



ÍNDICE

	Presentación.....	vii
1.	Fundamentos del Hormigón Simple.....	1
1.1	Introducción.....	1
1.2	Los Materiales Cementantes.....	2
1.3	Los Áridos.....	6
1.4	Dosificación y Estructura Interna del Hormigón.....	6
1.5	Los Aditivos.....	10
1.6	Propiedades Mecánicas del Hormigón.....	14
	➤ Resistencia a la Compresión.....	14
	➤ Módulo de Elasticidad.....	17
	➤ Ductilidad.....	19
	➤ Resistencia a la Tracción.....	21
	➤ Resistencia al Corte.....	23
	➤ Flujo Plástico.....	24
1.7	Otras Propiedades del Hormigón.....	25
	➤ Trabajabilidad.....	25
	➤ Densidad.....	25
	➤ Impermeabilidad.....	26
	➤ Resistencia a la Abrasión.....	26
1.8	Tareas Complementarias.....	27
2.	Diseño y Fabricación de Hormigones.....	28
2.1	Introducción.....	28
2.2	Características de los Materiales.....	29
	➤ Cemento.....	29
	➤ Agregados.....	31
	➤ Agua.....	32
	➤ Aditivos.....	32
2.3	Especificaciones Técnicas del Hormigón en Obra.....	33
	➤ Resistencia del Hormigón.....	33
	➤ Trabajabilidad del Hormigón Fresco.....	33
	➤ Velocidad de Fraguado.....	34
	➤ Peso Específico.....	35
2.4	Proceso de Diseño de Mezclas.....	35
2.5	Control en Obra.....	40
2.6	Tareas Complementarias.....	40
3.	El Acero Estructural en el Hormigón Armado.....	42
3.1	Introducción.....	42
3.2	Propiedades Mecánicas del Acero.....	44
	➤ Rango de Comportamiento Elástico.....	45
	➤ Esfuerzo de Fluencia.....	45
	➤ Resistencia a la Rotura.....	46
	➤ Módulo de Elasticidad.....	47
	➤ Ductilidad.....	48
3.3	Otras Propiedades del Acero.....	49



	➤	Densidad.....	49
	➤	Resistencia a la Corrosión.....	50
3.4		Tareas Complementarias.....	50
4.		Comportamiento del Hormigón Armado.....	52
4.1		Introducción.....	52
4.2		El Principio de Compatibilidad de Deformaciones.....	53
4.3		El Principio de Navier – Bernoulli.....	53
4.4		Comportamiento del Hormigón Armado ante Cargas de Compresión.....	53
4.5		Comportamiento del Hormigón Armado ante Cargas de Tracción.....	59
4.6		Comportamiento del Hormigón Armado ante Cargas de Flexión.....	63
4.7		Resumen de Fundamentos del Comportamiento del Hormigón Armado.....	71
5.		Empalmes, Anclajes, Longitud de Desarrollo y Recubrimiento del Acero.....	73
5.1		Adherencia entre el Acero y el Hormigón.....	73
5.2		Empalmes de Varillas de Acero	73
5.3		Anclajes.....	75
5.4		Longitud de Desarrollo.....	76
	➤	Definición.....	76
	➤	Factores que Influyen en la Longitud de Desarrollo.....	76
	➤	Longitud de Desarrollo del Acero a Tracción.....	77
	➤	Longitud de Desarrollo del Acero a Compresión.....	79
	➤	Longitud de Desarrollo en Paquetes de Varillas.....	79
5.5		Especificaciones para Empalmes por Traslape.....	80
	➤	Empalmes de Alambres y Varillas Corrugadas a Tracción.....	80
	➤	Empalmes de Alambres y Varillas Corrugadas a Compresión.....	80
	➤	Requisitos Especiales de Empalmes de Varillas Corrugadas para Columnas.....	81
5.6		Especificaciones para Ganchos Estándares o Normalizados.....	81
5.7		Recubrimiento del Acero.....	83
5.8		Límites del Espaciamiento del Refuerzo.....	84
6.		Fundamentos para el Diseño de Estructuras de Hormigón Armado....	85
6.1		La Seguridad en el Diseño de las Estructuras.....	85
	➤	Diseño por Esfuerzos Admisibles.....	85
	➤	Diseño por Capacidad Resistente.....	86
6.2		Las Cargas y las Combinaciones de Carga para el Diseño de Estructuras de Hormigón Armado.....	87
6.3		Los Factores de Reducción de la Capacidad Resistente.....	88
6.4		La Falla Dúctil por Flexión en Pórticos.....	91
7.		Diseño a Flexión de Vigas de Hormigón Armado.....	104
7.1		Esfuerzos y Deformaciones Definidos en los Códigos de Diseño.....	104



7.2	El Bloque de Compresión de Whitney.....	107
7.3	Ecuaciones para la Obtención de la Sección Transversal de Acero en Vigas Rectangulares.....	116
7.4	Cuantías de Armado.....	123
➤	Definición.....	123
➤	Cuantía Balanceada.....	124
➤	Cuantías Máximas de Armado en Vigas.....	129
➤	Cuantías Mínimas de Armado en Vigas.....	137
7.5	Especificaciones de los Códigos para Flexión.....	141
➤	Sección Crítica en Zona de Apoyo.....	141
➤	Diseño Sísmico a Momento Flector Reversible Mínimo.....	142
➤	Viga Débil y Columna Fuerte.....	143
7.6	Diseño de Vigas “T” y Vigas “L”.....	144
➤	Primer Caso: Ala Comprimida.....	145
➤	Segundo Caso: Ala y Parte del Alma Comprimidas	145
➤	Tercer Caso: Alma Comprimida.....	147
7.7	Diseño de Vigas de Sección Transversal Arbitraria.....	161
7.8	Diseño a Flexión de Vigas con Armadura de Compresión.....	180
➤	Diseño de Vigas que no Pueden Incrementar sus Dimensiones Exteriores.....	182
➤	Diseño de Vigas que ya Disponen de Armadura de Compresión.....	190
7.9	Tareas Complementarias.....	201
8.	Diseño a Cortante de Vigas de Hormigón Armado.....	203
8.1	Introducción.....	203
8.2	Los Esfuerzos Cortantes.....	203
8.3	La Resistencia a Cortante en Vigas de Hormigón, sin Refuerzo en el Alma.....	204
8.4	El Papel del Acero en la Resistencia a Corte del Hormigón Armado.....	206
8.5	Diseño a Cortante de Vigas de Hormigón Armado, con Refuerzo en el Alma.....	208
8.6	Especificaciones para el Diseño de Vigas ante Fuerzas Cortantes.....	212
➤	Capacidad Máxima del Acero de Cortante.....	212
➤	Sección Crítica a Cortante.....	212
➤	Espaciamiento Mínimo de los Estribos.....	213
➤	Espaciamiento de los Estribos de Confinamiento en Zonas Sísmicas.....	214
➤	Armado Mínimo de Cortante.....	214
➤	Armado Mínimo para Comportamiento Dúctil.....	215
8.7	Tareas Complementarias.....	226
9.	Diseño de Losas de Hormigón Armado.....	228
9.1	Introducción.....	228
9.2	Tipos de Losas.....	228
➤	Clasificación de las Losas por el Tipo de Apoyos.....	228



