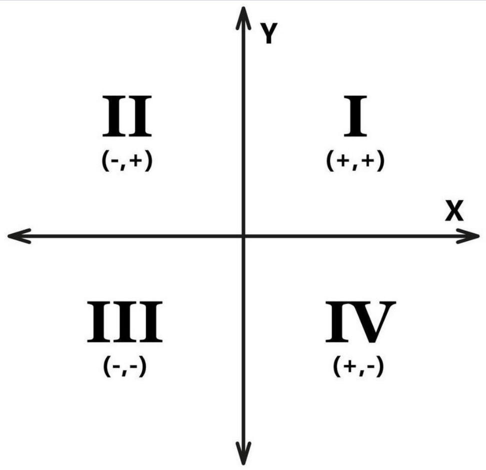
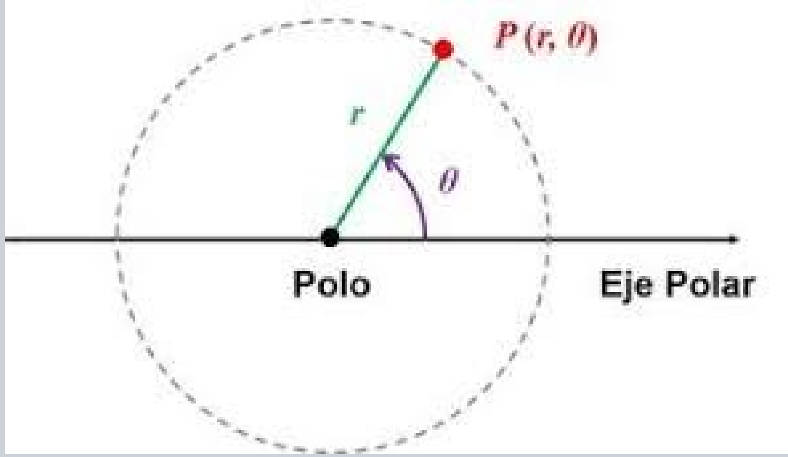
TEMA 5

Introducción a los vectores

Resultado de aprendizaje: *Analiza las diferencias entre magnitudes escalares y vectoriales, mediante el estudio de sus características, para su apropiada aplicación en la resolución de problemas físicos.*

Sistemas de coordenadas

Característica	Coordenadas rectangulares	Coordenadas polares
Gráfica		
Concepto	Se forma por dos ejes numéricos perpendiculares entre sí llamados **ejes**. El punto de intersección se llama **origen de coordenadas**, designado con la letra O, y se determina con un par ordenado que representa su posición en los ejes.	Se forma con un eje numérico de referencia denominado **eje polar**. En un punto se halla el origen llamado **polo** y se determina con un par ordenado con un *radio vector* y un *ángulo polar* medido en sentido antihorario desde el eje.
Representación	$(x; y)$	$(r; \theta)$

Vectores y escalares

En física, de manera general, se emplean dos tipos de magnitudes: la **escalar** y la **vectorial**.

Una **magnitud escalar** es la que se define solamente por su valor numérico en un sistema de unidades seleccionado.

Ejemplos: longitud: 10 metros

masa: 72 kg

rapidez: 10 km/h

tiempo: 8 segundos

Una **magnitud vectorial** es la que se define mediante su valor numérico, dirección y sentido, en un sistema de unidades seleccionado.

