CAPITULO N°II

VECTORES

2.1.- INTRODUCION

Las propiedades físicas en la mecánica deben expresarse por una magnitud y una cierta unidad que las permita medir y comparar entre si, sin embargo debido a que en algunos casos esa información no es suficiente es necesario clasificar las magnitudes físicas en:

Magnitudes Escalares
Denominamos Magnitudes Escalares a aquellas en las que las medidas quedan correctamente expresadas por medio de un número y la correspondiente unidad. Ejemplo:

- Masa
- Temperatura
- Tiempo
- Densidad

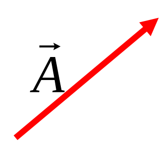
Magnitudes vectoriales
Las magnitudes vectoriales son magnitudes que para estar determinadas precisan de un valor numérico, una dirección, un sentido y un punto de aplicación. Ejemplo:

- Peso
- Normal
- Tensión
- Velocidad

Vector
Un vector es la expresión que proporciona la medida de cualquier magnitud vectorial. Podemos considerarlo como un segmento orientado, en el que cabe distinguir:

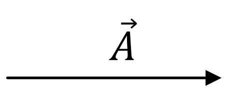
- Un origen o punto de aplicación: A.
- Una dirección: la de la recta que lo contiene.
- Un sentido: indicado por la punta de flecha en B.
- Un módulo, indicativo de la longitud del segmento AB.

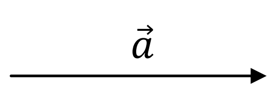
Un vector es la combinación de una magnitud y una dirección, y se representa por una flecha. El vector está representado en su forma polar, o sea por su magnitud y dirección. El vector R del cuadro de abajo está representado en su forma rectangular, o sea por un par de coordenadas que corresponden a sus componentes en x , y respectivamente.



Es importante señalar que, en coordenadas polares el ángulo siempre debe ser medido desde la parte positiva del eje x.
Para convertir de coordenadas polares a rectangulares o viceversa pueden usarse las fórmulas que se presentan en el cuadro a continuación.

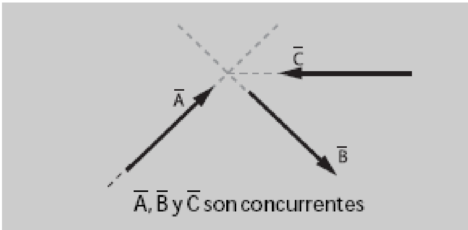
Como se escribe un vector
Un vector se escribe como una letra mayúscula o minúscula con una flecha horizontal encima, ejem:



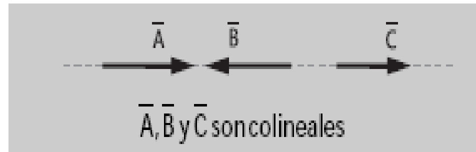


Tipos de vectores

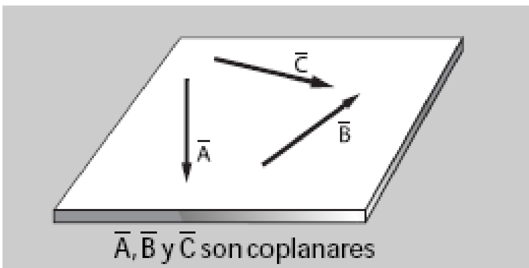
a) Vectores concurrentes

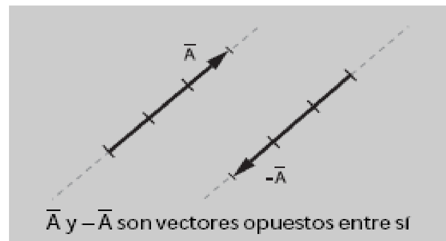


b) Vectores colineales



b) Vectores Coplanares





2.1. Algebra de Vectores

La suma de vectores goza de las siguientes propiedades:

CONMUTATIVA

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$$

ASOCIATIVA

$$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=+\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