	➤ Clasificación de las Losas por la Dirección de Trabajo.....	230
	➤ Clasificación de las Losas por la Distribución Interior del Hormigón.....	231
9.3	Comportamiento de las Losas.....	233
	➤ Losas Unidireccionales.....	233
	➤ Losas Bidireccionales.....	235
9.4	Especificaciones para Losas en los Códigos de Diseño.....	238
	➤ Deflexiones Máximas en Losas.....	238
	➤ Armadura Mínima.....	241
	➤ Armadura Máxima.....	243
	➤ Recubrimiento Mínimo.....	243
	➤ Resistencia al Cortante.....	243
	➤ Aberturas en Losas.....	245
9.5	Diseño de Losas Macizas y Nervadas Rectangulares Sustentadas Perimetralmente en Vigas Descolgadas.....	252
	➤ Tablas para Diseño de Losas Macizas Rectangulares Sustentadas Perimetralmente, Sometidas a Cargas Distribuidas Uniformes.....	263
	➤ Tablas para Diseño de Losas Macizas Triangulares Sustentadas Perimetralmente, Sometidas a Cargas Distribuidas Uniformes.....	268
	➤ Tablas para Diseño de Losas Nervadas Rectangulares Sustentadas Perimetralmente, Sometidas a Cargas Distribuidas Uniformes.....	270
9.6	Diseño de Losas Macizas y Nervadas Rectangulares con Vigas Embebidas Perimetrales.....	294
	➤ Introducción.....	294
	➤ Los Modelos Analizados en este Estudio.....	294
	➤ Las Deformaciones en las Vigas y las Losas.....	295
	➤ Las Solicitaciones en las Vigas y las Losas.....	307
	➤ Conclusiones y Recomendaciones.....	315
10.	Introducción al Diseño de Cimentaciones de Hormigón Armado.....	316*
10.1	Introducción.....	316
10.2	El Suelo de Cimentación.....	316
10.3	Tipos de Cimentaciones.....	316
	➤ Plintos Aislados.....	316
	➤ Zapatas Corridas.....	317
	➤ Zapatas Combinadas.....	317
	➤ Vigas de Cimentación.....	318
	➤ Losas de Cimentación.....	318
	➤ Pilotes.....	319
	➤ Caissons.....	320
10.4	Criterios para el Diseño de Plintos.....	320
11.	La Compresión Axial en los Elementos de Hormigón Armado.....	338*
11.1	Introducción.....	338
11.2	Columnas de Hormigón Armado.....	339
11.3	La Resistencia del Hormigón a Procesos de Carga Lentos y	



	a Cargas de Larga Duración.....	340
11.4	Resistencia a la Compresión de Columnas de Hormigón Armado con Estribos Transversales.....	345
11.5	Resistencia a la Compresión de Columnas de Hormigón Armado con Zunchos Transversales.....	353
11.6	Pandeo en Elementos Sometidos a Compresión Axial.....	358
11.7	Carga Crítica de Pandeo.....	359
12.	Tensores de Hormigón Armado.....	367
12.1	Introducción.....	367
12.2	Criterios de Análisis, Diseño y Construcción de Tensores.....	368
	➤ Criterios de Análisis.....	368
	➤ Criterios de Diseño.....	368
	➤ Criterios de Construcción.....	370
13.	La Flexocompresión en los Elementos de Hormigón Armado.....	373
13.1	Introducción.....	373
13.2	Diagramas de Interacción de Columnas con Flexión Unidireccional.....	373
13.3	Especificaciones Codificadas para el Uso de Diagramas de Interacción en el Diseño de Columnas.....	381
13.4	Diagramas de Interacción Adimensionales para el Diseño de Columnas.....	386
13.5	Utilización de los Diagramas Auxiliares de Interacción Adimensionales para Columnas Rectangulares con Flexión Unidireccional.....	388
13.6	Utilización de los Diagramas Auxiliares de Interacción Adimensionales para Columnas Zunchadas Circulares con Flexión Unidireccional.....	391
13.7	Efecto del Pandeo en el Diseño a Flexocompresión.....	394
13.8	Flexocompresión Biaxial.....	408
13.9	Diseño de Columnas a Corte Unidireccional.....	415
13.10	Diseño de Columnas a Corte Bidireccional.....	418
13.11	Características del Refuerzo Transversal en Columnas con Estribos.....	423
13.12	Características del Refuerzo Transversal en Columnas Zunchadas.....	426
14.	La Torsión en los Elementos de Hormigón Armado.....	428
14.1	Introducción.....	428
14.2	El Flujo de Esfuerzos Cortantes Diagonales.....	429
14.3	El Comportamiento ante la Torsión de los Elementos de Hormigón Armado con Sección Transversal Rectangular.....	430
14.4	Diseño Combinado a la Torsión y al Corte.....	431
15.	Cargas en Edificaciones de Hormigón Armado.....	452
15.1	Cargas en las Estructuras.....	452
15.2	Cargas Permanentes.....	452
15.3	Cargas Vivas.....	453
15.4	Cargas Sísmicas.....	454
	➤ Criterios para la Definición de las Fuerzas Sísmicas.....	455



TEMAS DE HORMIGÓN ARMADO

Marcelo Romo Proaño, M.Sc.

Escuela Politécnica del Ejército – Ecuador

mromo@espe.edu.ec

➤	Procedimiento de Cálculo de las Fuerzas Sísmicas.....	456
▪	Carga Gravitacional Presente el Momento del Sismo.....	456
▪	Factor Z de Zona Sísmica.....	457
▪	Factor de Importancia de la Estructura.....	458
▪	Coeficiente de Interacción Suelo-Estructura.....	459
▪	Coeficiente de Configuración Estructural en Planta.....	462
▪	Coeficiente de Configuración Estructural en Elevación.....	463
▪	Factor de Reducción de la Fuerza Sísmica.....	465
➤	Procedimiento de Distribución de las Fuerzas Sísmicas.....	466

CAPÍTULO I **FUNDAMENTOS DEL HORMIGÓN SIMPLE**

1.1 INTRODUCCIÓN:

El hormigón es una piedra artificial formada al mezclar apropiadamente cuatro componentes básicos: cemento, arena, grava y agua.



Figura 1.1: Componentes del hormigón.

Las propiedades del hormigón dependen en gran medida de la calidad y proporciones de los componentes en la mezcla, y de las condiciones de humedad y temperatura, durante los procesos de fabricación y de fraguado.

Para conseguir propiedades especiales del hormigón (mejor trabajabilidad, mayor resistencia, baja densidad, etc.), se pueden añadir otros componentes como aditivos químicos, microsílíce, limallas de hierro, etc., o se pueden reemplazar sus componentes básicos por componentes con características especiales como agregados livianos, agregados pesados, cementos de fraguado lento, etc.



Figura 1.2: Aditivos para el hormigón.

El hormigón ha alcanzado importancia como material estructural debido a que puede adaptarse fácilmente a una gran variedad de moldes, adquiriendo formas arbitrarias, de dimensiones variables, gracias a su consistencia plástica en estado fresco.



Figura 1.3: Geometrías proporcionadas al hormigón endurecido.

Al igual que las piedras naturales no deterioradas, **el hormigón es un material sumamente resistente a la compresión, pero extremadamente frágil y débil a solicitaciones de tracción.** Para aprovechar sus fortalezas y superar sus limitaciones, en estructuras se utiliza el **hormigón combinado con barras de acero resistente a la tracción**, lo que se conoce como **hormigón armado**, o combinado con cables tensados de acero de alta resistencia, lo que se identifica como **hormigón preesforzado**.



Figura 1.4: Hormigón armado y hormigón preesforzado.

