CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES

NÚMEROS REALES

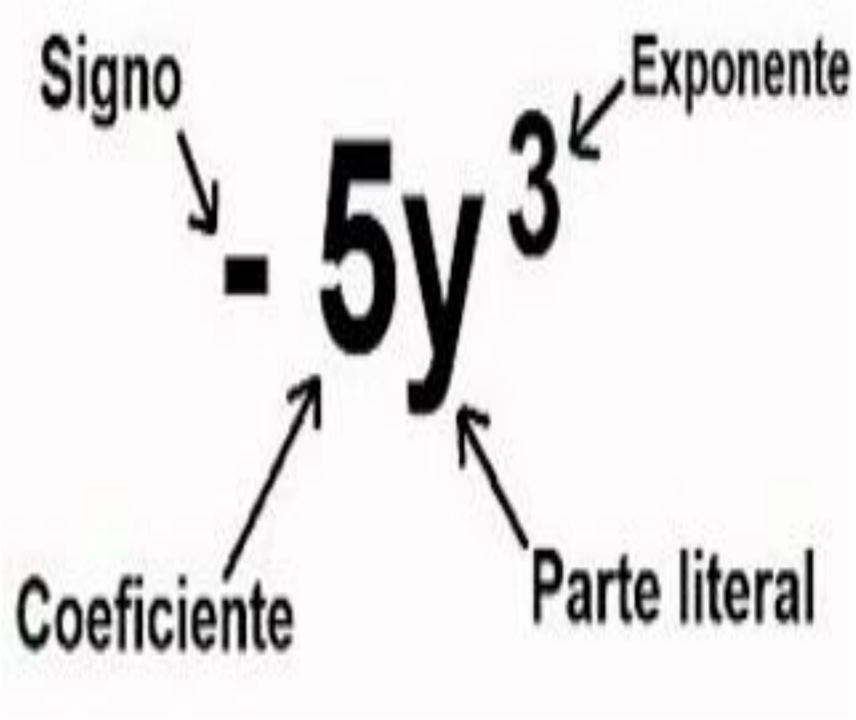
1.2 Expresiones Algebraicas

- Operaciones: suma, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación
- Productos y Cocientes Notables
- Técnicas de Factorización: factor común, trinomio cuadrado perfecto, raíces del polinomio, Ruffini.
- Mínimo Común Múltiplo
- Máximo Común Divisor

Números Reales

- Una expresión **algebraica** es una combinación de letras, números y signos de **operaciones**.

- Las letras suelen representar cantidades desconocidas y se denominan variables, parte literal o incógnitas.



Tecnicismos algebraicos

Expresión	Ejemplo
Monomio	$3a; -5b; 2x^2y$
Binomio	$2a-5b; a^2-b^2; x^3-y^3$
Trinomio	$x^2+bx+c; 4a^2-5b+1; a+b+c$
Polinomio	$2a-5b;\ a+b+c;$ $x^5-x^4y-12x^3y^2+2x^2y^3+xy^4-y^5$

OPERACIONES ALGEBRAICAS

SUMA:

Sumar varios monomios es formar un polinomio, cuyos términos son los monomios dados.

Sumar a; -5b; y 4c

$$a - 5b + 4c$$

Suma de polinomios

Sumar $x^3 - 5x^2 + 2x - 6$; $2x^3 + 3x^2 - 4x + 3$ y $x^2 - 2x + 1$

Se lo realiza mediante la simplificación de términos semejantes, o se los dispone uno debajo del otro, de modo que los términos semejantes queden uno debajo del otro.

$$\begin{array}{rrrr}
x^3 & -\,5x^2 & +\,2x & -\,6 \\
2x^3 & +\,3x^2 & -\,4x & +\,3 \\
 & x^2 & -\,2x & +\,1 \\
\hline
3x^3 & -\,x^2 & -\,4x & -\,2
\end{array}$$

Resta de polinomios:

Restar de un polinomio otro es hallar un tercer polinomio, que sumando con el segundo polinomio de el primero