ELEMENTO NEUTRO Ó VECTOR CERO

$$\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$$

ELEMENTO SIMÉTRICO U OPUESTO A'

$$\vec{A}+\vec{E}=\vec{E}+\vec{A}=\vec{0} \quad entonces\ \vec{E}=-\vec{A}$$

2.2. Métodos gráficos

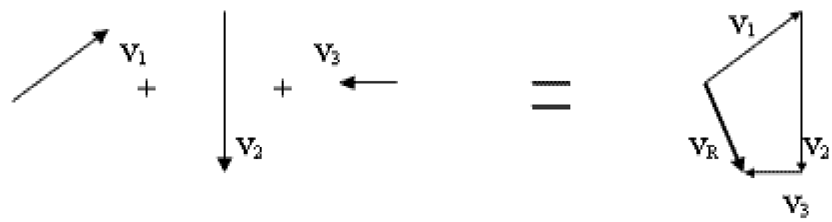
La resultante de la suma o de la diferencia de vectores se puede hallar a través de diferentes métodos, tales como:

Método Gráfico
- Método del Polígono
- Método de Triángulo
- Método del Paralelogramo

Método Analítico

Método del polígono

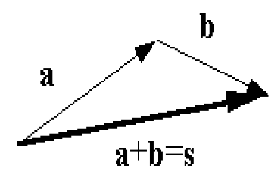
Este método consiste en ordenar los vectores sin importar el orden pero respetando el modulo, dirección sentido y tomando en cuenta que no deben coincidir dos inicios o dos finales en un mismo punto, y la resultante es el vector que nace en el inicio del primer vector y termina en el final del último vector, con lo cual es método se puede ampliar a tres o más vectores. Por ejemplo si deseamos sumar los vectores V1, V2, y V3 representados a continuación:



$V_R = V_1 + V_2 + V_3$: V_R es el vector resultante destacado con línea gruesa.

Método Del Triángulo

Consiste en disponer gráficamente un vector a continuación de otro, es decir, el extremo inicial del vector "b" coincide con el extremo final del vector "a". Luego se traza una diagonal que une el inicio del vector "a" con el resto de los extremos



Método Del Paralelogramo

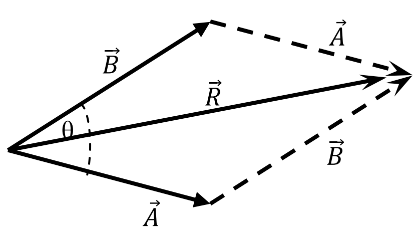
Consistente en trasladar paralelamente los vectores hasta unirlos por el origen, y luego trazar un paralelogramo, del que obtendremos el resultado de la suma, como consecuencia de dibujar la diagonal de ese paralelogramo, como podemos ver en el siguiente dibujo:

2.3. Métodos analíticos

Existe una variedad de métodos en la solución analítica o numérica de vectores, sin embargo se pueden clasificar los mismos en 3, aquellos que tiene una base geométrica, como ser método del paralelogramo, el método del teorema de los cosenos, el método del teorema de los senos, el método del teorema de Lamy, y el método de Pitágoras, y el método de descomponían o método del eje cartesiano, y por último el método vectorial.

a) Método del teorema del paralelogramo

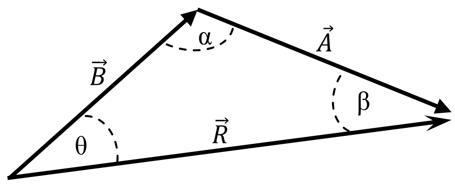
El método del paralelogramo se puede aplicar para obtener la resultante de dos vectores separados un ángulo cualesquiera e indica que la resultante al cuadrado de dos vectores es igual a al suma de los dos vectores al cuadrado mas el doble producto de ambos vectores por el coseno del ángulo que separa los mismos.



$$R^2 = A^2 + B^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos\theta$$

b) Método del Teorema de los cosenos

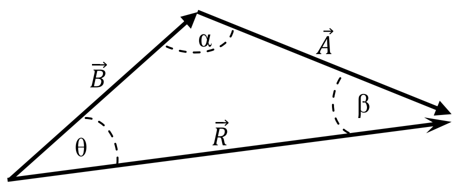
El método del teorema de los cosenos se puede aplicar para obtener la resultante de dos vectores separados un ángulo cualesquiera, además se debe conocer por lo menos dos lados y el ángulo opuesto a la resultante.



