Actividad individual

Tema: Identidades trigonométricas.

Docente de cátedra:	Dra. Narcisa Sánchez
Periodo académico:	2025 1s
Asignatura:	Trigonometría Plana
Semestre:	1ero
Fecha de publicación:	26 de junio de 2025
Fecha de entrega:	4 de julio de 2025

La presente actividad está programada para desarrollarse en clase el día 30 de junio de 2025. Sin embargo, no podré asistir debido a que he sido invitada al evento institucional de reconocimiento a la actividad y producción académica. Por tal motivo, durante las horas de clases de m asignatura, deberán resolver de forma autónoma un avance de los ejercicios propuestos en este documento.

Además, al final del documento encontrarán un formulario con todas las fórmulas de las identidades trigonométricas, el cual les servirá como guía para el desarrollo de la actividad.

Dirección de Investigación
VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN, VINCULACIÓN Y POSTGRADO

en movimiento
SGC
SISTEMA DE GESTIÓN DE LA CALIDAD

Distribución de puestos para el evento de reconocimiento a la actividad y producción académica.

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN, HUMANAS Y TECNOLOGÍAS

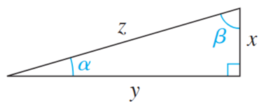
No.	NOMBRES COMPLETOS
1	ALVES DE BARROS ALEX SANDRO
2	BARRAGÁN ERAZO VIRGINIA
3	BASANTES VACA CARMEN VIVIANA
4	BENAVIDES ENRÍQUEZ CELSO VLADIMIR
5	BENÍTEZ OBANDO IVÁN FABRICIO
6	BRAVO MANCERO PATRICIA CECILIA
7	CADENA FIGUEROA MÓNICA NOEMÍ
8	CASANOVA ZAMORA TANNIA ALEXANDRA
9	CHIRIBOGA CEVALLOS ALEX ARMANDO
10	DE LEÓN NICARETTA FABIANA MARÍA
11	GUFFANTE NARANJO FERNANDO RAFAEL
12	HEREDIA ARBOLEDA EDGAR EDUARDO
13	HERRERA CARPIO LIUVAN
14	HERRERA LATORRE PAULO DAVID
15	ILLICACHI GUZÑAY JUAN
16	ISÍN VILEMA MANUEL DAVID
17	MÉNDEZ MALDONADO ELIZABETH AMANDA
18	MENDOZA CAHUANA MAYRA ALEXANDRA
19	MERA CABEZAS LUIS ALBERTO
20	MINUGUANO TRUJILLO ANDREA SOLEDAD
21	MONTOYA LUNAVICTORIA JOHANA KATERINE
22	MORENO TAPIA CINTYA BELÉN
23	MURILLO NORIEGA DANIEL EDUARDO
24	NARANJO NAVAS CRISTIAN PAÚL
25	NAVAS BONILLA CARMEN DEL ROSARIO
26	NAVAS LABANDA ALEGRÍA CUMANDÁ
27	OVIEDO GUADO DANIEL ALEJANDRO
28	PAZ VITERI BERTHA SUSANA
29	PEÑAFIEL BARROS GEONATAHN OCTAVIO
30	PEÑAFIEL RODRÍGUEZ MIRIAM PAULINA
31	PÉREZ VARGAS ISAAC GERMÁN
32	PIÑAS MORALES MARÍA BELÉN
33	POMBOZA FLORIL CRISTINA ALEXANDRA
34	POMBOZA FLORIL MARGARITA DEL ROCÍO
35	PONCE NARANJO GENOVEVA VERÓNICA
36	QUEVEDO TUMAILLI WILLIAM JAVIER
37	RÍOS RIVERA EDWIN HERNÁN
38	ROMERO CARGUA ESTHELA ISAURA
39	SALAZAR ALMEIDA PILAR AIDÉ
40	SALGUERO ROSERO JOSÉ RAFAEL
41	SAMANIEGO LÓPEZ MARIELA VERÓNICA
42	SÁNCHEZ SALCÁN NARCISA DE JESÚS
43	SILVA BORJA GALO PATRICIO
44	ULLAURI MORENO MAGDALENA INÉS
45	UREÑA TORRES VICENTE RAMÓN
46	URQUIZO CRUZ ELENA PATRICIA
47	USCA PINDUISACA NANCY ISABEL
48	VALLADARES CARVAJAL NANCY PATRICIA
49	VELASCO ARRELANO MARCO HJALMAR
50	YERBABUENA TORRES CARLOS FERNANDO

Adjunto: Croquis del auditorio institucional

6.2 *Ejercicios*

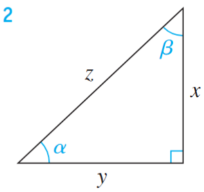
Ejer. 1-2: Use el sentido común para relacionar las variables y los valores. (Los triángulos se trazan a escala y los ángulos se miden en radianes.)

