

DEBER II

MÉTODOS NUMÉRICOS (Métodos Abiertos)

1. Dadas las siguientes expresiones para $x = g(x)$, obtenga $g'(x)$ y **dos valores iniciales** que cumplan que $|g'(x)| < 1$

a) $x = 4 + \frac{x-1}{x+1}$

b) $x = \text{sen}x$

c) $\text{tg}x = \ln x$

2. Determine un $g(x)$ y un valor inicial x_0 tales que $|g'(x)| < 1$ en las siguientes ecuaciones:

a) $2x = 4x^2 - 1$

b) $x^3 - 10x - 5 = 0$

c) $\text{sen}x - \ln x = 0$

d) $e^x - \tan x = 0$

3. Resolver por el **método del punto fijo** las ecuaciones de los problemas anteriores

4. La manera más sencilla de convertir la ecuación en $x = g(x)$, en un problema de punto fijo es sumar x a cada lado de la ecuación, en base a la información dada encontrar una raíz de:

$$\cos x = \text{sen}x$$

RESOLVER LOS EJERCICIOS: 5.1; 5.3; 5.5; 5.6; 5.9; 5.11 referentes al Método de Newton Raphson y la secante

El ejemplo anterior ilustra los factores de mayor importancia involucrados al escoger el método de Newton modificado. Aunque es preferible en raíces múltiples, algunas veces es menos eficiente y requiere más esfuerzo computacional que el método estándar para el caso de raíces simples. Se debe notar que se puede desarrollar una versión modificada del método de la secante para raíces múltiples sustituyendo la ecuación (5.10) en la ecuación (5.7). La fórmula resultante es (Ralston y Rabinowitz, 1978):

$$x_{i+1} = x_i - \frac{u(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{u(x_{i-1}) - u(x_i)}$$

PROBLEMAS

Cálculos a mano

- 5.1** Úsese el método de Newton-Raphson para determinar la raíz mayor de:

$$f(x) = -0.875x^2 + 1.75x + 2.625$$

Empléese un valor inicial de $x_i = 3.1$. Realícese los cálculos hasta que ϵ_s sea menor del $\epsilon_r = 0.01\%$. También verifíquense los errores en la respuesta final.

- 5.2** Determinéense las raíces reales de:

$$f(x) = -2.1 + 6.21x - 3.9x^2 + 0.667x^3$$

a) Gráficamente

b) Usando el método de Newton-Raphson hasta que $\epsilon_s = 0.01\%$.

- 5.3** Empléese el método de Newton-Raphson para determinar las raíces reales de:

$$f(x) = -23.33 + 79.35x - 88.09x^2 + 41.6x^3 - 8.68x^4 + 0.658x^5$$

usando el valor inicial de a) $x_i = 3.5$; b) $x = 4.0$ y c) $x_i = 4.5$. Pruébense y úsese los métodos gráficos para explicar cualquier peculiaridad en los resultados.

- 5.4** Determinéense la raíz real menor de:

$$f(x) = 9.36 - 21.963x + 16.2965x^2 - 3.70377x^3$$

a) Gráficamente

b) Usando el método de la secante, hasta un valor de ϵ_s , correspondiente a tres cifras significativas.

- 5.5** Localícese la raíz positiva de:

$$f(x) = 0.5x - \sin x$$

donde x está dada en radianes. Úse un método gráfico y después calcúlese las iteraciones con el método de Newton-Raphson con un valor inicial de $x_1 = 2$ para calcular la raíz. Replácese los cálculos pero con un valor inicial de $x_1 = 10$. Úse el método gráfico para explicar los resultados.

- 5.6** Encuéntrese la raíz real positiva de:

$$f(x) = x^4 - 8.6x^3 - 35.51x^2 + 464x - 998.46$$

usando el método de la secante. Empleéense los valores iniciales de $x_{1,1} = 7$ y $x_{1,2} = 8$ y calcúlese cuatro iteraciones. Calcúlese ϵ_a e interpreten los resultados.

- 5.7** Realicéense los mismos cálculos del problema 5.6 pero usando el método de Newton-Raphson, con un valor inicial de $x_1 = 7$.