$$R^2 = A^2 + B^2 - 2 \cdot A \cdot B \cdot \cos\alpha$$

c) Método del Teorema de los senos

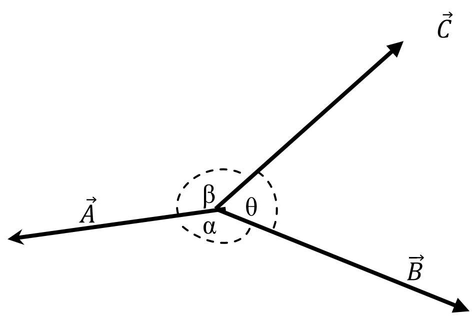
El método del teorema de los senos se puede aplicar para obtener la resultante de dos vectores, pero para ello se debe conocer por lo menos 2 ángulos y un lado:



$$\frac{R}{sen\alpha} = \frac{B}{sen\beta} = \frac{A}{sen\theta}$$

d) Método del Teorema de Lamy

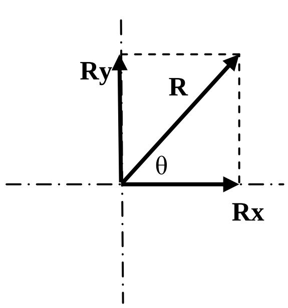
El método del teorema de Lamy se puede aplicar para obtener un tercer vector, pero para ello se debe conocer por lo menos 2 ángulos internos y un lado:



$$\frac{C}{sen\alpha} = \frac{B}{sen\beta} = \frac{A}{sen\theta}$$

e) Método del teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es posible aplicar solo para dos vectores que formen un ángulo de 90° entre si o que sean perpendiculares entre si:



Para calcular la resultante se aplica la formula:

$$R = \sqrt{(Ax)^2 + (Ay)^2}$$

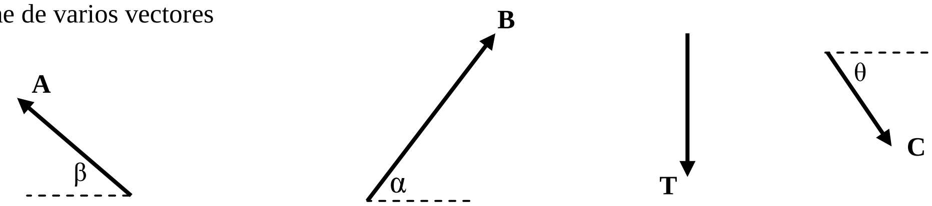
Para calcular la dirección o ángulo que forma el vector con la horizontal :

$$Tg(\theta) = \frac{Ay}{Ax}$$

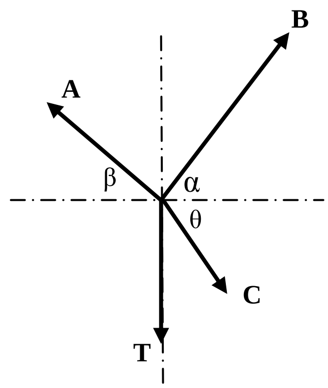
f) Método de descomposición vectorial o eje cartesiano

A diferencia de los anteriores métodos el método de descomposición vectorial, permite hallar la resultante de n vectores, este método consiste en el los siguientes pasos:

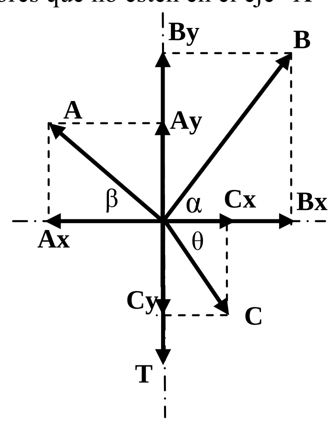
I. Si se dispone de varios vectores



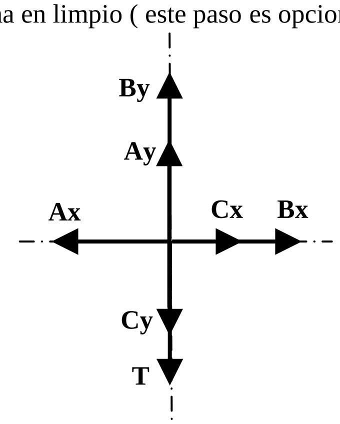
II. Ubicar los vectores en un plano cartesiano respetando su modulo dirección y sentido de cada vector y verificar si los ángulos se miden a partir del eje "X" , si algún ángulo se mide a partir del eje Y restar de 90°