1



(a) α	(A) 7
(b) β	(B) 0.28
(c) x	(C) 24
(d) y	(D) 1.29
(e) z	(E) 25

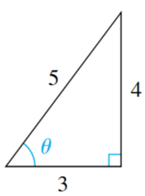
2



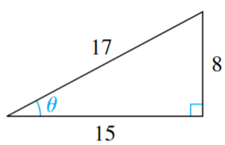
(a) α	(A) 23.35
(b) β	(B) 16
(c) x	(C) 17
(d) y	(D) 0.82
(e) z	(E) 0.76

Ejer. 3-10: Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo *θ*.

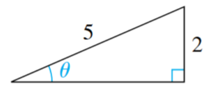
3



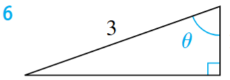
4



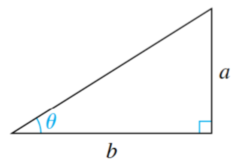
5



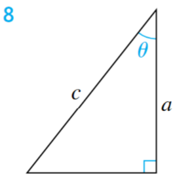
6



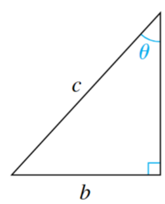
7



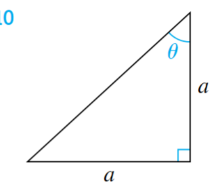
8



9

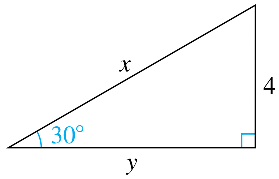


10

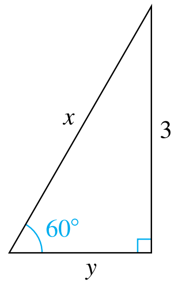


Ejer. 11-16: Encuentre los valores exactos de *x* y *y*.

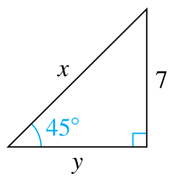
11



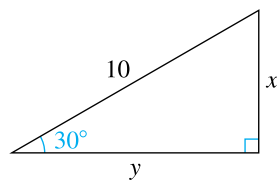
12



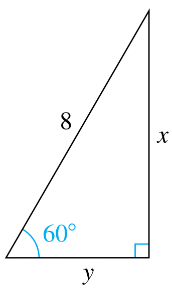
13



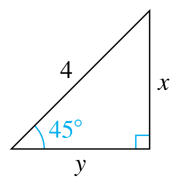
14



15



16



Ejer. 17-22: Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas para el ángulo agudo θ.

17 $\operatorname{sen} \theta = \frac{3}{5}$

18 $\cos \theta = \frac{8}{17}$

19 $\tan \theta = \frac{5}{12}$

20 $\cot \theta = \frac{7}{24}$

21 $\sec \theta = \frac{6}{5}$

22 $\csc \theta = 4$

23 **Altura de un árbol** Un guardabosque, situado a 200 pies de la base de una sequoia roja, observa que el ángulo entre el suelo y la cima del árbol es de 60°. Estime la altura del árbol.

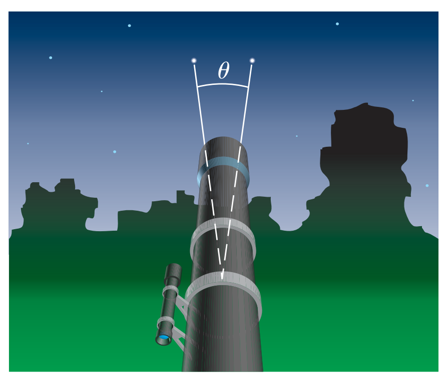
24 **Distancia al Monte Fuji** El pico del Monte Fuji de Japón mide aproximadamente 12,400 pies de altura. Un estudiante de trigonometría, situado a varias millas del monte, observa que el ángulo entre el nivel del suelo y el pico es de 30°. Estime la distancia del estudiante al punto a nivel del suelo que está directamente abajo del pico.

25 **Bloques de Stonehenge** Stonehenge en los llanos de Salisbury, Inglaterra, fue construido usando bloques de piedra maciza de más de 99,000 libras cada uno. Levantar un solo bloque requería de 550 personas que lo subían por una rampa inclinada a un ángulo de 9°. Calcule la distancia que un bloque era movido para levantarlo a una altura de 30 pies.

