

## EJERCICIOS DE APLICACIÓN - DISEÑO DE PILAS

Diseñar el pilar central de un puente ubicado en una zona no sísmica, constituido por dos columnas circulares y una viga travesaño rectangular de longitud 7.20m. Utilizar  $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$  y  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . Se precisan los esfuerzos críticos:

Viga

$$Mu_{b\_neg} := 155 \text{ tonnef} \cdot \text{m}$$

Estado de Resistencia I

$$Mu_{b\_pos} := 145 \text{ tonnef} \cdot \text{m}$$

Estado de Resistencia I

$$Vu_b := 220 \text{ tonnef}$$

Estado de Resistencia I

Columnas

$$Pu_c := -390 \text{ tonnef}$$

Momentos

Plano del pórtico

Sentido transversal

$$Mu\_1 := 100 \text{ tonnef} \cdot \text{m}$$

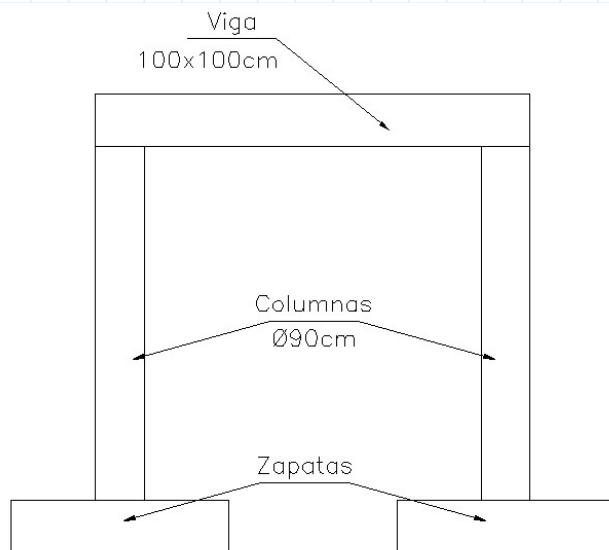
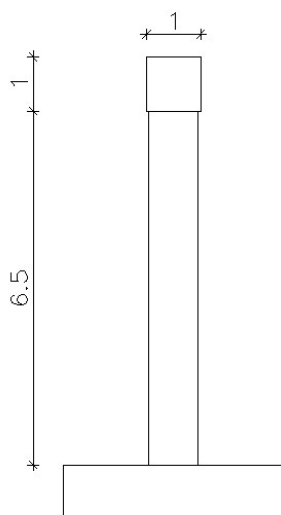
$$Mu\_2 := 40 \text{ tonnef} \cdot \text{m}$$

Carga Total  
mayorada

$$Mdu\_1 := 15 \text{ tonnef} \cdot \text{m}$$

$$Mdu\_2 := 12 \text{ tonnef} \cdot \text{m}$$

Carga Permanente  
mayorada

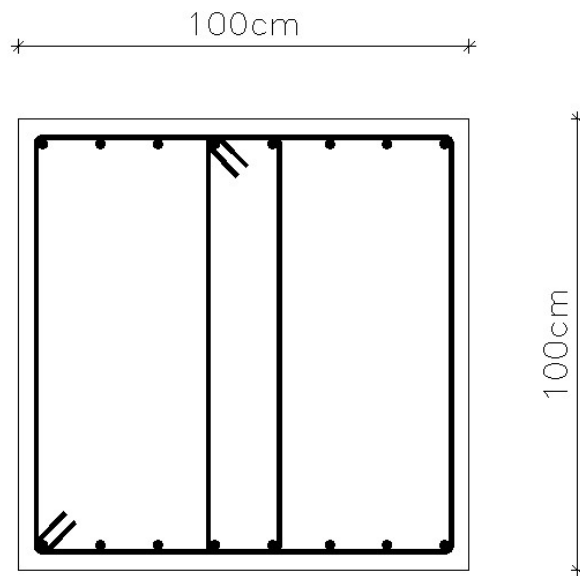


## 1) Diseño de la viga

### 1.1) Acero requerido a flexión

Para los momentos de flexión aplicados  $M_u = -155 \text{ T-m}$  y  $M_u = +145 \text{ T-m}$ , se propone la sección mostrada a continuación