III. Descomponer los vectores que no estén en el eje "X" o eje "Y" sobre los ejes correspondientes



IV. Realizar un diagrama en limpio (este paso es opcional)



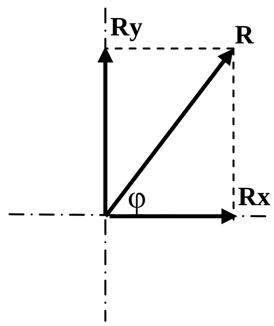
V. Aplicar la sumatoria de vectores en el eje "X" y eje "Y" para hallar las componentes de la resultante en el eje X "Rx" y eje Y " Ry

$$\sum Vx = Rx$$
$$Cx + Bx - Ax = Rx$$
$$Rx = C \cdot \cos\theta + B \cdot \cos\alpha - A \cdot \cos\beta$$

$$\sum Vy = Ry$$
$$By + Ay - Cy - T = Rx$$
$$Ry = B \cdot sen\alpha + A \cdot sen\beta - C \cdot sen\theta - T$$

Nota:
En la sumatoria de vectores en el eje X como en el eje Y se asume que la resultante es positiva.
Si el problema ya da la dirección de la resultante el signo debe corregirse de acuerdo a la posición de de la resultante:

VI. Dibujar las componentes de la resultante en eje X "Rx" y eje Y " Ry y dibujar la resultante



VII. Aplicar el teorema de Pitágoras para hallar la resultante

$$R = \sqrt{(Rx)^2 + (Ry)^2}$$

VIII. Aplicar la función tangente para hallar su dirección

$$Tg(\varphi) = \frac{Ry}{Rx}$$

g) Método de coordenadas

Este método se basa en que es posible ubicar los vectores mediante coordenadas.

- Para hallar la resultante se debe suma las coordenadas correspondientes en cada eje
- Debido a que la resultante es una coordenada para hallar su modulo debe aplicarse Pitágoras
- Para hallar su resultante debe aplicar se la función tangente.
- Para saber su dirección debe dibujarse la resultante en un plano cartesiano

Ejem:
Si A

$$A = (2,4,3) \qquad B = (4,-3,1) \qquad B = (-5,1,-2)$$
$$R = ((2+4-5),(4-3+1),(3+1-2))$$
$$R = (1,2,2)$$
$$\text{Modulo de la resultante}$$
$$|R| = R = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}$$
$$R = \sqrt{5}$$

2.4. Vectores en el espacio

Hasta ahora solo se analizo vectores en el plano sin embargo en la naturaleza todo se encuentra en el espacio razón por la cual es necesario representar vectores en espacio, existen varias maneras de representar vectores en el espacio uno de los métodos más sencillos es a través de sus coordenadas rectangulares:
Todo vector en el espacio a diferencia de un vector en el plano tiene su componente en el eje Z.

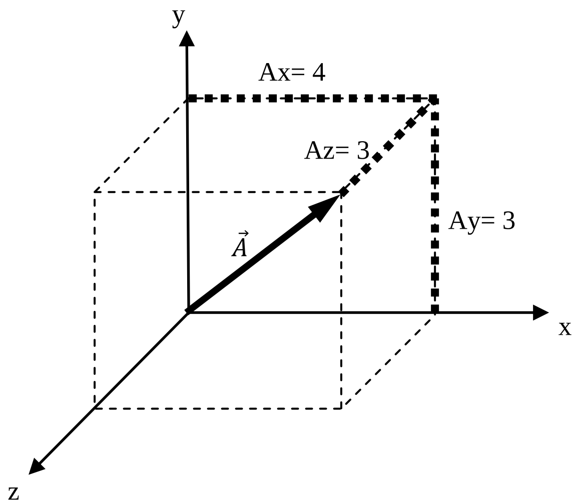
$\vec{A} = (Ax, Ay, Az)$

Para graficar un vector en el espacio se sigue los siguientes pasos:

- Primero: Ubicar las componentes X y Y en un plano cartesiano
- Segundo: En el punto donde se intersecan ambas componentes se traza una paralela al eje Z
- Tercero: Encima del nuevo eje se dibuja la componente del vector en el eje Z si es positivo hacia adelante y si es negativo hacia atrás.

