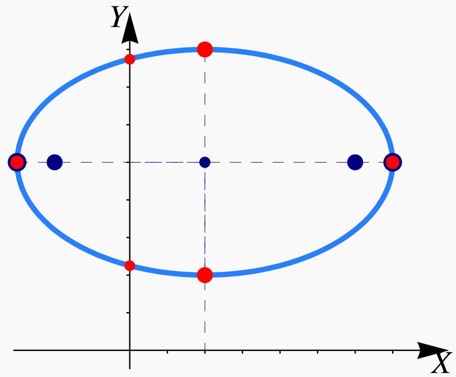
Ejemplo 1.11

Determine la ecuación canónica y las características más importantes de la elipse cuyo eje mayor tiene extremos $(-3,5)$ y $(7,5)$ y cuyo eje menor tiene extremos $(2,2)$ y $(2,8)$.

Solución: El centro es el punto medio entre $(-3,5)$ y $(7,5)$, es decir, $(2,5)$. El semieje mayor mide $a=5$ y el semieje menor mide $b=3$. Como el eje mayor es paralelo al eje X, la ecuación canónica es,

$$\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-5)^2}{9}=1.$$

Como $c^2=25-9$, entonces $c=4$ y los focos son $(2\pm 4,5)$. Los vértices son $(2\pm 5,5)$. Las intersecciones con el eje Y son $y\approx 2.25$ y $y\approx 7.75$.



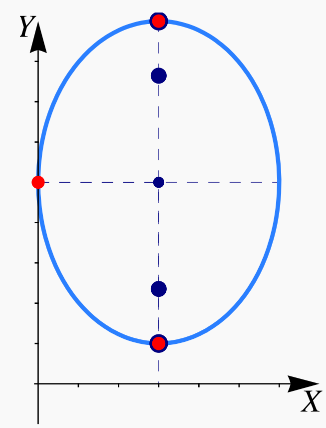
Ejemplo 1.12

Determine la ecuación canónica de la elipse con vértices en $(3,1)$, $(3,9)$ y eje menor de longitud 6. Realizar la gráfica.

Solución: El eje mayor de la elipse es paralelo al eje Y. Como la longitud del eje menor es de 6 unidades, entonces $b=3$. Como los vértices están en $(3,1)$ y $(3,9)$, entonces el centro es $(h,k)=(3,5)$ y por tanto $a=4$. La ecuación canónica es

$$\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$$

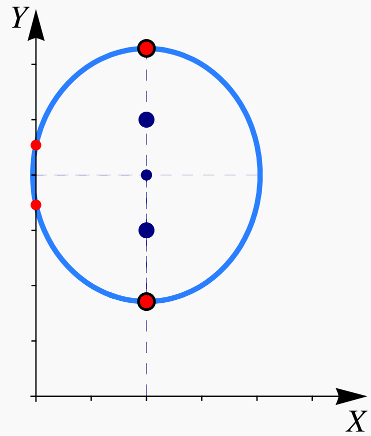
La gráfica de la elipse se muestra en la figura de la derecha. Solo hay una intersección con el eje Y en $y=5$.



Ejemplo 1.13

Determine la ecuación canónica de la elipse con focos en $(2,5)$ y $(2,3)$ y que contiene al punto $(3,6)$. Realizar la gráfica.

Solución: Por la posición de los focos, el eje mayor es paralelo al eje Y. Además también deducimos que el centro es $(h,k) = (2,4)$ y que $c = 1$. Como $c^2 = a^2 - b^2$, tenemos $b^2 = a^2 - 1$. Hasta ahora tenemos que la ecuación canónica es



$$\frac{(x-2)^2}{b^2} + \frac{(y-4)^2}{a^2} = 1$$

Como $b^2 = a^2 - 1$ y como la elipse contiene al punto $(3,6)$, este punto satisface esta ecuación, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{(3-2)^2}{b^2} + \frac{(6-4)^2}{a^2} &= 1, \\ \frac{1}{a^2-1} + \frac{4}{a^2} &= 1 \implies a^2 = 3 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Como $b^2 = a^2 - 1 > 0$, la única solución es $\dfrac{(x-2)^2}{2+\sqrt{5}} + \dfrac{(y-4)^2}{3+\sqrt{5}} = 1$. Las intersecciones con el eje Y son $y \approx 3.46$, $y \approx 4.54$.

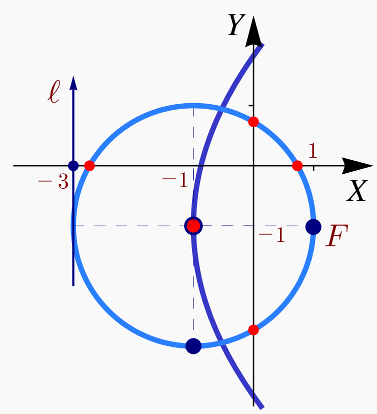
Ejemplo 1.14

Determine la ecuación de la circunferencia de radio 2 con centro en el vértice de la parábola de foco $(1,-1)$ y directriz $x = -3$. Realizar la gráfica.