- 8Ø28mm (Arriba)
- 8Ø28mm (Abajo)
- Estribos Ø18mm@20cm



$$f'_c := 280 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$f_y := 4200 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$b_{viga} := 100 \text{ cm}$$

$$h_{viga} := 100 \text{ cm}$$

$$rec := 5 \text{ cm}$$

$$\phi_{long\_b} := 28 \text{ mm}$$

$$\phi_{est\_b} := 18 \text{ mm}$$

$$\phi_f := 0.90$$

$$z := rec + \frac{\phi_{long\_b}}{2} + \phi_{est\_b} = 8.2 \text{ cm}$$

$$d_{viga} := h_{viga} - z = 91.8 \text{ cm}$$

$$A_{s_{long\_b}} := \frac{8 \cdot \pi \cdot \phi_{long\_b}^2}{4} = 49.26 \text{ cm}^2$$

$$a_{viga} := \frac{A_{s_{long\_b}} \cdot f_y}{0.85 \cdot f'_c \cdot b_{viga}} = 8.693 \text{ cm}$$

$$M_{u_b} := A_{s_{long\_b}} \cdot \phi_f \cdot f_y \cdot \left( d_{viga} - \frac{a_{viga}}{2} \right) = 162.841 \text{ tonnef} \cdot \text{m}$$

if  $(M_{u_b} \geq M_{u_{b\_neg}}, \text{"OK"}, \text{"Cambiar diámetro long."}) = \text{"OK"}$

if  $(M_{u_b} \geq M_{u_{b\_pos}}, \text{"OK"}, \text{"Cambiar diámetro long."}) = \text{"OK"}$

$$\beta_1 := 0.85 \quad (f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2)$$

$$c_{viga} := \frac{a_{viga}}{\beta_1} = 10.227 \text{ cm}$$

$$\phi_1 := 0.65 + 0.15 \cdot \left( \frac{d_{viga}}{c_{viga}} - 1 \right) = 1.846$$

$$\phi := \min(\phi_1, 0.90) = 0.9$$

1.2) Chequeo de Límites de Armadura de refuerzo negativo

1.2.1) As máximo: No aplica

1.2.2) As mínimo: La cantidad de acero proporcionado debe ser capaz de resistir el menor valor de  $M_{cr}$  y  $1.33M_u$ :

Caso 1

$$M_{cr} = 1.1 \cdot (f_r \cdot S)$$

$$f_r := 2.01 \cdot \sqrt{\frac{f'_c}{\text{kgf/cm}^2}} \cdot \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} = 33.634 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$S := \frac{b_{viga} \cdot h_{viga}^2}{6} = 166666.667 \text{ cm}^3$$

$$M_{cr} := 1.1 \cdot (f_r \cdot S) = 61.662 \text{ tonnef} \cdot \text{m}$$

Caso 2

$$M_{min2} := 1.33 \cdot M_{u_{b\_neg}} = 206.15 \text{ tonnef} \cdot \text{m}$$

$$M_{min} := \min(M_{cr}, M_{min2}) = 61.662 \text{ tonnef} \cdot \text{m}$$

$$\text{if } (M_{u_b} \geq M_{min}, \text{ "OK", "Revisar acero"}) = \text{ "OK"}$$

### 1.3) Acero de Contracción y Temperatura

$$As_{temp} = \frac{0.18 \cdot b_{viga} \cdot h_{viga}}{2 \cdot (b_{viga} + h_{viga})} \left( \frac{cm^2}{m} \right)$$