- 5.8** Encuéntrese la raíz cuadrada positiva de 10 usando tres iteraciones con:

- a) El método de Newton-Raphson, con un valor inicial de $x_1 = 3$.
b) El método de la secante, con valores iniciales de $x_{1,1} = 3$ y $x_{1,2} = 3.2$.

- 5.9** Determinese la raíz real de:

$$f(x) = \frac{1 - 0.6x}{x}$$

usando tres iteraciones y el método de la secante con valores iniciales $x_{1,1} = 15$ y $x_{1,2} = 2.0$. Calcúlese el error aproximado ϵ_a después de la segunda y la tercera iteración.

- 5.10** Determinese la raíz real de:

$$f(x) = x^3 - 100$$

con el método de la secante, con $\epsilon_s = 0.1\%$.

- 5.11** Determinese la raíz real mayor de:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

- a) Gráficamente
b) Usando el método de bisección (dos iteraciones, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 3.6$).
c) Usando el método de la regla falsa (dos iteraciones, $x_1 = 2.5$ y $x_2 = 3.6$).
d) Usando el método de Newton-Raphson (dos iteraciones, $x_1 = 3.6$).
e) Usando el método de la secante (dos iteraciones, $x_{1,1} = 2.5$ y $x_{1,2} = 3.6$).

- 5.12** Úse el método de Newton-Raphson para determinar todas las raíces de $f(x) = x^2 + 5.78x - 11.4504$ con $\epsilon_s = 0.001\%$.

- 5.13** Determinese la raíz real más pequeña de:

$$f(x) = 9.36 - 21.963x + 16.2965x^2 - 3.70377x^3$$

- a) Gráficamente
b) Usando el método de bisección (dos iteraciones, $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 1.1$).
c) Usando el método de la regla falsa (dos iteraciones, $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 1.1$).
d) Usando el método de Newton-Raphson (dos iteraciones, $x_1 = 0.5$).
e) Usando el método de la secante (dos iteraciones, $x_{1,1} = 0.5$ y $x_{1,2} = 1.1$).

- 5.14** Determinese la raíz positiva real más pequeña de:

$$f(x) = 4x^4 - 24.8x^3 + 57.04x^2 - 56.76x + 20.57$$

- a) Gráficamente
b) Usando el método disponible más eficiente. Empleéense los valores iniciales de $x_1 = x_{1,1} = 0.5$ y $x_2 = x_{1,2} = 1.5$ y realicéense los cálculos hasta que $\epsilon_s = 15\%$.

- 5.15** Determinese las raíces de

$$f(x) = x^3 - 3.2x^2 - 1.92x + 9.216$$

- a) Gráficamente
b) Usando el método disponible más eficiente con $\epsilon_s = 0.1\%$.

- 5.16** Replácese el problema 4.12, pero usando el método de Newton-Raphson.

- 5.17** Replácese el problema 4.12, pero usando el método de la secante.

Problemas relacionados con la computadora

- 5.18** Desarrollese un programa para el método de Newton-Raphson basado en la figura 5.4 y en la sección 5.2.3. Pruébese el programa duplicando los cálculos del ejemplo 5.3.

- 5.19** Úse el programa desarrollado en el problema 5.18 y duplíquense los cálculos del ejemplo 5.5. Determinese la raíz usando un valor inicial de $x_1 = 0.5$. Realicéense 5, 10, 15 o más iteraciones hasta que el error relativo porcentual exacto sea menor del 0.1%. Gráfiquense los errores relativos porcentuales exacto y aproximado contra el número de iteraciones sobre papel semilogarítmico. Interpretéense los resultados.

- 5.20** Úse el programa desarrollado en el problema 5.18 para resolver los problemas 5.1 al 5.5. En todos los casos, realicéense los cálculos dentro de la tolerancia de $\epsilon_s = 0.001\%$.

- 5.21** Desarrollese un programa para el método de la secante basado en la figura 5.4 y en la sección 5.3.2. Pruébese el programa duplicando los cálculos del ejemplo 5.6.

- 5.22** Úse el programa desarrollado en el problema 5.21 para resolver los problemas 5.6, 5.9 y 5.10. En todos los casos, realicéense los cálculos dentro de la tolerancia de $\epsilon_s = 0.001\%$.