Solución: Como el vértice de una parábola está a la mitad del camino entre el foco y la directriz entonces $(h,k) = (-1,-1)$. La ecuación de la circunferencia es

$$(x+1)^2 + (y+1)^2 = 4.$$

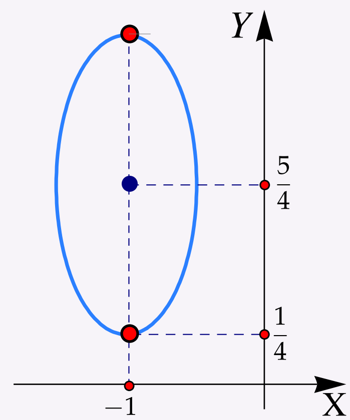
Las intersecciones con el eje X son $x \approx -2.73$ y $x \approx 0.73$. Las intersecciones con el eje Y son $y \approx -2.73$ y $y \approx 0.73$.



2

Ejercicios

1.10 Considere la elipse a la derecha. Si se sabe que el punto $(-1/2, 5/4)$ está en la elipse, determine su ecuación canónica, sus focos y sus vértices.



1.11 En cada caso, obtener la ecuación canónica de la elipse.

a.) $\dfrac{(y-1)^2}{2}+\dfrac{5(x+2)^2}{3}=2$

b.) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y^2}{4}+y+1=0$

c.) $\dfrac{x^2}{4}+x+\dfrac{y^2}{16}+\dfrac{y}{2}+1=0$

d.) $x^2+\dfrac{y^2}{2}-2y+1=0$

1.12 Considere la cónica $4x^2+y^2-16x-6y+21=0$. Realizar su gráfica identificando los vértices, los focos, el centro y la intersección con los ejes.

1.13 Determine la ecuación de la elipse cuyo centro está en el origen, contiene al punto $(-1,3)$ y uno de sus vértices es $(0,5)$. Realizar la gráfica.

1.14 Determinar la ecuación canónica de la elipse si se sabe que es tangente a los ejes en el primer cuadrante y uno de sus vértices es $(8,2)$.

1.15 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(0,0)$, eje mayor horizontal y los puntos $(3,1)$ y $(4,0)$ están en la elipse.

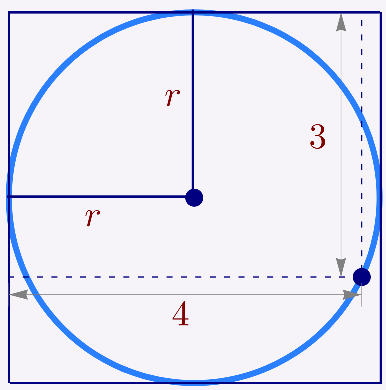
1.16 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse con centro en $(2,1)$, longitud del eje menor $2\,ul$ y eje mayor vertical y de longitud $6\,ul$.

1.17 Hallar la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse que tiene un vértice y un foco en común con la parábola $y^2+4x=32$ y que tiene su otro foco en el origen.

1.18 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la elipse cuya suma de distancias a los puntos $(\pm 3,0)$ es 16.

1.19 Considere la cónica de ecuación $9y^2+16x^2+54y-64x+1=0$. Verifique que se trata de una elipse e indique sus características principales.

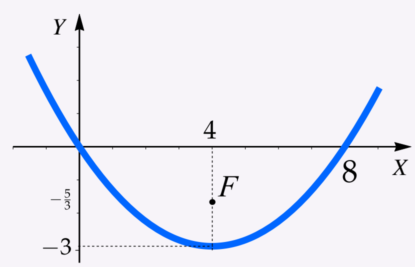
1.20 Se tiene un círculo inscrito en un cuadrado tal y como se muestra en la figura que sigue. Determinar el radio.



1.21 Considere la cónica $\boldsymbol{C}$ de ecuación $x^2-4x+8y+12=0$. Determine la ecuación canónica y las características más importantes, de la elipse que cumple simúltaneamente con las siguientes condiciones,

a.) Su centro coincide en el vértice de la cónica $\boldsymbol{C}$
b.) La distancia entre sus focos es 4 y están en la recta $x=2$
c.) La distancia de un foco al vértice más cercano es 3

1.22 Considere la parábola P cuya gráfica se muestra en la figura. Determine la ecuación canónica de la elipse E cuyo centro es el foco de P y contiene los puntos $(0,0)$ y $(9,-\frac{5}{3})$.