De $2a + 5b - 3c$ restar $x^3 + 2x^2 - 3$

$$2a + 5b - 3c - (x^3 + 2x^2 - 3)$$

$7x^2 + 3x - 2$ $\quad x^3 - 2x^2$ $5x^2 - 5x - 7$

De Restar

Cuando los polinomio contienen términos semejantes es mejor disponerlos uno debajo del otro

$$\begin{array}{r} 7x^2 + 3x - 2 \\ -5x^2 + 5x + 7 \\ \hline 2x^2 + 8x + 5 \end{array}$$

MULTIPLICACION:

La multiplicación de expresiones algebraicas se hace teniendo en cuenta las siguientes leyes

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS:

Multiplicar dos monomios es forma otro monomio, cuyas factores sean todos y cada uno de los factores de los monomios dados

El monomio resultante se llama producto de los monomios dados:

El producto de los monomios $-5a^2b$ y $3a$

$(-5a^2b)\ (3a) = -15\ a^3b$

Producto de un monomio por un polinomio

$n\ (a+2b-c) = an + 2nb – cn$

Producto de un polinomio por otro polinomio:

Para multiplicar dos polinomios se aplica también la ley distributiva. Resulta así un nuevo polinomio, cuyos términos son los productos de cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio.

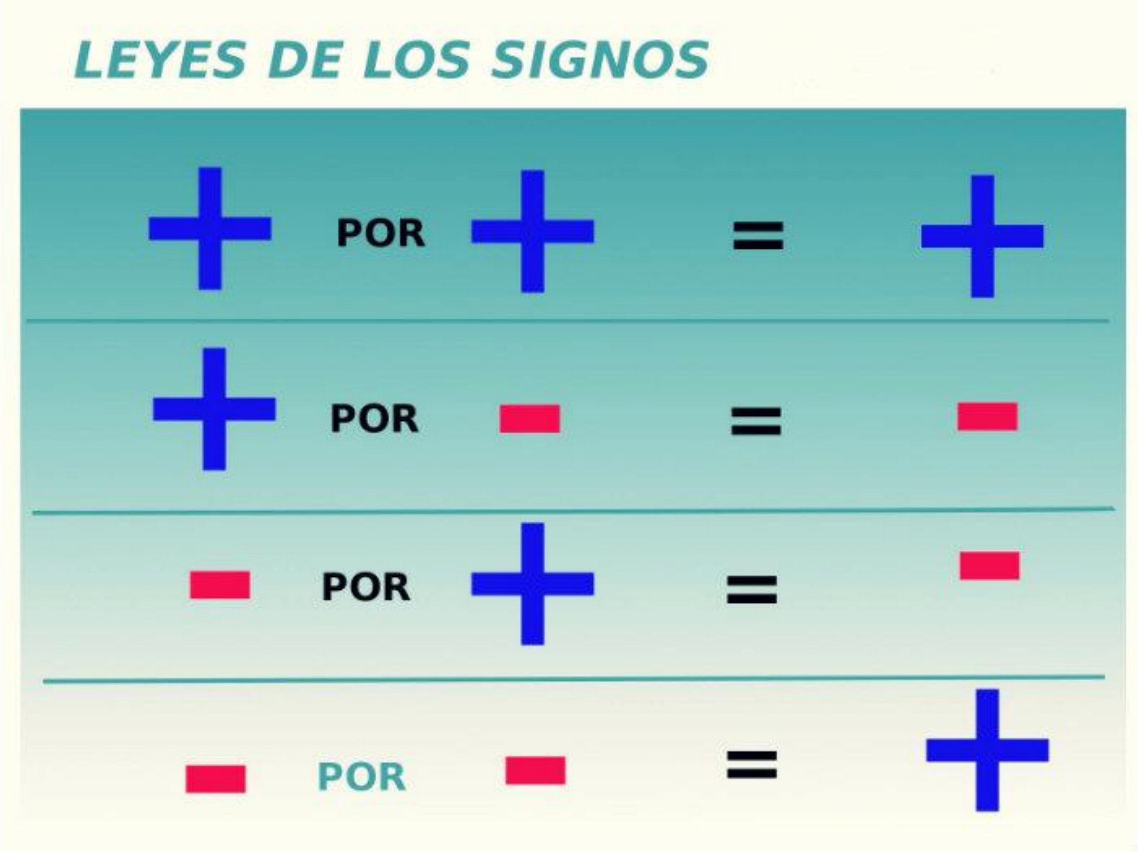
El producto de a+b+c y x+y+z

	x	y	z
a	ax	ay	az
b	bx	by	bz
c	cx	cy	cz

Ejemplo		
Problema	**$(x + 4)(2x + 2)$**	
	$x(2x + 2) + 4(2x + 2)$	Multiplicar cada término en un binomio por cada termino en el otro binomio
	$2x^2 + 2x + 8x + 8$	Reescribir para agrupar los términos semejantes
	$2x^2 + 10x + 8$	Combinar términos semejantes
Solución	$2x^2 + 10x + 8$	