$$As_{temp} := 4.50 \frac{cm^2}{m} \quad \text{En cada cara}$$

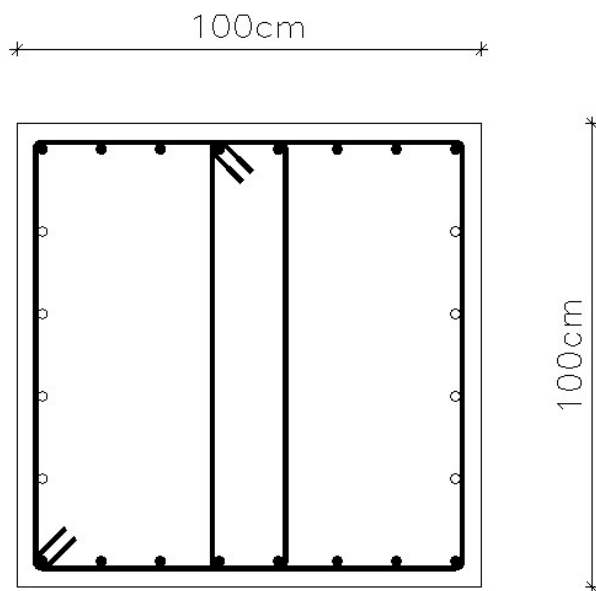
$$\phi_{temp\_b} := 14 \text{ mm}$$

Considerar 4  $\phi$  14mm en cada cara

$$As_{temp\_b} := \frac{4 \cdot \pi \cdot \phi_{temp\_b}^2}{4} = 6.158 \text{ cm}^2$$

$$s_{max\_temp} := 3 \cdot h_{viga} = 300 \text{ cm} \quad s_{max\_AASHTO} := 12 \text{ in} = 30.48 \text{ cm} \quad (\text{Art. 5.10.6})$$

- 8 $\phi$ 28mm (Arriba)
- 8 $\phi$ 28mm (Abajo)
- 4 $\phi$ 14mm (Cada cara)
- Estribos  $\phi$ 18mm@20cm



#### 1.4) Diseño por corte

$$Vu_b = 220 \text{ tonnef} \quad \text{Corte Actuante}$$

$$Vr = \phi \cdot Vn \quad \text{Corte Resistente (5.7.2.1-1)}$$

$$\phi_{\text{corte}} := 0.90 \quad (5.5.4.2)$$

Vn debe ser el menor de las siguientes expresiones:

$$Vn1 = Vc + Vs + Vp \quad (5.7.3.3-1)$$

$$Vn2 = 0.25 \cdot f'c \cdot b_v \cdot d_v + Vp \quad (5.7.3.3-2)$$

a) Cortante nominal resistente del hormigón con  $\beta=2$  (Art. 5.7.3.4.1, proceso simplificado, a condición de usar la cantidad de refuerzo transversal mínimo señalada en (5.7.2.5-1):

$$Vc = 0.53 \cdot \sqrt{f'c} \cdot b_v \cdot d_v$$

$$b_v := b_{\text{viga}} = 100 \text{ cm} \quad d_v := d_{\text{viga}} - \frac{a_{\text{viga}}}{2} = 87.454 \text{ cm} \quad (\text{Peralte efectivo de corte})$$

$$Vc := 0.53 \cdot \sqrt{f'c \cdot \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}} \cdot b_{\text{viga}} \cdot d_v = 77.559 \text{ tonnef}$$

b) Cortante nominal resistente del acero con  $\theta = 45^\circ$  (Art. 5.7.3.4.1), proceso simplificado, a condición de usar la cantidad de refuerzo transversal mínimo señalada en (5.7.2.5) y ángulo de inclinación del estribo  $\alpha = 90^\circ$ :

$$Vs = \frac{A_v \cdot fy \cdot d_v}{s}$$

$$\phi_{\text{est}_b} = 18 \text{ mm}$$

$$A_{\text{estribo}} := \left( \frac{4 \cdot \pi \cdot \phi_{\text{est}_b}^2}{4} \right) = 10.179 \text{ cm}^2$$

$$s_{\text{estribo}} := 20 \text{ cm} \quad \text{Espaciamiento entre estribos (asumido)}$$

$$Vs := \frac{A_{\text{estribo}} \cdot fy \cdot d_v}{s_{\text{estribo}}} = 186.935 \text{ tonnef}$$

c) Componente nominal de la fuerza de pretensado

$$Vp := 0 \text{ tonnef}$$

$$Vn := \min(Vc + Vs + Vp, 0.25 \cdot f'c \cdot b_v \cdot d_v + Vp) = 264.494 \text{ tonnef}$$