26 **Altura de un anuncio espectacular** Colocado en 1990 y removido en 1997, el anuncio más alto del mundo era una gran letra I situada en lo alto del edificio de 73 pisos First Interstate World Center en Los Ángeles. A una distancia de 200 pies del punto directamente abajo del anuncio, el ángulo entre el suelo y la cima del anuncio era de 78.87°. Calcule la altura de la cima del anuncio.

27 **Resolución de telescopio** Dos estrellas que están muy cercanas entre sí pueden aparecer como una sola. La capacidad del telescopio para separar sus imágenes se llama resolución. Cuanto menor es la resolución, mejor es la capacidad del telescopio para separar imágenes en el cielo. En un telescopio de refracción, la resolución θ (vea la figura) se puede mejorar al usar un lente con diámetro D más grande. La relación entre θ en grados y D en metros está dada por $\operatorname{sen} \theta = 1.22\lambda/D$, donde λ es la longitud de onda de la luz en metros. El telescopio de refracción más grande del mundo está en la Universidad de Chicago. A una longitud de onda de $\lambda = 550 \times 10^{-9}$ metros, su resolución es 0.000 037 69°. Calcule el diámetro del lente.

Ejercicio 27



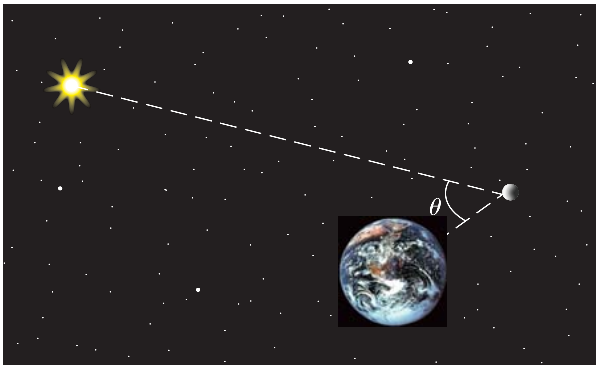
28 **Fases de la Luna** Las fases de la Luna se pueden describir usando el ángulo de fase θ, determinado por el Sol, la Luna y la Tierra, como se muestra en la figura. Debido a que la Luna gira alrededor de la Tierra, el ángulo θ cambia durante el curso de un mes. El área de la región A de la Luna, que

aparece iluminada para un observador en la Tierra, está dado por $A = \frac{1}{2}\pi R^2(1 + \cos\theta)$, donde $R = 1080$ millas es el radio de la Luna. Calcule A para las siguientes posiciones de la Luna:

(a) $\theta = 0°$ (luna llena) (b) $\theta = 180°$ (luna nueva)

(c) $\theta = 90°$ (primer cuarto) (d) $\theta = 103°$

Ejercicio 28



Ejer. 29-34: Calcule a cuatro lugares decimales, cuando sea apropiado.

29 (a) $\operatorname{sen} 42°$ (b) $\cos 77°$
(c) $\csc 123°$ (d) $\sec(-190°)$

30 (a) $\tan 282°$ (b) $\cot(-81°)$
(c) $\sec 202°$ (d) $\operatorname{sen} 97°$

31 (a) $\cot(\pi/13)$ (b) $\csc 1.32$
(c) $\cos(-8.54)$ (d) $\tan(3\pi/7)$

32 (a) $\operatorname{sen}(-0.11)$ (b) $\sec \frac{31}{27}$
(c) $\tan\left(-\frac{3}{13}\right)$ (d) $\cos 2.4\pi$

33 (a) $\operatorname{sen} 30°$ (b) $\sin 30$
(c) $\cos \pi°$ (d) $\cos \pi$

34 (a) $\operatorname{sen} 45°$ (b) $\operatorname{sen} 45$
(c) $\cos(3\pi/2)°$ (d) $\cos(3\pi/2)$

Ejer. 35-38: Use las identidades de Pitágoras para escribir la expresión como entero.

35 (a) $\tan^2 4\beta - \sec^2 4\beta$ (b) $4\tan^2\beta - 4\sec^2\beta$

36 (a) $\csc^2 3\alpha - \cot^2 3\alpha$ (b) $3\csc^2\alpha - 3\cot^2\alpha$

37 (a) $5\operatorname{sen}^2\theta + 5\cos^2\theta$
(b) $5\operatorname{sen}^2(\theta/4) + 5\cos^2(\theta/4)$

38 (a) $7\sec^2\gamma - 7\tan^2\gamma$
(b) $7\sec^2(\gamma/3) - 7\tan^2(\gamma/3)$

Ejer. 39-42: Simplifique la expresión.

