ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Segundo Parcial

DOCENTE
Ing. Victor Toalombo

2024

Riobamba - Ecuador

Ecuaciones homogéneas

Función Homogénea: dice que la función $f(x,y)$ es homogénea de grado k. x e y, si y sólo si, cumple con la condición siguiente

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^x f(x,y)$$

Ejemplos

$f(x,y) = x^2y - 4y^3$ es homogénea de grado 3 en x e y

$f(x,y) = y^2 \tan \frac{x}{y}$ es homogénea de grado 2 en x e y

$f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 - y^3}$ es homogénea de grado 1 en x e y

$f(x,y) = e^x$ no es homogénea

Definición

Una EDO de primer grado y de primer grado de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

es homogénea si M y N son funciones homogéneas del mismo grado de x e y

Ej:

$$(x^3 - y^3dx + y^2xdy = 0)$$
$$(x^3 - y^2\sqrt{x^2+y^2})dx - xy\sqrt{x^2+y^2}dy = 0$$
$$(x^2 - y^2 - y \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{y}{x}\right) dx = x\cos\left(\frac{y}{x}\right) dy$$

Ejercicio

$$(x-y)dx + xdy = 0$$

$$y = ux \; u = \frac{y}{x}$$

$$dy = udx + xdu$$

$$(x-ux)dx + x(udx+xdu) = 0$$

$$xdex - uxdx + uxdx + x^2du = 0$$

Pasos

1. Escribir la EDO $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

2.Comprobar que sea homogénea

3. Hacer cambio de variable $y = ux$ ó $x = uy$

4. Resolver por sepaaración de variables

5. Volver a la variables inicial.

La mayoría de ejercicios se factoriza.

$$xdx - uxdx + uxdx + x^2du = 0$$

$$xdx(1-u+u) + x^2du = 0$$

$$xdx + x^2du = 0$$

$$xdx = -x^2du$$

$$\frac{x}{x^2}dx = -du$$

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int du = \ln(x) = -u + c = \ln(x) = \frac{-y}{x} + c$$

$$= x\ln(x) - xc = -y = cx - x\ln(x) = y.$$

$$\mathbf{y' = \frac{y^2 - x^2}{3xy} = \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{3xy}}$$

$$3xydy = (y^2 - x^2)dx \qquad y = ux \; dy = udx + xdu$$

$$3x \cdot ux(udx + xdu) = (u^2x^2 - x^2)dx$$

$$3ux^2(udx + xdu) = (u^2x^2 - x^2)dx$$

$$3u^2x^2dx + 3ux^3du = u^2x^2dx - x^2dx$$

$$3ux^3du = u^2x^2dx - x^2dx - 3u^2x^2dx$$

Factorizar

$$3ux3du = x^2dx(u^2 - 1 - 3u^2)$$

$$3ux^3du = x^2dx(-2u^2 - 1)$$

$$\frac{3udu}{-2u^2-1} = \frac{x^2dx}{x^3}$$

$$\int \frac{3udu}{-2u^2-1} = \int \frac{dx}{x}$$

$$-3\int \frac{udu}{2u^2+1} = \int \frac{dx}{x}$$

Resolver por sustitución

$$-3\int \frac{udu}{2u^2+1} \qquad v=2u^2+1 \ \frac{dv}{4}=udu$$

$$-3\int \frac{dv/4}{v}=-\frac{3}{4}\int\frac{dv}{v}$$

$$-\frac{3}{4}\ln v=\frac{-3}{4}\ln 2u^2+1,$$

se tiene:

$$\frac{-3}{4}\ln 2u^2+1=\ln x+c$$

$$-3\ln\frac{2y^2}{x^2}+1=4(\ln x+\ln c)$$

$$-3\ln\frac{2y^2}{x^2}+1=4\ln x+4\ln c \qquad a\ln b=\ln b^2$$

$$\ln\frac{2y^2+x^2}{x^2}^{-3}=\ln x^4+\ln c^4 c_1 \qquad \frac{2y^2}{x^2}+\frac{1}{1}=\frac{2y^2+x^2}{x^2}$$

$$\ln\frac{x^2}{2y^2+x^2}^{3}=\ln c_1x^4 \qquad \ln a+\ln b=\ln ab$$

$$\frac{x^6}{(2y^2+x^2)^3}=c_1x^4=\frac{x^{6}2}{x^4(2y^4+x^2)^3}=c_1=\frac{x^2}{(2y^2+x^2)^3}=c_1$$

$$\mathbf{(x^2+3xy+y^2)dx-x^2dy=0}$$

$$y=ux \qquad dy=udx+xdu$$

$$(x^2+3x^2u+x^2u^2)dx-x^2(udx+xdu)=0$$

$$x^2(u^2+2u+1)dx-x^3du=0$$

$$(u^2+2u+1)dx-xdu=0$$

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{du}{(u+1)^2}=0$$

$$\ln x+\frac{x}{y+x}=c.$$

$$\mathbf{x\frac{xdy}{dx}=y+\sqrt{y^2-x^2}}$$

Ec. Dif. Or. Exactas

Diferencial total:

Si $f : R^2 \to R$, es una función diferenciable en $(x,y) \in R^2$, entonces la difernecial total de f es la función df, cuyo valor está dado por:

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

Diferencial exacta: Una expresión de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ se denomina exacta si existe una función $f : D \subset R^2 \to R$ tal que:

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Es decir que toda expresión que es la diferencial total de función de x e y se lama diferencial exacta.