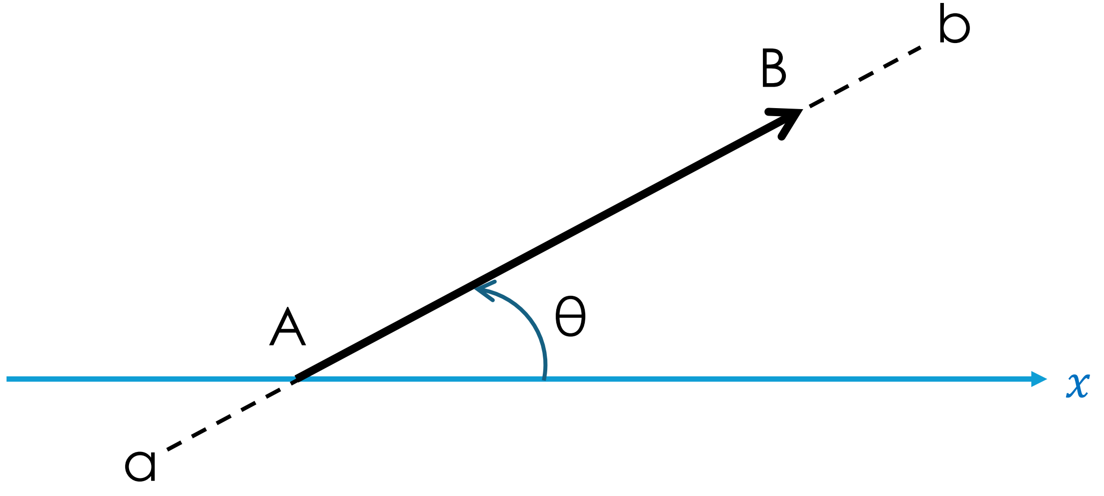
Ejemplos: desplazamiento: 10 m al norte

fuerza: 77 kgf; 125°

velocidad: 60 km; S70°O

aceleración: $(-4\,\hat{\imath}+6\,\hat{\jmath})$ m/s^2

Las magnitudes vectoriales se representan gráficamente con segmentos orientados llamados **vectores**.

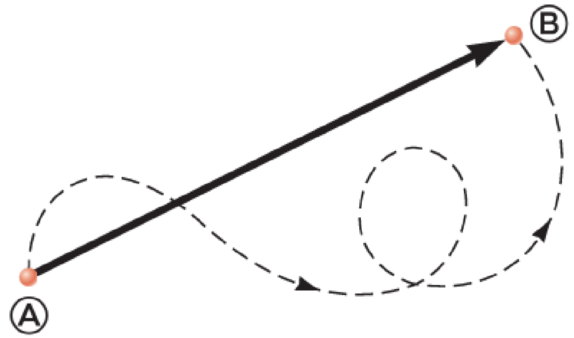


- Un vector queda definido por dos puntos: su origen, en el punto A; y el extremo en el punto B.
- La longitud representa una escala seleccionada su **módulo** o **magnitud**.
- El ángulo que forma el vector con el eje de referencia (x positivo) en el sentido antihorario, representa la **dirección**.
- La saeta del vector (punta de la flecha) representa el **sentido**.
- La recta ab a lo largo de la cual está dirigida el vector, se llama **línea de acción del vector**.

Los vectores se representan con una letra mayúscula con una flecha sobre ella, como $\vec{A}$. En algunos libros, también se suelen representar con un carácter en negrita, como **A**.

El módulo del vector $\vec{A}$ se escribe con la misma letra pero sin la flecha de la parte superior, como A, o entre barras, como $|\vec{A}|$.

El módulo de un vector tiene unidades físicas, como metros para desplazamiento o metros por segundo para velocidad. Además, *siempre* es un número positivo.



Por ejemplo, un desplazamiento (que es una magnitud vectorial) siempre es una línea recta dirigida desde la posición inicial hasta la posición final, y no depende de la trayectoria seguida incluso si ésta es curva (que es una magnitud escalar).

PUNTO DE CONTROL:

¿Cuáles de las siguientes son cantidades vectoriales y cuáles son cantidades escalares? (a) su edad; (b) aceleración; (c) velocidad; (d) rapidez; (e) masa.