39 $\dfrac{\operatorname{sen}^3\theta + \cos^3\theta}{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}$ 40 $\dfrac{\cot^2\alpha - 4}{\cot^2\alpha - \cot\alpha - 6}$

41 $\dfrac{2 - \tan\theta}{2\csc\theta - \sec\theta}$ 42 $\dfrac{\csc\theta + 1}{(1/\operatorname{sen}^2\theta) + \csc\theta}$

Ejer. 43-48: Use identidades fundamentales para escribir la primera expresión en términos de la segunda, para cualquier ángulo agudo $\boldsymbol{\theta}$.

43 $\cot\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ 44 $\tan\theta$, $\cos\theta$

45 $\sec\theta$, $\operatorname{sen}\theta$ 46 $\csc\theta$, $\cos\theta$

47 $\operatorname{sen}\theta$, $\sec\theta$ 48 $\cos\theta$, $\cot\theta$

Ejer. 49-70: Verifique la identidad al transformar el lado izquierdo en el lado derecho.

49 $\cos\theta\sec\theta = 1$ 50 $\tan\theta\cot\theta = 1$

51 $\operatorname{sen}\theta\sec\theta = \tan\theta$ 52 $\operatorname{sen}\theta\cot\theta = \cos\theta$

53 $\dfrac{\csc\theta}{\sec\theta} = \cot\theta$ 54 $\cot\theta\sec\theta = \csc\theta$

55 $(1 + \cos 2\theta)(1 - \cos 2\theta) = \operatorname{sen}^2 2\theta$

56 $\cos^2 2\theta - \operatorname{sen}^2 2\theta = 2\cos^2 2\theta - 1$

57 $\cos^2\theta(\sec^2\theta - 1) = \operatorname{sen}^2\theta$

58 $(\tan\theta + \cot\theta)\tan\theta = \sec^2\theta$

59 $\dfrac{\operatorname{sen}(\theta/2)}{\csc(\theta/2)} + \dfrac{\cos(\theta/2)}{\sec(\theta/2)} = 1$

60 $1 - 2\operatorname{sen}^2(\theta/2) = 2\cos^2(\theta/2) - 1$

61 $(1 + \operatorname{sen}\theta)(1 - \operatorname{sen}\theta) = \dfrac{1}{\sec^2\theta}$

62 $(1 - \operatorname{sen}^2\theta)(1 + \tan^2\theta) = 1$

63 $\sec\theta - \cos\theta = \tan\theta\operatorname{sen}\theta$

64 $\dfrac{\operatorname{sen}\theta + \cos\theta}{\cos\theta} = 1 + \tan\theta$

65 $(\cot\theta + \csc\theta)(\tan\theta - \operatorname{sen}\theta) = \sec\theta - \cos\theta$

66 $\cot\theta + \tan\theta = \csc\theta\sec\theta$

67 $\sec^2 3\theta\csc^2 3\theta = \sec^2 3\theta + \csc^2 3\theta$

68 $\dfrac{1 + \cos^2 3\theta}{\operatorname{sen}^2 3\theta} = 2\csc^2 3\theta - 1$

69 $\log\csc\theta = -\log\operatorname{sen}\theta$

70 $\log\tan\theta = \log\operatorname{sen}\theta - \log\cos\theta$

Ejer. 71-74: Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ, si θ está en posición estándar y P está en el lado terminal.

71 $P(4, -3)$

72 $P(-8, -15)$

73 $P(-2, -5)$

74 $P(-1, 2)$

Ejer. 75-80: Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de θ, si θ está en posición estándar y el lado terminal de θ está en el cuadrante especificado y satisface la condición dada.

75 II; en la recta $y = -4x$

76 IV; en la recta $3y + 5x = 0$

77 I; en la recta que tiene pendiente $\frac{4}{3}$

78 III; biseca el cuadrante

79 III; paralela a la recta $2y - 7x + 2 = 0$

80 II; paralela a la recta que pasa por $A(1, 4)$ y $B(3, -2)$

Ejer. 81-82: Encuentre los valores exactos de las seis funciones trigonométricas de cada ángulo, siempre que sea posible.

81 (a) $90°$ (b) $0°$ (c) $7\pi/2$ (d) 3π

82 (a) $180°$ (b) $-90°$ (c) 2π (d) $5\pi/2$

Ejer. 83-84: Encuentre el cuadrante que contenga θ si las condiciones dadas son verdaderas.

83 (a) $\cos\theta > 0$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

(b) $\operatorname{sen}\theta < 0$ y $\cot\theta > 0$

(c) $\csc\theta > 0$ y $\sec\theta < 0$

(d) $\sec\theta < 0$ y $\tan\theta > 0$

84 (a) $\tan\theta < 0$ y $\cos\theta > 0$

(b) $\sec\theta > 0$ y $\tan\theta < 0$

(c) $\csc\theta > 0$ y $\cot\theta < 0$

(d) $\cos\theta < 0$ y $\csc\theta < 0$

Ejer. 85-92: Use identidades fundamentales para hallar los valores de las funciones trigonométricas para las condiciones dadas.