1.2 LOS MATERIALES CEMENTANTES:

Son materiales aglomerantes que tienen las propiedades de adherencia y cohesión requeridas para unir fragmentos minerales entre sí, formando una masa sólida continua, de resistencia y durabilidad adecuadas.

Dentro de esta categoría, además de los cementos propiamente dichos, se encuentran materiales empleados con menos frecuencia como las cales, los asfaltos y los alquitranes.



Figura 1.5: Materiales cementantes.

Para fabricar hormigón estructural se utilizan únicamente los **cementos hidráulicos** (utilizan agua para reaccionar químicamente y adquirir sus propiedades cementantes durante los procesos de endurecimiento inicial y fraguado). Entre los diferentes cementos hidráulicos destaca, por su uso extendido, el **cemento Portland**, pero además existen los **cementos naturales** y los **cementos con alto contenido de alúmina**.



Figura 1.6: Saco de cemento Pórtland.

El cemento Portland es un polvo muy fino, de color grisáceo, que se compone principalmente de silicatos de calcio y de aluminio, que provienen de la combinación de calizas, arcillas o pizarras, y yeso, mediante procesos especiales. El color parecido a las piedras de la región de Portland, en Inglaterra, dio origen a su nombre.



Figura 1.7: Cemento portland.

El proceso de manufactura del cemento consiste, esencialmente, en la trituración de los materiales crudos (calizas y arcillas); su mezcla en proporciones apropiadas; y su calcinación a una temperatura aproximada de 1400°C, dentro de un cilindro rotativo, lo que provoca una fusión parcial del material, conformándose bolas del producto llamadas **clinker**. El clinker es enfriado y luego es molido junto con el yeso hasta convertirlo en un polvo fino llamado cemento Portland.

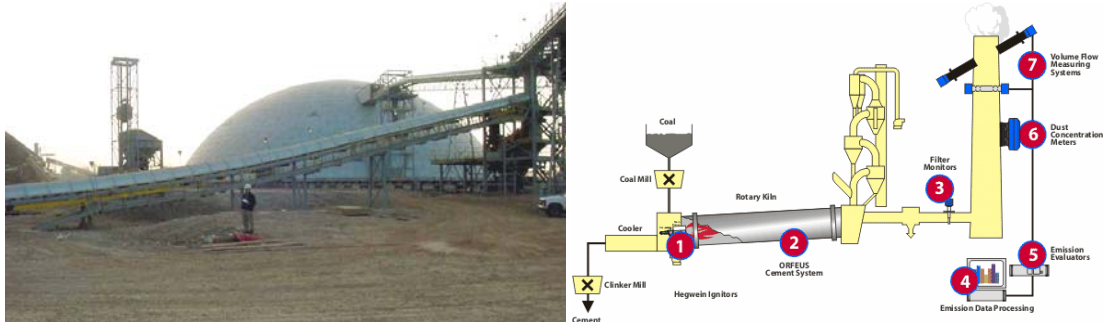


Figura 1.8: Fabricación del cemento portland.

Existen diversos tipos de cemento Portland:

Tipo I: Se lo conoce como **cemento Portland ordinario**, que es el de mayor utilización en el mercado. Se lo utiliza en hormigones normales que no estarán expuestos a sulfatos en el ambiente, en el suelo o en el agua del subsuelo.



Figura 1.9: Cemento portland tipo I.

El cemento Portland tipo IA es similar al tipo I, pero produce la introducción de burbujas de aire, de diámetro controlado, en el hormigón.

El cemento Portland tipo IP contiene un cierto porcentaje de puzolana (entre 15 y 40%), lo que cambia la curva de crecimiento de la resistencia, a temprana edad.

Tipo II: El cemento genera menor calor de fraguado, a una velocidad menor que el tipo I. La característica más importante es que presenta una **resistencia moderada a los sulfatos**, por lo que es usado en obras marinas y en elementos enterrados.



Figura 1.10: Cemento portland tipo II.

El cemento Portland tipo IIA es similar al tipo II, pero produce la introducción de burbujas de aire en el hormigón.

Tipo III: Son los **cementos de fraguado rápido**, que suelen utilizarse en obras de hormigón que están en contacto con flujos de agua durante su construcción, o en obras que pueden inestabilizarse rápidamente durante la construcción. El problema básico que presenta es que el calor de fraguado se emite con mayor rapidez que en otros cementos por lo que requiere especial cuidado con el curado.



Figura 1.11: Cemento portland tipo III.

El cemento Portland tipo IIIA es similar al tipo III, pero produce la introducción de aire en el hormigón.

Tipo IV: Son **cementos de fraguado lento**, que producen poco calor de hidratación, durante mayor tiempo. Se los emplea en obras que contienen grandes volúmenes continuos de hormigón como las presas, permitiendo controlar el calor emitido durante el proceso de fraguado. El tiempo que requieren para alcanzar la resistencia especificada es mayor que en el cemento tipo I (56 días, 84 días).

Tipo V: Son **cementos resistentes a los sulfatos** que pueden estar presentes en los agregados del hormigón o en el propio medio ambiente. La presencia de sulfatos junto con otros tipos de cementos provoca la desintegración progresiva del hormigón y la destrucción de la estructura interna del material compuesto.



Figura 1.12: Cemento portland tipo V.

1.3 LOS ÁRIDOS:

En los hormigones estructurales, los áridos o agregados ocupan alrededor de las tres cuartas partes del volumen total del hormigón; el volumen restante está constituido por pasta endurecida de cemento, agua sin combinar y burbujas de aire.

Mientras mayor sea el nivel de compactación del hormigón, mejor será su resistencia y más económica será su fabricación; por esta razón resulta importante cuidar la granulometría (tamaño de los granos y distribución estadística de esos tamaños de grano) de los áridos. También es importante que las características mecánicas de los áridos sean adecuadas y que los áridos estén libres de impurezas.



Figura 1.13: Áridos finos y gruesos.

Los áridos naturales se clasifican en finos y gruesos. Los **áridos finos** o arenas pasan por el tamiz # 4. Los **áridos gruesos** no atraviesan el tamiz # 4 y se conocen como gravas (ripió en nuestro medio).

Los áridos gruesos presentan mejores propiedades de adherencia con la pasta de cemento cuando son triturados, lo que les dota de aristas (los áridos con superficie redondeada tienen menor adherencia). Sin embargo, los cantos rodados de río presentan generalmente una mejor resistencia interna.

1.4 DOSIFICACIÓN Y ESTRUCTURA INTERNA DEL HORMIGÓN:

Las proporciones en que se mezclan los componentes básicos y complementarios del hormigón constituyen su dosificación. Las propiedades del hormigón endurecido

dependen de la dosificación inicial de los componentes básicos y complementarios, del proceso de mezclado, y del proceso de curado.

En términos generales los agregados dotan al hormigón de una estructura interna en la que los agregados más finos se intercalan entre los agregados más gruesos.