Descomposición de un vector en el plano

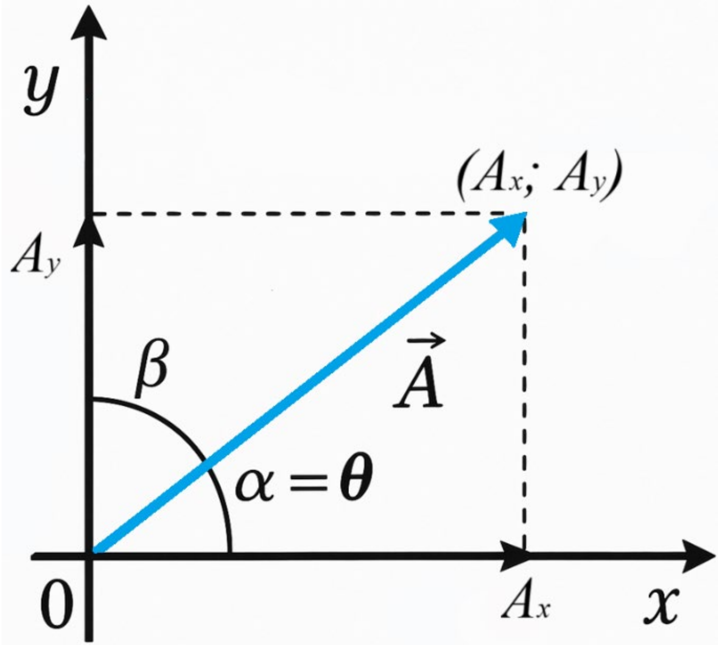
Si se coloca el punto inicial de un vector $\vec{A}$ en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, entonces este vector quedará determinado por las coordenadas rectangulares $(A_x;\ A_y)$ del punto final.

En consecuencia, un vector en el plano se define con un par ordenado:

$$\vec{A} = (A_x;\ A_y),$$

donde A_x y A_y se llaman **componentes del vector** $\vec{A}$ con respecto al sistema de coordenadas dado.

Utilizamos A_x y A_y para indicarnos, respectivamente, la posición de un vector paralelo al eje x y la posición paralela al eje y.



Los **componentes cartesianas de $\vec{A}$ en términos de las coordenadas polares** son las proyecciones de dicho vector sobre los ejes de coordenadas, las cuales pueden ser obtenidas por trigonometría:

$$cos\ \alpha = \frac{A_x}{A} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_x = A \cdot cos\ \alpha}$$

$$sen\ \alpha = \frac{A_y}{A} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A_y = A \cdot sen\ \alpha}$$

Además, es posible deducir los **componentes polares de $\vec{A}$ en términos de las coordenadas cartesianas**; al determinar el módulo y dirección:

$$\boldsymbol{A^2 = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

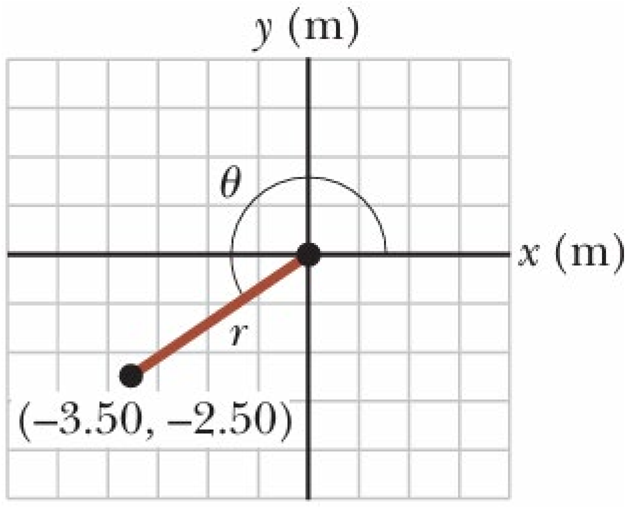
$$\boldsymbol{tan\ \theta = \frac{A_y}{A_x}}$$

Estas cuatro expresiones, que relacionan las coordenadas $(x; y)$ con las coordenadas $(r; \theta)$, se aplican sólo cuando θ se define como se muestra en la figura anterior; es decir, cuando θ es positivo, es un ángulo que se mide contra el sentido de las manecillas del reloj a partir del eje x positivo.

Si como eje de referencia para el ángulo polar θ se elige otro distinto del eje x positivo o si el sentido de θ creciente se elige de modo diferente, cambiarán las expresiones que relacionan los dos conjuntos de coordenadas

