TEMA 7 Operaciones entre vectores

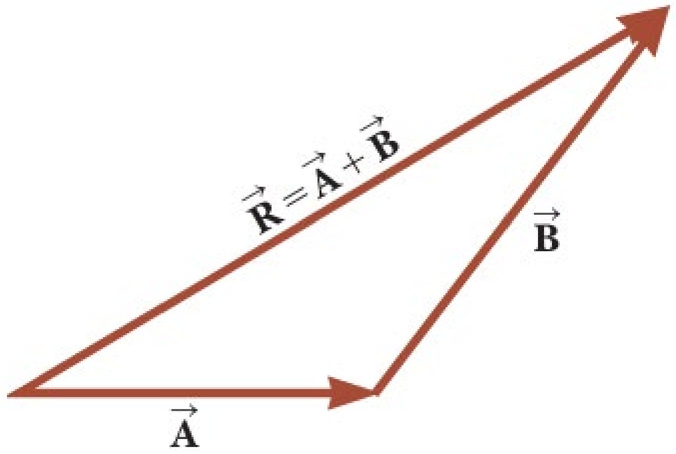
Resultado de aprendizaje: *Realizar operaciones básicas con vectores (suma, resta, producto escalar y producto vectorial) en los planos 2D y 3D en la resolución problemas prácticos.*

Suma y resta de vectores mediante métodos gráficos

Suponga que una partícula experimenta un desplazamiento $\vec{A}$, seguido por un segundo desplazamiento $\vec{B}$. El resultado final es el mismo como si la partícula hubiera partido del mismo punto y experimentado un solo desplazamiento $\vec{R}$.

Llamamos al desplazamiento $\vec{R}$ la **suma vectorial**, o **resultante**, de los desplazamientos $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Expresamos esta relación simbólicamente como:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}}$$

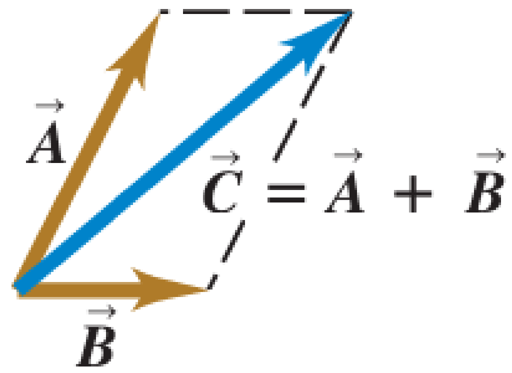


Sumar dos cantidades vectoriales requiere un proceso geométrico y no es lo mismo que sumar dos cantidades escalares como 2 + 3 = 5.

En la suma de vectores existen dos métodos gráficos:

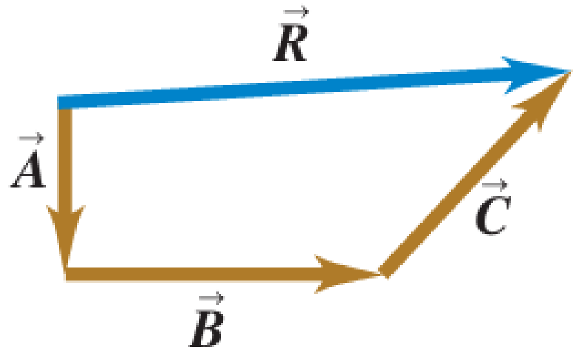
Método del paralelogramo:

A partir de un punto común del plano, se trazan dos vectores y se forma un paralelogramo. La diagonal trazada desde el origen hasta el vértice opuesto, representa el vector resultante. Este método se emplea al sumar únicamente dos vectores.



Método del polígono:

Al sumar vectores, colocamos la cola del segundo vector en la cabeza, o punta, del primer vector. El vector resultante es aquel que completa el polígono: un vector que va desde el origen del primero hasta el extremo del último. Este método puede ser usado para sumar dos o más vectores.

