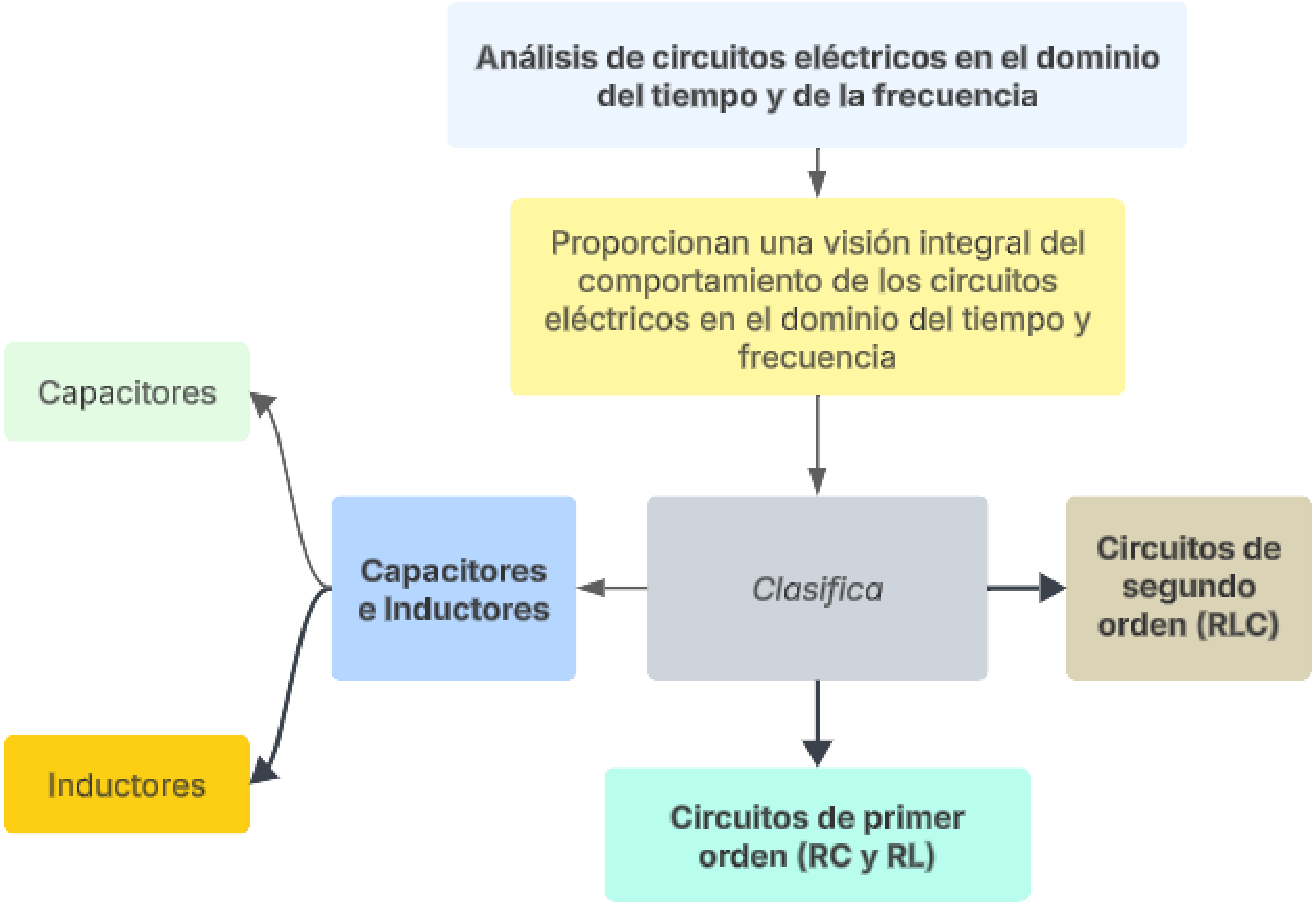
# Circuitos de segundo orden

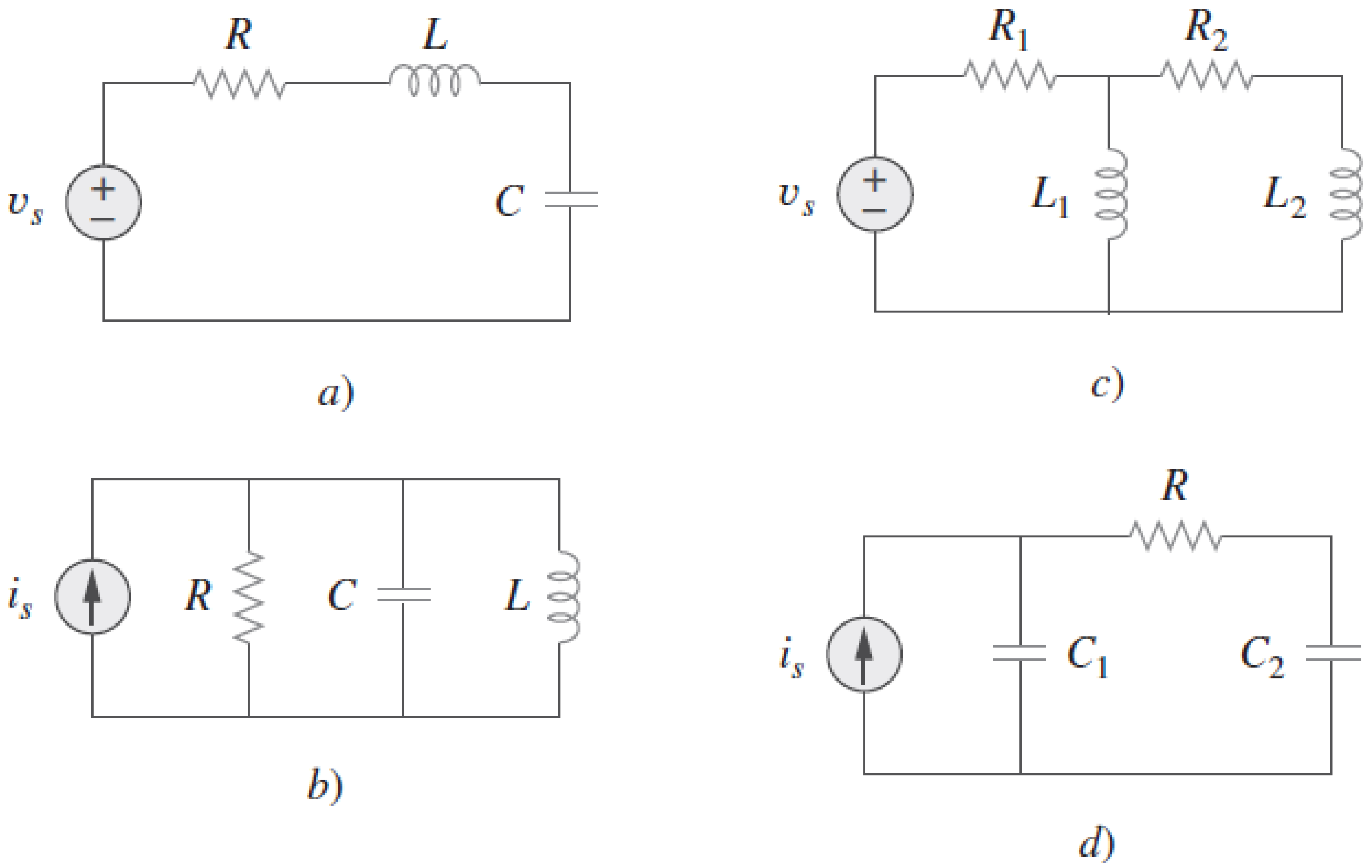
Deysi Inca Balseca

# Análisis de circuitos eléctricos en el dominio del tiempo y de la frecuencia



# Circuito de segundo orden

- Un circuito de segundo orden se caracteriza por una ecuación diferencial de segundo orden. Consta de resistores y el equivalente de dos elementos de almacenamiento de energía.




Ejemplos comunes de circuitos de segundo orden:

*a*) Circuito *RLC* en serie,
*b*) circuito *RLC* en paralelo,
*c*) circuito *RL*,
*d*) circuito *RC*

# Determinación de valores iniciales y finales

- Hay dos puntos clave que se deben tener presentes en la determinación de las condiciones iniciales.
  1. En el análisis de circuitos, se debe manejar con cuidado la polaridad de la tensión $v(t)$ en el capacitor y la dirección de la corriente $i(t)$ a través del inductor.
  2. La tensión del capacitor siempre es continua, de modo que:

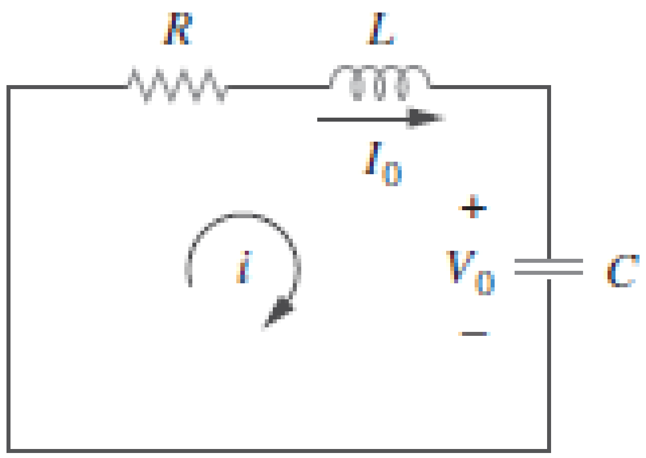
$$v(0^+) = v(0^-)$$

La tensión del capacitor siempre es continua, de modo que

$$i(0^+) = i(0^-)$$

- donde $t = 0^-$ denota el momento justo antes de un evento de conmutación y $t = 0^+$ es el momento justo después del evento de conmutación, suponiendo que este tiene lugar en $t = 0$.

# Circuito RLC en serie sin fuente




$$v(0) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i\,dt = V_0$$

$$i(0) = I_0$$

$$Ri + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0$$

$$i = Ae^{st}$$

$$As^2e^{st} + \frac{AR}{L}se^{st} + \frac{A}{LC}e^{st} = 0$$

$$Ae^{st}\left(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}\right) = 0$$

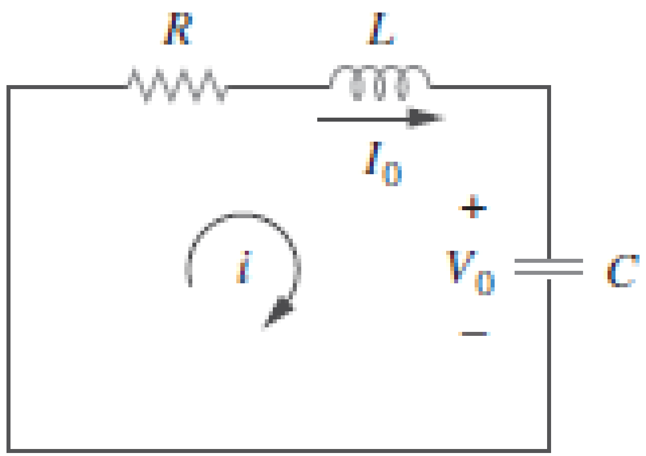
$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} s_1 &= -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \\ s_2 &= -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \end{aligned}}$$

$$\boxed{s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

$$\boxed{s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},}$$

# Circuito RLC en serie sin fuente




$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2},$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

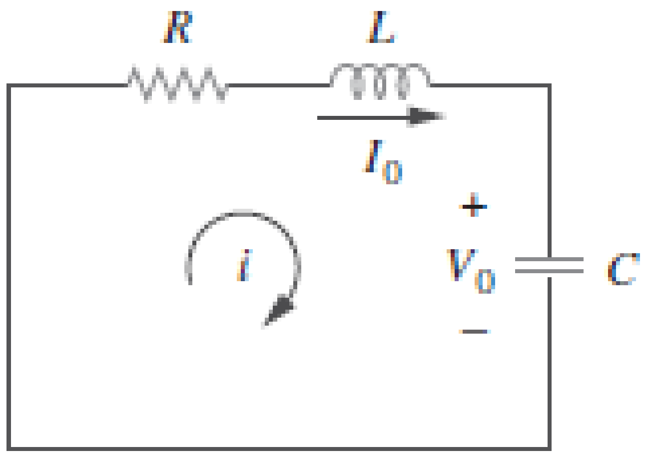
Las raíces $s_1$ y $s_2$ se denominan *frecuencias naturales*, medidas en nepers por segundo (Np/s), porque se asocian con la respuesta natural del circuito; ɯ$_{so0}$ se conoce como *frecuencia resonante*, o más estrictamente como *frecuencia natural no amortiguada*, expresada en radianes por segundo (rad/s), y a es la frecuencia neperiana o factor de amortiguamiento, expresada en nepers por segundo