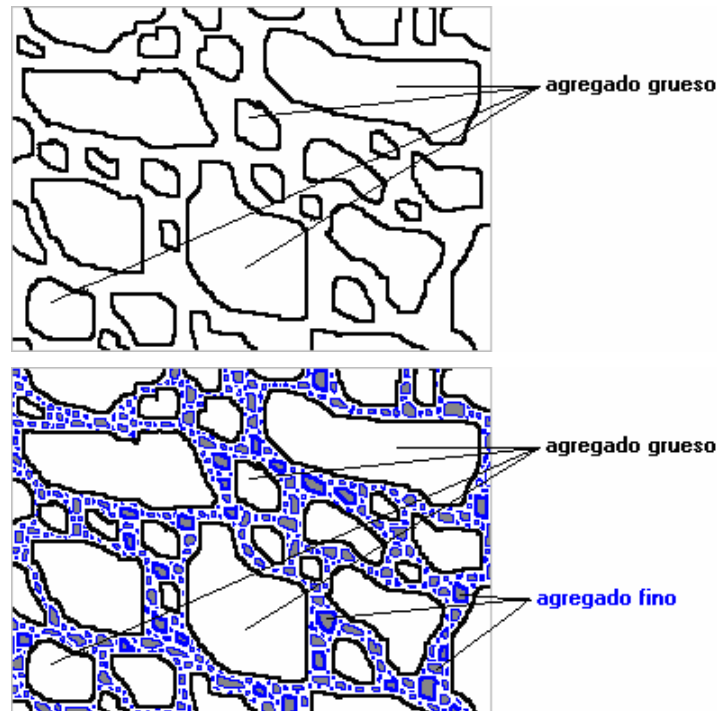


Figura 1.14: Estructura interna del hormigón fresco.

La **pasta de cemento** (cemento más agua), por su parte, llena los espacios libres entre partículas de áridos en el hormigón fresco además de envolver totalmente a los áridos.

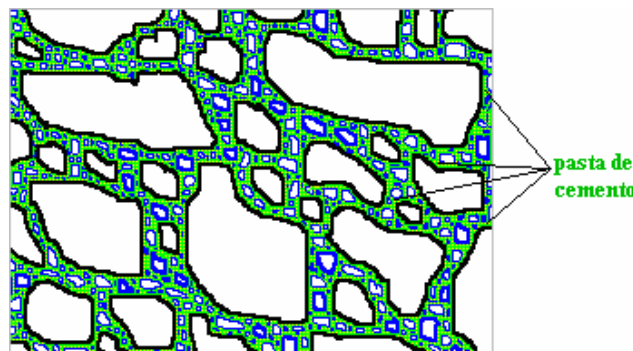


Figura 1.15: Pasta de cemento en la estructura interna del hormigón fresco.

Durante el proceso de fraguado, la pasta de cemento da origen a **cristales hidratados** que unen químicamente las partículas de agregados. La formación de estos cristales es una reacción química exotérmica (genera calor) que siempre requiere de agua para que tenga lugar, siendo mucho más intensa la reacción (la creación de nuevos cristales cohesivos) en las primeras horas y días posteriores a la fabricación del hormigón, y luego va disminuyendo progresivamente en su intensidad con el tiempo. Normalmente, dentro del hormigón, una pequeña parte del cemento no alcanza a combinarse con el agua, por lo que permanece como **cemento no hidratado**, que no contribuye a la resistencia del hormigón, y por el contrario actúa como una porosidad debilitante.

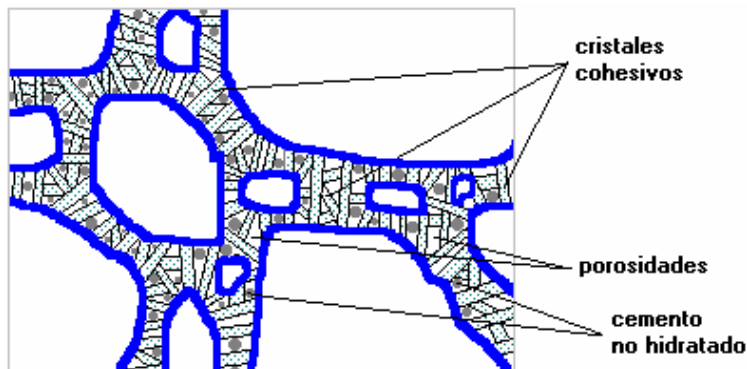


Figura 1.16: Estructura interna del hormigón endurecido.

Para asegurar que las reacciones de fraguado continúen, a partir del endurecimiento inicial del hormigón (que normalmente se produce en las primeras doce horas después del mezclado), se requiere dotar continuamente al hormigón de **agua de curado**, la que sirve para reponer el **agua de amasado** evaporada por el calor emanado como producto de las reacciones químicas. Esta agua de curado usualmente se la proporciona humedeciendo la superficie de los elementos de hormigón.



Figura 1.17: Curado del hormigón.

La propiedad de diseño más importante del hormigón constituye su **resistencia**; la propiedad constructiva más importante es su **trabajabilidad**. Usualmente estas dos propiedades son mutuamente conflictivas durante la construcción.



Figura 1.18: Hormigón poco trabajable.

En general una **relación agua/cemento (a/c)** baja, medida al peso, que a la vez mantenga una adecuada trabajabilidad en el hormigón fresco, conduce a hormigones de mayor resistencia y mejor calidad. Lamentablemente la disminución de la cantidad de agua en el hormigón produce hormigones menos trabajables que pueden presentar defectos tipo hormigueros.



Figura 1.19: Hormigueros.

Se requiere aproximadamente una relación **a/c** mínima de **0.25** para que todo el cemento presente en la mezcla reaccione químicamente con el agua formando pequeños **puentes cristalizados** entre las superficies de las partículas de áridos. Estos cristales son los responsables de la cohesividad entre las partículas y de la resistencia del hormigón en general.

Cualquier exceso de agua durante el amasado, por encima de la relación **a/c** de 0.25, se convertirá, luego del fraguado inicial, en espacios vacíos por la evaporación del agua (o espacios con agua que no alcanza a escapar de los poros luego del fraguado) que disminuyen considerablemente la resistencia del hormigón, y también provocará que los puentes cristalizados tengan mayor longitud y sean menos resistentes.

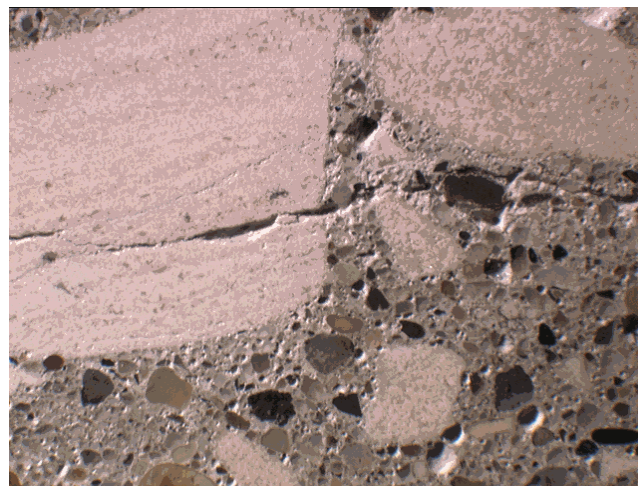


Figura 1.20: Vacíos en el hormigón endurecido.

Lamentablemente una relación **a/c** cercana a 0.25 (que en teoría nos proporcionaría la mayor resistencia), no puede ser conseguida en un hormigón normal, pues la disminución de agua de amasado provoca una pérdida importante de trabajabilidad e inclusive puede llegar a imposibilitar la consecución de una mezcla apropiada. Para

asegurar una mezcla homogénea y una trabajabilidad razonable en un hormigón normal (sin aditivos) serán necesarias relaciones **a/c** mínimas del orden de 0.60.

La falta de agua de curado durante el fraguado del hormigón (particularmente en los primeros días en que las reacciones son más intensas) tiene efectos adversos sobre la resistencia final del hormigón, pues provoca que las partículas de cemento no reaccionen totalmente, dando lugar a pocos cristales de unión entre partículas de áridos, con lo que disminuye la cohesión.