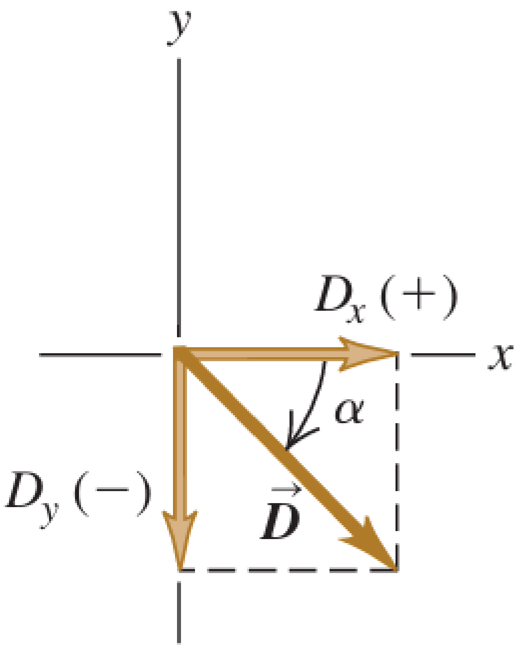
Ejemplo 5.1

Las coordenadas cartesianas de un punto en el plano xy se muestran en la figura. Encuentre las coordenadas polares de este punto.



Ejemplo 5.2

¿Cuáles son las componentes x y y del vector $\vec{D}$ en la figura? La magnitud del vector es D = 3 m y el ángulo es α=45°.



Actividades en clase

1. Las coordenadas polares de un punto son r = 5,50 m y θ = 240°. ¿Cuáles son las coordenadas cartesianas de este punto?

R.: (-2,75; -4,76) m

2. Dos puntos en el plano xy tienen coordenadas cartesianas (2; −4) m y (−3; 3) m. Determine: (a) la distancia entre estos puntos y (b) sus coordenadas polares.

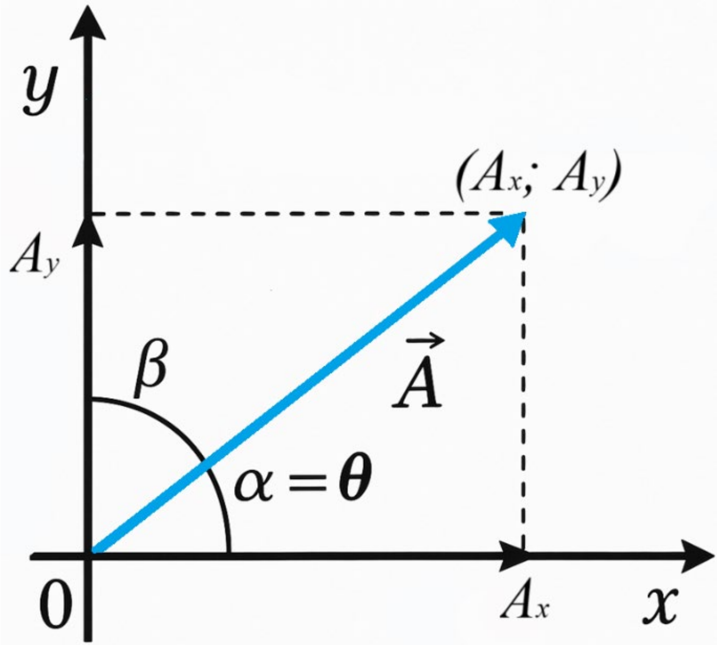
R.: (a) 8,6 m; (b) (4,47 m; -63,4°); (4,24 m; 135°)

3. Dos puntos en un plano tienen coordenadas polares (2,5 m; 30°) y (3,8 m, 120°). Determine (a) las coordenadas cartesianas de estos puntos y (b) la distancia entre ellos.

R.: (a) (2,17; 1,25) m; (-1,9; 3,29) m; (b) 4,55 m

Ángulos directores y vectores base

Los **ángulos directores** son aquellos que forman el vector con los ejes positivos x e y del sistema de coordenadas rectangulares y varían entre 0° y 180°.