$$
\begin{array}{rrrrr}
 & & 2x^2 & +5x & -6 \\
 & & 3x^2 & -6x & +3 \\
\hline
 & & +6x^2 & +15x & -18 \\
 & -12x^3 & -30x^2 & +36x & \\
6x^4 & +15x^3 & -18x^2 & & \\
\hline
\color{red}{+6x^4} & \color{red}{+3x^3} & \color{red}{-42x^2} & \color{red}{+51x} & \color{red}{-18}
\end{array}
$$

DIVISION de expresiones algebraicas se hace teniendo en cuenta las siguientes leyes



$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

División de un polinomio por un monomio

Dividir a + b + c para m

$$\frac{a+b+c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m}$$

$$\frac{-6a^{x+3}b^{m-2}}{-2a^{x+2}b^{m-4}} = +\frac{6}{2}a^{x+3-(x+2)}b^{m-2-(m-4)} = 3ab^2$$

$$\frac{8a^{x+2}b^{m-3}}{-2a^{x+2}b^{m-4}} = -\frac{8}{2}a^{x+2-(x+2)}b^{m-3-(m-4)} = -4b$$

$$
\begin{array}{l|l}
D(x) & d(x) \neq 0 \\
\hline
R(x) & C(x)
\end{array}
$$

$$D(x) = d(x).C(x)+R(x)$$

$$(3x^3+13x^2-13x+2): (3x-2)=$$

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3+13x^2-13x+2 & 3x-2 \\
\cline{2-2}
-3x^3+2x^2 \qquad\qquad & x^2+5x-1 \\
\hline
0 +15x^2-13x+2 & \\
\hline
-15x^2+10x \quad & \\
\hline
0 \;\; -3x+2 & \\
\hline
+3x-2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

POTENCIACION:

Se llama potencia a una expresión de la forma a^n, donde *a* es la **base** y *n* es el **exponente**

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN	
Propiedad	**Ejemplo**
$a^0 = 1$	$(-5)^0 = 1$
$a^1 = a$	$23^1 = 23$
$a^n . a^m = a^{n+m}$	$x^2 . x^{-3} = x^{2-3} = x^{-1}$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{7^8}{7^5} = 7^{8-5} = 7^3$
$(a.b)^n = a^n . b^n$	$(4.x)^3 = 4^3 . x^3$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\left(\frac{-3}{2}\right)^3 = \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-27}{8}$
$(a^n)^m = a^{n.m}$	$(m^{-1})^3 = m^{-1.3} = m^{-3}$
$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[5]{8^3} = 8^{\frac{3}{5}}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a^{-5} = \frac{1}{a^5}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(-\frac{2}{5}\right)^{-2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$
$(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$	$(4+x)^3 \neq 4^3 + x^3$

RADICACION

La **radicación** es la operación inversa a la potenciación. Y consiste en que dados dos números, llamados radicando e índice, hallar un tercero, llamado raíz, tal que, elevado al índice, sea igual al radicando. En la raíz cuadrada el índice es 2, aunque en este caso se omite.

RADICACION
$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b};\quad \boldsymbol{a,b} \in \mathcal{R}^+ \wedge \boldsymbol{n} \in \mathcal{N}$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}\,;\quad \boldsymbol{a,b} \in \mathcal{R}^+ \wedge \boldsymbol{n} \in \mathcal{N}$
$(\sqrt[n]{a})^m. = \sqrt[n]{a^m};\quad \boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^+ \wedge \boldsymbol{n,m} \in \mathcal{N}$
$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}. = \sqrt[m.n]{a};\quad \boldsymbol{a} \in \mathcal{R}^+ \wedge \boldsymbol{n,m} \in \mathcal{N}$
$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b};\quad \boldsymbol{a,b} \in \mathcal{R}^+ \wedge \boldsymbol{n} \in \mathcal{N}$

Exponentes	Radicales
$a^m a^n = a^{m+n}$	$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$
$(ab)^n = a^n\, b^n$	$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

- **Productos notables** es el nombre que reciben multiplicaciones **con** expresiones algebraicas cuyo resultado **se** puede escribir mediante simple inspección, sin verificar la multiplicación que cumplen ciertas reglas fijas.
- Se llaman **cocientes notables** a las divisiones rápidas. Los **cocientes notables** son **cocientes** exactos.