Definición: Considerar que la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (a) si existe otra función $z = f(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial y} = M(x,y) \wedge \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

se dice que la ecuación a es una ec. dif. exacta. **Teorema:**

La condición necesaria y suficiente para que una ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, sea exacta, es que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{dy} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Ejemplo

$$(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)dx + (e^x \cos y + 2\cos x)dy = 0$$

es exacta porque:

$$M(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x \to \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x$$
$$N(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x \to \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y - 2\operatorname{sen} x,$$

de donde $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

$\mathbf{xdy + ydx = 0}$ $\quad\quad$ $d(xy) = d(c)$ multiplicaión de dervadas

$$\int d(x,y) = \int d(c)$$

$$xy = c$$

$\mathbf{(e^y + 6x)dx + xe^y dy = 0}$ No es homogénea o se la resuelve por separación

$d(xe^y + 3x^2) = d(c) \rightarrow$ se requeire cómo encontrar la función

$$xe^y + 3x^2 = c.$$

para saber si es exacta se encuentra por medio de derivadas parciales.

$$f(x,y) = 2x^3y + 3xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y(3x^2) + 3y^2(1) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3(1) + 3x(2y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2y + 3y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 + 6xy$$

Diferencial de una función

$$df(x,y) = f_x dx + f_y dy$$

$$df(x,y) = (2xy+5)dx + (x^2-2)dy$$

$$(2xy+5)dx + (x^2-2)dy = 0$$

$$df(x,y) = d(c) \;\rightarrow\; f(x,y) = c$$

$$x^2y + 5y - 2y = 0$$

$\mathbf{(e^y + 6x)dx + xe^y dy = 0}$

Paso 1: determinar si es exacta.

Es exacta si: $M_y = N_x$ deriv. de M con respecto a $y =$ der.Nrespct.x

$$M_y = e^y \qquad N_x = e^y$$

Paso 2: Integrar

$$\int xe^y dy = x\int e^y dy = xe^y + g(x) \qquad g(x) = c \rightarrow \text{porque es int. parcial}$$

$$f(x,y) = xe^y + g(x)$$

Derivada parcial

$$\begin{aligned} f_x &= \cancel{e^y} + g'(x) = \cancel{e^y} + 6x \\ g'(x) &= 6x \\ g(x) &= \int 6x dx = \frac{6x^2}{2} + c_1 = 3x^2 + c_1 \\ f(x,y) &= xe^y + 3x^2 + c_1. \end{aligned}$$

Paso 3: La solución es $f(x,y) = c$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xe^y + 3x^2 + c_1 \\ xe^y + 3x^2 + c_1 &= c \\ xe^y + 3x^2 &= c. \end{aligned}$$

$$\underbrace{(y+2)}_{\mathbf{M_{y=1}}}\mathbf{dx} + \underbrace{(x+y)^2}_{\mathbf{N_x=1}}\mathbf{dy} = \mathbf{0}$$

Paso 1: Determinar si es exacta.

Es exacta si: $M_y = N_x$

Paso 2: Integrar para obtener $f(x,y)$

$$\begin{aligned} \int (y+2)dx &= \int y dx + \int 2dx = y\int dx + 2\int dx \\ &= yx + 2x + g(y) \qquad \rightarrow \text{porque es integración paracial} \\ f(x,y) &= xy + 2x + g(y) \\ f_y &= x + g'(y) = x + y^2 \\ g'(x) &= y^2 \\ g(y) &= \int y^2 dy = \frac{y^3}{3}. \end{aligned}$$

Paso 3: La solución general es $f(x,y) = c$

$$f(x,y) = xy + 2x + \frac{y^3}{3}$$
$$xy + 2x + \frac{y^3}{3} = C$$

Encontrar el valor de k que haga exacta la ecuación diferencial y resolverla.