1.5 LOS ADITIVOS:

Existen aditivos químicos que, en proporciones adecuadas, cambian (mejoran) las características del hormigón fresco, del hormigón endurecido y del proceso de fraguado.



Figura 1.21: Aditivos para el hormigón.

Los **aditivos plastificantes** son los más utilizados en nuestro medio, y permiten que la trabajabilidad del hormigón fresco mejore considerablemente, por lo que se los suele utilizar en hormigones que van a ser bombeados y en hormigones que van a ser empleados en zonas de alta concentración de armadura de hierro.



Figura 1.22: Hormigón bombeado.

Estos mismos aditivos pueden conseguir, manteniendo la trabajabilidad de un hormigón normal, que se reduzca la cantidad de agua de amasado mejorando con ello la resistencia del hormigón. El efecto básico que logran los aditivos plastificantes es el de disminuir la tensión superficial del agua de amasado con lo que disminuye la energía requerida para trabajar con el hormigón fresco.

Existen **aditivos superplastificantes** (también se los conoce en el mercado como **reductores de agua de alto rango**) que pueden convertir a un hormigón normal en un **hormigón fluido**, que no requiere de vibración para llenar todos los espacios de las formaleatas, inclusive en sitios de difícil acceso para el hormigón. Así mismo, si se mantiene una trabajabilidad normal, estos aditivos permiten la reducción de la relación agua/cemento hasta valores cercanos a 0.30, consiguiéndose **hormigones de mediana resistencia** (entre 350 Kg/cm² y 420 Kg/cm²) y **hormigones de alta resistencia** (mayores a 420 Kg/cm²).

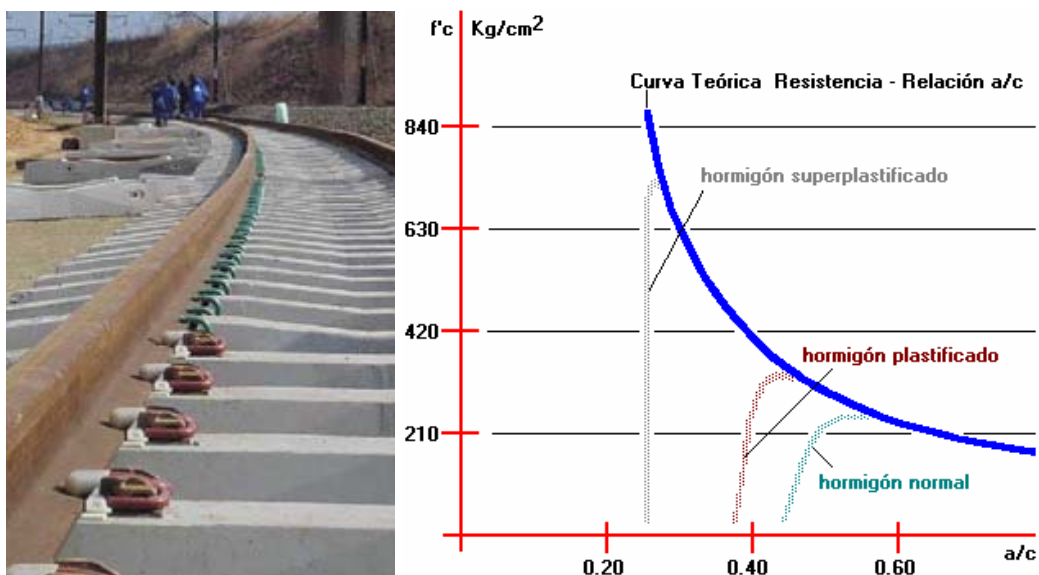


Figura 1.23: Uso de hormigones de alta resistencia.

Los **aditivos acelerantes** permiten que el endurecimiento y fraguado de los hormigones se produzca más rápidamente en la fase inicial. Es usual emplearlos cuando se desea desencofrar en menor tiempo las formaleatas. Un efecto similar puede obtenerse utilizando cementos de fraguado rápido o mediante un proceso de curado con vapor de agua circulante (el curado con vapor se suele utilizar con frecuencia en hormigones prefabricados).

Existen **aditivos de fraguado extra rápido** que se emplean en casos en que se requiera un endurecimiento y fraguado del hormigón en pocos minutos, como en la fundición de elementos dentro de cauces de ríos, en el mar o en túneles con filtraciones de agua.



Figura 1.24: Hormigón lanzado o proyectado (shotcrete).

Los **aditivos retardantes** retrasan el endurecimiento inicial del hormigón, manteniendo por más tiempo su consistencia plástica. Se los suele utilizar en climas cálidos para evitar el fraguado anticipado por evaporación del agua de amasado, y en obras masivas de hormigón en que se quiere controlar la cantidad de calor emitida por el proceso de fraguado.

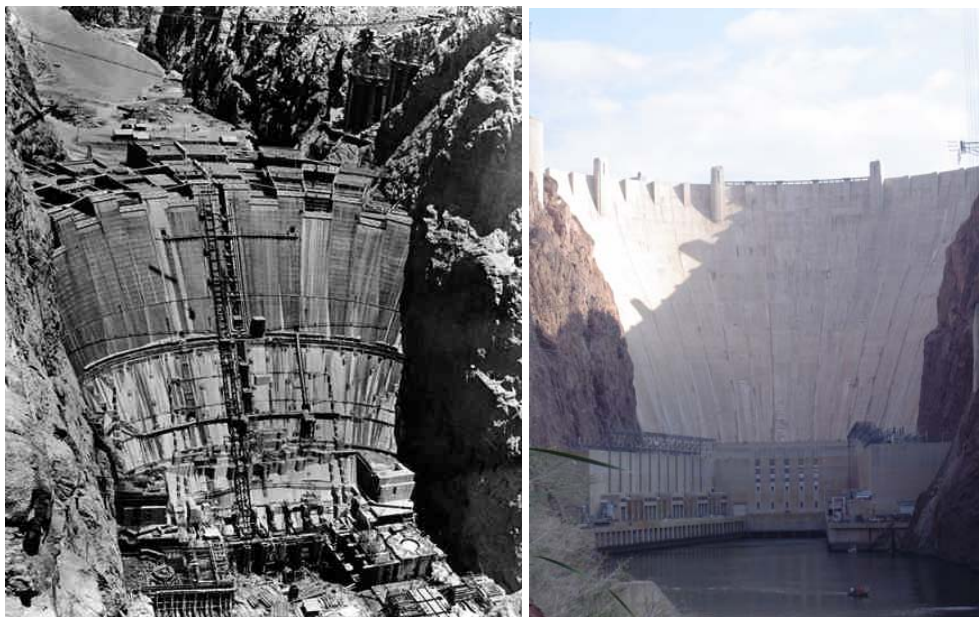


Figura 1.25: Hormigones masivos (presa Hoover).

La aceleración o desaceleración del proceso de fraguado mediante aditivos o mediante cementos apropiados, a más de afectar la velocidad de obtención de resistencia del hormigón a corto plazo, tiene efecto sobre la resistencia del hormigón a largo plazo.

La aceleración inicial del proceso conduce a resistencias menores a largo plazo, pues el agua de curado tiene menor nivel de penetración por el endurecimiento del hormigón.

La desaceleración inicial del proceso determina resistencias mayores a largo plazo, pues el curado se vuelve más eficiente.