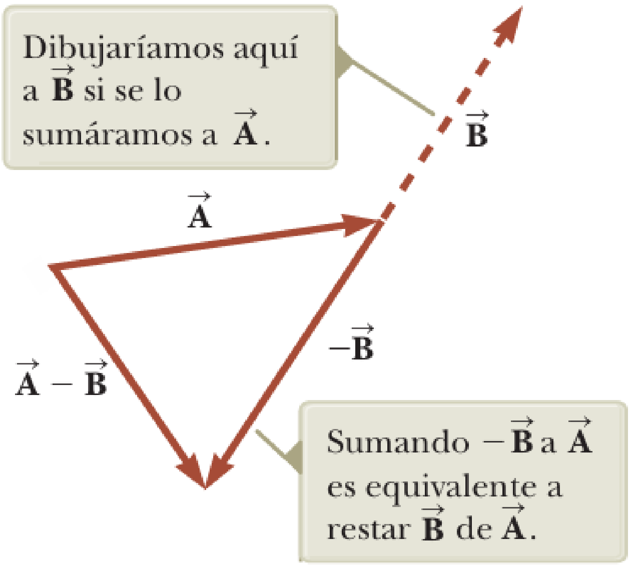


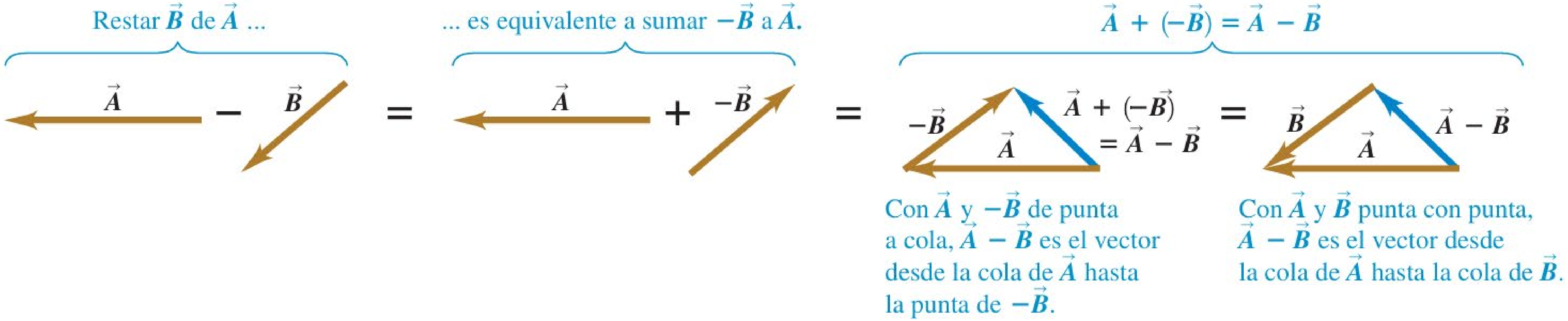
Al igual que sumamos vectores, también podemos restarlos. Para aprender cómo, recuerde que el vector $-\vec{A}$ tiene la misma magnitud que $\vec{A}$ pero dirección opuesta.

Definimos la diferencia $\vec{A} - \vec{B}$ de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como la suma vectorial $\vec{A}$ y $-\vec{B}$:

$$\vec{\boldsymbol{A}} - \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{A}} + (-\vec{\boldsymbol{B}})$$

La figura muestra un ejemplo de resta de vectores.





Ejemplo 7.1

Un esquiador de fondo viaja 1 km al norte y luego 2 km al este por un campo nevado horizontal. ¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto al punto de partida?

Ejemplo 7.2

Un automóvil viaja 20 km al Norte y luego a 35 km en una dirección 60° al noroeste. Encuentre la magnitud y dirección del desplazamiento resultante del automóvil.

Suma y resta de vectores mediante el método analítico

Para sumar algebraicamente dos o más vectores en el plano, estos se suelen expresar en función de sus vectores base.

Si $\vec{A} = (A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath})$ y $\vec{B} = (B_x\,\hat{\imath} + B_y\,\hat{\jmath})$, entonces el vector resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ es:

