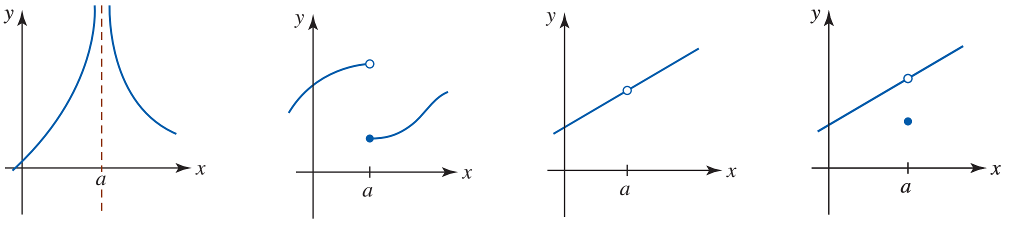
2.3 Continuidad

Introducción En el análisis de la sección 1.1 sobre funciones y gráficas se usó la frase "estos puntos se unen con una curva suave". Esta frase invoca la imagen que es una curva *continua* agradable; en otras palabras, una curva sin rupturas, saltos o huecos. En efecto, una función continua a menudo se describe como una cuya gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.

En la sección 2.2 vimos que el valor funcional $f(a)$ no desempeñaba ningún papel en la determinación de la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$. Pero en la sección 2.2 observamos que los límites cuando $x \to a$ de funciones polinomiales y ciertas funciones racionales pueden encontrarse simplemente al evaluar la función en $x = a$. La razón por la que puede hacerse lo anterior en algunas instancias es el hecho de que la función es *continua* en un número a. En esta sección veremos que tanto el valor de $f(a)$ como el límite de f cuando x tiende a un número a desempeñan papeles primordiales al definir el concepto de continuidad. Antes de proporcionar la definición, en la FIGURA 2.3.1 se ilustran algunos ejemplos intuitivos de funciones que *no* son continuas en a.



a) $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe y $f(a)$ no está definida

b) $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe pero $f(a)$ está definida

c) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero $f(a)$ no está definida

d) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, $f(a)$ está definida, pero $\lim_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

FIGURA 2.3.1 Cuatro ejemplos de f *no* continua en a

Continuidad en un número La figura 2.3.1 sugiere la siguiente condición tripartita de continuidad de una función f en un número a.

Definición 2.3.1 Continuidad en a

Se dice que una función f es **continua** en un número a si

i) $f(a)$ está definido, *ii*) $\lim_{x\to a} f(x)$ existe y *iii*) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si alguna de las condiciones en la definición 2.3.1 no se cumple, entonces se dice que f es **discontinua** en el número a.

EJEMPLO 1 Tres funciones

Determine si cada una de las siguientes funciones es continua en 1.

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$ **b**) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ **c**) $h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$.

Solución

a) f es discontinua en 1 puesto que al sustituir $x = 1$ en la función se obtiene $0/0$. Se afirma que $f(1)$ no está definida, de modo que se viola la primera condición de continuidad en la definición 2.3.1.

b) Debido a que g está definida en 1, es decir, $g(1) = 2$, a continuación se determina si $\lim_{x\to 1} g(x)$ existe. Por

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 3 \qquad (1)$$

Recuerde de sus conocimientos de álgebra que $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

concluimos que $\lim_{x\to 1} g(x)$ existe y es igual a 3. Puesto que este valor no es el mismo que $g(1) = 2$, se viola la segunda condición de la definición 2.3.1. La función g es discontinua en 1.

c) Primero, $h(1)$ está definida; en este caso, $h(1) = 3$. Segundo, $\lim_{x\to 1} h(x) = 3$ por (1) del inciso *b*). Tercero, se tiene $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1) = 3$. Por tanto, se cumplen *las tres* condiciones en la definición 2.3.1 y así la función h es continua en 1.

Las gráficas de las tres funciones se comparan en la FIGURA 2.3.2.