1.23 Determine la ecuación canónica de la elipse que satisface simultáneamente las siguientes condiciones:

a.) El vértice V_1 de la elipse coincide con el foco de la parábola de ecuación $(x-2)^2=-4y+24$.

b.) El vértice V_2 de la elipse coincide con el centro de la hipérbola de ecuación $x^2-4x-y^2+2y=-2$.
c.) La elipse contiene el punto $(1,2)$.

1.24 En la definición de la elipse como un lugar geométrico se indica que $2a > d(F_1,F_2)$. ¿Qué pasa si $2a \leq d(F_1,F_2)$?

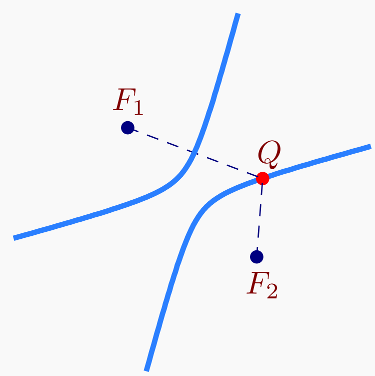
1.5 La Hipérbola.

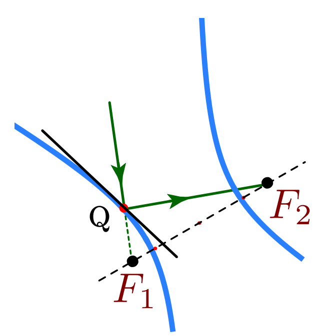
Ver con CFDPlayer Requiere FreeCDF Player

Definición 1.3 (La hipérbola como lugar geométrico).

En un plano, una hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos Q tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, F_1 y F_2, (llamados *focos*), es constante (una constante menor que $d(F_1,F_2)$). Si la diferencia es la constante $2a$, con $2a < d(F_1,F_2)$, entonces

$$|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)| = 2a$$





Propiedad focal de la hipérbola. La hipérbola también tiene una "propiedad focal" análoga a la de la elipse y la parábola: *La normal a la hipérbola en cualquier punto Q de la hipérbola, forma ángulos iguales con el segmento F_1Q y el segmentos F_2,Q*

La propiedad focal de la hipérbola tiene varias aplicaciones. Por ejemplo, en la construcción de telescopios. Un telescopio común tipo Cassegrain consiste de un espejo primario parabólico y de un espejo secundario hiperbólico. En la figura (1.17) la luz se refleja en un espejo primario parabólico y se desplaza hacia el foco F. Antes de llegar a este foco, hay un espejo hiperbólico en el camino, que comparte el foco F con la parábola. Este espejo refleja la luz al otro foco de la hipérbola, donde se encuentra el observado.

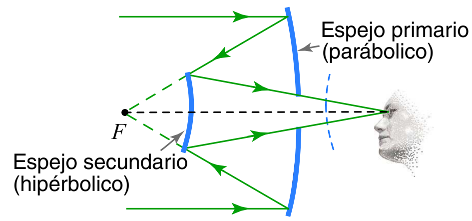
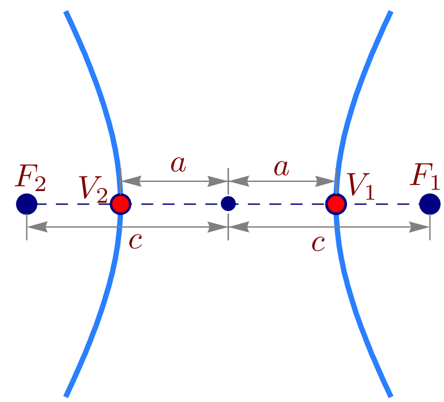


Figura 1.17: Telescopio Cassegrain.

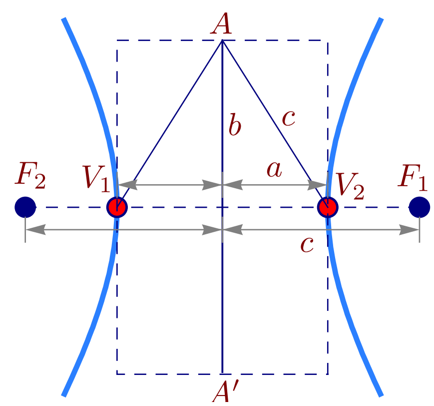
Ejes, centro y vértices. Supongamos que los focos de la hipérbola son F_1 y F_2. Además, $|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)|=2a$ con $2a<d(F_1,F_2)$. La recta que pasa por los focos se llama *eje focal.* Este eje focal corta a la hipérbola en dos puntos $V_1,\ V_2$ llamados *vértices.* El segmento de recta que une los vértices se llama *eje transverso.* El punto medio de este eje se llama *centro* de la hipérbola.