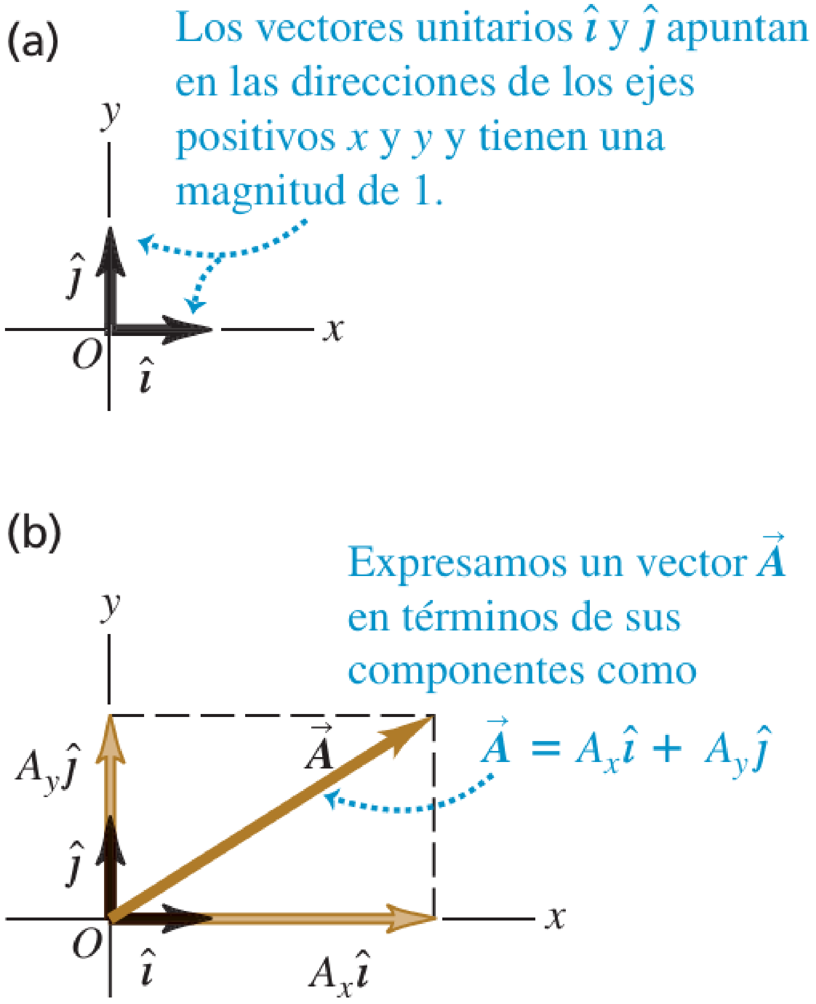
Los ángulos directores en el plano son:

- α es el que forma el vector con el eje positivo de las x.
- β es el que forma el vector con el eje positivo de las y.

La relación entre componentes y el módulo del vector se conoce como **coseno director** y está dado por las siguientes expresiones:

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad\qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A}$$

Los **vectores base** o **unitarios normalizados** son vectores sin dimensiones que tienen una magnitud de exactamente 1.



Los vectores unitarios del sistema de coordenadas rectangulares son:

$$\vec{u}_{A_x} = \frac{\vec{A}_x}{A} = \hat{\imath} \qquad \vec{u}_{A_y} = \frac{\vec{A}_y}{A} = \hat{\jmath}$$

En un sistema de coordenadas xy se define un vector unitario $\hat{\imath}$ que apunte en la dirección del eje $+x$ y un vector unitario $\hat{\jmath}$ que apunte en la dirección del eje $+y$.

Así, podemos expresar el vector $\vec{A}$ en términos de sus componentes como:

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath}$$

donde cada término de esta ecuación, como $A_x\hat{\imath}$, es una cantidad vectorial.

De las ecuaciones de los cosenos directores, se puede deducir que:

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2$$

$$A^2 = A^2 \cdot cos^2\alpha + A^2 \cdot cos^2\beta$$

$$\mathbf{1 = cos^2\boldsymbol{\alpha} + cos^2\boldsymbol{\beta}}$$

Además, si se consideran las ecuaciones de los vectores unitarios así como de los ángulos directores, se obtiene:

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} \quad \leftrightarrow \quad \vec{u}_A = \frac{A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}}{A}$$

$$\vec{u}_A = \frac{A_x}{A}\hat{\imath} + \frac{A_y}{A}\,\hat{\jmath}$$

$$\boldsymbol{\vec{u}_A = cos\,\alpha\,\hat{\imath} + cos\,\beta\,\hat{\jmath}}$$

Lo que nos permite concluir que todo vector unitario indica la dirección y el sentido de un vector.

Ejemplo 5.3

La magnitud de un vector $\vec{C}$ es 8 cm y forma un ángulo de 35° con el eje $+x$. Determinar: (a) Las componentes del vector; (b) Los ángulos directores; (c) El vector en función de los vectores base; (e) El vector unitario.