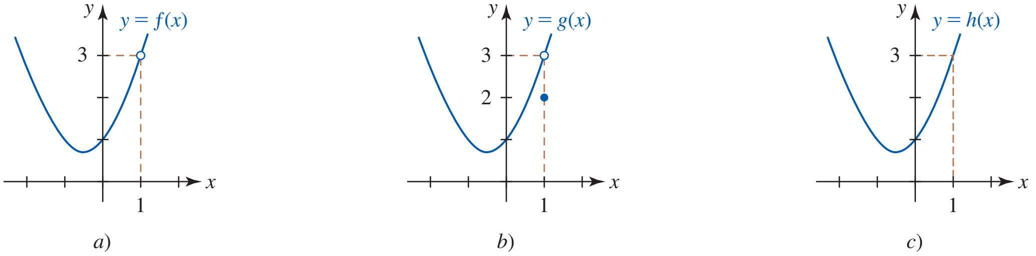


FIGURA 2.3.2 Gráficas de las funciones en el ejemplo 1 ■

EJEMPLO 2 Función definida por partes

Determine si la función definida por partes es continua en 2.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ -x + 6, & x > 2. \end{cases}$$

Solución Primero, observe que $f(2)$ está definida y es igual a 5. Luego, por

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} x^2 = 4 \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} (-x + 6) = 4 \end{aligned}\right\} \text{implica } \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

observamos que el límite de f existe cuando $x \to 2$. Por último, debido a que $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2) = 5$, por *iii*) de la definición 2.3.1 se concluye que f es discontinua en 2. La gráfica de f se muestra en la FIGURA 2.3.3. ■

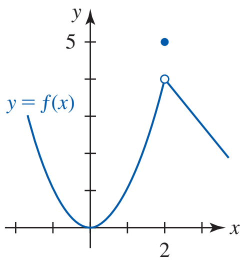


FIGURA 2.3.3 Gráfica de la función en el ejemplo 2

Continuidad sobre un intervalo A continuación veremos que el concepto de continuidad en un número a se extiende a **continuidad sobre un intervalo**.

Definición 2.3.2 Continuidad sobre un intervalo

Una función f es continua

i) sobre un **intervalo abierto** (a, b) si es continua en todo número en el intervalo; y
ii) sobre un **intervalo cerrado** $[a, b]$ si es continua en (a, b) y, además,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = f(b).$$

Si se cumple la condición límite por la derecha $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ dada por *ii*) de la definición 2.3.1, se dice que ***f* es continua por la derecha en *a***; si $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$, entonces ***f* es continua por la izquierda en *b***.

Extensiones de estos conceptos a intervalos como $[a, b)$, $(a, b]$, (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, \infty)$, $[a, \infty)$ y $(-\infty, b]$ se hacen como se espera. Por ejemplo, f es continua en $[1, 5)$ si es continua en el intervalo abierto $(1, 5)$ y es continua por la derecha en 1.

EJEMPLO 3 Continuidad sobre un intervalo

a) Como observamos en la FIGURA 2.3.4*a*), $f(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre el intervalo abierto $(-1, 1)$ pero no es continua sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$, ya que ni $f(-1)$ ni $f(1)$ están definidos.

b) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua sobre $[-1, 1]$. Observe por la figura 2.3.4*b*) que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \text{ y } \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = 0.$$

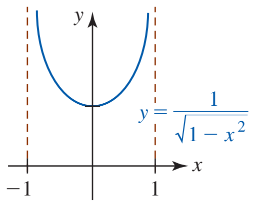
c) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ es continua sobre el intervalo no acotado $[1, \infty)$, ya que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \sqrt{\lim_{x\to a}(x - 1)} = \sqrt{a - 1} = f(a),$$

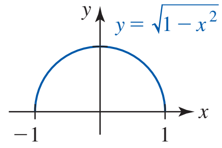
para cualquier número real a que cumpla $a > 1$, y f es continua por la derecha en 1 puesto que

$$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x - 1} = f(1) = 0.$$

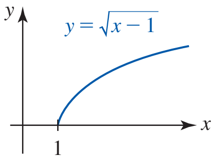
Vea la figura 2.3.4*c*). ■



a)



b)



c)

FIGURA 2.3.4 Gráficas de las funciones en el ejemplo 3

Una revisión de las gráficas en las figuras 1.4.1 y 1.4.2 muestra que $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ son continuas en $(-\infty, \infty)$. Las figuras 1.4.3 y 1.4.5 muestran que $y = \tan x$ y $y = \sec x$ son discontinuas en $x = (2n + 1)\pi/2, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mientras las figuras 1.4.4 y 1.4.6 muestran que $y = \cot x$ y $y = \csc x$ son discontinuas en $x = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Las funciones trigonométricas inversas $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ y $y = \cos^{-1} x$ son continuas sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$. Vea las figuras 1.5.9 y 1.5.12. La función exponencial natural $y = e^x$ es continua sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, mientras que la función logaritmo natural $y = \ln x$ es continua sobre $(0, \infty)$. Vea las figuras 1.6.5 y 1.6.6.