$$Vr := \phi_{corte} \cdot Vn = 238.045 \text{ tonnef}$$

if  $(Vr \geq Vu_b, \text{"OK"}, \text{"Revisar resistencia"}) = \text{"OK"}$

Refuerzo transversal mínimo

#### 5.7.2.5—Minimum Transverse Reinforcement

Where transverse reinforcement is required as specified in either Article 5.7.2.3 or Article 5.12.5.3.8c, and nonprestressed reinforcement is used to satisfy that requirement, the area of steel shall satisfy:

$$A_v \geq 0.0316 \lambda \sqrt{f'_c} \frac{b_v s}{f_y} \quad (5.7.2.5-1)$$

$$A_v \geq 0.27 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_v \cdot s_{estribo}}{f_y} \quad \lambda := 1 \quad \text{Hormigón de peso normal}$$

$$A_{v\_min} := 0.27 \cdot \lambda \cdot \sqrt{f'_c} \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \cdot \frac{b_v \cdot s_{estribo}}{f_y} = 2.151 \text{ cm}^2$$

if  $(A_{estribo} \geq A_{v\_min}, \text{"OK"}, \text{"Cambiar diámetro"}) = \text{"OK"}$

Espaciamiento máximo del refuerzo transversal

#### 5.7.2.8—Shear Stress on Concrete

The shear stress on the concrete shall be determined as:

$$v_u = \frac{|V_u - \phi V_f|}{\phi b_v d_v} \quad (5.7.2.8-1)$$

$$v_u := \frac{Vu_b - \phi_{corte} \cdot Vp}{\phi_{corte} \cdot b_v \cdot d_v} = 27.951 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}$$

#### 5.7.2.6—Maximum Spacing of Transverse Reinforcement

The spacing of the transverse reinforcement shall not exceed the maximum permitted spacing,  $s_{max}$ , determined as:

- If  $v_u < 0.125 f'_c$ , then:

$$s_{max} = 0.8d_v \leq 24.0 \text{ in.} \quad (5.7.2.6-1)$$

- If  $v_u \geq 0.125 f'_c$ , then:

$$s_{max} = 0.4d_v \leq 12.0 \text{ in.} \quad (5.7.2.6-2)$$

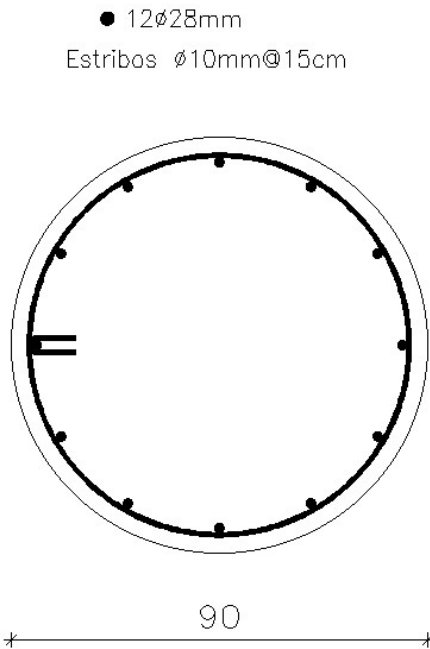
if  $(v_u < 0.125 \cdot f'_c, "0.80d_v", "0.40d_v") = "0.80d_v"$

$s_{max} := \text{if } (0.80 \cdot d_v \leq 24 \text{ in}, 0.80 \cdot d_v, 24 \text{ in}) = 60.96 \text{ cm}$

if  $(s_{estribo} \leq s_{max}, "OK", "Cambiar espaciamiento") = "OK"$

## 2) Diseño de Columna

### Columna Propuesta



$$d_{col} := 90 \text{ cm}$$

$$\phi_{long\_c} := 28 \text{ mm}$$

$$\phi_{est\_c} := 10 \text{ mm}$$

$$rec = 5 \text{ cm}$$

$$L_{col} := 6.50 \text{ m}$$

$$A_g := \frac{\pi \cdot d_{col}^2}{4} = 6361.725 \text{ cm}^2$$

$$A_{s_{col}} := \frac{12 \cdot \pi \cdot \phi_{long\_c}^2}{4} = 73.89 \text{ cm}^2$$