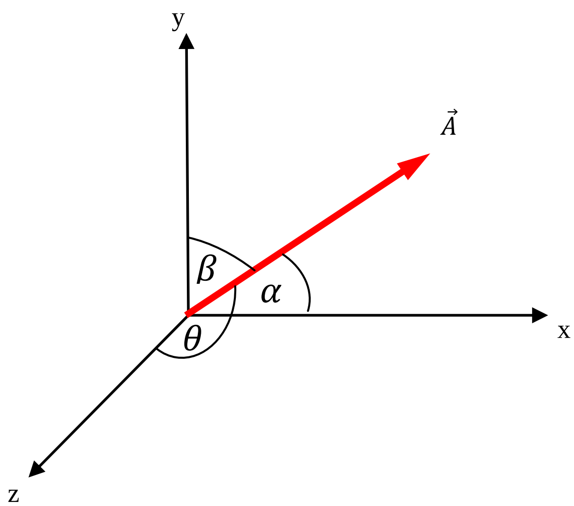
Ejemplo:

Ubicar el vector $\vec{A}$ en el espacio, $\vec{A} = (4,3,3)$



2.5. Cosenos Directores

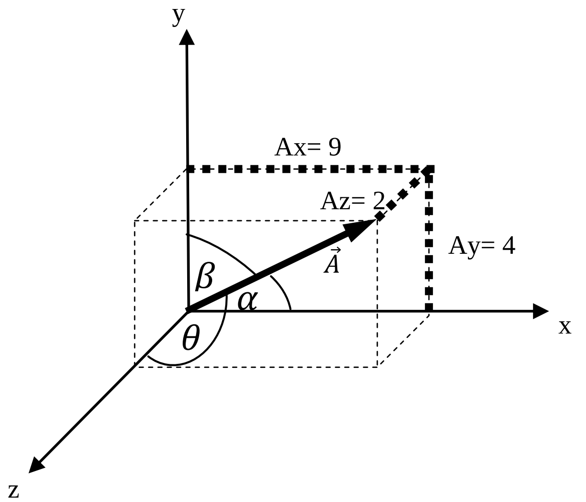
Para ubicar un vector en el espacio es necesario direccionarlo respecto a los tres ejes x,y,z razón por la cual una manera de ubicar un vector en el espacio es a través de los cosenos directores:



$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{Ax}{A}\\ \cos\beta &= \frac{Ay}{A}\\ \cos\theta &= \frac{Az}{A}\end{aligned}\right\} (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

Ejemplo:

Hallar los cosenos directores que ubican el vector $\vec{A}$ en el espacio $\vec{A} = (9,4,2)$



$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{Ax}{A} \\ \cos\beta &= \frac{Ay}{A} \\ \cos\theta &= \frac{Az}{A} \end{aligned}\right\} (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1$$

2.6. Vectores unitarios

Un vector unitario es aquel vector que tiene la misma dirección y sentido del vector original, pero su modulo es 1, dicho vector se denota por ($\widehat{\ }$) y se determina mediante la ecuación:

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

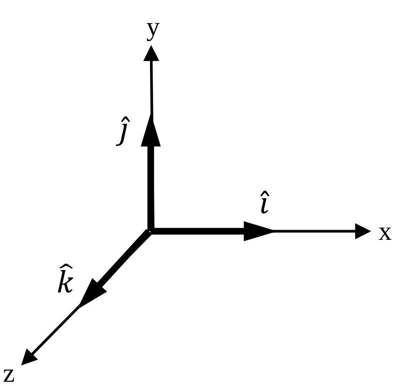
Para verificar si es un vector unitario se debe verificar que el modulo del vector unitario: $|\hat{A}| = 1$

Para representar cualquier vector en el espacio es necesario conocer los vectores unitarios fundamentales o principales que son:

$\hat{\imath}$: *En el eje x*

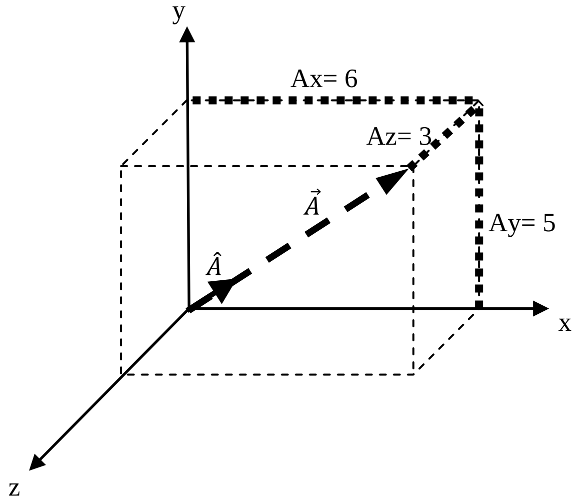
$\hat{\jmath}$: *En el eje y*

$\hat{k}$: *En el eje z*



Ejem:

Hallar el vector unitario de el vector $\vec{A}$ de coordenadas (6,5,3):



a) Determinacion del vector $\vec{A}$

$$\vec{A} = 6\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k}$$

b) Calculo del modulo del vector $\vec{A}$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(6)^2 + (5)^2 + (3)^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = 8{,}367u$$

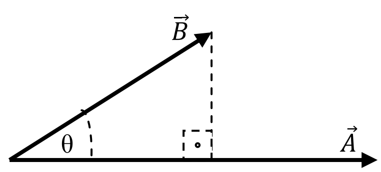
c) Calculo del vector unitario $\hat{A}$

$$\hat{A} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{6\,\hat{\imath} + 5\,\hat{\jmath} + 3\,\hat{k}}{8{,}367}$$

$$\hat{A} = 0{,}717\,\hat{\imath} + 0{,}598\,\hat{\jmath} + 0{,}358\,\hat{k}$$

2.7. El producto escalar (punto)

El producto escalar o producto punto de dos vectores es un escalar , físicamente el producto escalar nos indica la proyección del segundo vector sobre el primero.



El producto escalar es posible calcular mediante dos métodos:

a) Mediante la ecuación:

$$\vec{A} o \vec{B} = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \cos\theta$$

b) Mediante la suma de la multiplicación de sus coordenadas correspondientes:

Si :

$$\vec{A} = (Ax, Ay, Az)$$

$$\vec{B} = (Bx, By, Bz)$$

Entonces :

$$\vec{A} o \vec{B} = (Ax \cdot Bx) + (Ay \cdot By) + (Az \cdot Bz)$$

c) Propiedades del producto escalar

Si $\vec{A} o \vec{B} = 0$ nos indica que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares

Ejem:

Hallar el producto escalar de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el ángulo que forman dichos vectores entre sí.

$\vec{A} = (6,5,-3)$

$\vec{B} = (-2,4,2)$

a) Calculo del producto vectorial

$\vec{A}o\vec{B} = (6\cdot(-2)) + (5\cdot 4) + ((-3)\cdot 2)$

$\vec{A}o\vec{B} = 2\,u$

$b)$ Calculo del angulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Calculo del modulo del vector $\bar{\mathrm{A}}$

$|\bar{\mathrm{A}}| = \sqrt{(6)^2 + (5)^2 + (-3)^2} \;\Rightarrow\; |\bar{\mathrm{A}}| = 8{,}367\,u$

Calculo del modulo del vector $\bar{\mathrm{A}}$

$|\vec{B}| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (2)^2} \;\Rightarrow\; |\bar{\mathrm{A}}| = 4{,}899\,u$

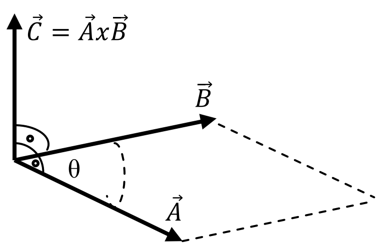
Calculo del angulo θ que separa a los vectores $\bar{\mathrm{A}}$ y $\vec{B}$

$\vec{A}o\vec{B} = |\bar{\mathrm{A}}|\cdot|\vec{B}|\cdot\cos(\theta)$

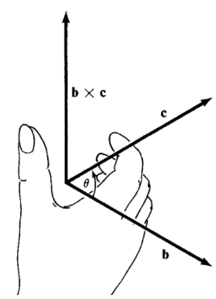
$$\cos(\theta) = \frac{\vec{A}o\vec{B}}{|\bar{\mathrm{A}}|\cdot|\vec{B}|} = \frac{2}{(8{,}367)\cdot(4{,}899)} \Rightarrow \theta = 87{,}20°$$

2.8. El producto vectorial (cruz)

El producto vectorial o producto cruz de dos vectores es otro vector perpendicular a los anteriores vectores, físicamente el modulo del producto vectorial nos indica el área formado por el paralelogramo de ambos vectores.