$\mathbf{(y^4 + kxy^2 - kx)dx + (4xy^3 + 10x^2y)dy = 0}$

$$Mdx + Ndy = 0$$

$$M_y = 4y^3 + 2kxy \qquad N_x = 4y^3 + 20xy$$

$$2k = 20 \rightarrow k = 10$$

$$\therefore (y^4 + 10xy^2 - 10x)dx + (4xy^3 + 10x^2y)dy = 0$$
$$\int (y^4 + 10xy - 10x)dx = \int y^4 dx + \int 10xy^2 dx - \int 10x dx$$
$$= y^4 \int dx + 10y^2 \int x dx - 10 \int x dx$$
$$= y^4 + 10y^2 \frac{x^2}{2} - 10\frac{y^2}{2} + g(y)$$

$$F(x,y) = xy^4 + 5x^2y^2 - 5x^2 + g(y)$$

$$F_y = \cancel{4xy^3} + \cancel{10x^2}y + g'(y) = \cancel{4xy^3} + \cancel{10x^2y}$$

g'(y)=0

y(y)=0

$$F(x,y) = xy^4 + 5x^2y^2 + 0$$

$$xy^4 + 5x^2y^2 - 5x^2 = c$$

Factor de integración

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (1)$$

Si ña ecuación mo es exacta se puede transformar en exacta, eligiendo una función u que pueda depender tanto de la x como de la y de tal manera que la ecuación sea exacta

$$u(x,y)M(x,y)dx + u(x,y)N(x,y)dy = 0 \qquad (2)$$

entonces a la función $u(x,y)$ se llama factor integrante

Como la ecuación (2) es exacta, se cumple

$$\frac{\partial u(x,y)M(x,y)}{dy} = \frac{\partial u(x,y)N(x,y)}{\partial x}$$

$$\frac{M(x,y)\partial u(x,y)}{dy} - \frac{N(x,y)\partial u(x,y)}{\partial x} = \left[\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right] u(x,y) \qquad (3)$$

Para determinar el factor integrante se considera los siguientes casos:

1er Caso: Si u es una función sólo de x entonces $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$. De la ec. (3)

$$-N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right) u(x)$$

$$N(x,y)\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) u(x)$$

$$\int \frac{\partial u(x)}{u(x)} = \int \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) = \int f(x)dx$$

donde $\qquad f(x) = \frac{1}{N(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)$

Como $\qquad \int \frac{\partial u(x)}{u(x)} = \int f(x)dx \to \ln ux = \int f(x)dx$

2do Caso: Si u es una función sólo de y, entonces $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$

Luego de la ec (3) resulta:

$$\begin{aligned}
M(x,y)\frac{\partial u(y)}{\partial y} &= \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y}{\partial y}\right)u(y) \\
\frac{\partial u(y)}{u(y)} &= -\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)dy = g(y)dy \\
\text{donde }:g(y) &= -\frac{1}{M(x,y)}\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right) \\
\frac{u(y)}{u(y)} &= g(y)dy \text{ integrando: } \int \frac{\partial u(y)}{u(y)} = \int g(y)dy \to \ln uy = \int g(y) = \int g(y)dy \\
\therefore u(y) &= e^{\int g(y)dy}
\end{aligned}$$

3er Caso: En nuestros ejercicios el factor integrante está dado en un producto de dos factores $f(x) \wedge g(y)$ es decir, $u(x,y) = f(x)g(y)$ que reemplazando en la ec. (3) se tiene:

$$\begin{aligned}
M(x,y)\frac{\partial(f(x),g(y))}{\partial y} - \frac{N(x,y)\partial(f(x),f(y))}{\partial x} &= \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)f(x)g(y) \\
M(x,y)f(x)g(x) - N(x,y)f(x)g(y) &= \left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)f(x)g(y) \\
\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)f(x)g(y) &= N(x,y) + f'(x)g(y) - M(x,y)f(x)g'(y) \\
\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} &= N(x,y)\frac{f'(x)}{f(x)} - M(x,y)\frac{g'(y)}{g(y)}
\end{aligned}$$

4to Casos: Para ciertas ejercicios su factor integrante es de la forma $u(x,y) = x^n y^m$ se determinan mediante la condición necesaria y suficiente de las ecuaciones diferenciales exactas.

$\mathbf{(4xy^2 + 3y)dx + (3x^2y + 2x)dy = 0}$

$$x^2y(4xy^2 + 3y)dx + (3x^2y + 2x)dy = 0)$$

$$(4x^3y^3 + 3x^2y^2)dx + (3x^4y^2 + 2x^3y)dy = 0$$

Antes no era exacta, ahora:

$$Mdx + Ndy = 0 \qquad M_y = 12x^3y^2 + 6x^2y$$

$$M_y = N_x \qquad u_x = 12x^3y^2 + 6x^2y$$

x^2y es un factor de integración.