#### 2.1) Refuerzo máximo en miembros a compresión

$$\frac{A_s}{A_g} + \frac{A_{ps} \cdot f_{pu}}{A_g \cdot f_y} \leq 0.08$$

$$\frac{A_{s_{col}}}{A_g} = 0.012$$

$$\text{if} \left( \frac{A_{s_{col}}}{A_g} \leq 0.08, \text{"OK"}, \text{"Revisar Asm\u00e1x"} \right) = \text{"OK"}$$

## 2.2) Refuerzo mínimo en miembros a compresión

$$\frac{As \cdot fy}{Ag \cdot f'c} + \frac{Aps \cdot fpu}{Ag \cdot f'c} \geq 0.135$$

$$\frac{As_{col} \cdot fy}{Ag \cdot f'c} = 0.174$$

$$\text{if} \left( \frac{As_{col} \cdot fy}{Ag \cdot f'c} \geq 0.135, \text{"OK"}, \text{"Revisar Asmín"} \right) = \text{"OK"}$$

## 2.3) Esbeltez

### 2.3.1) Cálculo de factor de longitud efectiva K

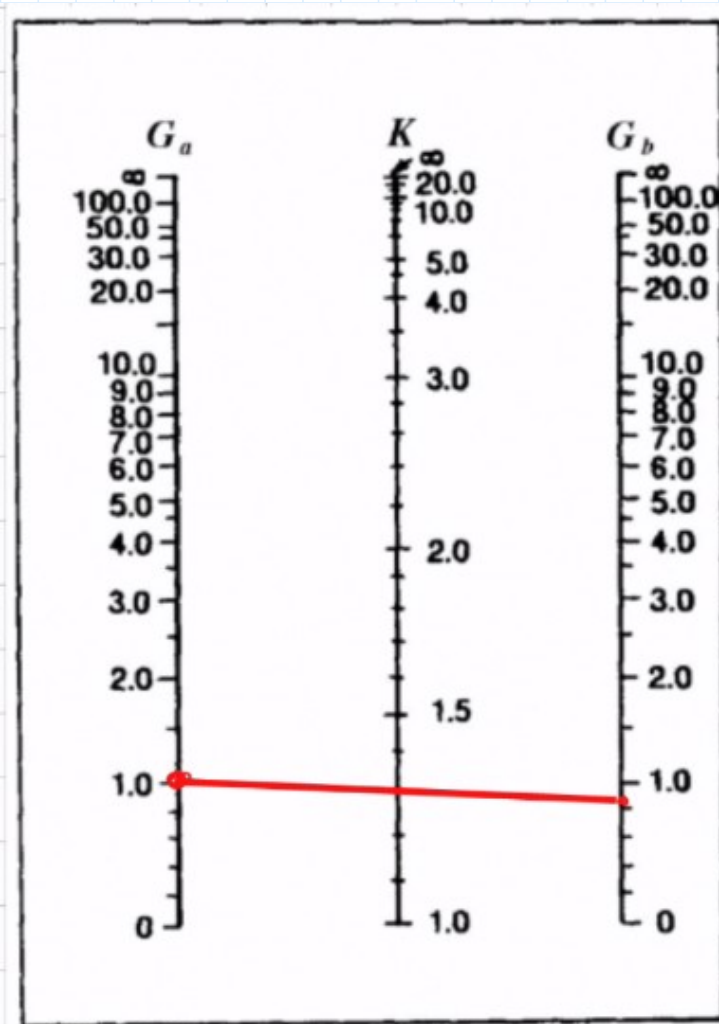
#### Usando nomogramas para estimar el valor de "K"

$$I_c := \frac{\pi \cdot \left( \frac{d_{col}}{2} \right)^4}{4} = 3220623.344 \text{ cm}^4 \quad L_u := L_{col} = 6.5 \text{ m} \quad \text{Longitud libre de columna}$$

$$I_b := \frac{b_{viga} \cdot h_{viga}^3}{12} = 8333333.333 \text{ cm}^4 \quad L_b := 7.20 \text{ m} \quad \text{Longitud libre de viga}$$

En el plano del pórtico (No arriostrado)

$$Ga_1 := 1 \quad (\text{Extremo inferior empotrado}) \quad Gb_1 := 2 \cdot \frac{\frac{I_c}{L_u}}{\frac{I_b}{L_b}} = 0.856$$

