Problema de Diseño de Filtros FIR

Nombre: -------------------

Diseñe un filtro FIR pasa banda usando la ventana de Kaiser con las siguientes especificaciones:

Banda de paso: 20-30 KHz

Borde inferior de la banda de rechazo (Stop band): 10 KHz

Borde superior de la banda de rechazo (Stop band): 40 KHz

Frecuencia de muestreo: 100 KHz

Valor del rizado de la banda de paso: 0.5 dB

Atenuación de la banda de rechazo (Stop band): 30 dB.

Calcular:

1.) Los bordes de las frecuencias angulares de la banda de paso (10 %)
2.) Los bordes de frecuencias angulares de la banda de rechazo (10 %)
3.) Las frecuencias de corte (10 %)
4.) La respuesta en frecuencia de la banda de paso (10%)
5.) Orden del filtro (10%)
6.) Secuencia de la ventana (30 %)
7.) Función de transferencia del filtro H(z) (20 %)

Solución:

Los bordes de las frecuencias angulares de la banda de paso son:

$$
\begin{aligned}
\omega_{p1} &= \frac{2\pi f_{p1}}{F_T} = \frac{2\pi \times 20 \times 10^3}{100 \times 10^3} = \frac{40\pi}{100} = 0.4\pi \\
\omega_{p2} &= \frac{2\pi f_{p2}}{F_T} = \frac{2\pi \times 30 \times 10^3}{100 \times 10^3} = \frac{60\pi}{100} = 0.6\pi
\end{aligned}
$$

Los bordes de frecuencias angulares de la banda de rechazo son:

$$
\begin{aligned}
\omega_{s1} &= \frac{2\pi f_{s1}}{F_T} = \frac{2\pi \times 10 \times 10^3}{100 \times 10^3} = \frac{20\pi}{100} = 0.2\pi \\
\omega_{s2} &= \frac{2\pi f_{s2}}{F_T} = \frac{2\pi \times 40 \times 10^3}{100 \times 10^3} = \frac{80\pi}{100} = 0.8\pi \\
\Delta\omega &= \min\left[(\omega_{p1} - \omega_{s1}), (\omega_{s2} - \omega_{p2})\right] \\
\Delta\omega &= [0.2\pi, 0.2\pi)] = 0.2\pi
\end{aligned}
$$

Las frecuencias de corte son:

$$
\begin{aligned}
\omega_{c1} &= \omega_{p1} - \frac{\Delta\omega}{2} = 0.4\pi - \frac{0.2\pi}{2} = 0.3\pi \\
\omega_{c2} &= \omega_{p2} + \frac{\Delta\omega}{2} = 0.6\pi + \frac{0.2\pi}{2} = 0.7\pi
\end{aligned}
$$

La respuesta en frecuencia de la banda de paso son:

$$h_{\mathrm{BP}}(n) = \frac{\sin \omega_{c2} n}{\pi n} - \frac{\sin \omega_{c1} n}{\pi n}, \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

$$h_{\mathrm{BP}}(n) = \frac{\sin(0.7\pi) n}{\pi n} - \frac{\sin(0.3\pi) n}{\pi n}, \quad -\infty \leq n \leq \infty$$

De las especificaciones del problema $\propto_s = 30$ dB.

Considerando la ventan de Kaiser:

$$w_K(n) = \frac{I_0\left\{\beta\sqrt{1-(n/M)^2}\right\}}{I_0(\beta)}, \quad -M \leq n \leq M$$

$$\begin{aligned} I_0(x) &= 1 + \sum_{r=1}^{\infty}\left[\frac{(x/2)^r}{r!}\right]^2 \\ &= 1 + \frac{(0.25x^2)}{(1!)^2} + \frac{(0.25x^2)^2}{(2!)^2} + \frac{(0.25x^2)^3}{(3!)^2} + \cdots \end{aligned}$$

$$\beta = \begin{cases} 0.1102(\alpha_s - 8.7) & \text{for } \alpha_s > 50, \\ 0.5842(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_s - 21) & \text{for } 21 \leq \alpha_s \leq 50, \\ 0 & \text{for } \alpha_s < 21. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \beta &= 0.5842(\alpha_s - 21)^{0.4} + 0.07886(\alpha_s - 21) \\ &= 0.5842(30-21)^{0.4} + 0.07886(30-21) = 2.116624 \end{aligned}$$

El orden del filtro es:

$$N = \frac{\alpha_s - 8}{2.285(\Delta\omega)} = \frac{30 - 8}{2.285(0.2\pi)} = 15.32345$$

$$N = 2M, \quad M = 8.$$

La secuencia de la ventana es:

$$w_k(n) = \frac{I_0\left\{\beta\sqrt{1 - (n/M)^2}\right\}}{I_0(\beta)}, \quad -M \leq n \leq M$$

$$I_0(x) = 1 + \frac{(0.25x^2)}{(1!)^2} + \frac{(0.25x^2)^2}{(2!)^2} + \frac{(0.25x^2)^3}{(3!)^2} + \cdots$$

$$w_k(n) = \frac{I_0\left\{2.116624\sqrt{1 - (n/8)^2}\right\}}{I_0(2.116624)}, \quad -8 \leq n \leq 8$$

$$I_0(2.116624) = 2.4755$$

$$w_k(0) = \frac{I_0(\beta)}{I_0(\beta)} = 1$$

$$w_k(1) = w_k(-1) = \frac{I_0(2.1)}{2.4755} = \frac{2.4463}{2.4755} = 0.988213$$

$$w_k(2) = w_k(-2) = \frac{I_0(2.0494)}{2.4755} = \frac{2.36}{2.4755} = 0.95335$$

$$w_k(3) = w_k(-3) = \frac{I_0(1.96216)}{2.4755} = \frac{2.22045}{2.4755} = 0.89697$$

$$w_k(4) = w_k(-4) = \frac{I_0(1.833)}{2.4755} = \frac{2.033785}{2.4755} = 0.821565$$

$$w_k(5) = w_k(-5) = \frac{I_0(1.65228)}{2.4755} = \frac{1.80819}{2.4755} = 0.730434$$

$$w_k(6) = w_k(-6) = \frac{I_0(1.4)}{2.4755} = \frac{1.5534}{2.4755} = 0.627513$$

$$w_k(7) = w_k(-7) = \frac{I_0(1.0247)}{2.4755} = \frac{1.28}{2.4755} = 0.517165$$

$$w_k(8) = w_k(-8) = \frac{I_0(0)}{2.4755} = \frac{1.00}{2.4755} = 0.4039587$$

Considerando la respuesta al impulso:

$$h_t(n) = h(n)w_k(n)$$

n	$h(n)$	$h_t(n) = h(n)w_k(n)$
0	0.4	0.4
± 1	0	0
± 2	−0.30273	−0.2886
± 3	0	0
± 4	0.0935489	0.0768565
± 5	0	0
± 6	0.0623659	0.039135
± 7	0	0
± 8	−0.07568267	−0.03057268

La función de transferencia está dada por:

$$H_t(z) = z^{-8}\left[h_t(0) + \sum_{n=1}^{8} h_t(n)(z^n + z^{-n})\right]$$