$$i_1 = A_1 e^{s_1 t}, \qquad i_2 = A_2 e^{s_2 t}$$

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

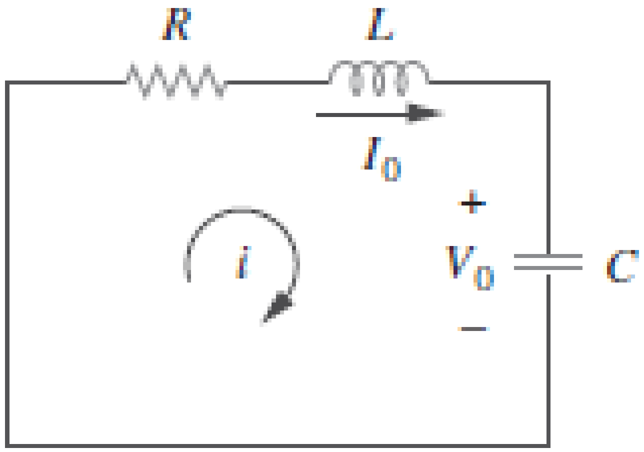
# Circuito RLC en serie sin fuente

$$i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



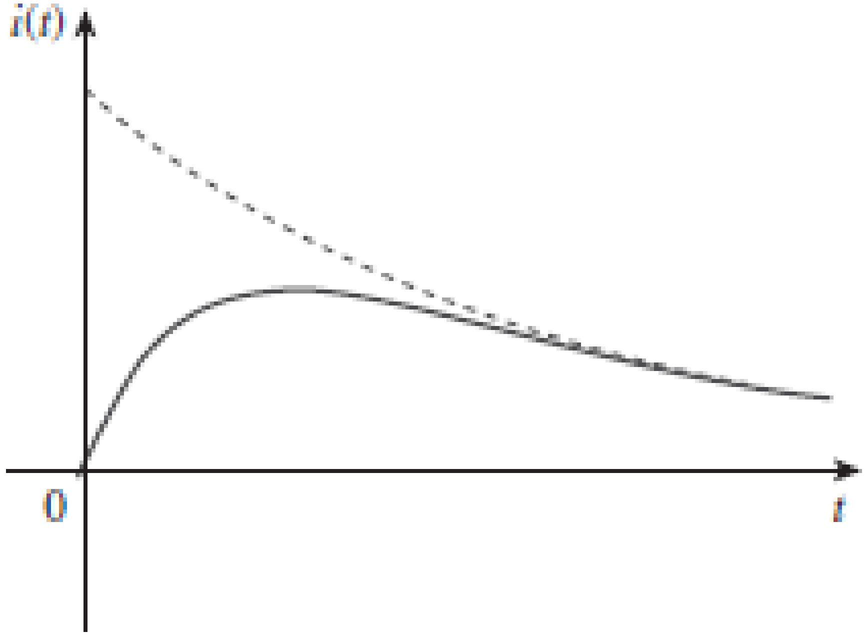

1. Si $\alpha > \omega_0$, se tiene el caso *sobreamortiguado*.
2. Si $\alpha = \omega_0$, se tiene el caso *críticamente amortiguado*.
3. Si $\alpha < \omega_0$, se tiene el caso *subamortiguado*.