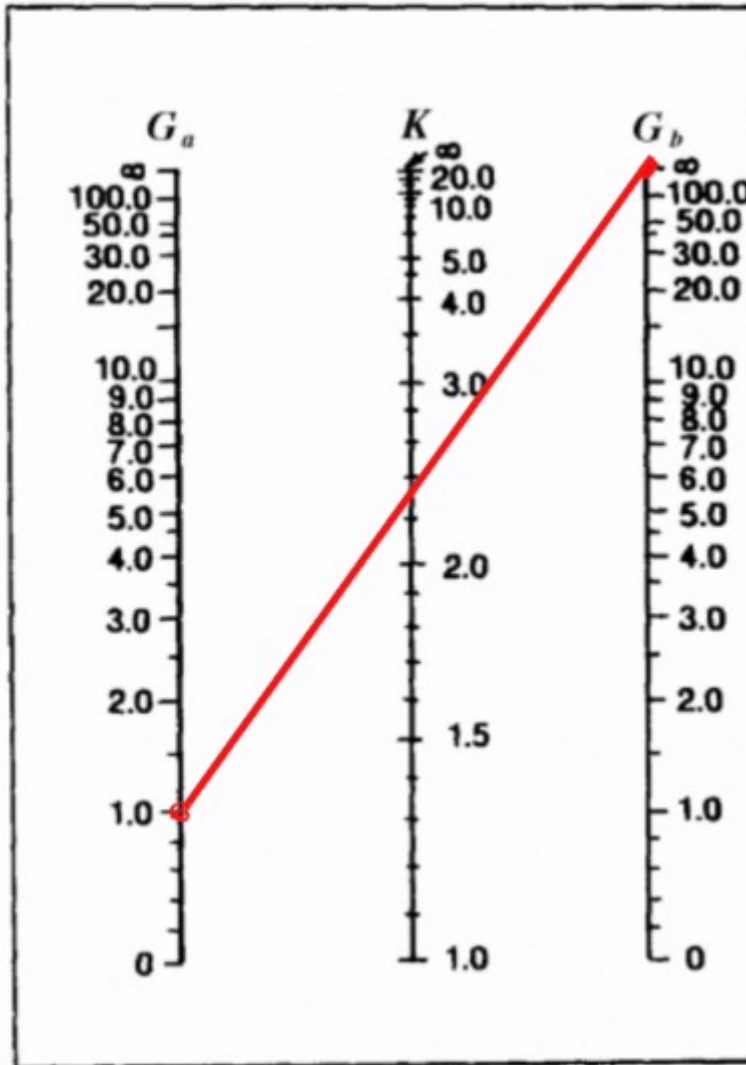


$$k_1 := 1.40$$

En el plano transversal al pórtico (No arriostrado)

$G_{a_2} := 1$  (Extremo inferior empotrado)

$G_{b_2} := \infty$  (Extremo superior libre)



$k_2 := 2.30$

En el plano del pórtico (No arriostrado)

$$L_u := L_{col} = 6.5 \text{ m}$$

$$r := \frac{d_{col}}{4} = 22.5 \text{ cm}$$

$$\frac{k1 \cdot L_u}{r} = 40.444$$

$$\text{if} \left( \frac{k1 \cdot L_u}{r} \leq 22, \text{“Columna no Esbelta”}, \text{“Columna Esbelta”} \right) = \text{“Columna Esbelta”}$$

En el plano transversal al pórtico (No arriostrado)

$$L_u = 6.5 \text{ m}$$

$$r = 22.5 \text{ cm}$$

$$\frac{k2 \cdot L_u}{r} = 66.444$$

$$\text{if} \left( \frac{k2 \cdot L_u}{r} \leq 22, \text{“Columna no Esbelta”}, \text{“Columna Esbelta”} \right) = \text{“Columna Esbelta”}$$

## 2.4) Capacidad

### 2.4.1) En el plano del pórtico

$$M_{cp} = \delta_b \cdot M_{2b} + \delta_s \cdot M_{2s}$$

$$\delta_b = \frac{Cm}{1 - \frac{Pu}{\phi k \cdot Pe}} \geq 1.00 \quad \delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum Pu}{\phi k \cdot \sum Pe}} \geq 1.00$$