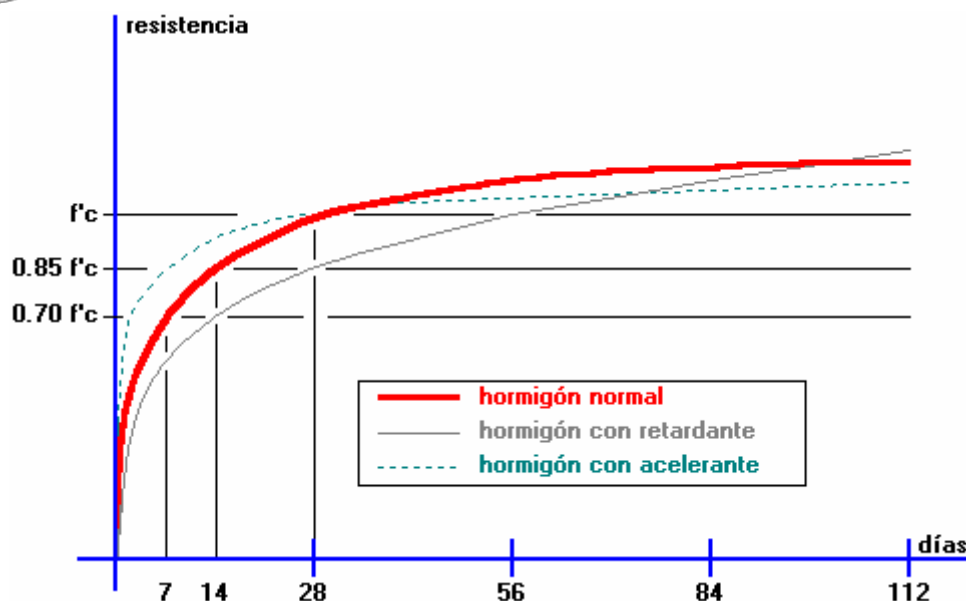


Figura 1.26: Curvas de incremento de resistencia de los hormigones.

Hay **aditivos introductores de aire** que producen burbujas de aire dentro del hormigón, los que se utilizan en estructuras que están sometidas a procesos de congelamiento y descongelamiento periódico, poco frecuentes en nuestro medio (se los suele utilizar en refugios para ascencionismo). Cuando las moléculas de agua que no llegaron a reaccionar con el cemento se congelan, se transforman en hielo de mayor volumen y tratan de rajar internamente al hormigón; esas rajaduras se extienden hasta encontrar una burbuja de aire, donde disipan su presión y se detiene el proceso de fisuración; cuando no existen suficientes burbujas de aire, las fisuras se extienden hasta la superficie exterior del hormigón provocando un deterioro extenso. Los introductores de aire tienen como efecto colateral la disminución de la resistencia del hormigón aproximadamente en un 5% por cada 1% de burbujas de aire introducidas.

Existen sustancias especiales, como la ceniza volcánica pulverizada (**fly ash**) o la cáscara de arroz quemada y pulverizada, que por su composición química apropiada y por su granulometría aún más pequeña que la del cemento, mejoran la resistencia del hormigón a largo plazo.

Existen **aditivos impermeabilizantes** que favorecen el sellado de las porosidades del hormigón, lo que es particularmente útil en estructuras que van a contener líquidos como cisternas, tanques o inclusive presas.

Existen **aditivos espumantes** que disminuyen la densidad de los hormigones, convirtiéndolo en un material sumamente liviano similar a la piedra pómez (pumicita).

Hay **aditivos que permiten mejorar la resistencia ante compuestos inorgánicos y orgánicos** agresivos específicos como cloruros, sulfatos o lactosa, lo que protege tanto al hormigón exterior como a las varillas de hierro en el caso del hormigón armado.

El uso de aditivos requiere de mezclas de prueba en laboratorio o en obra, antes de ser utilizados en las estructuras, porque ocasionalmente pueden provocar reacciones indeseables con ciertos tipos de cemento y con otros aditivos, debido a que los aditivos son compuestos químicos.

1.6 PROPIEDADES MECÁNICAS DEL HORMIGÓN:

Para el diseño de estructuras de hormigón simple, de hormigón armado, de hormigón preesforzado, de hormigón con perfiles laminados en caliente de acero, de hormigón con perfiles soldados de acero, etc., se utilizan las propiedades mecánicas del hormigón endurecido. Entre las más importantes se tiene:

- Resistencia a la Compresión
- Módulo de Elasticidad
- Ductilidad
- Resistencia a la Tracción
- Resistencia al Corte
- Flujo Plástico

a. RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN:

La resistencia a la compresión del hormigón se determina en muestras cilíndricas estandarizadas de 15 cm de diámetro y 30 cm de altura, llevadas hasta la rotura mediante cargas incrementales relativamente rápidas, que duran unos pocos minutos. Esta resistencia se la mide luego de 28 días de fraguado bajo condiciones controladas de humedad.



Figura 1.27: Muestras cilíndricas de hormigón para ensayos de compresión estándar.

La **resistencia característica** a la compresión de un hormigón (f'_c), utilizada en diseño estructural, se mide en términos probabilísticos, definiéndose que solamente un pequeño porcentaje de las muestras (normalmente el 5%) puedan tener resistencias inferiores a la especificada, lo que da lugar a que la **resistencia media** de las muestras (f_m) siempre sea mayor que la resistencia característica.

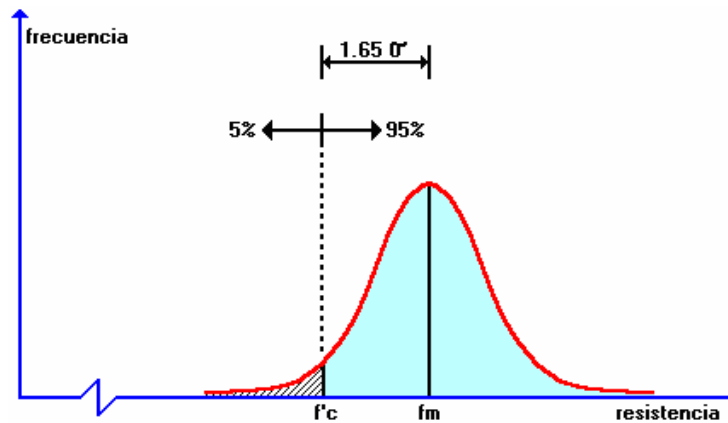


Figura 1.28: Curva de distribución de la resistencia de los hormigones.

Si se asume una distribución normalizada de los ensayos de rotura de cilindros de hormigón, la resistencia característica puede calcularse a partir de la resistencia media y la **desviación estándar** (σ), mediante la siguiente expresión:

$$f'c = fm - 1.65 \sigma \quad \text{Ecuación (1.1a)}$$

El código ACI del año 2008 [ACI 5.3.2.1] establece la siguiente relación, que aumenta al 9% la probabilidad de no alcanzar la resistencia característica.

$$f'c = fm - 1.34 \sigma \quad \text{Ecuación (1.1b)}$$

La resistencia a la compresión de hormigones normales (210 - 280 Kg/cm²) y de mediana resistencia (350-420 Kg/cm²) está dominada por la relación agua/cemento (a menor relación agua/cemento mayor resistencia) y por el nivel de compactación (a mayor compactación mayor resistencia), pero también son factores importantes la cantidad de cemento (a mayor cantidad de cemento mayor resistencia) y la granulometría de los agregados (mejores granulometrías dan lugar a mayores resistencias).

Todos los hormigones, cuando no están cargados, presentan un número limitado de **fisuras de adherencia** entre el agregado grueso y el mortero, como producto de la retracción de fraguado.