$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = Area$$



El producto vectorial es posible calcular mediante dos métodos:

a) Mediante la ecuación:

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\cdot\left|\vec{B}\right|\cdot\mathrm{sen}(\theta)$$

b) Mediante la suma de la multiplicación de sus coordenadas correspondientes:

Si :

$\vec{A} = (Ax, Ay, Az)$

$\vec{B} = (Bx, By, Bz)$

Entonces :

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Ay & Az \\ By & Bz \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} Ax & Az \\ Bx & Bz \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} Ax & Ay \\ Bx & By \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\vec{A}x\vec{B} = (Ay\cdot Bz - By\cdot Az)\hat{\imath} - (Ax\cdot Bz - Bx\cdot Az)\hat{\jmath} + (Ax\cdot By - Bx\cdot Ay)\hat{k}$$

c) Propiedades del producto vectorial:

$\vec{A}x\vec{B} = 0$ Nos indica que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son paralelos

$\vec{A}x\vec{B} = -\vec{B}x\vec{A}$ El producto vectorial no es conmutativo

Ejem:

Hallar el producto vectorial de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el ángulo que forman dichos vectores entre sí.

$$\vec{A} = (6,5,-3)$$
$$\vec{B} = (-2,4,2)$$

a) Calculo del producto vectorial

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} 6 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\vec{A}x\vec{B} = [(5)\cdot(2)-(4)\cdot(-3)]\hat{\imath} - [(6)\cdot(2)-(-2)\cdot(-3)]j + ((6)\cdot(4)-(-2)\cdot(5))\hat{k}$$

$$\vec{A}x\vec{B} = 22\hat{\imath} - 6\hat{\jmath} + 34\hat{k}$$

$b)$ Calculo del angulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Calculo del modulo del vector $\vec{A}x\vec{B}$

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \sqrt{(22)^2 + (-6)^2 + (34)^2} \Rightarrow \left|\vec{A}x\vec{B}\right| = 40{,}939\,u$$

Calculo del modulo del vector $\vec{A}$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(6)^2 + (5)^2 + (-3)^2} \Rightarrow \left|\vec{A}\right| = 8{,}367\,u$$

Calculo del modulo del vector $\vec{A}$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (2)^2} \Rightarrow \left|\vec{A}\right| = 4{,}899\,u$$

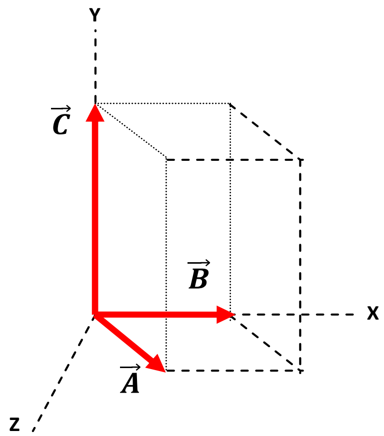
Calculo del angulo θ que separa a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\left|\vec{A}x\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot sen(\theta)$$

$$\text{sen}(\theta) = \frac{\left|\vec{A}x\vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|} = \frac{40{,}939}{(8{,}367)\cdot(4{,}899)} \Rightarrow \theta = 87{,}14°$$

2.9. El producto mixto:

El producto mixto físicamente nos da la proyección del vector superficie dado por el producto escalar , proyectado escalarmente sobre un vector altura, debido a lo cual el producto mixto de tres vectores nos da el volumen de un prisma en el espacio, tal como se indica a continuación:

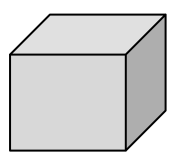


$$\vec{A} = (Ax\, i + Ay\ j + Az\, k)$$
$$\vec{B} = (Bx\, i + By\ j + Bz\, k)$$
$$\vec{C} = (Cx\, i + Cy\ j + Cz\, k)$$

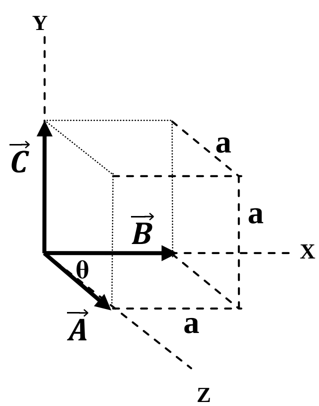
$$\forall = \left| (\vec{A} x \vec{B}) \circ \vec{C} \right| = \begin{vmatrix} Ax & Ay & Az \\ Bx & By & Bz \\ Cx & Cy & Cz \end{vmatrix}$$

$$\forall = (Cx) \cdot [(Ay \cdot Bz) - (By \cdot Az)] - (Cy) \cdot [(Ax \cdot Bz) - (Bx \cdot Az)] + (Cz) \cdot [(Ax \cdot By) - (Bx \cdot Ay)]$$

Ejem: hallar el volumen de de cubo de 1m de lado en forma vectorial



Solucion:.