- Cálculo de  $\delta_b$

$$Cm := 1$$

$$Pu := Pu_c \cdot -1 = 390 \text{ tonnef}$$

$$\phi k := 0.75 \quad (\text{Elementos de hormigón})$$

$$Pe1 = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(k1 \cdot Lu)^2} \quad k1 = 1.4 \quad Lu = 650 \text{ cm}$$

Para el valor de EI, se considera el mayor de la 2 siguientes expresiones:

$$EI1 = \frac{\frac{Ec \cdot Ig}{5} + Es \cdot Is}{1 + \beta d} \quad (1) \quad EI2 = \frac{\frac{Ec \cdot Ig}{2.50}}{1 + \beta d} \quad (2)$$

$$Ec := 15300 \cdot \sqrt{f'c \cdot \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2}} = 256017.968 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad EsIs := 0$$

$$Ig := \frac{\pi \cdot \left(\frac{d_{col}}{2}\right)^4}{4} = 3220623.344 \text{ cm}^4$$

$$\beta d1 := \frac{Mdu\_1}{Mu\_1} = 0.15$$

$$EI1 := \frac{\frac{Ec \cdot Ig}{5}}{1 + \beta d1} = (1.434 \cdot 10^{11}) \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2 \quad EI2 := \frac{\frac{Ec \cdot Ig}{2.50}}{1 + \beta d1} = (2.868 \cdot 10^{11}) \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2$$

$$EI := \max(EI1, EI2) = (2.868 \cdot 10^{11}) \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2$$

$$Pe1 := \frac{\pi^2 \cdot EI}{(k1 \cdot Lu)^2} = 3418.137 \text{ tonnef}$$

$$\delta_b := \frac{Cm}{1 - \frac{Pu}{\phi k \cdot Pe1}} = 1.179 \quad \delta_{b\_f} := \text{if}(\delta_b \geq 1, \delta_b, 1) = 1.179$$

- Cálculo de  $\delta_s$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum Pu}{\phi k \cdot \sum Pe}} \geq 1.00$$

Por simplicidad  $\sum Pu$  y  $\sum Pe$  se los considera como  $Pu$  y  $Pe$ , respectivamente. Por lo tanto:

$$\delta_s := \delta_b = 1.179 \quad \delta_{s\_f} := \text{if}(\delta_s \geq 1, \delta_s, 1) = 1.179$$

$$M_{cp} = \delta_b \cdot M_{2b} + \delta_s \cdot M_{2s} = \delta \cdot (M_{2b} + M_{2s})$$

$$M_{cp1} := \delta_b \cdot Mu\_1 = 117.943 \text{ tonnef} \cdot m$$

2.4.2) En el plano transversal

$$M_{cp} = \delta_b \cdot M_{2b} + \delta_s \cdot M_{2s}$$

$$\delta_b = \frac{Cm}{1 - \frac{Pu}{\phi k \cdot Pe}} \geq 1.00 \quad \delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum Pu}{\phi k \cdot \sum Pe}} \geq 1.00$$

- Cálculo de  $\delta_b$

$$Cm = 1$$

$$Pu = 390 \text{ tonnef}$$

$$\phi k = 0.75 \quad (\text{Elementos de hormigón})$$

$$Pe2 = \frac{\pi^2 \cdot EI}{(k1 \cdot Lu)^2} \quad k2 = 2.3 \quad Lu = 650 \text{ cm}$$

Para el valor de EI, se considera el mayor de la 2 siguientes expresiones:

$$EI1 = \frac{\frac{Ec \cdot Ig}{5} + Es \cdot Is}{1 + \beta d} \quad (1) \quad EI2 = \frac{\frac{Ec \cdot Ig}{2.50}}{1 + \beta d} \quad (2)$$

$$Ec = 256017.968 \frac{\text{kgf}}{\text{cm}^2} \quad EsIs = 0$$

$$Ig = 3220623.344 \text{ cm}^4$$

$$\beta d2 := \frac{Mdu\_2}{Mu\_2} = 0.3$$

$$EI3 := \frac{\frac{Ec \cdot Ig}{5}}{1 + \beta d2} = (1.269 \cdot 10^{11}) \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2 \quad EI4 := \frac{\frac{Ec \cdot Ig}{2.50}}{1 + \beta d2} = (2.537 \cdot 10^{11}) \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2$$

$$EI := \max(EI3, EI4) = (2.537 \cdot 10^{11}) \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2$$

$$Pe2 := \frac{\pi^2 \cdot EI}{(k2 \cdot Lu)^2} = 1120.326 \text{ tonnef}$$

$$\delta_b := \frac{Cm}{1 - \frac{Pu}{\phi k \cdot Pe2}} = 1.866 \quad \delta_{b\_f} := \text{if}(\delta_b \geq 1, \delta_b, 1) = 1.866$$