Un factor de integración es una función que al multiplicar por toda la ED, esya se convierte en exacta.

$$Mdx + Ndy = 0$$

Caso 1: si $\frac{M_y - N_x}{N}$ es una función solamente de $x \to f(x) = \frac{M_y - N_y}{N}$

$$f(x) = e^{\int p(y)dy} \text{es factor de integración}$$

Caso 2: Si $\frac{N_x - M_y}{M}$ es función solamente de y, entonces $p(x) = \frac{N_x - M_y}{M}$

$$f(y) = e^{\int p(y)dy} \text{es factor de integración}$$

$(\mathbf{x^2 + y^2})\mathbf{dx} - \mathbf{2xydy} = \mathbf{0}$

$$M_y = 2y \qquad N_y = -2y \qquad P(x) = \frac{M_y - N_y}{N}$$

$$x^{-2}(x^2 + y^2)dx - x^{-2}(2xy)dy = 0 \qquad \frac{2y - (-2y)}{-2xy} = \frac{\cancel{4y}}{\cancel{-2xy}} = \frac{-2}{x} = P(x)$$

$$(1 + x^{-2}y^2)dx - 2x^{-1}ydy = 0 \qquad f(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$M_y = 2x^{-2}y \qquad e^{\int -\frac{-2}{x}dx} = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{-2\ln x} = x^{-2}$$

$$U_x = 2y^{-2}y$$

$$-\int 2x^{-1}ydy = -x^{-1}\int 2ydy = -x^{-1}y^2 + g(x)^c$$

$$F(x,y) = -x^{-1}y^2 + g^x$$

$$F_x = x^{-2}y^2 + g'(x) = -x^{-1}y^2$$

$$g'(x) = 1$$

$$g(x) = \int 1dx = x$$

$$F(x,y) = -x^{-1}y^2 + x = c \qquad c = x - \frac{y^2}{x} \text{ ó } x\left(x - \frac{y^2}{x} = 0\right)$$

$$x^2 - y^2 = c_x$$

$$\mathbf{(x+2y^2)dx+xydy=0}$$

$$Mdx+Ndy=0 \qquad P(x)=\frac{M_y-N_y}{N}=\frac{4y-y}{xy}=\frac{3y}{xy}=\frac{3}{x}=P(x)$$

$$M_y=4y \qquad N_x=y \qquad e^{\int \frac{3}{x}dx}=e^{3\int \frac{dx}{x}}=e^{3\ln x}=e^{\ln x^3}=x^3$$

$$x^3(x+2y^2)dy+x^3(xy)dy=0$$

$$(x^4+2x^3y^2)dx+x^4ydy=0$$

$$M_y=x^4 4x^3y \qquad U_x=x^3y$$

$$\int x^4ydy=x^4\int ydy=x^4\frac{y^2}{2}+g(x)$$

$$F_x=\frac{1}{2}(4x^3)y^2+g'(x)=2x^3y^2+g'(x) \qquad F(x,y)=\frac{1}{2}x^4y^2+g(x)$$

$$\cancel{2x^3y^2}+g'(x)=x^4+\cancel{2x^3y^2} \qquad g'(x)=x^4-1g(x)=\int x^4dx=\frac{x^5}{5}$$

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^4y^2+\frac{x^5}{5}\rightarrow\frac{1}{2}x^4y^2+\frac{x^5}{5}=c$$

$$\mathbf{(xy+x^2)dx+(x^2+2xy)dy=0}$$

$$M_y=x+2y \qquad N_x=2x+3y \qquad \frac{M_y-N_x}{N}=\frac{x+2y-2x-3y}{x^2+3xy}=\frac{x-y}{x(x+3y)}$$

$$P(y)=\frac{N_x-M_y}{u}=\frac{2x+3y-x-2y}{xy+y^2}=\frac{\cancel{x+y}}{y\cancel{(x+y)}}=\frac{1}{y}$$

$$f(y)=e^{\int p(y)}$$

$$e^{\int \frac{1}{y}dy}=e^{\int \frac{dy}{y}}=e^{\ln y}=y$$

$$y(xy+y^2)dx+y(x^2+3xy)dy=0$$

$$(xy^2+y^3)dx+(x^2y+3xy^2)dy=0$$

$$M_y=2xy+3y^2 \qquad N_x=2xy+3y^2$$

$$\int(xy^2+y^3)dx=\int xy^2dx+\int y^3dx=y^2\int xdx+y^3\int dx=y^2\frac{x^2}{2}+y^3x+g(y)$$

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+xy^3+g(y)$$

$$F_y=\frac{1}{2}x^2(2y)+x(3y^2)+g'(y)$$

$$=x^2y+3xy^2+g'(y)=x^2y=x^2y+3xy^2$$

$$g'(y)=0\ \rightarrow\ g(y)=0$$

$$F(x,y)=\frac{1}{2}x^2y^2+xy^3+c\ \rightarrow\ \frac{1}{2}x^2y^2+xy^3=c$$

$\mathbf{y}\cos\mathbf{xdx} + (\mathbf{y} - \operatorname{sen}\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{0}$

$$M_y = \cos x \; \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\cos x - (-\cos x)}{y - \operatorname{sen} x} = \frac{2\cos x}{y - \operatorname{sen} x} \text{ No sirve}$$

$$N_x = -\cos x \; \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-\cos x - \cos x}{y\cos x} = \frac{-2\cos x}{y\cos x} = \frac{-2}{y}$$