Continuidad de una suma, producto y cociente Cuando dos funciones f y g son continuas en un número a, entonces la combinación de las funciones formadas por suma, multiplicación y división también es continua en a. En el caso de la división f/g es necesario, por supuesto, requerir que $g(a) \neq 0$.

Teorema 2.3.1 Continuidad de una suma, un producto y un cociente

Si las funciones f y g son continuas en un número a, entonces la suma $f + g$, el producto fg y el cociente f/g $(g(a) \neq 0)$ son continuos en $x = a$.

DEMOSTRACIÓN DE LA CONTINUIDAD DEL PRODUCTO *fg* Como una consecuencia de la hipótesis de que las funciones f y g son continuas en un número a, podemos decir que ambas funciones están definidas en $x = a$, los límites de las dos funciones existen cuando x tiende a a y

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = g(a).$$

Debido a que el límite existe, sabemos que el límite de un producto es el producto de los límites:

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(a)g(a).$$

Las demostraciones de las partes restantes del teorema 2.3.1 se obtienen de manera semejante. ■

Puesto que la definición 2.3.1 implica que $f(x) = x$ es continua en cualquier número real x, a partir de aplicaciones sucesivas del teorema 2.3.1 se observa que las funciones $x, x^2, x^3, \ldots, x^n$ también son continuas para cualquier x en el intervalo $(-\infty, \infty)$. Debido a que una función polinomial es justo una suma de potencias de x, otra aplicación del teorema 2.3.1 muestra lo siguiente:

- Una función polinomial f es continua en $(-\infty, \infty)$.

Se dice que las funciones, como las polinomiales, el seno y el coseno, que son continuas para *todos* los números reales, es decir, sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$, son **continuas en todas partes**. De una función que es continua en todas partes también se dice que es **continua**. Luego, si $p(x)$ y $q(x)$ son funciones polinomiales, por el teorema 2.3.1 también se concluye directamente que

- Una función racional $f(x) = p(x)/q(x)$ es continua excepto en números en los que el denominador $q(x)$ es cero.

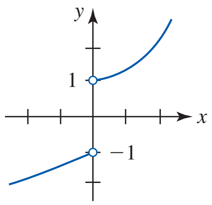


FIGURA 2.3.5 Discontinuidad tipo salto en $x = 0$

Terminología Una discontinuidad de una función f a menudo se denomina de manera especial.

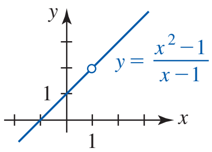
- Si $x = a$ es una asíntota vertical para la gráfica de $y = f(x)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad infinita** en a.

La figura 2.3.1*a*) ilustra una función con una discontinuidad infinita en a.

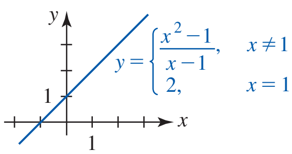
- Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = L_2$ y $L_1 \neq L_2$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad finita** o una **discontinuidad de tipo salto** en a.

La función $y = f(x)$ dada en la FIGURA 2.3.5 tiene una discontinuidad de tipo salto en 0, puesto que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. La función entero mayor $f(x) = \lfloor x \rfloor$ tiene una discontinuidad de tipo salto en todo valor entero de x.

- Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe pero f no está definida en $x = a$ o $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$, entonces se dice que f tiene una **discontinuidad removible** en a.



a) No es continua en 1



b) Continua en 1

FIGURA 2.3.6 Discontinuidad removible en $x = 1$

Por ejemplo, la función $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ no está definida en $x = 1$ pero $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. Al *definir* $f(1) = 2$, la nueva función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

es continua en todas partes. Vea la FIGURA 2.3.6.

Continuidad de f^{-1} La validez del siguiente teorema se concluye del hecho de que la gráfica de la función inversa f^{-1} es una reflexión de la gráfica de f en la recta $y = x$.

Teorema 2.3.2 Continuidad de una función inversa

Si f es una función continua uno a uno sobre un intervalo $[a, b]$, entonces f^{-1} es continua ya sea sobre $[f(a), f(b)]$ o sobre $[f(b), f(a)]$.

La función seno, $f(x) = \text{sen}\, x$, es continua sobre $[-\pi/2, \pi/2]$, y como ya se observó, la inversa de f, $y = \text{sen}^{-1} x$, es continua sobre el intervalo cerrado $[f(-\pi/2), f(\pi/2)] = [-1, 1]$.