# Circuito RLC en serie sin fuente: Caso sobreamortiguado




$$\alpha > \omega_0$$

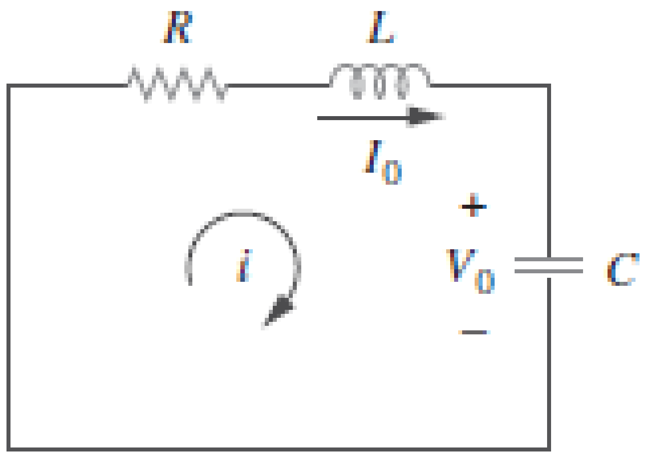
$$C > 4L/R^2$$




*Respuesta sobreamortiguada,*

$$\boxed{i(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$

# Circuito RLC en serie sin fuente: Caso críticamente amortiguado



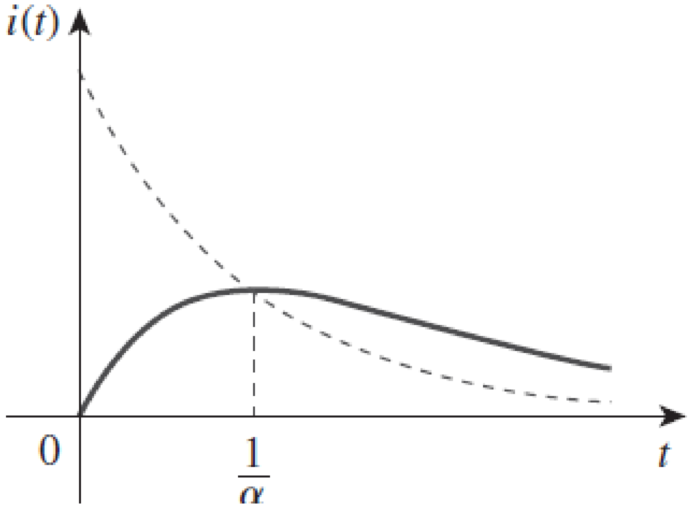

$$\alpha = \omega_0,, C = 4L/R^2$$

$$s_1 = s_2 = -\alpha = -\frac{R}{2L}$$

$$i(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\alpha t} = A_3 e^{-\alpha t}$$

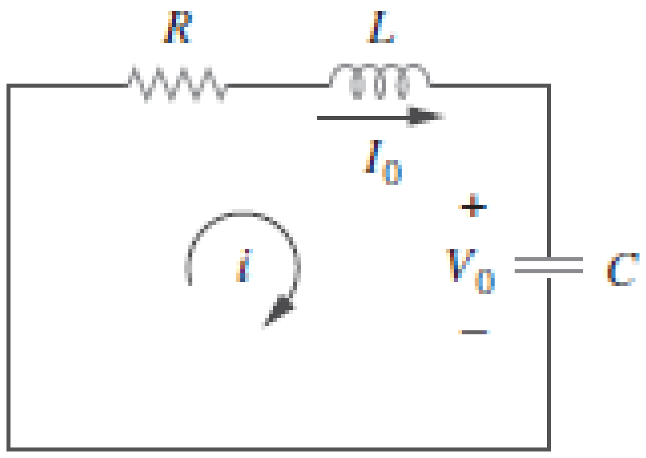
$$A_3 = A_1 + A_2$$

$$i(t) = (A_2 + A_1 t)e^{-\alpha t}$$




*Respuesta críticamente amortiguada,*

# Circuito RLC en serie sin fuente: Caso subamortiguado




$\alpha < \omega_0,\ C > 4L/R^2$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + j\omega_d$$

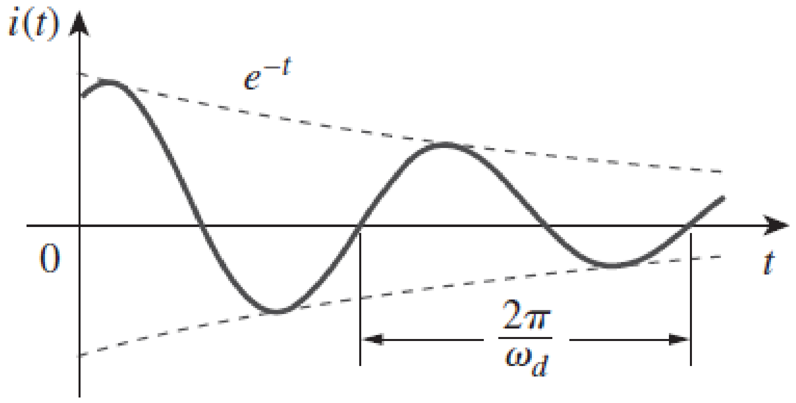
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - j\omega_d$$

$$j = \sqrt{-1} \text{ y } \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

$$\begin{aligned} i(t) &= A_1 e^{-(\alpha - j\omega_d)t} + A_2 e^{-(\alpha + j\omega_d)t} \\ &= e^{-\alpha t}(A_1 e^{j\omega_d t} + A_2 e^{-j\omega_d t}) \end{aligned}$$

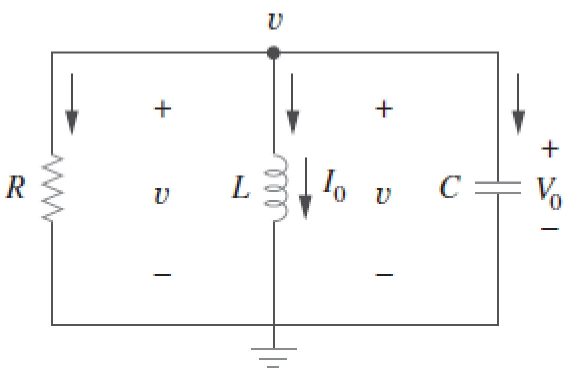
$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\,\text{sen}\,\theta, \qquad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\,\text{sen}\,\theta$$

$$\boxed{i(t) = e^{-\alpha t}(B_1 \cos\omega_d t + B_2\,\text{sen}\,\omega_d t)}$$