$$f(y) = e^{\int p(x)dy} = e^{\int \frac{-u}{y}dy} = e^{-2\int \frac{dy}{y}} = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2}$$

$$y^{-2}(y\cos x)dx + y^{-2}(y - \operatorname{sen} x)dy = 0$$

$$y^{-1}\cos x dx + (y^{-1} - y^{-2}\operatorname{sen} x)dy = 0$$

$$M_y = -y^{-2\cos x} \; N_x = -y^{-2\cos x}$$

$$\int y^{-1}\cos x dx = y^{-1}\int \cos x dx = y^{-1}\operatorname{sen} x + g(y)$$

$$F(x,y) = y^{-1}\operatorname{sen} x + g(y)$$

$$F_y = -y^{-2}\operatorname{sen} x + g'(y) = y^{-1} - y^{-2}\operatorname{sen} x$$

$$g'(y) = y^{-1} \;\rightarrow\; \int \frac{1}{y}dy = \ln|y|$$

$$F(x,y) = y^{-1}\operatorname{sen} x + \ln y$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{y} + \ln|y| = c \qquad y\left(\frac{\operatorname{sen} x}{y} + \ln|y| = c\right) = \operatorname{sen} x + y\ln = c_y$$

Ecuaciones diferenciales lineales

Al considerar la ecuación diferencial ordinaria:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=f(x) \tag{1}$$

donde a_1, a_2 y f con funciones solamente de x o constante.

Al suponer que $a_1(x)\neq 0$, entonces, dividiendo a la ecuacion (1) por $a_1(x)$ se tiene,

$$\frac{dy}{dx}+\frac{a_2(x)}{a_1(x)}+\frac{f(x)}{a_1(x)} \Rightarrow \qquad \underbrace{\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x).}_{\text{Ec. Diferencial lineal de primer orden}} \tag{2}$$

Si $Q(x)=0$, la ecuación (2) toma la forma:

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=0 \tag{3}$$

La ecuación (3) se llamará ec. diferencial lineal homogénea y es una ecuación diferencial de variable separabale y la solución es:

$$y=ke^{-\int p(x)dx}.$$

Si $Q(x)\neq 0$, la ecuacion (2), es decir, $\frac{dy}{dx}+p(x)y=Q(x)$ es una Ec. Diferencial lineal no homogénea. Dado que $Q(x)\neq 0$, la ecuacion (2) no es exacta. Por lo tanto se hallará un factor de integración para la solución, si $I(x)$ es un factor integrante solo de x a la ecuación (2) se expresa como:

$$I(x)=e^{\int p(x)dx},$$

y al multiplicar a la ecuación diferencial

$$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c\right]$$

Q' es la solución general de la ecuación (2).

Ejemplo para reconocer

$f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$ Ec. Diferencial Lineal de primer orden

$2xy' + x^2y = 7x + 2$ "y" no debe tener exponente, ln, etc.

$y' + y = 0$

$y - 2y' + x = 0 \to -2y' + y = -x$

$y' \cos x + 5xy = -1$

$4x^2\dfrac{dy}{dx} - 3x = 2y \to 4x^2y' - 2y = 3x$

$4(xy') + 3y' + 5y = 1 + 4y \to (4x+3)y' + y = 1$

Los que no son:

$xy' + 5y^2 = 4x$

$7x(y')^3 + 5xy = 1$

$y' + 2y = \operatorname{sen} y$

$y'' + 5yy' - 2y = 12x$ yy' no debe multiplicar

$5xy'' - \operatorname{sen} y' = 0$ $\operatorname{sen} y'$ esta dentro de la función seno

$5xt'' + t' - \dfrac{4}{t} = 12$ $\dfrac{4}{t}$ está dividiendo

$f_1(x)y''' + f_2(x)y'' + f_3(x)y' + f_4(x)y = f_5(x)$ E.D. Lineal 3^{er} orden

$f_1(x)y^n + f_2(x)y^{n-1} + \cdots + f_n(x)y' + f_{n+1}(x)y = f_{n+2}(x)$ E.D. cualquier orden

Trabajo aula virtual

$12x^2y + 5y' = y'''$ si es lineal

$5xy'' + 12x^2y^2 - 15x = 0$ no es lineal

$12xy' - \sqrt{xy} = 5x$ no es lineal

$\frac{d^5y}{dx^5} - y = 0$ si es lineal

$12\cos y - 13x'' + 12x' = x$ si es lineal

$*\ \dfrac{dy}{dx} + 2y = x^2 + 2x$

$$p(x) = 2 \qquad Q(x) = x^2 + 2x$$

$$\begin{aligned}
y =& e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx} Q(x)dx + c\right] \\
y =& e^{-\int 2dx}\left[\int e^{\int 2dx}(x^2+2x)dx + c\right] \\
y =& e^{-2x}\left[\int e^{2x}(x^2+2x)dx + c\right] \qquad \text{integrando por partes} \\
y =& \frac{2x^2+2x-1}{4} + ce^{-2x}.
\end{aligned}$$