Ejemplo 5.4

Dado el vector: $\vec{F} = (4\,\hat{\imath} - 7\,\hat{\jmath})\,kgf$, determinar: (a) Las componentes rectangulares del vector; (b) Las coordenadas del punto extremo del vector; (c) El módulo del vector; (d) La dirección; (e) Los ángulos directores; (f) El vector unitario.

Ejemplo 5.5

El módulo de un vector $\vec{H}$ es 30 m y tiene como ángulos directores α=65° y β=155°. Determinar: (a) El vector unitario; (b) El vector en función de los vectores base; (c) La dirección.

Actividades en clase

1. Un vector $\vec{R}$ parte del origen y llega al punto (12; 7)cm. Determinar: (a) Las componentes rectangulares del vector; (b) El módulo y la dirección; (c) Los ángulos directores; (d) El vector unitario.

R.: (a) Rx=12 cm; Ry = 7 cm; (b) 13,89 cm; 30,26°; (c) α = 30,26°; β = 59,74°; (d) 0,86 $\hat{\imath}$ +0,5 $\hat{\jmath}$

2. Un vector $\vec{S}$ cuya magnitud es de 54 N forma un ángulo de 213° en sentido antihorario con el eje positivo de las y. Determinar: (a) Las componentes rectangulares; (b) Los ángulos directores; (c) El vector unitario.

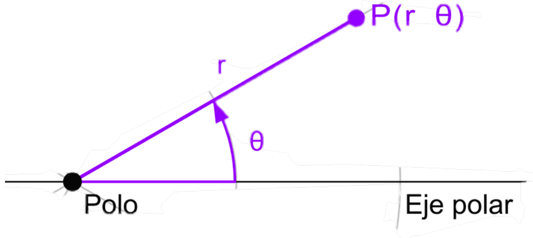
R.: (a) Sx=29,4 N; Sy=-45,3 N; (b) α = 57°; β = 147° ; (c) 0,545 $\hat{\imath}$-0,839 $\hat{\jmath}$

3. Si el ángulo director α de un vector $\vec{K}$ es 125° y su componente en el eje x es -37 cm, determinar: (a) La componente en el eje y; (b) El ángulo director β; (c) El módulo del vector; (d) El vector unitario.

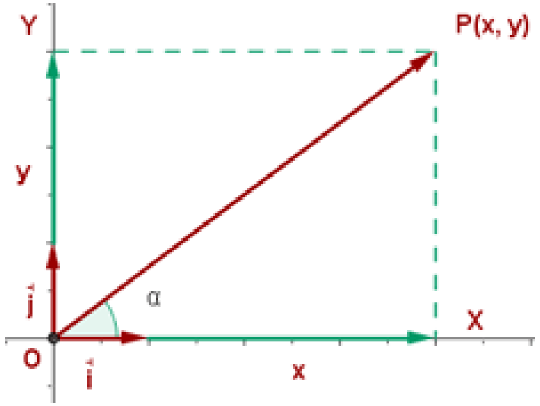
R.: (a) 52,84 cm; (b) 35°; (c) 64,51 cm; (d) -0,57 $\hat{\imath}$+0,82 $\hat{\jmath}$

Formas de expresar un vector en el plano

Todo vector puede ser representado de cinco maneras:

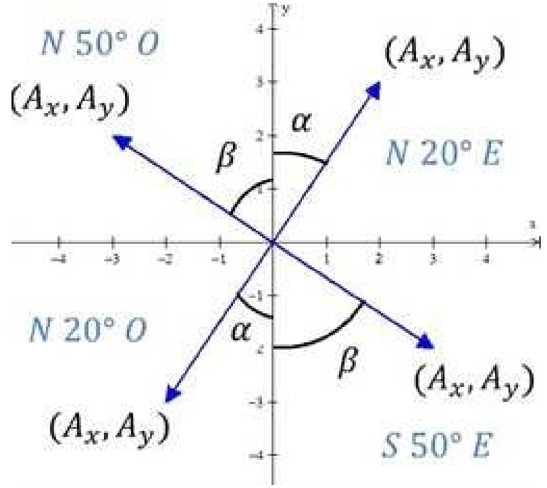


- **En coordenadas polares:** Se define con un par ordenado $(r;\ \theta)$; donde r representa el módulo del vector y θ el ángulo medido desde el eje polar hasta el vector en sentido antihorario.