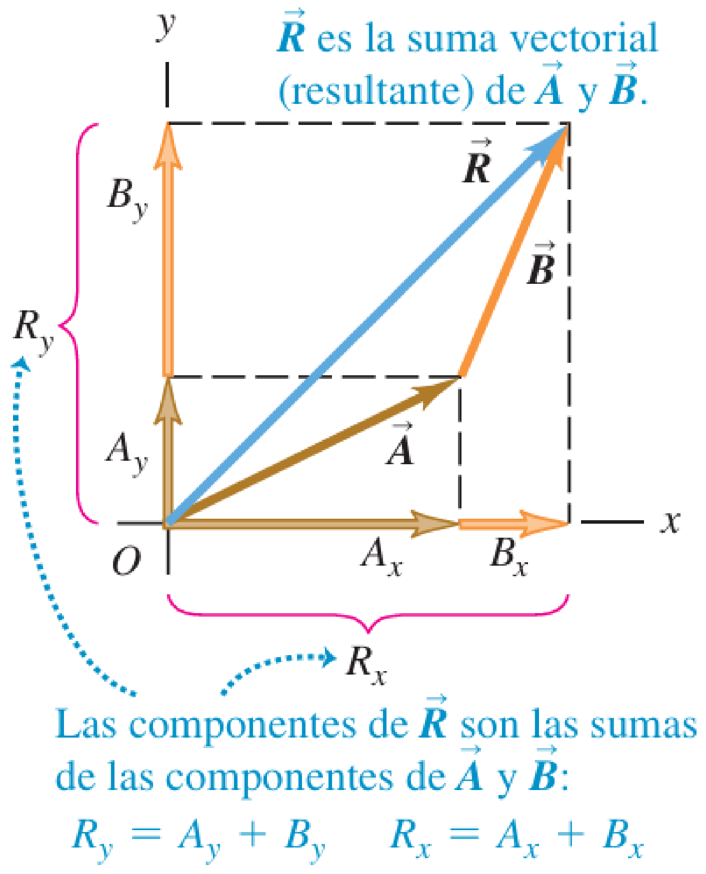
$$\vec{\boldsymbol{R}} = (\boldsymbol{A_x} + \boldsymbol{B_x})\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + (\boldsymbol{A_y} + \boldsymbol{B_y})\,\hat{\boldsymbol{\jmath}}$$

Puesto que $\vec{R} = R_x\,\hat{\imath} + R_y\,\hat{\jmath}$, entonces las componentes del vector resultante son:

Cada **componente de** $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}}$…

$$\boldsymbol{R_x} = \boldsymbol{A_x} + \boldsymbol{B_x}, \qquad \boldsymbol{R_y} = \boldsymbol{A_y} + \boldsymbol{B_y}$$

es la suma de las componentes correspondientes de los demás vectores.



Ejemplo 7.3

Encontrar el vector resultante de la suma de los vectores $\vec{A} = (2; 4)\ m$ y $\vec{B} = (6{,}7\ m; 333°)$.

Ejemplo 7.4

Si $\vec{C} = (-200; 200)\ m/s$, $\vec{C} = (500\ m/s; N70°E)$ y $\vec{C} = 400\ m/s\ (-0{,}654\ \hat{\imath} - 0{,}764\hat{\jmath})$, determine $\vec{C} - \vec{D} - \vec{E}$.

Producto de un escalar por un vector

El producto de un escalar k (un número ordinario) por un vector $\vec{A}$, es otro vector cuyo módulo es k veces la longitud del vector $\vec{A}$ y cuya dirección y sentido:

- Coinciden con la de $\vec{A}$ si $k > 0$.
- Son opuestas a la de $\vec{A}$ si $k < 0$.
- Es nulo si $k = 0$.

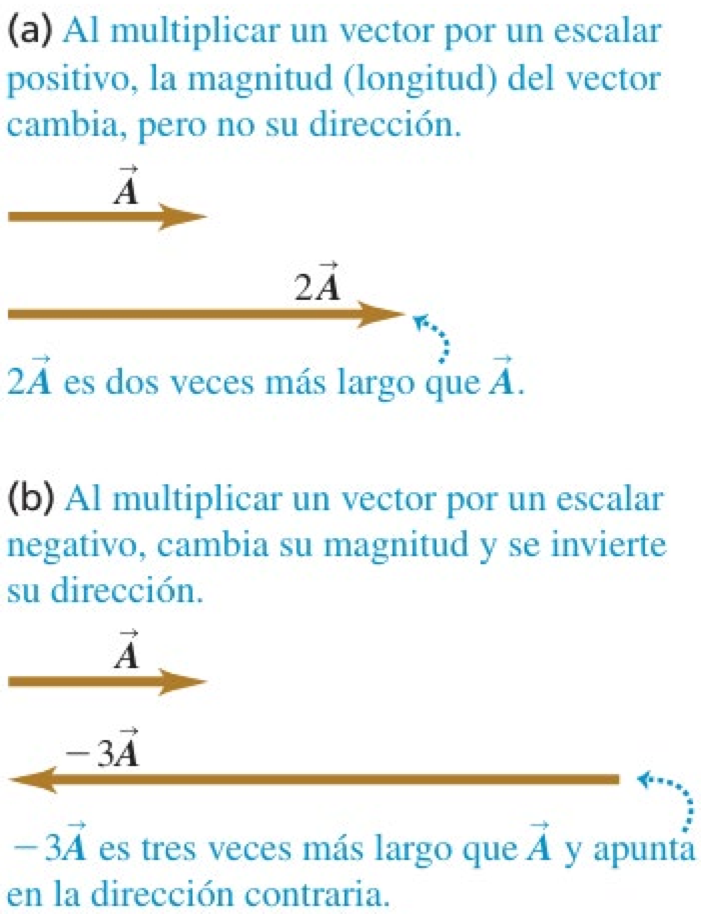
Cada componente del producto $k\vec{A}$ es el producto de k por la componente correspondiente de $\vec{A}$:

Producto de un escalar por un vector:

Cantidad escalar

$$\boldsymbol{k\vec{A} = kA_x\,\hat{\imath} + kA_y\hat{\jmath}}$$

Componentes del vector $\vec{A}$



Ejemplo 7.5

Dado el vector $\vec{P} = (15\ kgf; 258°)$, determine (a) $5\vec{P}$; (b) $-3\vec{P}$ y (c) $\frac{1}{2}\vec{P}$.

Actividades en clase

1. Dados los vectores: $\vec{A} = (5;7)\,N, \vec{B} = (8\,N; 125°), \vec{C} = (6\,N; S20°E)$ y $\vec{D} = (-4\hat{\imath} + 10\hat{\jmath})\,N$; determinar analíticamente:

(a) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ **R.: (12,99 N; 62,4°)**

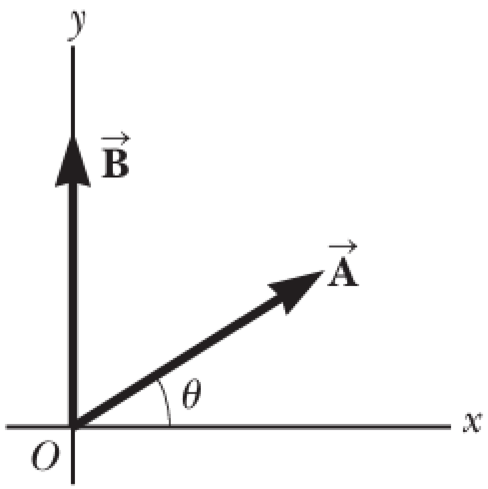
(b) $\vec{D} - 2\vec{A}$ **R.: (14,56 N; 195,9°)**

(c) $-3\vec{A} + \vec{C}$ **R.: (24,88 N; 247,6°)**

(d) $\vec{A} + \vec{D} - 5\vec{B}$ **R.: (28,65 N; 326,7°)**

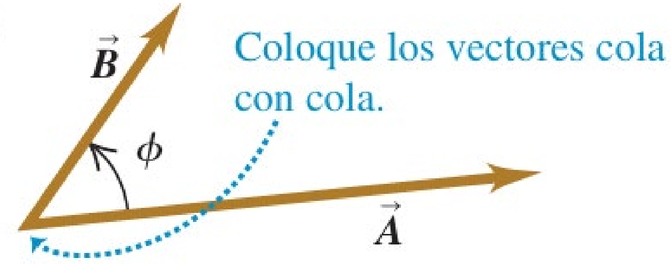
(e) $2\vec{B} - 4\vec{C} + 3\vec{D}$ **R.: (67,4 N; 131°)**

2. En la figura se muestran los vectores de desplazamiento $\vec{A}$ y $\vec{B}$, cuya magnitud es de 3 m para ambos casos. La dirección del vector A es θ=30°. Encuentre mediante el método del paralelogramo y del polígono: (a) $\vec{A} + \vec{B}$, (b) $\vec{A} - \vec{B}$, (c) $\vec{B} - \vec{A}$, y (d) $\vec{A} - 2\vec{B}$.