85 $\tan\theta = -\frac{3}{4}$ y $\operatorname{sen}\theta > 0$

86 $\cot\theta = \frac{3}{4}$ y $\cos\theta < 0$

87 $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13}$ y $\sec\theta > 0$

88 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

89 $\cos\theta = -\frac{1}{3}$ y $\operatorname{sen}\theta < 0$

90 $\csc\theta = 5$ y $\cot\theta < 0$

91 $\sec\theta = -4$ y $\csc\theta > 0$

92 $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{5}$ y $\cos\theta < 0$

Ejer. 93-98: Reescriba la expresión en forma no radical sin usar valores absolutos para los valores indicados de θ.

93 $\sqrt{\sec^2\theta - 1}$; $\quad \pi/2 < \theta < \pi$

94 $\sqrt{1 + \cot^2\theta}$; $\quad 0 < \theta < \pi$

95 $\sqrt{1 + \tan^2\theta}$; $\quad 3\pi/2 < \theta < 2\pi$

96 $\sqrt{\csc^2\theta - 1}$; $\quad 3\pi/2 < \theta < 2\pi$

97 $\sqrt{\operatorname{sen}^2(\theta/2)}$; $\quad 2\pi < \theta < 4\pi$

98 $\sqrt{\cos^2(\theta/2)}$; $\quad 0 < \theta < \pi$

TRIGONOMETRÍA

FORMULARIO CEPRE - UNI

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Definición: son igualdades en donde intervienen las razones trigonométricas, las cuales se verifican para todo valor admisible de la variable angular. Es decir las razones trigonométricas estén definidas.

I. Identidades fundamentales

I.1 Identidades reciprocas

$$sen(x).\csc(x)=1 \rightarrow \csc(x)=1/sen(x)$$
$$\cos(x).\sec(x)=1 \rightarrow \sec(x)=1/\cos(x)$$
$$\tan(x).\cot(x)=1 \rightarrow \cot(x)=1/\tan(x)$$

I.2 Identidades por cociente

$$\tan(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)} \quad \wedge \quad \cot(x)=\frac{\cos(x)}{sen(x)}$$

I.3 Identidades Pitagóricas

$$sen^2(x)+\cos^2(x)=1 \qquad \sec^2(x)-\tan^2(x)=1$$
$$\csc^2(x)-\cot^2(x)=1$$

I.4 Identidades auxiliares

$$sen^4(x)+\cos^4(x)=1-\mathbf{2}sen^2(x).\cos^2(x)$$
$$sen^6(x)+\cos^6(x)=1-\mathbf{3}sen^2(x).\cos^2(x)$$

$$sen^8(x)+\cos^8(x)=$$
$$1-\mathbf{4}sen^2(x).\cos^2(x)+2sen^4(x).\cos^4(x)$$

$$\tan(x)+\cot(x)=\sec(x)\csc(x)$$
$$\sec^2(x)+\csc^2(x)=\sec^2(x)\csc^2(x)$$

$$\left(1\pm sen(x)\pm\cos(x)\right)^2=2\left(1\pm sen(x)\right)\left(1\pm\cos(x)\right)$$

$$\frac{sen(x)}{1\pm\cos(x)}=\frac{1\mp\cos(x)}{sen(x)} \wedge \frac{\cos(x)}{1\pm sen(x)}=\frac{1\mp sen(x)}{\cos(x)}$$

$$Si\ \ \sec(x)+\tan(x)=p \rightarrow \sec(x)-\tan(x)=p^{-1}$$
$$Si\ \ \csc(x)+\cot(x)=q \rightarrow \csc(x)-\cot(x)=q^{-1}$$

$$Si\ \ asen(x)+b\cos(x)=c \quad \wedge \quad a^2+b^2=c^2$$
$$\rightarrow sen(x)=\frac{a}{c} \quad \wedge \quad \cos(x)=\frac{b}{c}$$

I.5 Identidades adicionales

- ✓ $sen^4(x)+\cos^2(x)=1-sen^2(x)\cos^2(x)$
- ✓ $\cos^4(x)+sen^2(x)=1-sen^2(x)\cos^2(x)$
- ✓ $\tan^2(x)-sen^2(x)=\tan^2(x).sen^2(x)$
- ✓ $\cot^2(x)-\cos^2(x)=\cot^2(x).\cos^2(x)$
- ✓ $\sec^4(x)+\tan^4(x)=1+\mathbf{2}\sec^2(x)\tan^2(x)$
- ✓ $\sec^6(x)-\tan^6(x)=1+\mathbf{3}\sec^2(x)\tan^2(x)$
- ✓ $\csc^4(x)+\cot^4(x)=1+\mathbf{2}\csc^2(x)\cot^2(x)$
- ✓ $\csc^6(x)-\cot^6(x)=1+\mathbf{3}\csc^2(x)\cot^2(x)$
- ✓ $\left(sen(x)+\cos(x)\right)^2+\left(sen(x)-\cos(x)\right)^2=2$
- ✓ $\left(\tan(x)+\cot(x)\right)^2-\left(\tan(x)-\cot(x)\right)^2=4$