*Respuesta subamortiguada*

# Circuito RLC en paralelo sin fuente




$$i(0) = I_0 = \frac{1}{L}\int_{\infty}^{0} v(t)\,dt$$

$$v(0) = V_0$$

$$\frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v(\tau)\,d\tau + C\frac{dv}{dt} = 0$$

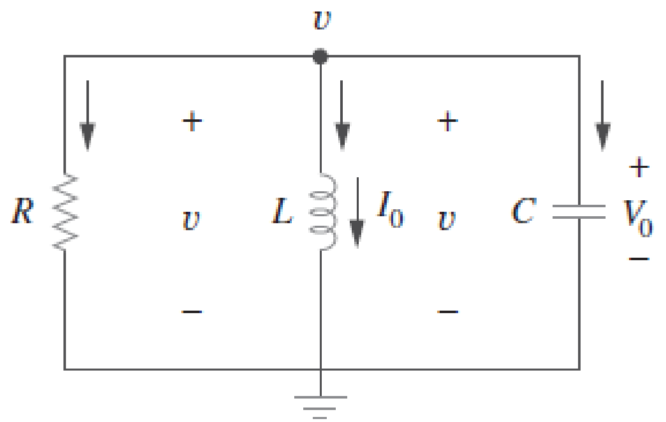
$$\frac{d^2v}{dt^2} \quad s_{1,2} = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

$$s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\boxed{s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2RC}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

# Circuito RLC en paralelo sin fuente: Caso sobreamortiguado

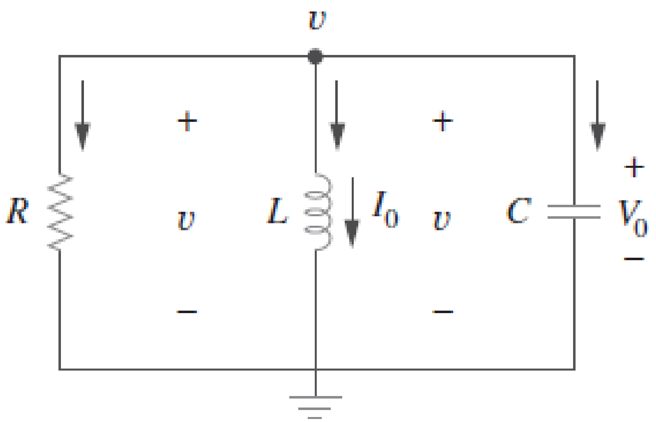



$\alpha > \omega_0$ cuando $L = 4R^2C$.