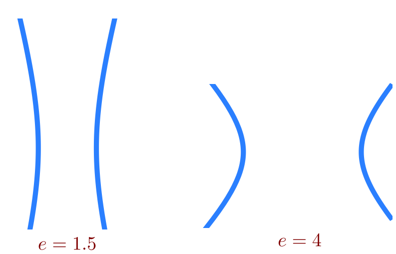
De la definición de la hipérbola se puede deducir que la distancia entre los vértices es $2a$ y cada vértice está a una distancia de a unidades del centro.

Si la distancia del centro a cada uno de los focos es c, como $c>a$, podemos formar el triángulo isósceles $\triangle V_1V_2A$ que se muestra en la figura de la derecha. La altura de este triángulo la denotamos con b. El *eje conjugado* es el segmento AA' (en la figura de la derecha) y mide $2b$. Este segmento pasa por el centro y es perpendicular al eje focal. Claramente, este el semieje conjugado tiene longitud b y, por pitágoras,

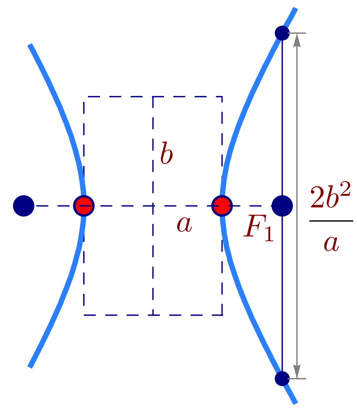
$$c^2=a^2+b^2.$$



Excentricidad. La excentricidad de la hipérbola es $e=\dfrac{c}{a}$. En este caso, $e>1$. Si $e\approx 1$, la ramas de la hipérbola son muy abiertas mientras que si e no está cerca de 1, las ramas abren poco y la hipérbola se muestra "achatada" (ver sección 8.1).



Latus Rectum. Los *latus rectum* en la hipérbola corresponden a las cuerdas perpendiculares al eje focal y que pasan por cada uno de los focos. Al igual que en la elipse, cada lado recto mide $\dfrac{2b^2}{a}$.



Tratamiento analítico.

En coordenadas rectangulares, una hipérbola tiene ecuación general (ver 1.1)

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad \text{con} \quad B^2-4AC>0 \quad \text{y} \quad \Delta\neq 0$$

Si $B\neq 0$, el "eje focal" no es paralelo al eje X ni al eje Y. En este caso, la hipérbola presenta una rotación respecto a estos ejes. La rotación se puede eliminar (respecto a los nuevos ejes X', Y') haciendo el cambio de variable $x=x'\cos\theta-y'\operatorname{sen}\theta$ y $y=x'\operatorname{sen}\theta+y'\cos\theta$.

La versión analítica, en posición estándar, requiere poner el eje focal paralelo al eje X o paralelo al eje Y.

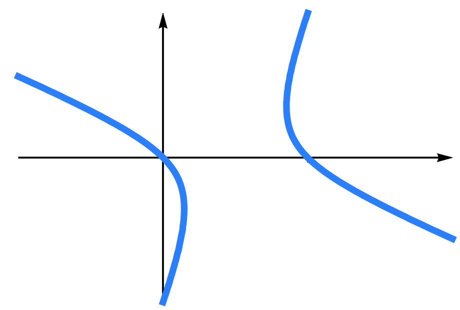


Figura 1.18: hipérbola con rotación

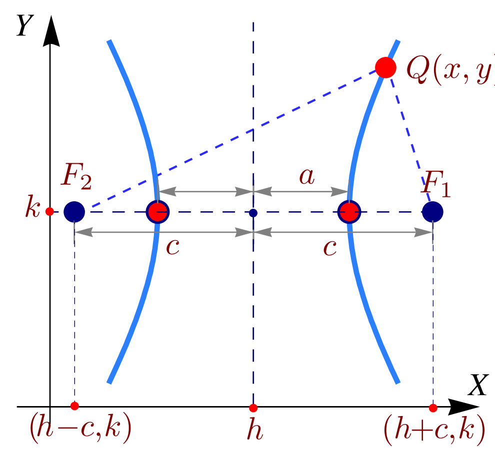
Eje mayor paralelo al eje X. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1=(h+c,k)$ y $F_2=(h-c,k)$. Los puntos $Q=(x,y)$ de la hipérbola satisfacen

$$|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)|=2a,$$

es decir,

$$\left|\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}-\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}\right|=2a$$

Para simplificar un poco el cálculo, supongamos que $d(Q,F_1)-d(Q,F_2)>0$ (el otro caso es es totalmente similar), entonces