I.6 Algunas desigualdades importantes

- ✓ $\forall x\in\mathbb{R} \wedge n\in\mathbb{Z}^+$:

$$\frac{1}{2^{n-1}}\le sen^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)\le 1$$

- ✓ $\forall x\in\mathbb{R} \wedge n,m\in\mathbb{Z}^+$:

$$\left(sen(x)\right)^{2n}\left(\cos(x)\right)^{2m}\le\frac{n^n\times m^m}{(n+m)^{n+m}}$$

- ✓ $\forall x,a,b\in\mathbb{R}$:

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le asen(x)+b\cos(x)\le\sqrt{a^2+b^2}$$

- ✓ $Si\ a,b\in\Re^+\ y\ \tan(x)>0$

$$a\tan(x)+b\cot(x)\ge 2\sqrt{ab}$$

II. Identidades de los ángulos compuestos

II.1 Para la suma de dos ángulos

$$\boxed{sen(x+y)=sen(x)\cos(y)+sen(y)\cos(x)}$$

$$\boxed{\cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-sen(x)sen(y)}$$

$$\boxed{\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}}$$

II.2 Para la diferencia de dos ángulos

$$\boxed{sen(x-y)=sen(x)\cos(y)-sen(y)\cos(x)}$$

$$\boxed{\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+sen(x)sen(y)}$$

$$\boxed{\tan(x-y)=\frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}}$$

II.3 Identidades auxiliares

$$sen(x+y)sen(x-y)=sen^2x-sen^2y$$
$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2x-sen^2y$$

$$\tan(x)\pm\tan(y)=\frac{sen(x\pm y)}{\cos(x)\cos(y)}$$
$$\cot(x)\pm\cot(y)=\frac{sen(y\pm x)}{sen(x)sen(y)}$$

$$a.sen(x)\pm b.\cos(x)=\sqrt{a^2+b^2}.sen(x\pm\theta)$$
$$Donde\ \ \tan(\theta)=\frac{b}{a}$$

Con frecuencia se utiliza las siguientes identidades

$$\begin{cases} sen(x)\pm\cos(x)=\sqrt{2}.sen(x\pm 45^\circ) \\ \sqrt{3}.sen(x)\pm\cos(x)=2.sen(x\pm 30^\circ) \\ sen(x)\pm\sqrt{3}.\cos(x)=2.sen(x\pm 60^\circ) \end{cases}$$

$$\boxed{\tan(x)+\tan(y)+\tan(x)\tan(y)\tan(x+y)=\tan(x+y)}$$

$$\boxed{\tan(x)-\tan(y)-\tan(x)\tan(y)\tan(x-y)=\tan(x-y)}$$

$$Si\ \ x+y=\theta\ \ entonces$$
$$(\cot(\theta)+\tan(x))(\cot(\theta)+\tan(y))=\csc^2(\theta)$$

Algunas aplicaciones de esta identidad son:

✓ Si $x+y=45^\circ$

$\rightarrow \boxed{(1+\tan(x))(1+\tan(y))=2}$

✓ Si $x+y=30^\circ$

$\rightarrow \boxed{(\sqrt{3}+\tan(x))(\sqrt{3}+\tan(y))=4}$

II.4 Identidades para tres ángulos

$$\boxed{\frac{sen(x+y+z)}{\cos(x)\cos(y)\cos(z)}=S_1-S_3}$$

$$\boxed{\frac{\cos(x+y+z)}{\cos(x)\cos(y)\cos(z)}=1-S_2}$$

$$\boxed{\tan(x+y+z)=\frac{S_1-S_3}{1-S_2}}\ \ldots.(*)$$

Donde:

S_1 : $\tan(x)+\tan(y)+\tan(z)$

S_2 : $\tan(x)\tan(y)+\tan(y)\tan(z)+\tan(z)\tan(x)$

S_3 : $\tan(x)\tan(y)\tan(z)$

A partir de la identidad (*) se presentan estos casos particulares.