Las raíces de la ecuación característica son reales y negativas

$$\boxed{v(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}}$$

# Circuito RLC en paralelo sin fuente: Caso críticamente amortiguado

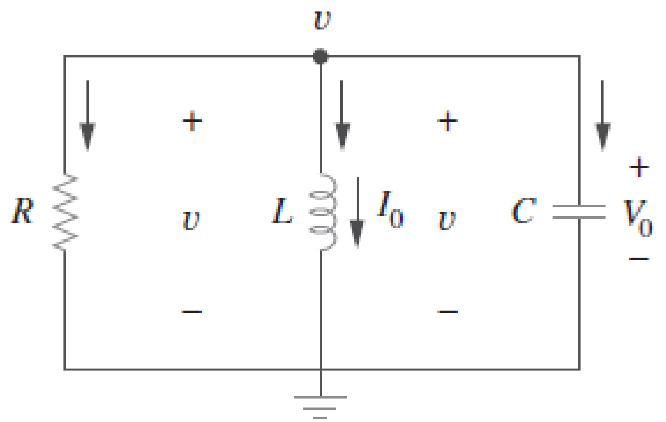



$$\alpha = \omega_0, L = 4R^2C.$$

Las raíces son reales e iguales

$$v(t) = (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t}$$

# Circuito RLC en paralelo sin fuente: Caso subamortiguado



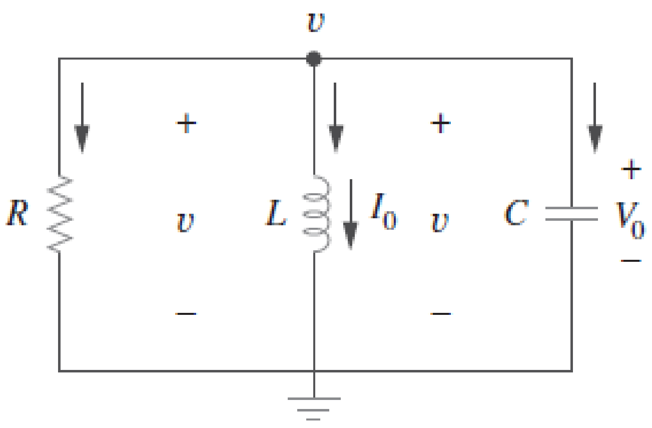

$$\alpha < \omega_0,\ L < 4R^2C$$

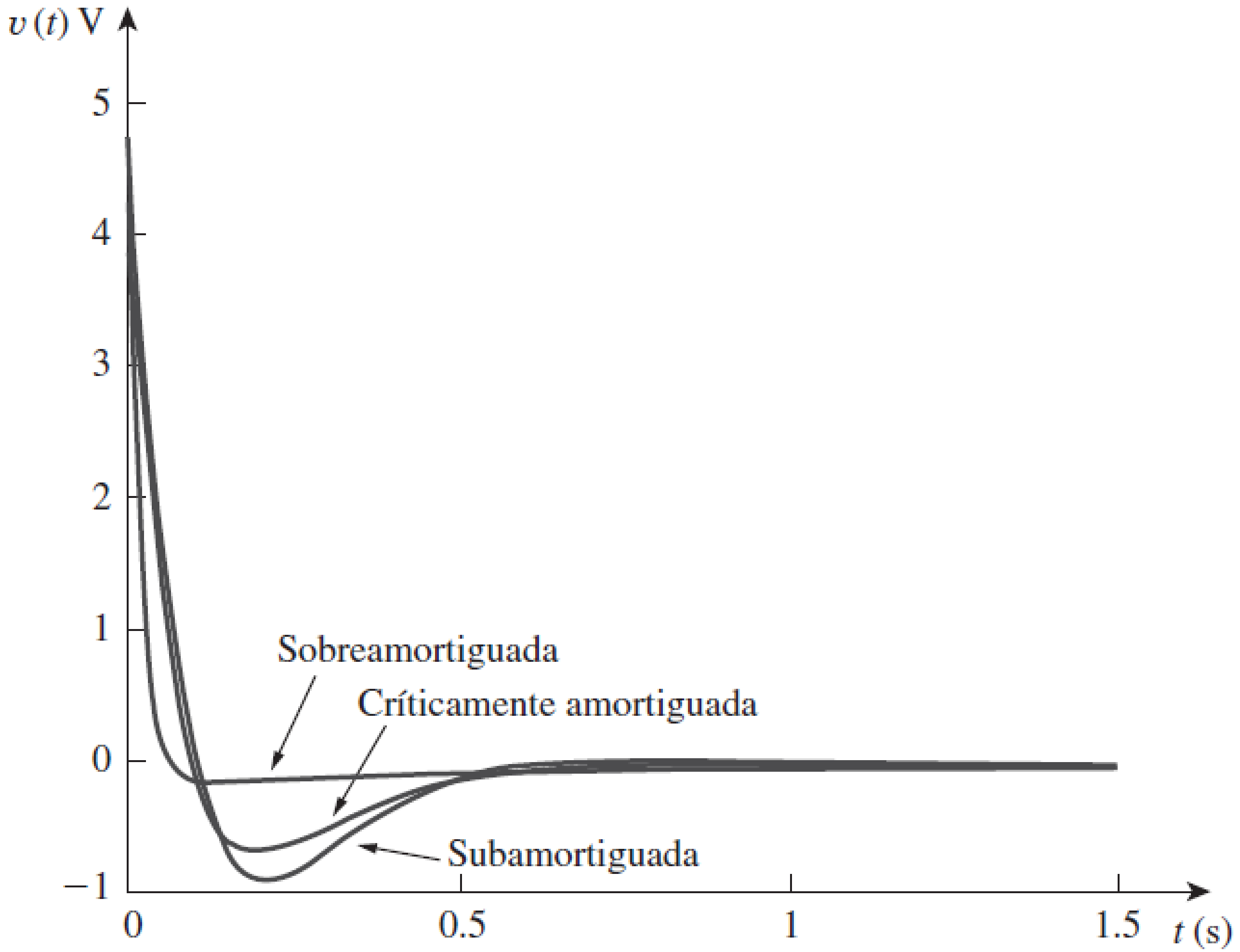
$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$