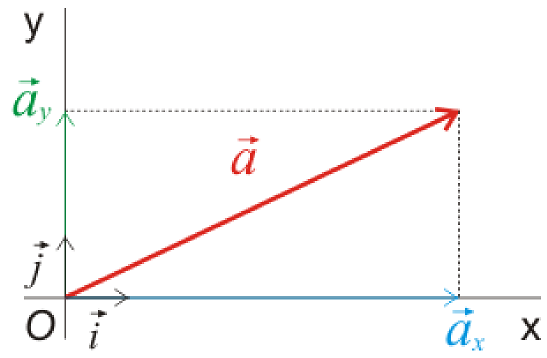


- **En coordenadas rectangulares:** Se define con un par ordenado $(A_x;\ A_y)$ ubicado en el extremo del vector; y tomando como origen al punto $(0;\ 0)$.

- **En coordenadas geográficas:** Se define con un par ordenado $(r;\ rumbo)$ donde r representa el módulo del vector y el $rumbo$ representa su dirección. El rumbo generalmente se determina con un ángulo ϕ medido desde el norte o sur geográfico hasta el vector.



- **En función de sus vectores base:** Se define un vector de la forma $A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}$; donde A_x y A_y son las componentes escalares en el eje x y y, respectivamente.



- **En función de su módulo y unitario:** Se define como el producto del módulo de un vector por su unitario, es decir $\vec{A} = A \cdot \vec{u}_A$.

Para transformar entre las distintas representaciones de un vector, existen diversas estrategias, las cuales se trabajarán en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.6

Expresar el vector $\vec{A} = (8\ m; 125°)$ en: (a) Coordenadas rectangulares; (b) Coordenadas geográficas; (c) Función de sus vectores base; (d) Función de su módulo y unitario.

Ejemplo 5.7

Expresar el vector $\vec{B} = (-4; -8)\, m/s$ en: (a) Coordenadas polares; (b) Coordenadas geográficas; (c) Función de sus vectores base; (d) Función de su módulo y unitario.

Ejemplo 5.8

Expresar el vector $\vec{C} = (7\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath})\,km$ en: (a) Coordenadas rectangulares; (b) Coordenadas polares; (c) Coordenadas geográficas; (d) Función de su módulo y unitario.

Ejemplo 5.9

Expresar el vector $\vec{D} = (250\ cm; N25°E)$ en: (a) Coordenadas polares; (b) Coordenadas rectangulares; (c) Función de sus vectores base; (d) Función de su módulo y unitario.

Ejemplo 5.10

Expresar el vector $\vec{E} = 17\,kgf(-0{,}538\,\hat{\imath}+,0843\,\hat{\jmath})$en: (a) Coordenadas rectangulares; (b) Coordenadas polares; (c) Coordenadas geográficas; (d) Función de sus vectores base.

Actividades en clase

1. Expresar el vector $\vec{R} = (-13;\ -27)\ cm$ en: (a) Coordenadas polares; (b) Función de los vectores base; (c) Coordenadas geográficas; (d) Función de su módulo y unitario.

R.: (a) (29,97 cm; 244,29°); (b) (-13î-27 ĵ)m; (c) (29,97 m; S25,71°O); (d) 29,97 m(-0,43 î -0,9 ĵ)

2. Expresar el vector $\vec{V} = (200\ km;\ 318°)$ en: (a) Coordenadas geográficas; (b) Coordenadas rectangulares; (c) Función de los vectores base; (d) Función de su módulo y unitario.

R.: (a) (200 km; N42°O); (b) (157,6;-123,1)km; (c) (157,6 î -123,1 ĵ)km; (d) 200km(0,79 î -0,62 ĵ)

3. Expresar el vector $\vec{K} = (20\ N;\ N47°O)$ en: (a) Coordenadas polares; (b) Coordenadas rectangulares; (c) Función de su módulo y unitario; (d) Función de los vectores base.

R.: (a) (20 N; 137°); (b) (-14,6; 13,6)N; (c) 20 N(-0,73 î +0,68 ĵ); (d) (-14,6 î +13,6 ĵ)