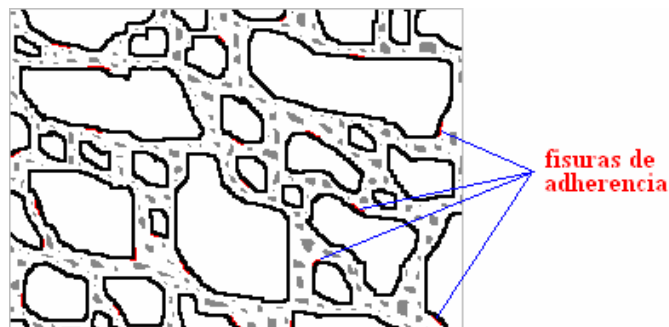


Figura 1.29: Fisuras de adherencia.

Cuando los hormigones de resistencia normal y mediana se someten progresivamente hasta un 70% de su esfuerzo de rotura, se incrementan casi linealmente las **fisuras de adherencia** tanto en número como en longitud, lo que añadido a la deformabilidad de los materiales permite mantener una relativa linealidad entre los esfuerzos y las deformaciones.

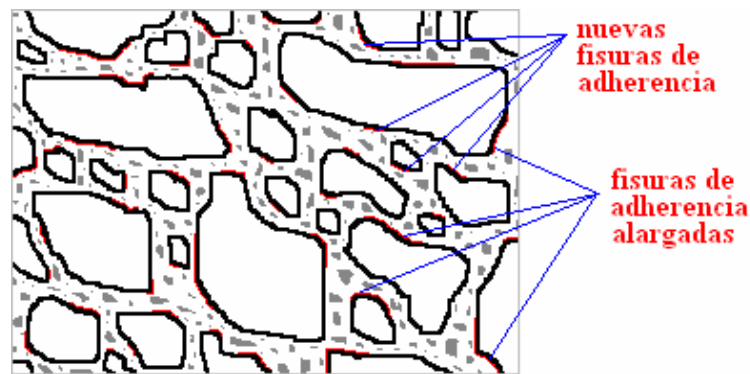


Figura 1.30: Incremento del número de fisuras de adherencia y de la longitud de las fisuras, por incremento del esfuerzo axial.

Cuando los esfuerzos se aproximan al 90% del esfuerzo de rotura, las **fisuras de adherencia** crecen exponencialmente, y aparecen **fisuras de mortero** que unen las **fisuras de adherencia**, lo que conduce a rajaduras continuas que terminan produciendo la rotura total del hormigón. Este proceso de fisuración se traduce en un comportamiento inelástico del hormigón en ese rango de esfuerzos.

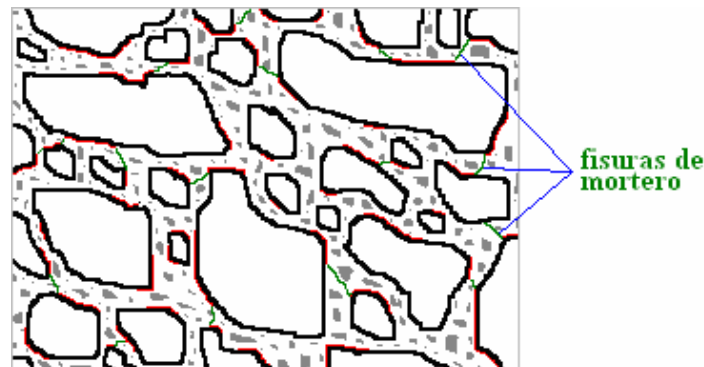


Figura 1.31: Fisuras de mortero.

En hormigones de alta resistencia ($f'_c > 420 \text{ Kg/cm}^2$), a más de los factores antes mencionados, tiene especial importancia la resistencia del material constitutivo de los agregados (roca de origen), ya que este parámetro impone un tope máximo a la resistencia del concreto pues el modo de fisurarse, cuando se aproxima a la rotura, involucra a **rajaduras de agregado** que lo atraviesan, por lo que el hormigón jamás podrá alcanzar una resistencia superior a la de la roca de origen del agregado grueso.

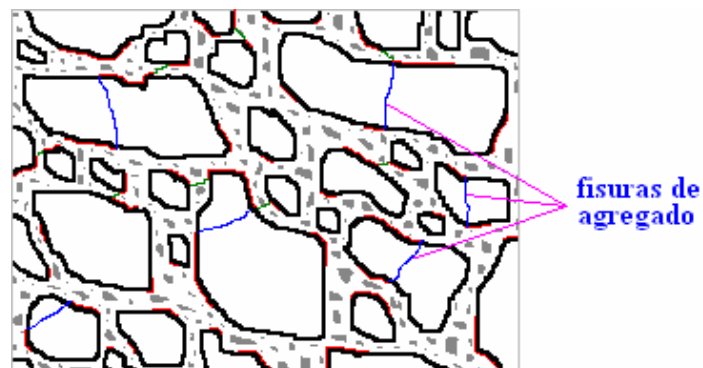


Figura 1.32: Fisuras de agregado.

Las **fisuras de agregado** reemplazan en una proporción alta a las **fisuras de mortero** (no las llegan a reemplazar totalmente), pues requieren recorrer menos longitudes en la masa de hormigón cuando se combinan con las **fisuras de adherencia** para producir la rotura. Estas longitudes menores de fisuras combinadas (**adherencia + mortero + agregado**, en lugar de **adherencia + mortero**) para producir el colapso, provocan una rotura violenta de los hormigones de alta resistencia.

b. MÓDULO DE ELASTICIDAD:

Cuando se dibujan las curvas Esfuerzo-Deformación (ϵ - σ) de las muestras cilíndricas de hormigón, sometidas a compresión bajo el estándar ASTM, se obtienen diferentes tipos de gráficos que dependen fundamentalmente de la resistencia a la rotura del material, como se muestra en la siguiente figura.

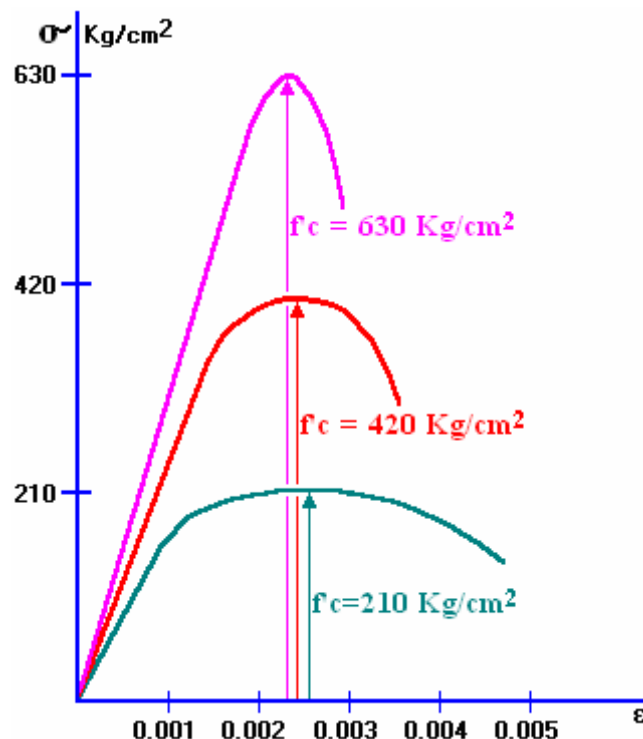


Figura 1.33: Curvas esfuerzo-deformación de hormigones de diferentes resistencias.