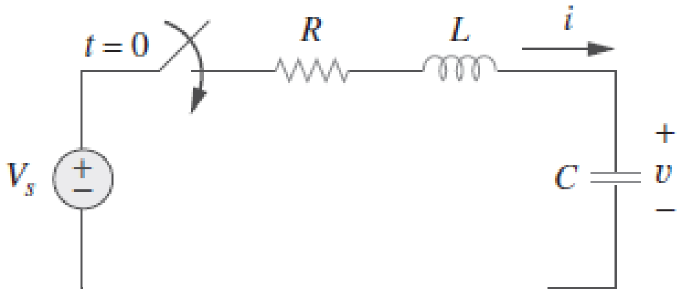
$$\boxed{v(t) = e^{-\alpha t}(A_1 \cos \omega_d t + A_2 \operatorname{sen} \omega_d t)}$$

# Circuito RLC en paralelo sin fuente



# Respuesta escalón de un circuito RLC en serie




$$L\frac{di}{dt} + Ri + v = V_s$$

$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = \frac{V_s}{LC}$$

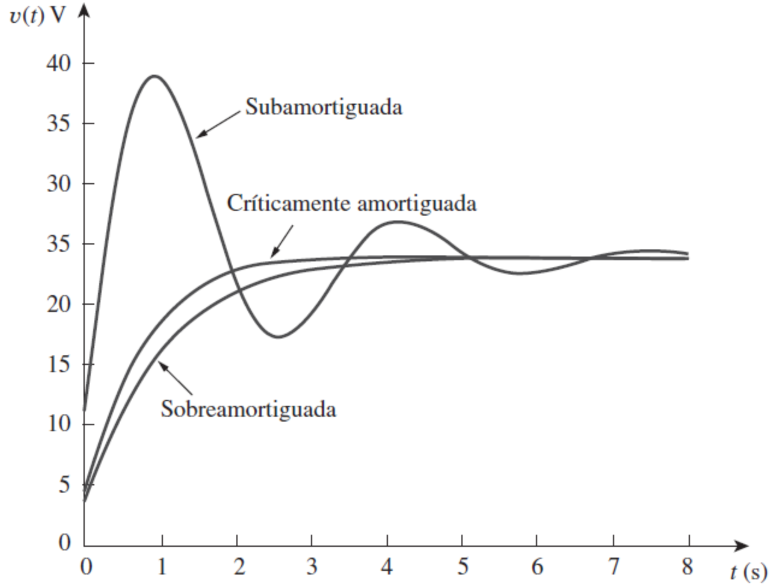
$$v(t) = v_t(t) + v_{ss}(t)$$

$$v_{ss}(t) = v(\infty) = V_s$$

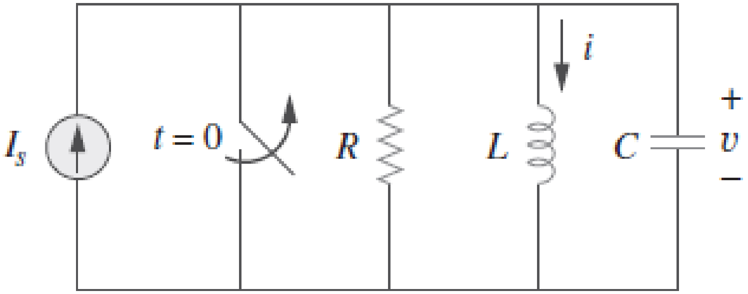
$$v(t) = V_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{(Sobreamortiguado)}$$

$$v(t) = V_s + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \quad \text{(Críticamente amortiguado)}$$

$$v(t) = V_s + (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \operatorname{sen} \omega_d t)e^{-\alpha t} \quad \text{(Subamortiguado)}$$



# Respuesta escalón de un circuito RLC en paralelo




$$i(t) = I_s + A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} \quad \text{(Sobreamortiguado)}$$

$$i(t) = I_s + (A_1 + A_2 t)e^{-\alpha t} \quad \text{(Críticamente amortiguado)}$$

$$i(t) = I_s + (A_1 \cos \omega_d t + A_2 \operatorname{sen} \omega_d t)e^{-\alpha t} \quad \text{(Subamortiguado)}$$

$$\frac{v}{R} + i + C\frac{dv}{dt} = I_s$$

$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{I_s}{LC}$$

$$i(t) = i_t(t) + i_{ss}(t)$$