$*\ x\ln x \dfrac{dy}{dx} - y = x^3(3\ln|x| - 1)$

$$\frac{dy}{dx} - \overset{\text{se divide para } (x\ln x)}{\frac{1}{x\ln x}y} = \frac{x^2(3\ln|x|-1)}{\ln x}$$

$$\begin{aligned}
y &= e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{p(x)dx} Q(x)dx + c\right] \\
y &= e^{-\int \frac{dx}{x\ln x}}\left[\int e^{\int \frac{dx}{x\ln x}} \frac{x^2(3\ln|x|-1)}{\ln|x|}dx + c\right] \\
y &= e^{\ln(\ln|x|)}\left[\int e^{-\ln(\ln|x|)} \frac{x^2(3\ln|x|-1)}{\ln|x|}dx + c\right] \qquad \text{simplificando} \\
y &= \ln|x|\left[\frac{x^2(3\ln|x|-1)}{ln^2|x|}dx + c\right], \qquad \text{poniendo bajo un diferencial} \\
y &= \ln|x|\left(\int d\left(\frac{x^3}{ln|x|}\right) + c\right) = \ln|x|\left(\frac{x^3}{\ln|x|+c}\right) \\
y &= x^3 + c \cdot \ln|x|.
\end{aligned}$$

* $x^3\frac{dy}{dx}+3x^2y=x \qquad \div x^3$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3x^2}{x^3}y=\frac{x}{x^3}\Rightarrow\frac{dy}{dx}+\frac{3}{x}y=\frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
y =& e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}Q(x)dx+c\right]\\
y =& e^{-\int \frac{3}{x}dx}\left[\int e^{\int \frac{3}{x}dx}\frac{1}{x^2}dx+c\right]\\
y =& e^{-3\int \frac{dx}{x}}\left[\int e^{3\int \frac{dx}{x}}\frac{1}{x^2}dx+c\right]\\
y =& e^{-3\ln x}\left[\int e^{3\ln x}\frac{1}{x^2}dx+c\right]\\
y =& e^{\ln x^{-3}}\left[\int e^{\ln x^3}\frac{1}{x^2}dx+c\right]\\
y =& x^{-3}\left[\int \frac{x^3}{x^2}dx+c\right]\\
y =& x^{-3}(xdx+c)\Rightarrow x^{-3}\frac{x^2}{2}+x^{-3}c=\frac{1}{2x}+\frac{c}{x^3}.
\end{aligned}$$

Otra forma

$$p(x)=\frac{3}{x} \qquad q(x)0\frac{1}{x^2}$$

$$u(x)=e^{\int p(x)dx}=e^{\int \frac{3}{x}dx}=e^{3\int \frac{dx}{x}}=e^{3\ln x}=e^{\ln x^3}=x^3$$

$$\begin{aligned}
uy &= \int uqdx\\
x^3y &= \int x^3\frac{1}{x^2}dx\\
x^3y &= \int xdx\\
x^3y &= \frac{x^2}{2}+c\\
y &= \frac{x^2}{2x^3}+\frac{c}{x^3}\\
y &= \frac{1}{2x}+\frac{c}{x^3}
\end{aligned}$$

* $x^2y'+2xy=3x^2$

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x2}y'+\frac{2xy}{x^2} &= \frac{3x^2}{x^2}\\
y'+\frac{2y}{x} &= 3\\
yu &= \int qudx
\end{aligned}$$

$$u = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\int \frac{dx}{x}} = e^{2\ln x} = e^{\ln x} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$\begin{aligned} yx^2 &= \int 3x^2 dx \\ yx^2 &= x^3 + c \\ y &= \frac{x^3}{x^2} + \frac{c}{x^2} \\ y &= x + \frac{c}{x^2}. \end{aligned}$$

* $\dfrac{dy}{ddx} + 2y = x$

$$p(x) = 2 \qquad q(x)x$$

$$\begin{aligned} u =& e^{\int 2dx} \\ &= e^{2x} \\ yu &= \int qudx \\ ye^{2x} &= \int xe^{2x}dx \\ \int udv &= uv - \int vdu \\ u = x & \quad dv = e^{2x}dx \\ du = dx & \quad v = \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} \\ ye^{2x} &= x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx \\ ye^{2x} &= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c \\ y &= \frac{\frac{1}{2}xe^{2x}}{e^{2x}} - \frac{\frac{1}{4}e^{2x}}{e^{2x}} + \frac{c}{e^{2x}} \\ y &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + ce^{-2x} \end{aligned}$$