$$Si\ \ x+y+z=(2n+1)\frac{\pi}{2};n\in\mathbb{Z}$$
$$Entonces$$
$$\tan(x)\tan(y)+\tan(y)\tan(z)+\tan(z)\tan(x)=1$$
$$\cot(x)+\cot(y)+\cot(z)=\cot(x)\cot(y)\cot(z)$$

$$Si\ \ x+y+z=n\pi;n\in\mathbb{Z}$$
$$Entonces$$
$$\cot(x)\cot(y)+\cot(y)\cot(z)+\cot(z)\cot(x)=1$$
$$\tan(x)+\tan(y)+\tan(z)=\tan(x)\tan(y)\tan(z)$$

Identidades adicionales

$$Si\ \ x+y+z=0$$
$$\cos^2(x)+\cos^2(y)+\cos^2(z)-2\cos(x)\cos(y)\cos(z)=1$$

$$Si\ \ x+y+z=\pi/2$$
$$sen^2(x)+sen^2(y)+sen^2(z)+2sen(x)sen(y)sen(z)=1$$

$$Si\ \ x+y+z=\pi$$
$$\cos^2(x)+\cos^2(y)+\cos^2(z)+2\cos(x)\cos(y)\cos(z)=1$$

III. Identidades de los ángulos múltiples

III.1 Identidades del ángulo doble

$$\boxed{sen(2x)=2sen(x)\cos(x)}$$

$$\boxed{cos(2x)=cos^2(x)-sen^2(x)}$$

$$\boxed{\tan(2x)=\frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}}$$

Otras formas del cos(2x)

$$\begin{cases}\cos(2x)=1-2sen^2(x)\\ \cos(2x)=2\cos^2(x)-1\end{cases}$$

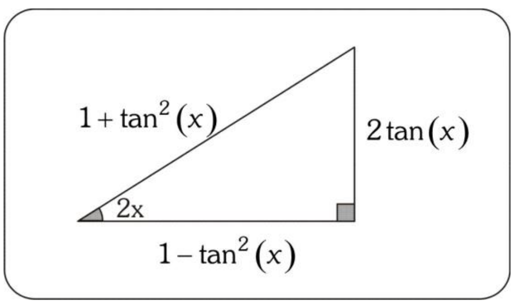
Identidades para degradar

$2sen^2(x)=1-\cos(2x)$	$2\cos^2(x)=1+\cos(2x)$

También

$sen(2x)=\dfrac{2\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$	$\cos(2x)=\dfrac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$

Una forma práctica de recordar estas dos identidades, es utilizando la siguiente figura



Identidades auxiliares

- ✓ $\cot(x)+\tan(x)=2\csc(2x)$
- ✓ $\cot(x)-\tan(x)=2\cot(2x)$
- ✓ $sen^4(x)+\cos^4(x)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos(4x)$
- ✓ $sen^6(x)+\cos^6(x)=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos(4x)$
- ✓ $\sqrt{1\pm sen(2x)}=\left|sen(x)\pm\cos(x)\right|$
- ✓ $\sec^2(x)+\csc^2(x)=4\csc^2(2x)$
- ✓ $\tan(2x)\cot(x)=\sec(2x)+1$
- ✓ $\tan(2x)\tan(x)=\sec(2x)-1$
- ✓ $8sen^4(x)=3-4\cos(2x)+\cos(4x)$
- ✓ $8\cos^4(x)=3+4\cos(2x)+\cos(4x)$

III.2 Identidades del ángulo mitad

$\left\lvert sen(\frac{x}{2})\right\rvert=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$	$\left\lvert \cos(\frac{x}{2})\right\rvert=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$

$$\boxed{\left\lvert \tan(\frac{x}{2})\right\rvert=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}}$$

Nota: El signo que se considerara, dependerá del cuadrante al cual pertenezca x/2 y de la razón trigonométrica.

También

$\tan(\frac{x}{2})=\csc(x)-\cot(x)$	$\cot(\frac{x}{2})=\csc(x)+\cot(x)$

III.3 Identidades del ángulo triple

$$\boxed{sen(3x)=3sen(x)-4sen^3(x)}$$

$$\boxed{\cos(3x)=4\cos^3(x)-3\cos(x)}$$

$$\boxed{\tan(3x)=\frac{3\tan(x)-\tan^3(x)}{1-3\tan^2(x)}}$$

Identidades para degradar

$$\boxed{\begin{aligned}4sen^3(x)&=3sen(x)-sen(3x)\\ 4\cos^3(x)&=3\cos(x)+\cos(3x)\end{aligned}}$$

Identidades auxiliares

$$\boxed{\begin{aligned}sen(3x)&=sen(x)\big(2\cos(2x)+1\big)\\ \cos(3x)&=\cos(x)\big(2\cos(2x)-1\big)\end{aligned}}$$

$$\boxed{\tan(3x)=\tan(x)(\frac{2\cos(2x)+1}{2\cos(2x)-1})}$$

$$\boxed{\begin{aligned}sen(3x)&=4sen(x)sen(60^\circ-x)sen(60^\circ+x)\\ \cos(3x)&=4\cos(x)\cos(60^\circ-x)\cos(60^\circ+x)\\ \tan(3x)&=\tan(x)\tan(60^\circ-x)\tan(60^\circ+x)\end{aligned}}$$