Producto notable		Expresión algebraica	Nombre
$(a+b)^2$	=	$a^2+2ab+b^2$	Binomio al cuadrado
$(a+b)^3$	=	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	Binomio al cubo
a^2-b^2	=	$(a+b)(a-b)$	Diferencia de cuadrados
a^3-b^3	=	$(a-b)(a^2+b^2+ab)$	Diferencia de cubos
a^3+b^3	=	$(a+b)(a^2+b^2-ab)$	Suma de cubos

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES

PRODUCTOS NOTABLES

$$\boxed{m(a+b+c)=ma+mb+mc}$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

$$\boxed{(a+b)^2=a^2+2ab+b^2}$$

$$\boxed{(a-b)^2=a^2-2ab+b^2}$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$$

$$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$\boxed{(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3}$$

$$\boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3}$$

COCIENTES NOTABLES

$$\boxed{\frac{ma+mb+mc}{m}=a+b+c}$$

$$\boxed{\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}=a+b}$$

$$\boxed{\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}=a-b}$$

$$\frac{a^2-b^2}{a+b}=a-b$$

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$$

$$\boxed{\frac{a^3+b^3}{a+b}=(a^2-ab+b^2)}$$

$$\boxed{\frac{a^3-b^3}{a-b}=(a^2+ab+b^2)}$$

FACTORAR

- Es determinar los factores multiplicadores que al operarlos dieron por resultado una expresión algébrica
- En el ejemplo los factores son dos
- X el primero; (a+b) el segundo

Example:

$$ax + bx = \boxed{\underbrace{x}_{\text{factor}}(\underbrace{a + b}_{\text{factor}})}$$

FACTOR COMÚN:

fórmula general: ma +mb+ mc = m(a+b+c)

$$2ax^2 + 3bx^3 = x^2(2a + 3bx)$$

$$a^4b - 5ac = a\,(a^3b - 5c)$$

$$4a^5b + 4a^3c = 4a^3(a^2b + c)$$

AGRUPAMIENTO

Ejemplo 1: Factorizar: $x^2 - 2x + cx - 2c$

Resolución:

Agrupamos el primero con el segundo y el tercero con el cuarto.

$$x^2 - 2x + cx - 2c = (x^2 - 2x) + (cx - 2c)$$

Sacamos factor común "x"

Sacamos factor común "c"

$$= x(x - 2) + c(x - 2)$$

Sacamosfactorcomún "**(x-2)**"

$$= (x - 2)(x+c)$$

$$\therefore \quad \boxed{x^2 - 2x + cx - 2c = (x - 2)(x+c)}$$

Ejemplo 2: Factorizar: $2yz + 7y - 2z - 7$

Resolución:

Agrupamos el primero con el tercero y el segundo con el cuarto, obtenemos:

$$2yz + 7y - 2z - 7 = (2yz - 2z) + (7y - 7)$$

Sacamos factor común "2z"

Sacamos factor común "7"

$$= 2z(y - 1) + 7(y - 1)$$

Sacamos factor común "(y - 1)"

$$= (y - 1)(2z+7)$$

$$\therefore \quad \boxed{2yz + 7y - 2z - 7 = (y - 1)(2z+7)}$$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

<u>Fórmula general</u>:

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$$4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$$

$$a^6 - 22a^3 + 121 = (a^3 - 11)^2$$

$$\begin{aligned}(x - y)^2 + 4(x - y)z + 4z^2 &= [(x - y) + 2z]^2\\ &= (x - y + 2z)^2.\end{aligned}$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS: Formula G: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$$m^2 - 100 = (m + 10)(m - 10)$$

$$z^2 - 1 = (z + 1)(z - 1)$$

$$25 - 81x^2 = (5 - 9x)(5 + 9x)$$

COMBINACION DE CUADRADO PERFECTO Y DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$
\begin{aligned}
a^2 + 2ab + b^2 - 25m^2 &= (a^2 + 2ab + b^2) - 25m^2 \\
&= (a + b)^2 - 25m^2 \\
&= (a + b + 5m)(a + b - 5m).
\end{aligned}
$$