$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x-h+c)^2+(y-k)^2}\right)^2 &= \left(2a-\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}\right)^2, \\
c(x-h)-a^2 &= a\sqrt{(x-h-c)^2+(y-k)^2}, \\
\text{elevamos al cuadrado,} & \\
(c^2-a^2)(x-h)^2-a^2(y-k)^2 &= a^2(c^2-a^2), \\
\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{c^2-a^2} &= 1.
\end{aligned}$$

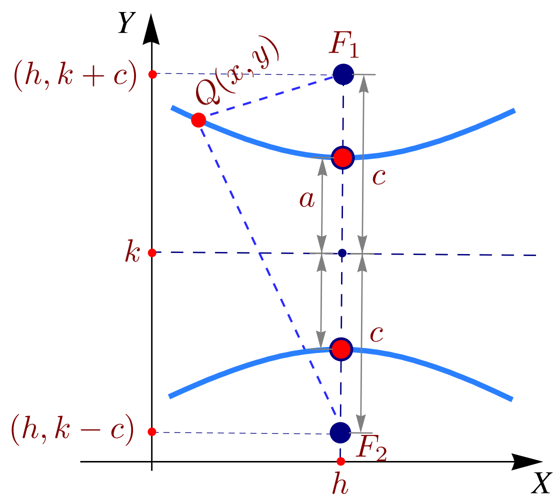
Poniendo $b^2=c^2-a^2$, la ecuación simplificada sería $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$; esta ecuación se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, c, focos y vértices.

Eje mayor paralelo al eje Y. En este caso, si el centro es (h,k), entonces $F_1=(h,k-c)$ y $F_2=(h,k+c)$. Los puntos $Q=(x,y)$ de la hipérbola satisfacen

$$|d(Q,F_1)-d(Q,F_2)|=2a,$$

es decir,

$$\left|\sqrt{(x-h)^2+(y-k+c)^2}-\sqrt{(x-h)^2+(y-k-c)^2}\right|=2a.$$



Como antes, la ecuación simplificada queda $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$. A esta ecuación se le llama *ecuación canónica* o *natural*. Contiene toda la información para determinar la longitud de los semiejes, c, focos y vértices.

Asíntotas de la hipérbola. Consideremos las ecuaciones canónicas de la hipérbola. Despejando y en cada caso, se obtiene

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \implies y=k\pm\frac{a}{b}\sqrt{(x-h)^2+b^2},$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \implies y=k\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2-a^2}.$$

Si x es suficientemente grande, se pueden despreciar las constantes que suman o restan, es decir,

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \implies y \approx k \pm \frac{a}{b}(x-h),$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \implies y \approx k \pm \frac{b}{a}(x-h).$$

Esto sugiere que las rectas $y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$, $y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$ son asíntotas oblicuas de la hipérbola correspondiente. En efecto, un cálculo rápido nos permite establecer que

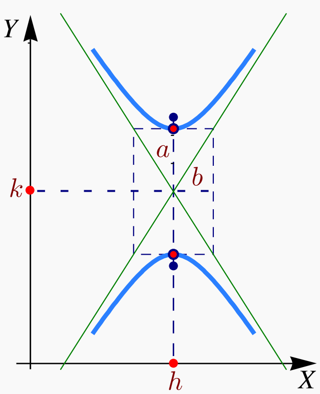
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \implies \lim_{x\to\pm\infty} y - \left(k \pm \frac{a}{b}(x-h)\right) = 0,$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \implies \lim_{x\to\pm\infty} y - \left(k \pm \frac{b}{a}(x-h)\right) = 0.$$

Teorema 1.2 (Asíntotas de la hipérbola).

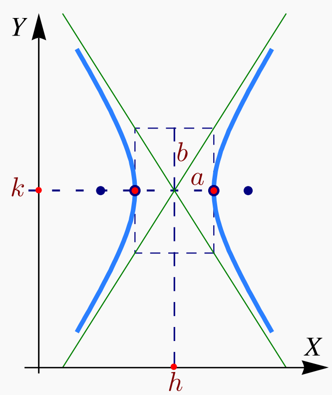
La hipérbola de ecuación $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ tiene asíntotas

$$y = k \pm \frac{a}{b}(x-h)$$

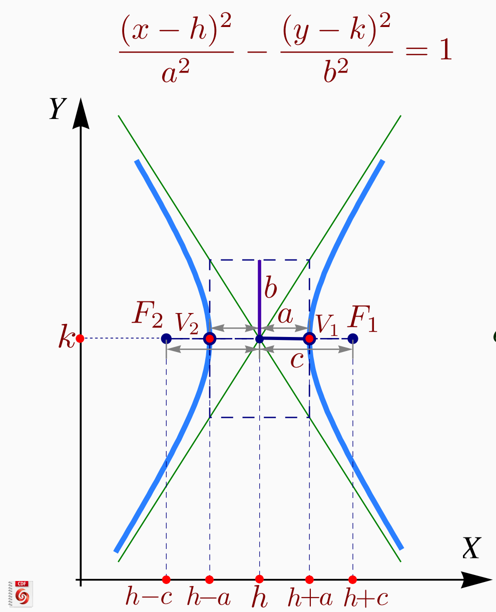


La hipérbola de ecuación $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ tiene asíntotas