- Cálculo de  $\delta_s$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum Pu}{\phi k \cdot \sum Pe}} \geq 1.00$$

Por simplicidad  $\sum Pu$  y  $\sum Pe$  se los considera como Pu y Pe, respectivamente. Por lo tanto:

$$\delta_s := \delta_b = 1.866 \quad \delta_{s\_f} := \text{if}(\delta_s \geq 1, \delta_s, 1) = 1.866$$

$$M_{cp} = \delta_b \cdot M_{2b} + \delta_s \cdot M_{2s} = \delta \cdot (M_{2b} + M_{2s})$$

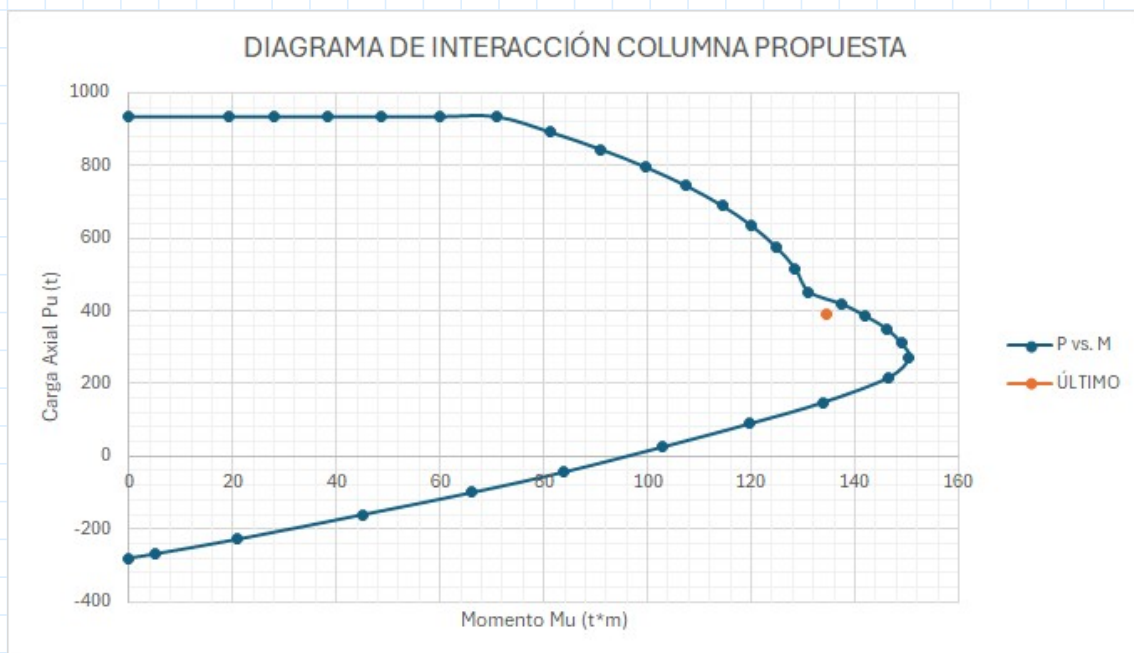
$$M_{cp2} := \delta_b \cdot Mu_2 = 74.648 \text{ tonnef} \cdot m$$

$$Mu := \sqrt{M_{cp1}^2 + M_{cp2}^2} = 139.581 \text{ tonnef} \cdot m$$

$$Pu = 390 \text{ tonnef}$$

#### 2.4.3) Diagrama de interacción de la columna

Utilizar cualquier método para la determinación del diagrama de interacción de la columna propuesta



Se observa que las cargas últimas están dentro del diagrama de interacción, por lo que la sección propuesta es adecuada