ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Segundo Semestre

DOCENTE
Ing. Victor Toalombo

2024
Riobamba - Ecuador

UNIDAD 2

Ec.Dif. de Orden Superior

Existencia y Unicidad de Soluciones

¿ Por qué es importante este teorema?

Ej:

1) $\dfrac{dy}{dx} = -y \qquad y(1) = 3$ problema de Cauchy valor inicial.

$$\frac{dy}{y} = -dx \Rightarrow \ln y = -x + c_1$$

$$y = ce^{-x} \qquad\qquad 3 = ce^{-1}$$

$$y = (3e)e^{-x} \qquad\qquad c = 3e$$

$$= 3e^{-x+1} \qquad \text{solución única}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{x} \qquad y(0) = 0$$

2) $y = x^2$ es una solución

$y = 0$ es otra solución

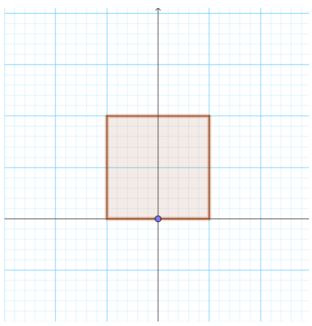
3) $y^2 + x^2 y' = 0 \qquad y(0) = 1$ por variable separable e integrar

$$y = \frac{-x}{1+cx} \qquad\qquad 1 = \frac{-0}{1+c(0)} \Rightarrow 1 = 0$$

no existe solución que satisfaga esa condición inicial.

El problema del valor inicial tiene definida en algún intervalo que contiene al punto (a,b)
- -$\frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow$Si $f(x,y)$ es continua en algún rectángulo del plano XY que contiene al punto (a,b) **Teorema de existencia**
- -$y(a) = b$

2) $\dfrac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}, \qquad y(0) = 0 \qquad\qquad f(x,y) = 2\sqrt{y}$ es continua si $y \geq 0$

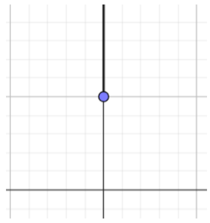


Existe solución no necesariamente es única $\qquad R = [-1,1] \times [0,2]$

$$\frac{df}{dy} = \frac{1}{\sqrt{y}} \text{ es continua si } y > 0$$

3) $y^2 + x^2y' = 0$ $\quad$ $y(0) = 1$ $\quad$ $f(x,y) = \dfrac{-y^2}{x^2}$ $\quad$ es continua si $x \neq 0$

$y' = -\frac{y^2}{x^2}$ El teorema no garantiza que haya o exista una solución, es decir no necesariamente no hay solución.



Un rectangulo que pase por el punto, pero no por la recta es imposible

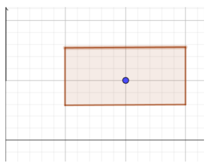
$f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$ $\quad$ $f(0,0) = \dfrac{1}{0}$ no es continua.

$$(0,0)$$

$$(1,-1)$$

$$(a,-a)$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = & \frac{1}{x+y} \\ y(2) = & 1 \end{cases}$$



tiene al menos una solución

Si además, la derivada parcial $\partial f/\partial y$ es continua en ese rectángulo, entonces la soluci on es única en algún intervalo (tal vez más pequeño) que contiene al punto $x = a$. (**Teorema de Unicidad**).

Si $f(x,y)$ es una función de Lipschitz en el rectángulo anterior.

Resumen

$\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$ $\quad$ $y(0) = b$ Existe solución

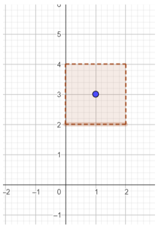
$\frac{\partial f}{\partial y}$ continua en ese rectángulo Es única solución

si se culmple lo anterior es única; caso contrario puede o no ser única

f(x,y) continua en algún rectángulo que contiene (a,b)

Ej: 1 $\frac{dy}{dx} = -y$ $\quad$ $y(1) = 3$ $\quad$ $f(x,y) = -y$ Es un polinomio; Es continua en todo $\mathbb{R}^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -1$ Es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

 Existe solución; Existe única solución

$R = \{(x,y)|0 < x < 2, 2 < y < 4\}$

$R = (0,2) \times (2,4)$

EDOs Lineales homogéneo con coeficientes constantes

$\overbrace{y'' - 6y + 8y = 0}^{\text{segundo orden}}$ Se propone una solución de tipo exponencial por que tiene como derivadas a ellas mismas.