TRINOMIO DE LA FORMA *$x^2 + px + q$*

- En productos notables se sabe que:

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Buscaremos dos números cuya suma sea + 5

y cuyo producto sea + 6.

$$x^2 + 5x + 6 = (x \ \_\_\ )\ (x \ \_\_\ )$$

$$\mathbf{x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3).}$$

TRINOMIO DE LA FORMA $mx^2 + px + q$

- Tenemos que: $mx^2 + px + q$ *se aplica:* $mx^2 + px + mq$

- *Ejemplo:* $4x^2 + 8x + 3$ *; entonces aplicamos* $m=$

$$=\frac{4^2x^2+8x+(4)(3)}{4}$$

$$=\frac{(4x+\quad)(4x+\quad)}{4} \qquad 6x2$$

$$=\frac{(4x+6)(4x+2)}{4} \qquad 6+2$$

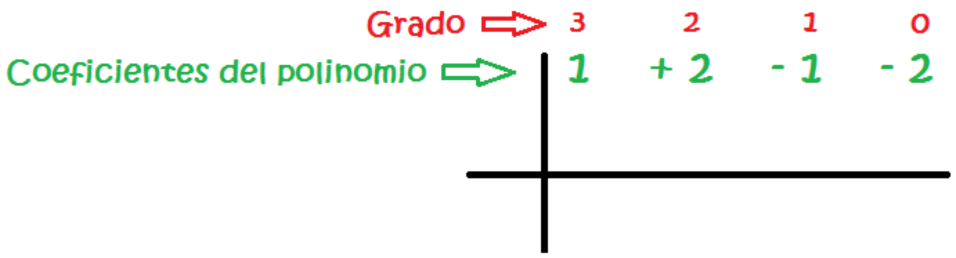
$$=\frac{2(2x+3)\ 2(2x+1)}{4}$$

$=(2x+3)\ (2x+1)$

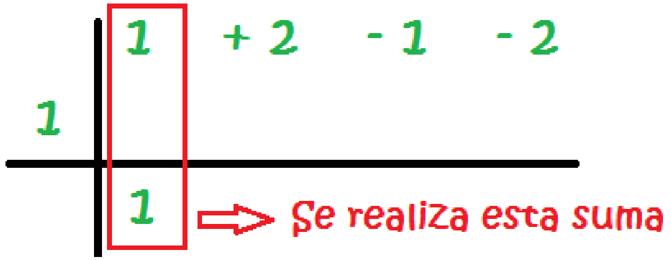
FACTOREO SEGÚN RUFFINI

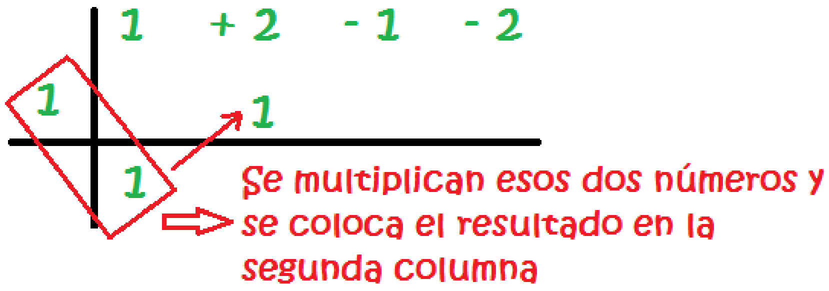
$x^3 + 2x^2 - x - 2$

- *Identificar los coeficientes de cada término*



- *Buscamos los múltiplos del término independiente +2, -2, +1, -1*





$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & +2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & \\ \hline & 1 & 3 & & \end{array}$$

Se multiplican esos dos números y se coloca el resultado en la tercera columna

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & +2 & -1 & -2 \\ 1 & & 1 & 3 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

Buscamos tener aquí un o

$$=(X^2 + 3X + 2)(X - 1)$$

MINIMO COMUN MULTIPLO

El mínimo común múltiplo (m. c. m) de varios números es el menor de sus múltiplos comunes distinto de cero.