Límite de una función compuesta El siguiente teorema establece que si una función es continua, entonces el límite de esa función es la función del límite. La demostración del teorema 2.3.3 se proporciona en el apéndice.

Teorema 2.3.3 Límite de una función compuesta

Si $\lim_{x\to a} g(x) = L$ y f es continua en L, entonces

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(L).$$

El teorema 2.3.3 es útil en la demostración de otros teoremas. Si la función g es continua en a y f es continua en $g(a)$, entonces vemos que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = f(g(a)).$$

Acabamos de demostrar que la composición de dos funciones continuas es continua.

Teorema 2.3.4 Continuidad de una función compuesta

Si g es continua en un número a y f es continua en $g(a)$, entonces la función compuesta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ es continua en a.

EJEMPLO 4 Continuidad de una función compuesta

$f(x) = \sqrt{x}$ es continua sobre el intervalo $[0, \infty)$ y $g(x) = x^2 + 2$ es continua sobre $(-\infty, \infty)$. Pero, puesto que $g(x) \geq 0$ para toda x, la función compuesta

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2 + 2}$$

es continua en todas partes. ■

Si una función f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, como se ilustra en la FIGURA 2.3.7, f asume todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$. Dicho de otra manera, una función continua f no omite ningún valor.

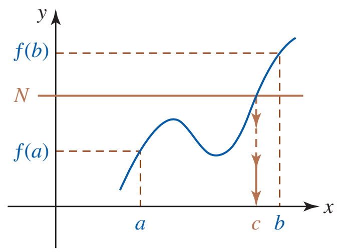


FIGURA 2.3.7 Una función continua f asume todos los valores entre $f(a)$ y $f(b)$

Teorema 2.3.5 Teorema del valor intermedio

Si f denota una función continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$ para el cual $f(a) \neq f(b)$, y si N es cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces existe por lo menos un número c entre a y b tal que $f(c) = N$.

EJEMPLO 5 Consecuencia de la continuidad

La función polinomial $f(x) = x^2 - x - 5$ es continua sobre el intervalo $[-1, 4]$ y $f(-1) = -3$, $f(4) = 7$. Para cualquier número N para el cual $-3 \leq N \leq 7$, el teorema 2.3.5 garantiza que hay una solución para la ecuación $f(c) = N$, es decir, $c^2 - c - 5 = N$ en $[-1, 4]$. Específicamente, si se escoge $N = 1$, entonces $c^2 - c - 5 = 1$ es equivalente a

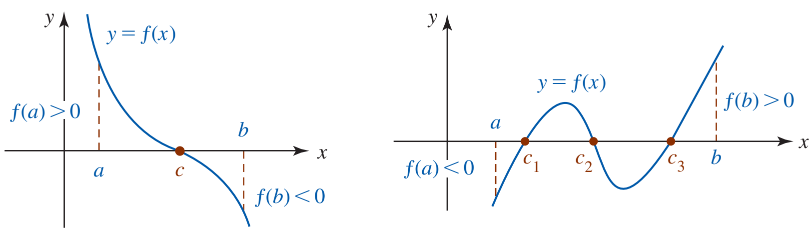
$$c^2 - c - 6 = 0 \qquad \text{o bien,} \qquad (c - 3)(c + 2) = 0.$$

Aunque la última ecuación tiene dos soluciones, sólo el valor $c = 3$ está entre -1 y 4. ■

El ejemplo anterior sugiere un corolario al teorema del valor intermedio.

- Si f satisface las hipótesis del teorema 2.3.5 y $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos algebraicos opuestos, entonces existe un número x entre a y b para el que $f(x) = 0$.

Este hecho se usa a menudo para localizar ceros reales de una función continua f. Si los valores $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos, entonces al identificar $N = 0$ podemos afirmar que hay por lo menos un número c en (a, b) para el cual $f(c) = 0$. En otras palabras, si $f(a) > 0$, $f(b) < 0$ o $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, entonces $f(x)$ tiene por lo menos un cero c en el intervalo (a, b). La validez de esta conclusión se ilustra en la FIGURA 2.3.8.



a) Un cero c en (a, b)

b) Tres ceros en c_1, c_2, c_3 en (a, b)

FIGURA 2.3.8 Localización de ceros de funciones usando el teorema del valor intermedio