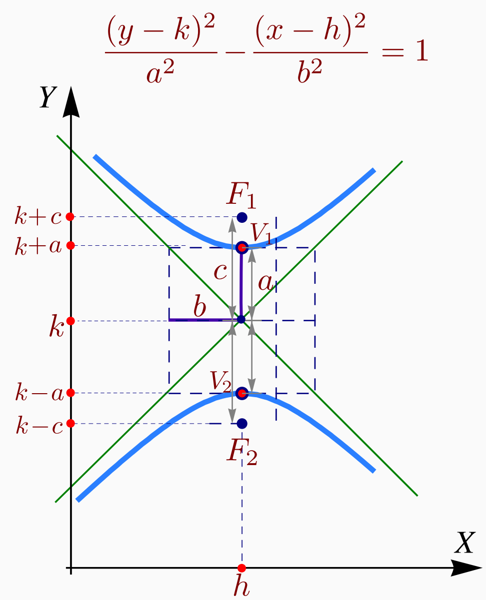
$$y = k \pm \frac{b}{a}(x-h)$$



Hipérbolas.



$$c^2 = a^2 + b^2$$



Ecuación general de la hipérbola en posición estándar. La ecuación general de una hipérbola con eje focal paralelo al eje X o al eje Y es $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, con A y C no nulos y de diferente signo.Sin embargo, esta ecuación puede también corresponder a una cónica degenerada. *Si la ecuación corresponde a una cónica propia*, basta con que $AC < 0$ para decir que es una hipérbola. La manera práctica de decidir si es una hipérbola es obtener la ecuación canónica completando cuadrados. El estudio de la ecuación general se hace en la sección (1.6).

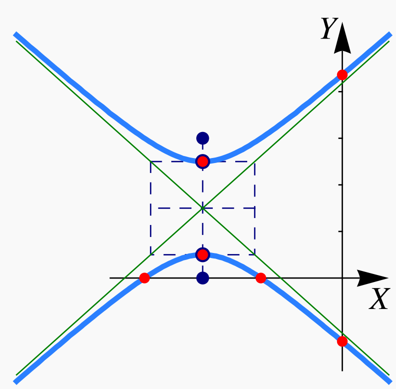
Ejemplo 1.15

Determine la ecuación canónica y las características de la cónica que contiene a los puntos $P = (x,y)$ para los cuales $|d(P,A) - d(P,B)| = 2$ donde $A = (-3,0)$ y $B = (-3,3)$. Realizar la gráfica.

Solución: Se trata de un hipérbola con focos A y B y por tanto $c = 1.5$ y el centro es $(h,k) = (-3, 3/2)$. Como $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$ entonces $a = 1$. y entonces $b^2 = 5/4$. Luego ecuación canónica es

$$\frac{(y-\frac{3}{2})^2}{1} - \frac{(x+3)^2}{5/4} = 1$$

Las asíntotas son $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5/4}}(x+3) + 3/2$. La intersección con los ejes son $y \approx -1.363$, $y \approx 4.363$, $x \approx -4.25$ y $x \approx -1.75$,



Ejemplo 1.16

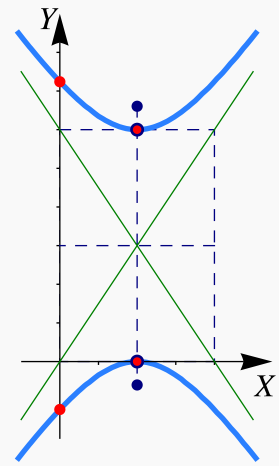
Identifique y trace la gráfica de la cónica de ecuación $4y^2-9x^2+36x-24y-36=0$, indicando centro, vértices, focos, asíntotas e intersección con los ejes.