Identidades adicionales

- ✓ $Si\;\; x+y=30° \rightarrow \dfrac{sen^3(x)+\cos^3(y)}{sen(x)+\cos(y)}=\dfrac{3}{4}$
- ✓ $\tan(x)+\tan(x+60°)+\tan(x+120°)=3\tan(3x)$
- ✓ $\csc(x)+\csc(x+120°)+\csc(x+240°)=3\csc(3x)$
- ✓ $\sec(x)+\sec(x+120°)+\sec(x+240°)=-3\sec(3x)$

IV. Transformaciones trigonométricas

Caso 1

$$sen(x)+sen(y)=2sen(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$$
$$sen(x)-sen(y)=2sen(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})$$

$$\cos(x)+\cos(y)=2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$$
$$\cos(x)-\cos(y)=-2sen(\frac{x+y}{2})sen(\frac{x-y}{2})$$

Algunas aplicaciones

- ✓ $sen(x-120°)+sen(x)+sen(x+120°)=0$
- ✓ $\cos(x-120°)+\cos(x)+\cos(x+120°)=0$
- ✓ $sen^2(x-120°)+sen^2(x)+sen^2(x+120°)=\dfrac{3}{2}$
- ✓ $\cos^2(x-120°)+\cos^2(x)+\cos^2(x+120°)=\dfrac{3}{2}$

Caso 2

$$2sen(x)\cos(y)=sen(x+y)+sen(x-y)$$
$$2\cos(x)\cos(y)=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$
$$2sen(x)sen(y)=\cos(x-y)-\cos(x+y)$$

A partir de las siguientes identidades

$$sen(x)+sen(y)+sen(z)-sen(x+y+z)=4sen(\frac{x+y}{2})sen(\frac{y+z}{2})sen(\frac{z+x}{2})$$

$$\cos(x)+\cos(y)+\cos(z)+\cos(x+y+z)=4\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{y+z}{2})\cos(\frac{z+x}{2})$$

Determinamos las identidades condicionales

$Si\;\; A+B+C=180°,\;\; entonces$

$$sen(A)+sen(B)+sen(C)=4\cos(\frac{A}{2})\cos(\frac{B}{2})\cos(\frac{C}{2})$$

$$\cos(A)+\cos(B)+\cos(C)-1=4sen(\frac{A}{2})sen(\frac{B}{2})sen(\frac{C}{2})$$

$$sen(2A)+sen(2B)+sen(2C)=4sen(A)sen(B)sen(C)$$

$$\cos(2A)+\cos(2B)+\cos(2C)+1=-4\cos(A)\cos(B)\cos(C)$$

En general, para $k\in\mathbb{N}$

$$sen(2kA)+sen(2kB)+sen(2kC)=4(-1)^{k+1}sen(kA)sen(kB)sen(kC)$$

Serie de senos para ángulos en progresión aritmética

$$\sum_{k=1}^{n} sen(x+kr)=\frac{sen(\frac{nr}{2})sen(\frac{P+U}{2})}{sen(\frac{r}{2})}$$

Serie de cosenos para ángulos en progresión aritmética

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(x+kr)=\frac{sen(\frac{nr}{2})\cos(\frac{P+U}{2})}{sen(\frac{r}{2})}$$

Donde consideramos que

n: número de términos r: razón de la P.A.

P: primer ángulo U: último ángulo

Otras series $(n\in\mathbb{N})$

$$\cos(\frac{\pi}{2n+1})+\cos(\frac{3\pi}{2n+1})+\dots\;\cos(\frac{(2n-1)\pi}{2n+1})=\frac{1}{2}$$

$$\cos(\frac{2\pi}{2n+1})+\cos(\frac{4\pi}{2n+1})+\dots\;\cos(\frac{2n\pi}{2n+1})=-\frac{1}{2}$$

$$sen(\frac{\pi}{2n+1})sen(\frac{2\pi}{2n+1})\times\dots\;sen(\frac{n\pi}{2n+1})=\frac{\sqrt{2n+1}}{2^n}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2n+1})\cos(\frac{2\pi}{2n+1})\times\dots\;\cos(\frac{n\pi}{2n+1})=\frac{1}{2^n}$$

$$\tan(\frac{\pi}{2n+1})\tan(\frac{2\pi}{2n+1})\times\dots\;\tan(\frac{n\pi}{2n+1})=\sqrt{2n+1}$$