Unidad 3: Espacios Vectoriales (Parte 1)

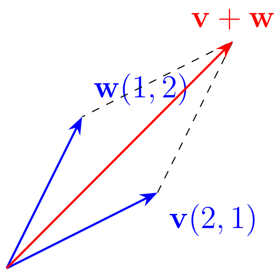
3.1 Espacios Vectoriales

Resultado de aprendizaje: Al finalizar esta unidad, el estudiante será capaz de definir, calcular y aplicar operaciones vectoriales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ — incluyendo suma, resta, producto vectorial y combinación lineal — para modelar desplazamientos, fuerzas y momentos en estructuras de Ingeniería Civil.

3.1.1 Vectores en el plano y en el espacio

Definición

Un vector en $\mathbb{R}^2$ se representa como $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, y en $\mathbb{R}^3$ como $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Su norma: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 (+v_z^2)}$.



Ejemplo

Ejemplo de desplazamiento de un punto en una viga: $\mathbf{d} = (0.25, -0.05, 0)$ m.

Aplicación en Ingeniería Civil

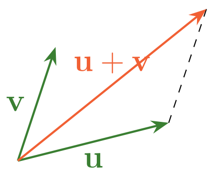
Se utilizan vectores para describir la dirección y magnitud de desplazamientos en nodos de mallas finitas al analizar deformaciones de estructuras.

Ejercicio 1. Dibuja $\mathbf{a} = (3, 2)$ y $\mathbf{b} = (-1, 4)$, calcula sus normas y describe sus direcciones.

3.1.2 Suma y resta de vectores

Definición

$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y, [u_z + v_z])$, $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y, [u_z - v_z])$.



Ejemplo

Combinación de cargas: dos cargas en un pilar, $\mathbf{F}_1 = (100, 0, 0)$ kN y $\mathbf{F}_2 = (0, 150, 0)$ kN, resultan en $\mathbf{F}_R = (100, 150, 0)$ kN.

Aplicación en Ingeniería Civil

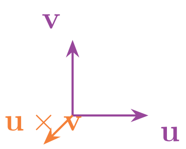
La suma de vectores es esencial para el análisis de fuerzas concurrentes en nudos de estructuras reticulares.

Ejercicio 2. Con $\mathbf{p} = (2, -1, 3)$ y $\mathbf{q} = (-1, 4, 0)$, halla $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ y $\mathbf{p} - \mathbf{q}$ e interpreta.

3.1.3 Producto vectorial (cruz)

Definición

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_y v_z - u_z v_y, u_z v_x - u_x v_z, u_x v_y - u_y v_x)$.



Ejemplo

Cálculo de momento de una fuerza: $\mathbf{r} = (0.5, 0.2, 0)$ m, $\mathbf{F} = (0, -80, 0)$ kN, $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.

Aplicación en Ingeniería Civil

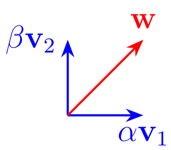
El producto vectorial se usa para obtener momentos en vigas y tornillos, y para calcular áreas de secciones transversales.

Ejercicio 3. Calcula el momento de la fuerza $\mathbf{F} = (0, -100, 0)$ kN en $\mathbf{r} = (0.5, 0.2, 0)$ m.

3.1.4 Combinación lineal

Definición

$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{v}_3$.



Ejemplo

Descomposición de una carga: $\mathbf{C} = (5, 4, 0)$ t se expresa como combinación de cargas unitarias.

Aplicación en Ingeniería Civil

En análisis modal, los desplazamientos se expresan como combinación lineal de modos propios de vibración.

Ejercicio 4. Encuentra α, β, γ tales que $(3,1,2) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,1,0)$.

3.2 Espacios vectoriales (Segunda Parte)

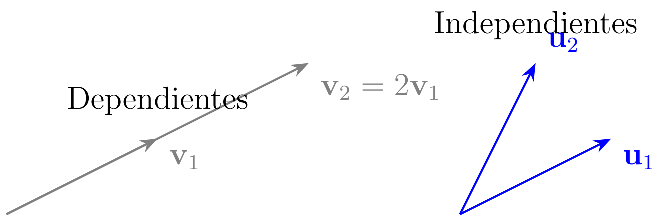
3.2.1 Dependencia e independencia lineales

Definición

Un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es *linealmente dependiente* si existen escalares no todos cero tales que

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Si la única solución es trivial ($\alpha_i = 0\ \forall i$), se dice que el conjunto es *linealmente independiente*.



Aplicación en Ingeniería Civil

En modelado de pórticos, elegir modos de deformación linealmente independientes evita redundancias al descomponer desplazamientos.

3.2.2 Espacio generado

Definición

El *espacio generado* o *span* de $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es

$$\mathrm{Span}(\mathbf{v}_i) = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \mathbf{v}_i : \alpha_i \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Ejemplo

En $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{Span}((1,0),(0,1)) = \mathbb{R}^2$, mientras que $\mathrm{Span}((1,2))$ es la recta por el origen de pendiente 2.

Aplicación en Ingeniería Civil

En elementos finitos, el espacio generado por las funciones de forma determina la familia de desplazamientos admisible en cada elemento.

3.2.3 Base y dimensión de un espacio vectorial

Definición

Una *base* de V es un conjunto linealmente independiente que genera V. La *dimensión* de V es el número de vectores en cualquiera de sus bases.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$, la base canónica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ tiene dimensión 3.

Aplicación en Ingeniería Civil

Elegir una base alineada con las direcciones principales (ejes de inercia) simplifica el cálculo de tensiones y deformaciones.

3.2.4 Cambio de base

Definición

Si B y B' son dos bases de V, la matriz de transición P satisface

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P\,[\mathbf{v}]_B.$$

Ejemplo

Para una viga inclinada 30° respecto al eje x, la matriz $P = \begin{pmatrix} \cos 30 & -\sin 30 \\ \sin 30 & \cos 30 \end{pmatrix}$ permite pasar de coordenadas locales a globales.

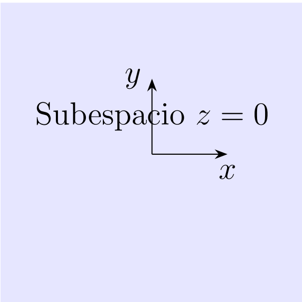
Aplicación en Ingeniería Civil

En análisis de estructuras, el cambio de base es imprescindible para proyectar cargas locales a coordenadas del sistema global.

3.2.5 Subespacios vectoriales

Definición

Un *subespacio* $W \subset V$ es un conjunto no vacío cerrado bajo suma y multiplicación escalar. Es decir, si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in W$ y $\alpha\mathbf{u} \in W$.



Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$, el plano $\{(x, y, 0)\}$ es un subespacio vectorial.

Aplicación en Ingeniería Civil

Los modos de vibración de una losa forman subespacios que permiten analizar cada frecuencia por separado.

References

[1] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, Wellesley-Cambridge Press, 2016.

[2] H. Anton, C. Rorres, *Elementary Linear Algebra*, Wiley, 2013.

[3] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.