Producto escalar

El **producto escalar** o **producto punto** entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota como $\vec{A}\cdot\vec{B}$. El resultado de ello *es un escalar*. Se define como el producto de los módulos de los vectores dados por el coseno del menor ángulo que forman entre sí:

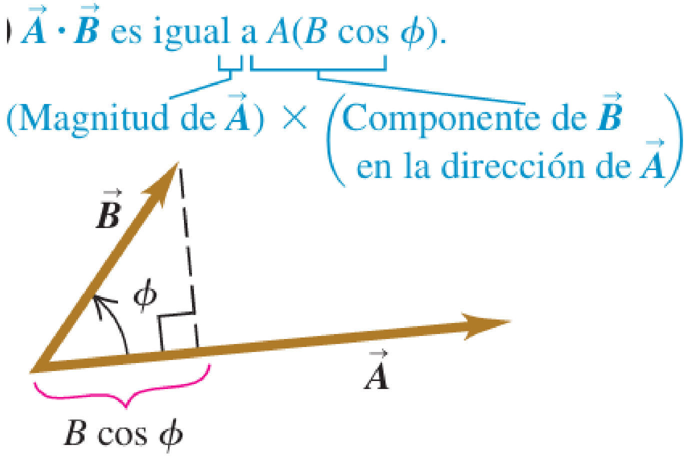


Producto punto entre dos vectores

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\phi$$

Ángulo entre los vectores al colocarse cola con cola

Magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$



Pese a que el resultado es un escalar, puede ser:

- *Positivo* si ϕ está entre 0° y 90°.
- *Negativo* si ϕ está entre 90° y 180°
- *Cero* si los vectores son perpendiculares (ϕ=90°).

También se puede determinar el producto escalar entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ utilizando los componentes x y y de los vectores. Primero, obtenemos primero los productos escalares de los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$. Todos los vectores unitarios tienen magnitud 1 y son perpendiculares entre sí, por lo que:

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = (1)(1)\cos(0°) = 1$$

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} = (1)(1)\cos(90°) = 0$$

Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes, realizamos el producto escalar entre estos vectores, así como entre los vectores unitarios:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}\right) \cdot \left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x\,\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} + A_xB_y\,\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} + A_yB_x\,\hat{\jmath} \cdot \hat{\imath} + A_yB_y\,\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x\,(1) + A_xB_y\,(0) + A_yB_x\,(0) + A_yB_y(1)$$

De manera que el producto punto, en término de las coordenadas, es:

Producto punto entre dos vectores

Componentes de $\vec{A}$

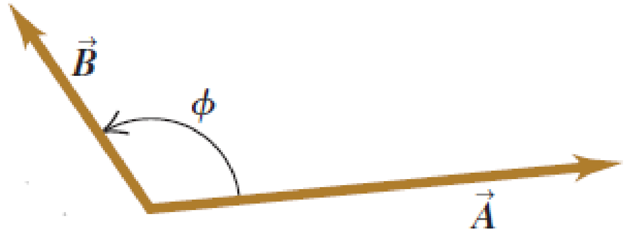
$$\boldsymbol{\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y}$$

Componentes de $\vec{B}$

Aplicaciones del producto escalar:

1. *Para calcular el ángulo formado entre dos vectores.*

Si se igualan las ecuaciones del producto escalar, se tiene:



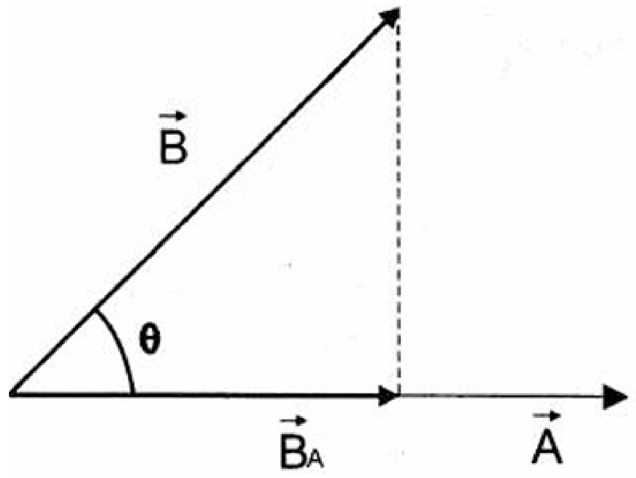
$$ABcos\phi = A_xB_x + A_yB_y$$

$$\boldsymbol{cos\phi = \frac{A_xB_x + A_yB_y}{AB}}$$

2. *Para calcular la proyección de un vector sobre otro.*

En la figura, se observa que $cos\theta = B_A/B$. Luego:

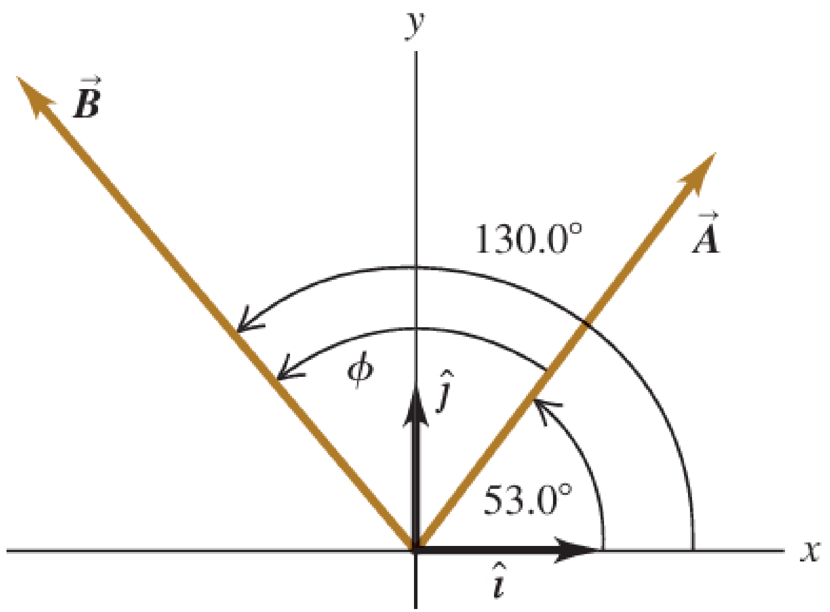
$$B_A = Bcos\theta$$
$$\boldsymbol{\vec{B}_A = Bcos\theta \cdot \vec{u}_A}$$
$$\boldsymbol{\vec{A}_B = Acos\theta \cdot \vec{u}_B}$$



donde $\vec{B}_A$ se denomina proyección del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$.

Ejemplo 7.6

Las magnitudes de los vectores de la figura son A =4 cm; B =5 cm. Determine: (a) El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$; (b) el ángulo formado entre los dos vectores; (c) la proyección de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$; (d) la proyección de $\vec{B}$ sobre $\vec{A}$.



Ejemplo 7.7

Dados los vectores $\vec{C} = (45\,m; 32°)$ y $\vec{D} = (-56\hat{\imath} + 21\hat{\jmath})m$, calcular: (a) El producto escalar $\vec{C} \cdot \vec{D}$; (b) el ángulo formado entre los dos vectores; (c) la proyección de $\vec{C}$ sobre $\vec{D}$; (d) la proyección de $\vec{D}$ sobre $\vec{C}$.

Producto vectorial

El **producto vectorial** o **producto cruz** entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se denota como $\vec{A} \times \vec{B}$. El resultado de ello *es otro vector*. La magnitud se obtiene multiplicando los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por el seno del menor ángulo formado entre ellos:

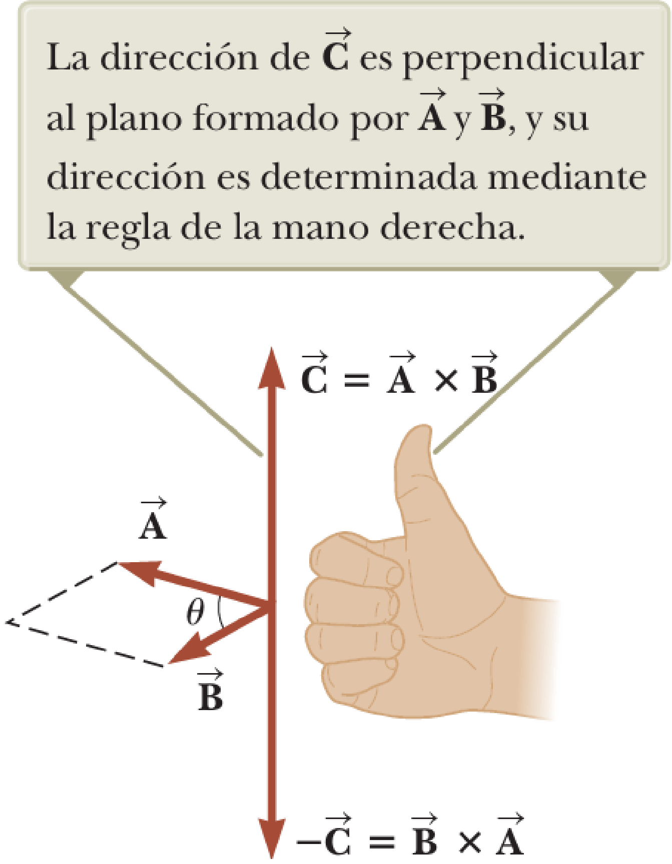
Módulo del **producto cruz** entre dos vectores