$r^2 e^{rx} - 6re^{rx} + 8re^{rx} = 0$

$\overbrace{e^{rx}(r^2 - 6r + 8) = 0}^{\text{nunca es cero}}$ $\qquad y = e^{rx} \to r$ es la que se debe conocer

$$r^2 - 6r + 8 = 0$$
$$(r-2)(r-4) = 0$$
$$r = 2 \qquad r = 4$$
$$y = e^{rx}$$
$$y' = re^{rx}$$
$$y'' = r^2 e^{rx}$$

$$y_1 = e^{2x} \qquad y - 2 = e^{4x}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} \to \text{Solución general.}$$

$y'' + y = 0$

$r^2 + 1 = 0$

$r_1 = i \wedge r_2 = -i$

$y_g = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

EDOs Lineales no homogéneo con coeficientes constantes

Las ecuaciones diferenciales lineales de orden n son de la siguiente forma:

cuando $R(x) \neq 0$ es no homogenea.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a - o(x)y = R(x),$$

donde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ y R son funciones solo de x ó constante.

$$F(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Indican que están relacionadas la variable independiente x, la variable independiente y y las derivadas $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.
Si $y_1, y-2$ son soluciones de la ecuación diferencial (3) cuando la (1) es $= 0$ y si C_1 yC_2 son constantes arbitrarias, entonces
$y = C_1(y_1) + C_2 y_2$ es una solución de la ec.(3)
$y'' + 3y = 3$

1) Convertir en homogénea

$$y'' + 3y' = 0$$
$$r^2 + 3r = 0$$
$$r(r+3) = 0$$
$$r_1 = 0 \quad r_2 = -3$$
$$y_g = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-3x}$$
$$y_g = C_1 + C_2 e^{-3x}$$

2) Utilizar $R(x)$

$$R(x) = 3$$
$$y_p = Ax$$
$$y'_p = A$$
$$y''_p = 0$$

3) Reemplazar y_p, y'_p, y''_p en la ecuación original.

$$y'' + 3y' = 3$$
$$0 + 3A = 3$$
$$A = 1$$
$$y_p = Ax \rightarrow y_p = x$$

$$Sol : y = y_g + y_p$$

$$y = C_1 + C_2 e^{-3x} + x$$

Independencia lineal

Al considerar un sistema finito de n funciones: $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ definidas en algún intervalo (a,b), diremos que estas funciones son linealmente independientes si existen a_1, a_2, $\ldots, a_n$ escalares tal que:

$$a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots + a_n f_n(x) = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots a_n = 0$$

Si alguno de los a_1, a_2, $\ldots, a_n$ es diferente de cerp, entonces f_1, f_2, $\ldots, f_n$ son funciones linealmente dependientes.

Ejemplo

Verificar si las funciones dadas son linealmente independientes

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = 2x,\ f_3(x) = x^2$$

Por determinar si $a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + a_3 f_3(x) = 0$ entonces $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Luego

$$a_1 x + a_2 2x + a_3 x^2 = 0 \qquad \text{derivar}$$

$$a_1 + 2a_2 + 2a_3 x = 0 \qquad \text{derivar nuevamente}$$

Como $a_3 = 0 \wedge a_1 = -2a_3 \Rightarrow f_1(x), f_2(x) \wedge f_3(x)$ no son linealmente independientes.

Coeficientes indeterminados

$y'' - 5y' + 6y = \overbrace{x^2 + x}^{\text{no es homogénea}} \qquad \overbrace{y'' - 5y + 6y = 0}^{\text{ya es homogénea}}$

$$y_p = Ax^2 + Bx + C$$
$$y_p' = 2Ax + B \qquad y_n = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$
$$y_p'' = 2A$$

Reemplazar en la E.D

$$2A - 5(2Ax + B) + 6(ax^2 + Bx + C) = x^2 + x$$
$$2A + 10Ax - 5B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C = x^2 + x$$
$$6Ax^2 + (-10A + 6B)x + (2A - 5B + 6C) = x^2 + x$$
$$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6} \Rightarrow -10(\frac{1}{6} + 6B = 1 \Rightarrow B = \frac{4}{9}$$
$$-10A + 6B = 1$$
$$2A - 5B + 6C = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{6}\right) - 5\left(\frac{4}{9}\right) + 6C = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{20}{9} + 6C = 0$$
$$= \frac{-17}{9} + 6C = 0 \Rightarrow C = \frac{17}{54}$$

Reemplazar en y_p
$y_p = \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{9}x + \frac{17}{54}$ solunción particular.
$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{6}x^2 + \frac{4}{9}x\frac{17}{54}$ solución general.