* $x\frac{dy}{dx} + 3x^2 + 4y = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{xdy}{dx}}{x} + \frac{3x^2}{x} + \frac{4y}{x} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} + 3x + \frac{4y}{x} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} + \frac{4}{x}y &= -3x \end{aligned}$$

$$p(x) = \frac{4}{x} \qquad q(x) = -3x$$

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\int p(x)dx} \\
&= e^{\int \frac{4}{x}dx} \\
&= e^{4\int \frac{dx}{x}} \\
&= e^{4\ln x} \\
&= e^{\ln x^4} \\
&= x^4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
yu &= \int qudx \\
yx^4 &= \int -3x(x^4)dx \\
yx^4 &= -3\int x^5 dx \\
yx^4 &= \frac{-3x^6}{6} + c \\
yx^4 &= \frac{-x^6}{2} + c \\
y &= \frac{-x^6}{2x^4} + \frac{c}{x^4} \\
y &= \frac{-x^2}{2} + \frac{c}{x^4}
\end{aligned}
$$

* $x\dfrac{dy}{dx} + 1 = x + y$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} &= 1 + \frac{1}{x}y \\
\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y &= 1 - \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$$
p(x) = -\frac{1}{x} \qquad\qquad q(x) = 1 - \frac{1}{x}
$$

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\int \frac{-1}{x} dx} \\
&= e^{-\int \frac{dx}{x}} \\
&= e^{-\ln x} \\
&= x^{\ln x^{-1}} \\
&= x^{-1} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y\frac{1}{x} &= \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x} dx \\
y\frac{1}{x} &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{1}{x^2} dx \\
y\frac{1}{x} &= \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-2} dx \\
y\frac{1}{x} &= \ln x - \frac{x^{-1}}{-1} + c \\
y\frac{1}{x} &= \ln x - \frac{x^{-1}}{-1} + c \\
y\frac{1}{x} &= \ln x + x^{-1} + c \\
y &= x \ln x + 1 + c_x
\end{aligned}
$$

* $\dfrac{dr}{d\theta} = \sec\theta + r\tan\theta$

$$\frac{dr}{d\theta} = \sec\theta + r\tan\theta \Rightarrow \frac{dr}{d\theta} - r\tan\theta = \sec\theta$$

$$p(\theta) = -\tan\theta \qquad\qquad q(\theta) = \sec\theta$$

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\int -\tan\theta d\theta} \\
&= e^{-\int \tan\theta d\theta} \\
&= e^{-(-\ln|\cos\theta|)} \\
&= e^{\ln|\cos\theta|} = \cos\theta
\end{aligned}
$$

$$r\cos\theta = \int \sec\theta\cos\theta d\theta$$

$$r\cos\theta = \int d\theta$$

$$r\cos\theta = \theta + c$$

$$r = \frac{\theta}{\cos\theta} + \frac{c}{\cos\theta} \quad \text{consideramos } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \sec\theta\cos\theta = 1$$

$$r = \theta\sec\theta + c\sec\theta$$

Ecuación Bernoulli

$$P_0(x)\frac{dy}{dx} + P_1(x)y = Q(x)y^n \rightarrow \text{Ec. Bernoulli}$$

Se debe hacer un cambio de variable,

$$u = y^{1-n}$$

$\frac{dy}{dx} - y = 2e^x y^2$

$$u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow y = u^{-1} \Rightarrow y' = -1u^{-1-1}u' = -u^{-2}u'$$

$$-u^{-2}u' - u^{-1} = 2e^x(u^{-1})^2$$

$$-u^{-2}u' - u^{-1} = 2e^x u^{-2} \quad \text{se complica más}$$

el objetivo es que sea lineal

$$(-u^{-2}u' - u^{-1} = 2x^x u^{-2})(-u^2 \quad \div u^{-2}$$

$$\underbrace{u' + u = -2e^x}_{y'+p(x)y=q(x)}$$

$$p(x) \qquad\qquad q(x) = -2e^x$$

$$u = e^{\int p(x)dx}$$

$$= e^{\int 1dx}$$

$$= e^x$$

continuando con el desarrollo

$$
\begin{aligned}
yu &= \int qudx \\
ue^x &= \int -2e^x e^x dx \\
&= -\int e^{2x} 2dx \qquad \rightarrow \int e^v dv = e^v \text{ la derivada de } 2x \text{ es } 2 \\
&= -e^{2x} + c \\
&= -e^{2x} + c \\
u &= \frac{e^{2x}}{e^x} + \frac{c}{e^x} \\
u &= -e^x + ce^{-x} \\
u &= y^{-1} \Rightarrow y^{-1} = -e^x + ce^{-x} \\
y &= \frac{1}{-e^x + ce^{-x}}
\end{aligned}
$$