$$\vec{A} \times \vec{B} = AB\,\mathrm{sen}\,\phi$$

Ángulo entre los vectores al colocarse cola con cola

Magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$

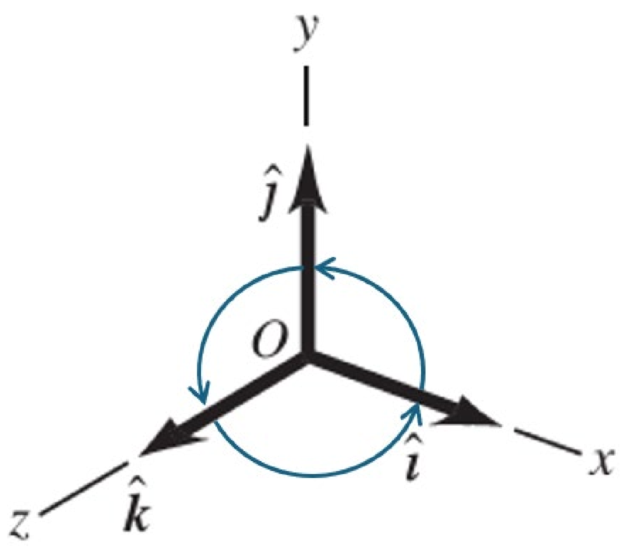
Luego, la dirección del vector resultante es *perpendicular al plano que contiene a los dos vectores*. Aquí, se debe aplicar **la regla de la mano derecha**: apunte los dedos al primer vector con la palma enfrente al segundo vector; luego gírelos en esa dirección. El pulgar apunta hacia la dirección.



También se puede determinar el producto vectorial entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ utilizando los componentes x y y de los vectores, y aumentando un eje z que es perpendicular a ellos.

Primero, obtenemos los productos vectoriales de los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$. El producto vectorial de cualquier vector consigo mismo es cero (dado que $sen\, 0° = 0$), de modo que:

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$



Luego, utilizando un sistema de coordenadas de mano derecha como el que se muestra en la figura, se obtienen los siguientes resultados:

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath} \qquad \hat{k} \times \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \qquad \hat{\imath} \times \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

Observe que estos resultados se pueden verificar aplicando la regla de la mano derecha, siguiendo el orden que se muestra.

Ahora expresamos $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en términos de sus componentes y los vectores unitarios correspondientes y desarrollamos la expresión del producto vectorial:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}\right) \cdot \left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath}\right)$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = A_xB_x\ \hat{\imath} \times \hat{\imath} + A_xB_y\ \hat{\imath} \times \hat{\jmath} + A_yB_x\ \hat{\jmath} \times \hat{\imath} + A_yB_y\ \hat{\jmath} \times \hat{\jmath}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x\ (0) + A_xB_y\ \left(\hat{k}\right) + A_yB_x\ (-\hat{k}) + A_yB_y(0)$$

De manera que el producto cruz, en términos de las coordenadas, es:

Producto cruz entre dos vectores

Componentes de $\vec{A}$

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = (\boldsymbol{A_x B_y} - \boldsymbol{A_y B_x})\hat{\boldsymbol{k}}$$

Dirección del vector resultante

Componentes de $\vec{B}$

Este producto cruz también suele expresarse de manera matricial como:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_x} & \boldsymbol{A_y} \\ \boldsymbol{B_x} & \boldsymbol{B_y} \end{vmatrix} \hat{\boldsymbol{k}}$$

Aplicaciones del producto vectorial:

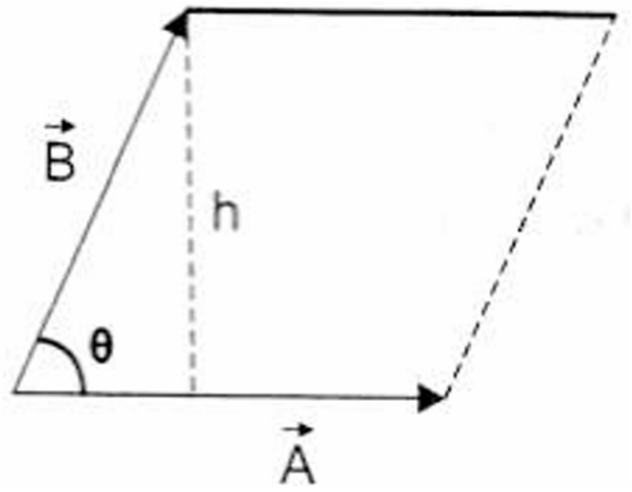
1. *Cálculo del área de un paralelogramo.*

$$\text{Área} = \text{base}\times\text{altura}$$

$$\text{Área} = A \times h$$

$$\text{Área} = ABsen\theta$$

$$\textbf{Área} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A_x} & \boldsymbol{A_y} \\ \boldsymbol{B_x} & \boldsymbol{B_y} \end{vmatrix}$$