$y'' + y = \operatorname{sen} x - \cos x \qquad y_p = x^s[(P_q(x)\cos\beta x + Q_k(x)\operatorname{sen}\beta x)]$

$P(r) = r^2 + 1 = 0 \qquad y_p = Ax\cos x + Bx\operatorname{sen} x$

$r_1 = i \qquad r_2 = -i$

$y_n = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x \qquad y = C_1\cos x + C_2\operatorname{sen} x + Ax\cos x + Bx\operatorname{sen} x$

Método de variación de parámetro

Se considera como ejemplo una ED no homog'enea de coeficientes constatntes de tercer orden

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a_1\frac{d^2y}{dx^2} + a_2\frac{dy}{dx} + a_3y = f(x)$$

donde a_1, a_2, a_3 son constantes y $f(x)$ es una función sólo de x ó constante.

Al suponer que la solución general de la ecuación diferencial homogénea es:

$$y_g = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$$

Luego la solución particular de la ecuación (1) es:

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$$

donde u_1, u_2, u_3 con funciones incógnitas que satisfacen a las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned} u_1y_1 + u_2'y_2 + u_3'y_3 &= 0 \\ u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3' &= 0 \\ u_1y_1'' + u_2'y_2'' + u_3'y_3' &= f(x) \end{aligned}$$

La ecuación (2) es un sistema de ecuaciones de u_1', u_2, u_3 el método consiste en:
1er Escribir la ecuación general de la ecuación diferencial homogénea

$$y_g = c_1y_1 + c_2y_2 + c_3y_3$$

2do Reemplazar c_1, c_2, c_3 por las funciones incógnitas u_1, u_2, u_3 obteniendo la solución particular de la ecuación (1)

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2u_3y_3$$

3er Formar el sistema bajo las condiciones de la ecuación (2)
4to Por medio de integración obtenenemos u_1, u_2, u_3

$\mathbf{y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}}$

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$
$$m^2 - 4m + 4 = 0$$
$$(m-2)^2 = 0$$

Si se tiene un factor repetido | si fueron conjugados

$$c_1 e^{mx}, c_2 x e^{mx}, c_3 x^2 e^{mx} \qquad m = \alpha \pm \beta \hat{i}$$

$$m_{1,2} = 2 \qquad c_1^{\alpha x} \cos \beta x c_2 e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_c = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$
$$f(x) = (x+1)e^{2x}$$
$$y_1 = e^{2x} \qquad y_2 = x e^{2x}$$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \qquad w_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

$$w = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & 1x\theta^{2x} + \theta^{2x} \end{vmatrix} \qquad w = \begin{vmatrix} 0 & xe^{2x} \\ (x+1)e^{2x} & 2xe^{2x} + e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$w = \cancel{2xe^{4x}} + e^{4x} - \cancel{2xe^{4x}} \qquad w_1 = 0 - (x^2+x)e^{4x} = -(x^2+x)e^{4x}$$

$$w = e^{4x}$$

$$w_2 = \begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & (x+1)e^{2x} \end{vmatrix} = (x+1)e^{4x}$$

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

$$u_1' = \frac{w_1}{w} = \frac{-(x^2+x)e^{4x}}{e^{4x}} \qquad u_2' = \frac{(x+1)e^{4x}}{e^{4x}}$$

$$u_1' = -x^2 - x \qquad u_2' = x + 1$$

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \int(-x^2 - x)dx & u_2 &= \int(x+1)dx \\
u_1 &= \frac{-x^3}{3} - \frac{x^2}{2} & u_2 &= \frac{x^2}{2} + x \\
u_1 &= \frac{-1}{x^3} - \frac{1}{2}x^2 & u_2 &= \frac{1}{2}x^2 + x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_p &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\
y_p &= \frac{-1}{3}x^3 e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 e^{2x} + \frac{1}{2}x^3 e^{2x} + x^2 e^{2x} \\
y_p &= \frac{1}{6}x^3 e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x} \\
y_c &= c_1 e^{2x} + c_2 e^2 \\
y &= y_c + y_p \\
y &= c_1 e^{2x} + c_2 x^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{2x} + \frac{1}{6}x^3 e^{2x}
\end{aligned}
$$