- Descomponemos en factores primos.
- Calcular el producto de los factores **no comunes y de los comunes con mayor exponente.**

90	2
45	5
9	3
3	3
1	

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

50	2
25	5
5	5
1	

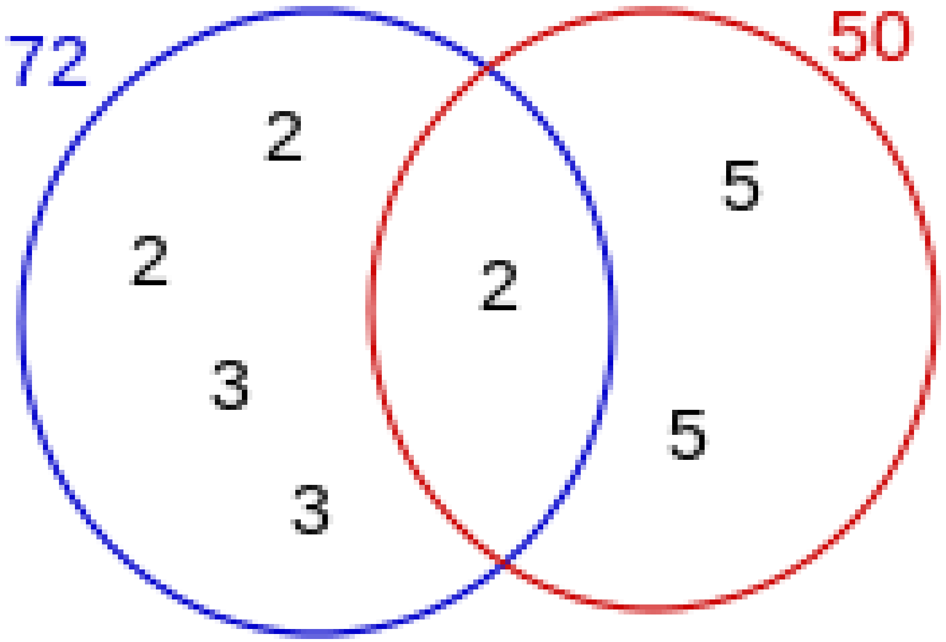
90 = 2. 5. $\mathbf{3^2}$

40 = $\mathbf{2^3}$. 5

50 = $\mathbf{5^2}$ 2

El m. c. m. (90, 40, 50) =$\mathbf{3^2 . 2^3 . 5^2 = 1800}$

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$



Tomando los factores comunes y no comunes con su mayor exponente, tenemos que

$$\mathrm{mcm}(72, 50) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1800$$

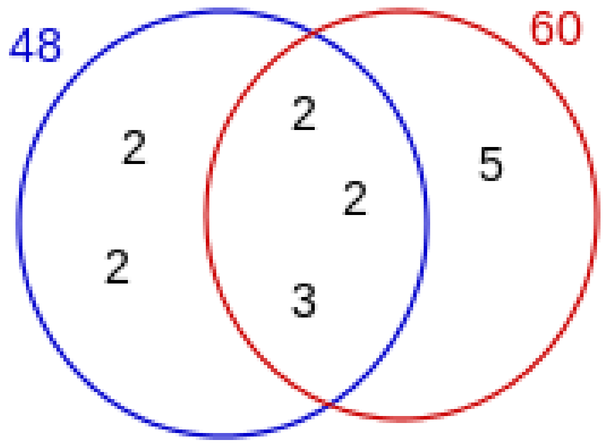
Comparación procedimiento M.C.D y del m.c.m

Los procedimientos de los cálculos del M.C.D y del m.c.m son muy parecidos vamos a compararlos para que no hayan dudas

	M.C.D	m.c.m
Paso 1	Descomponemos los números en factores primos (Factorización de un número)	
Paso 2	Se eligen los **factores comunes elevados al menor exponente**	Se eligen los **factores NO comunes y comunes elevados al MAYOR exponente**
Paso 3	Se multiplican	

MAXIMO COMUN DIVISOR

$$\begin{array}{r|l} 48 & 2 \\ 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$



El MCD son los factores comunes con su menor exponente:

$$\mathrm{mcd}(48, 60) = 2^2 \cdot 3 = 12$$