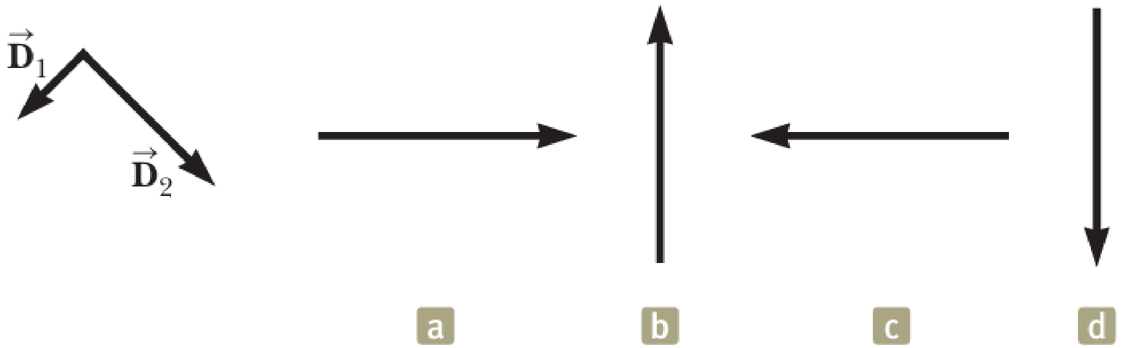


2. *Cálculo de vectores en el movimiento circular*

Se puede determinar múltiples vectores, como la velocidad lineal, aceleración tangencial, aceleración centrípeta, etc.; los cuales se estudiarán más adelante.

PUNTO DE CONTROL:

La figura muestra dos vectores, $\vec{D}_1$ y $\vec{D}_2$. ¿Cuál de las posibilidades de la (a) a la (d) es el vector $\vec{D}_2 - 2\vec{D}_1$?



Ejemplo 7.8

Dados los vectores $\vec{A} = (60\ km/h; S18°O)$ y $\vec{B} = 50\ km/h\ (-0{,}458\ \hat{\imath} + 0{,}859\ \hat{\jmath})$, determine: (a) el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ y $\vec{B} \times \vec{A}$; (b) El área del paralelogramo formado por los dos vectores; (c) El ángulo comprendido entre ambos vectores.

Ejemplo 7.9

El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 6 unidades y está sobre el eje +x. $\vec{B}$ tiene una magnitud de 4 unidades y está en el plano xy formando un ángulo de 30° con el eje +x. Calcule el producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ y $\vec{B} \times \vec{A}$.

Actividades en clase

1. Para los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ de la figura, obtenga los productos escalares: (a) $\vec{A}\cdot\vec{B}$; (b) $\vec{B}\cdot\vec{C}$ y (c) $\vec{A}\cdot\vec{C}$.

R.: (a) -104 m^2; (b) -148 m^2; (c) 40,6 m^2

2. Calcule el ángulo formado entre los siguientes pares de vectores:

(a) $\vec{A} = (-2\hat{\imath} + 6\hat{\jmath})N$; $\vec{B} = (2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath})N$

(b) $\vec{A} = (3\hat{\imath} + 5\hat{\jmath})kgf$; $\vec{B} = (10\hat{\imath} + 6\hat{\jmath})kgf$

(c) $\vec{A} = (-4\hat{\imath} + 2\hat{\jmath})m$; $\vec{B} = (7\hat{\imath} + 14\hat{\jmath})m$

R.: (a) 165°; (b) 28°; (c) 90°.

3. Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{D}$ de la figura, (a) obtenga la magnitud y la dirección del producto vectorial $\vec{A}\times\vec{D}$; (b) calcule la magnitud y la dirección de $\vec{D}\times\vec{A}$.

R.: (a) (-63,9 m^2) $\hat{k}$; (b) (63,9 m^2) $\hat{k}$