Primero hallamos los vectores que definen el cubo

$$\vec{A} = (0, 0, a)$$
$$\vec{B} = (a, 0, 0)$$
$$\vec{C} = (0, a, 0)$$

Segundo aplicamos el producto mixto entre los vectores

$$\forall = \left| (\vec{A} x \vec{B}) \circ \vec{C} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \end{vmatrix}$$

$$\forall = (0) \cdot [(0 \cdot 0) - (a \cdot 0)] - (a) \cdot [(0 \cdot 0) - (a \cdot a)] + (0) \cdot [(0 \cdot 0) - (a \cdot 0)]$$
$$\forall = a^3$$

2.10. Representación vectorial de una superficie

En la Figura , representemos una superficie plana, cuya periferia *L* esta orientada como indica la flecha. Esta superficie lo representaremos por el vector ***S,*** cuya magnitud es igual al área de la superficie y cuya dirección es perpendicular a la superficie. El sentido del vector es el de un tornillo de rosca derecha.

A partir de la Figura 3 se puede ver que el plano de la superficie S, hace un ángulo θ con el plano XY. La proyección de S en el plano XY es $S\cos\theta$. Pero la normal al plano de la superficie también forma un ángulo θ con el eje Z. La componente ***Z*** del vector ***S*** es $S_z = S\cos\theta$ del.

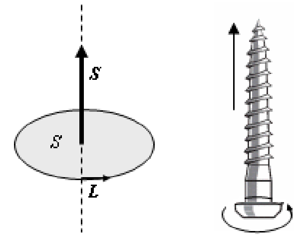


Fig. 2 Representación vectorial de una superficie

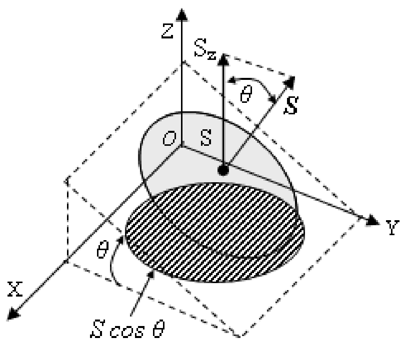


Fig. 2 Proyección de una superficie en un plano

Para ver la utilidad de la representación vectorial de una superficie consideremos un terreno que tenga una parte horizontal y otra se encuentre en una ladera de una colina, como se indica en la Figura 3. Si S_1 y S_2 son las áreas de cada parte, el área total del terreno usable para la agricultura es $S_1 + S_2$. Sin embargo, si el terreno debe ser usado para la construcción de un edificio, lo que realmente es útil es la proyección del terreno en un plano horizontal, esto es $S_1 + S_2 \cos\theta$.

El vector $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S_1} + \boldsymbol{S_2}$ que representa el terreno, tiene una magnitud dada por la siguiente ecuación:

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + 2S_1S_2\cos\theta} \qquad (2.32)$$

Que es mas pequeña que $S_1 + S_2$. Pero su componente a lo largo del eje vertical Z es $S_z = S_1 + S_2\cos\theta$, de acuerdo con la proyección del terreno en el plano horizontal XY.

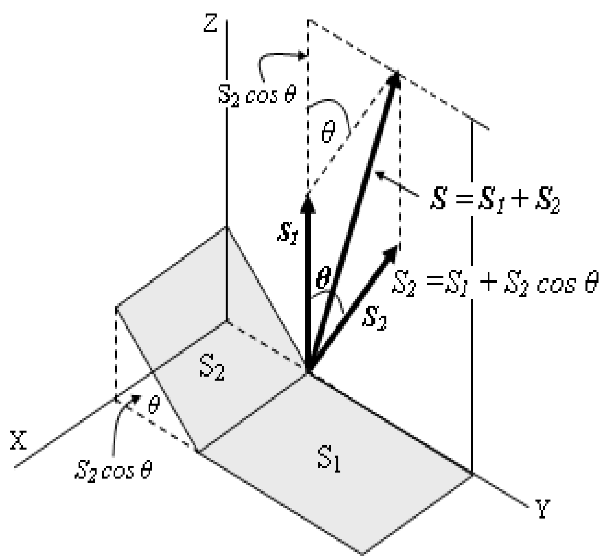


Figura Terreno compuesto por una parte plana y otra inclinada