Solución: Completando cuadrados obtenemos

$$4(y-3)^2-9(x-2)^2=36$$

por lo que la ecuación canónica es

$$\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{4}=1$$



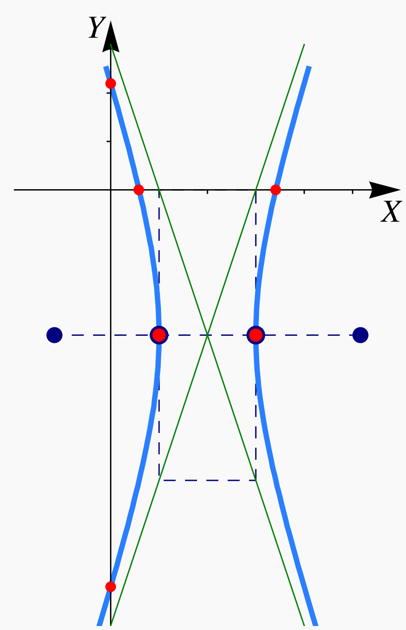
Se trata de un hipérbola con eje transversal vertical y centro en $(2,3)$. Como $a=3$ y $b=2$ entonces $c=\sqrt{13}$. Los vértices son $v_1=(2,0)$ y $v_2=(2,6)$ y los focos son $F_1=(2,3-\sqrt{13})$ y $F_2=(2,3+\sqrt{13})$. Las intersecciones con los ejes: $y\approx-1.24$, $y\approx 7.24$ y $x=2$.

Ejemplo 1.17

Hallar la ecuación canónica, los focos, los vértices y las asíntotas de la hipérbola cuya ecuación es $9x^2-y^2-36x-6y+18=0$. Realizar la gráfica.

Solución: Completando el cuadrado en ambas variables,

$$\begin{aligned}
9\left(x^2-4x+4-4\right)-\left(y^2+6y+9-9\right)+18 &= 0\\
9(x-2)^2-(y+3)^2 &= 9\\
\frac{(x-2)^2}{1}-\frac{(y+3)^2}{9} &= 1
\end{aligned}$$

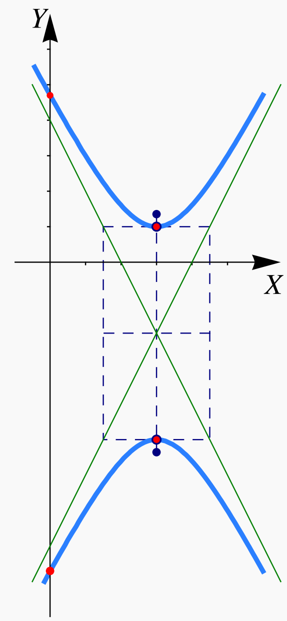


Por tanto, el centro está en $(2,-3)$, $a=1$, $b=3$ y $c^2=a^2+b^2 \implies c^2=10 \implies c=\sqrt{10}$

Los vértices están en $(1,-3)$, $(3,-3)$, los focos en $(2\pm\sqrt{10},-3)$ y las asíntotas son $y=\pm 3(x-2)-3$. Las intersecciones con los ejes son $y\approx-8.19$, $y\approx 2.196$, $x\approx 0.58$ y $x\approx 3.41$.

Ejemplo 1.18

Hallar la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(3,-5)$ y $(3,1)$ y asíntotas $y=2x-8$ y $y=-2x+4$. Además calcule los focos y realice la gráfica.



Solución: Como los vértices son vértices en $(3,-5)$ y $(3,1)$, el centro es $(3,\ -2)$. Además, la hipérbola tiene eje transversal vertical y $a=3$. Por otro lado, por el teorema de las asíntotas,

$$m_1 = 2 = \frac{a}{b} \implies b = \frac{a}{2} \implies b = \frac{3}{2}$$

Por tanto, la ecuación canónica es

$$\frac{(y+2)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{\frac{9}{4}} = 1$$

El valor de c está dado por

$$c^2 = a^2 + b^2 \implies c^2 = \frac{45}{4} \implies c = \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

Los focos están en $(3,-2-\frac{3\sqrt{5}}{2})$ y $(3,-2+\frac{3\sqrt{5}}{2})$. Las intersecciones con el eje Y son $y\approx -8.70,\ y\approx 4.70$.

3 Ejercicios

1.25 Determine la ecuación canónica y los demás elementos de la hipérbola $36x^2-64y^2=2304$

1.26 Determine la ecuación canónica de la hipérbola con focos en $(1,4)$ y $(1,-4)$ y con $a=3$.

1.27 Determine la ecuación canónica de la hipérbola con centro en $(-4,1)$ y un vértice en $(2,1)$ y semieje conjugado de longitud 4.

1.28 Determine la ecuación canónica de la hipérbola de ecuación $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$.

1.29 Determine la ecuación canónica de la hipérbola con vértices en $(0,2)$ y $(6,2)$ y asíntotas $y=2/3x \wedge y=4-2/3x$.

1.30 Determine la ecuación canónica de la hipérbola que contiene al punto $(4,6)$ y cuyas asíntotas son $y=\pm\sqrt{3}x$.