* $xy' - y = \dfrac{x^2}{y^2} \Rightarrow xy' - y = x^2 y^{-2}$

$$
\begin{aligned}
u &= y^{1-n} \\
&= y^{1-(-2)} \\
&= y^3 \Rightarrow u^{\frac{1}{3}} = y \Rightarrow y' = \frac{1}{3} u^{\frac{1}{2}-1} u' = \frac{1}{3} u^{\frac{-2}{3}} u'
\end{aligned}
$$

por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
x\frac{1}{3} u^{\frac{-2}{3}} u' - u^{\frac{1}{3}} &= x^2 \left(u^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} \\
\left(3u^{\frac{2}{3}}\right)\left(x\frac{1}{3} u^{\frac{-2}{3}} u' - u^{\frac{1}{3}}\right) &= \left(x^2 u^{\frac{-2}{3}}\right)\left(3u^{\frac{2}{3}}\right) \\
(xu' - 3u &= 3x^2) \quad \div x \\
u' - \frac{3u}{x} &= 3x
\end{aligned}
$$

identificamos

$$
p(x)\frac{-3}{x} \qquad\qquad q(x) = 3x
$$

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\int p(x)dx} \\
&= e^{\int \frac{-3}{x}dx} = e^{-3\int \frac{dx}{x}} \\
&= e^{-3\ln x} \\
&= e^{\ln x} \\
&= x^3 \\
yu &= \int qudx \\
ux^{-3} &= \int 3xx^{-3}dx \\
ux^{-3} &= 3\int x^{-2}dx \\
ux^{-3} &= 3\frac{x^{-1}}{-1} + c \\
ux^{-3} &= -3x^{-1} + c \\
(ux^{-3} &= -3x^{-1} + c)(x^3) \\
u &= -3x^2 + cx^3 \\
u &= y^3 \\
y^3 &= -3x^2 + cx^3
\end{aligned}
$$

* $xy' + y = \dfrac{x^2}{y^2}$

$$
\begin{aligned}
u &= y^{1-n} \\
&= y^{1+2} \\
&= y^3 \Rightarrow y = u^{\frac{1}{3}} \\
y' &= \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1}u' \\
y' &= \frac{1}{3}u^{\frac{-2}{3}}u'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x\frac{1}{3}u^{\frac{-2}{3}}u' - u^{\frac{1}{3}} &= x^2\left(u^{\frac{1}{3}}\right)^{-2} \\
\left(3u^{\frac{2}{3}}\right)\left(x\frac{1}{3}u^{\frac{-2}{3}}u' - u^{\frac{1}{3}}\right) &= \left(x^2u^{\frac{-2}{3}}\right)\left(3u^{\frac{2}{3}}\right) \\
xu' - 3u &= 3x^2 \qquad \div x \\
u' - \frac{3u}{x} &= 3x
\end{aligned}
$$

$$p(x) = \frac{-3}{x} \qquad\qquad q(x) = 3x$$

$$\begin{aligned}
u &= e^{\int p(x)dx} \\
&= e^{\int \frac{-3}{x}dx} \\
&= e^{-3\int \frac{dx}{x}} \\
&= e^{-3\ln x} \\
&= e^{\ln x^{-3}} \\
&= x^{-3} \\
yu &= \int qudx \\
ux^{-3} &= \int 3xx^{-3}dx \\
&= 3\int x^{-2}dx \\
&= \frac{3x^{-1}}{-1} + c \\
&= -3x^{-1} + c \\
(ux^{-3} &= -3x^{-1} + c)(x^3) \\
u &= -3x^2 + cx^3 \\
u &= y^3 \\
y^3 &= -3x^2 + cx^3
\end{aligned}$$

* $xy' + y = 3x\sqrt{y} \Rightarrow xy' + y = 3xy^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
u &= y^{1-n} \\
&= y^{1-\frac{-1}{2}} \\
&= y^{\frac{1}{2}} \\
u^2 &= y \Rightarrow y' = 2uu' \\
x2uu' + u^2 &= 3x\sqrt{u^2} \\
(2xuu' + u^2 &= 3xu) \quad \div (2xu) \\
\frac{2xuu'}{2xu} + \frac{u^2}{2xu} &= \frac{3xu}{2xu} \\
u' + \frac{u}{2x} &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

$$p(x) = \frac{1}{2x} \qquad\qquad q(x) = \frac{3}{2}$$

$$
\begin{aligned}
u &= e^{\int p(x)dx} \\
&= e^{\int \frac{1}{2x}dx} \\
&= e^{\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x}} \\
&= e^{\frac{1}{2}\ln x} \\
&= e^{\ln x^{\frac{1}{2}}} \\
&= x^{\frac{1}{2}} \\
ux^{\frac{1}{2}} &= \int \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}dx \\
&= \frac{3}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx \\
&= \frac{3}{2}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\
&= x^{\frac{3}{2}} + c \\
(ux^{\frac{1}{2}} &= x^{\frac{3}{2}} + c) \qquad \div x^{\frac{1}{2}} \\
\frac{ux^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{c}{x^{\frac{1}{2}}} \\
u &= x + \frac{c}{\sqrt{x}} \\
u &= y^{\frac{1}{2}} \\
u &= \sqrt{y} \\
\sqrt{y} &= x + \frac{c}{\sqrt{x}} \\
y &= \left(x + \frac{c}{\sqrt{x}}\right)^2
\end{aligned}
$$