1.31 Determine la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y que contiene los puntos $(3,1)$ y $(9,5)$.

1.32 Determine la ecuación canónica de de la hipérbola que satisface simultáneamente las siguientes condiciones,

a.) El centro de la hipérbola coincide con el vértice de la parábola de ecuación $y^2-2y+8x+17=0$.

b.) Uno de sus focos se ubica en $(3,1)$

c.) Uno de sus vértices se ubica en $(1,1)$.

Realice la gráfica e indique sus principales características.

1.33 Determine el tipo de cónica representada por la ecuación $\dfrac{x^2}{k}+\dfrac{y^2}{k-16}=1$ en los casos

a.) Si $k>16$

b.) Si $0<k<16$

c.) Si $k<0$

1.34 Realice el dibujo de la sección cónica de ecuación $9(x-1)^2-(y+1)^2=9$. Indique además todas sus características.

1.35 En la definición de la hipérbola como un lugar geométrico se indica que $2a<d(F_1,F_2)$. ¿Qué pasa si $2a\geq d(F_1,F_2)$?

1.6 (*) Clasificación de cónicas y la ecuación de segundo grado

Una cónica tiene ecuación general

$$A\,x^2+B\,xy+C\,y^2+D\,x+E\,y+F=0. \tag{1.2}$$

Sin embargo, hay casos en los que esta ecuación no tiene solución (no hay lugar geométrico) o el conjunto solución es una cónica degenerada (un punto, una o dos rectas).

En el caso de que tengamos una cónica no degenerada con ecuación 1.2, clasificar la cónica obteniendo la ecuación canónica: Si $B=0$, solo habría que completar cuadrados. Si $B\neq 0$, habría que aplicar una rotación de ejes y y luego completar cuadrados, con estos cálculos obtenemos la ecuación canónica de la cónica (en un nuevo sistema $X'Y'$) y sus características más importantes (centro, vértice(s), etc.).

Clasificación usando la representación matricial. Las cónicas tienen una representación matricial

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \implies \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} D & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}+F=0$$

De esta manera se puede usar la teoría de formas cuadráticas para obtener los siguientes resultados:

Teorema 1.3

Consideremos la cónica de ecuación $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Sea $\Delta = 4\begin{vmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{vmatrix} = 4ACF-AE^2-B^2F+BDE-CD^2$, entonces:

a.) Si $B^2-4AC=0$ y $\Delta \neq 0$, tenemos una parábola.

b.) Si $B^2-4AC<0$ y $\Delta \neq 0$, tenemos una elipse.

c.) Si $B^2-4AC>0$ y $\Delta \neq 0$, tenemos una hipérbola.

d.) Si $B^2-4AC=0$ y $\Delta=0$, tenemos dos líneas paralelas o un conjunto vacío. Las líneas son distintas si $D^2+E^2>4(A+C)F$, pero son una sola (coinciden) si $D^2+E^2=4(A+C)F$ (por ejemplo, en el caso de que el foco está sobre la directriz, en la definición de más arriba), y son distintas en el plano complejo si $D^2+E^2<4(A+C)F$.

e.) Si $B^2-4AC<0$ y $\Delta=0$, tenemos un punto (la elipse colapsa en un punto).

f.) Si $B^2-4AC>0$ y $\Delta=0$, tenemos dos líneas que se intersecan (solo quedan las "asíntotas").

Invariantes. Usando la teoría de *invariantes* (ver Apéndice A.) podemos identificar la cónica, sin atender a sus elementos, directamente aplicando el siguiente teorema,

Teorema 1.4

Consideremos la ecuación general $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. Entonces,

a.) si $B^2-4AC=0$ y $4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2 \neq 0$, tenemos una parábola,

b.) si $B^2-4AC<0$ y $(A+C)(4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2)<0$, tenemos una elipse,

c.) si $B^2-4AC>0$ y $4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FB^2 \neq 0$, tenemos una hipérbola.

Si definitivamente se sabe que la ecuación general corresponde a una cónica propia, entonces

a) si $B^2 - 4AC = 0$, tenemos una parábola,

b) si $B^2 - 4AC < 0$, tenemos una elipse,

c) si $B^2 - 4AC > 0$, tenemos una hipérbola.

Una exposición más detallada se puede ver en el apéndice 8.1.

Ejemplo 1.19

Clasificar la cónica de ecuación $2x^2 - 5y^2 - xy + 3y + 1 = 0$.

Solución: . En este caso $A = 2$, $B = -1$, $C = -5$, $D = 0$, $E = 3$ y $F = 1$. Ahora calculamos,

$B^2 - 4AC = 41 > 0$ y $4ACF + BDE - AE^2 - CD^2 - FB^2 = -59 \neq 0$, por tanto se trata de una hipérbola.