Los hormigones de menor resistencia suelen mostrar una mayor capacidad de deformación que los hormigones más resistentes.

Todos los hormigones presentan un primer rango de comportamiento relativamente lineal (similar a una línea recta en la curva esfuerzo - deformación) y elástico (en la descarga recupera la geometría previa a la carga) ante la presencia incremental de solicitaciones de compresión, cuando las cargas son comparativamente bajas (menores al 70% de la carga de rotura), y un segundo rango de comportamiento no lineal e inelástico (con una geometría curva en la curva esfuerzo – deformación) cuando las cargas son altas.

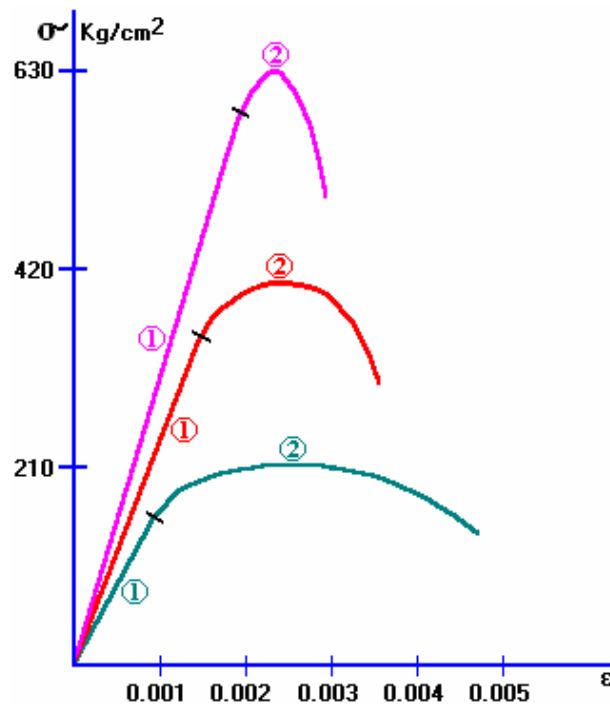


Figura 1.34: Rango elástico (tramo 1) e inelástico (tramo 2) de hormigones de diferentes resistencias.

La pendiente de la curva en el rango de comportamiento lineal recibe la denominación de **Módulo de Elasticidad** del material o **Módulo de Young**, que se simboliza “ E_c ”.

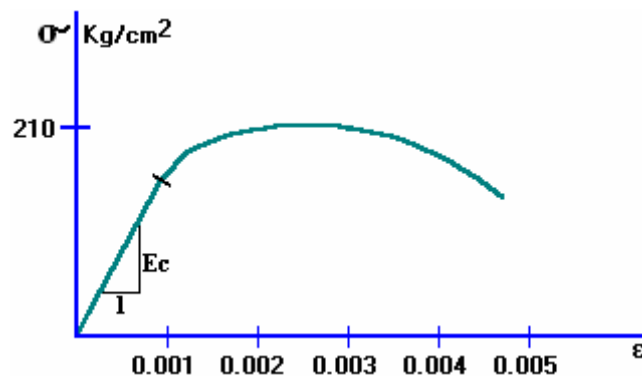


Figura 1.35: Representación gráfica del módulo de elasticidad del hormigón.

El Módulo de Elasticidad puede calcularse mediante la siguiente expresión.

$$E_c = \frac{\sigma_{c,1}}{\epsilon_{c,1}}$$

El Módulo de Elasticidad es diferente para distintas resistencias a la compresión de los hormigones, e incrementa en valor cuando la resistencia del concreto es mayor. El American Concrete Institute [ACI 318S-08 8.5.1] propone la siguiente expresión (que también es recogida por el Código Ecuatoriano de la Construcción), obtenida experimentalmente, como forma aproximada de calcular el módulo de elasticidad del hormigón, en función de la resistencia a la compresión del mismo.

$$E_c = 15000\sqrt{f'_c}$$

Ecuación (1.2)

Donde:

E_c : Módulo de elasticidad del hormigón medido en Kg/cm^2 .

f'_c : Resistencia a la compresión del hormigón medida en Kg/cm^2 .

La expresión previa es adecuada para hormigones con agregados de peso específico normal (peso específico del hormigón $\approx 2300 \text{ Kg/m}^3$), y resistencias normales y medias.

A continuación se presenta una tabla que relaciona la resistencia de los hormigones utilizados con más frecuencia con su módulo de elasticidad.

Tabla 1.1: Módulos de elasticidad de hormigones de diferentes resistencias.

Resistencia (Kg/cm^2)	Módulo de Elasticidad (Kg/cm^2)
210	217000
280	251000
350	281000
420	307000

Para hormigones con peso específico w_c entre 1440 y 2480 Kg/m^3 , E_c puede calcularse con la siguiente expresión [ACI 8.5.1]:

$$E_c = w_c^{1.5} \cdot 0.137\sqrt{f'_c}$$

Ecuación (1.3)

c. DUCTILIDAD:

Si se define como ductilidad de un material a la capacidad que tiene para continuar deformándose no linealmente a pesar de que los incrementos de carga sean mínimos, nulos e inclusive si existe una disminución de la carga, una medida cuantitativa de esa ductilidad sería el cociente entre la deformación de rotura y la deformación máxima con comportamiento lineal elástico.

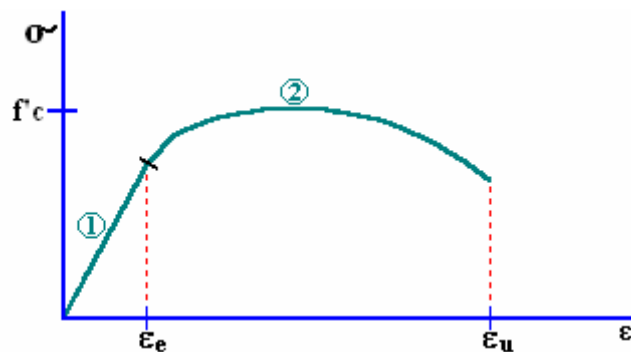


Figura 1.36: Deformaciones unitarias máximas en rango elástico e inelástico.

$$D_d = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_e}$$

Ecuación (1.4)

Donde:

D_d : Índice de ductilidad por deformación

- ϵ_u : Deformación unitaria de rotura
 ϵ_e : Deformación unitaria elástica máxima

Es evidente que los índices de ductilidad por deformación del hormigón simple decrecen considerablemente cuando aumenta su resistencia a la rotura, como se observa en los gráficos previos.

A continuación se presenta una tabla con valores aproximados de ductilidad por deformación de los hormigones, en función de la resistencia a la compresión.

Tabla 1.2: Índice de ductilidad por deformación.

Resistencia a la Compresión (Kg/cm ²)	Índice de Ductilidad por Deformación
210	4.5 – 6.0
280	3.5 – 4.5
350	3.0 – 3.5
420	2.5 – 3.0
630	2.0 – 2.5
840	1.5 – 2.0

El índice de ductilidad por deformación es un excelente referente de la capacidad del hormigón para deformarse por encima de su límite de fluencia.

Otra manera de medir la ductilidad del hormigón consiste en encontrar el cociente entre la energía que se requiere para romper al material y la energía necesaria para llevarle hasta la carga máxima de comportamiento elástico, para cuyo cálculo, en lugar de dividir directamente las deformaciones, se dividen las áreas bajo la curva Esfuerzo-Deformación.

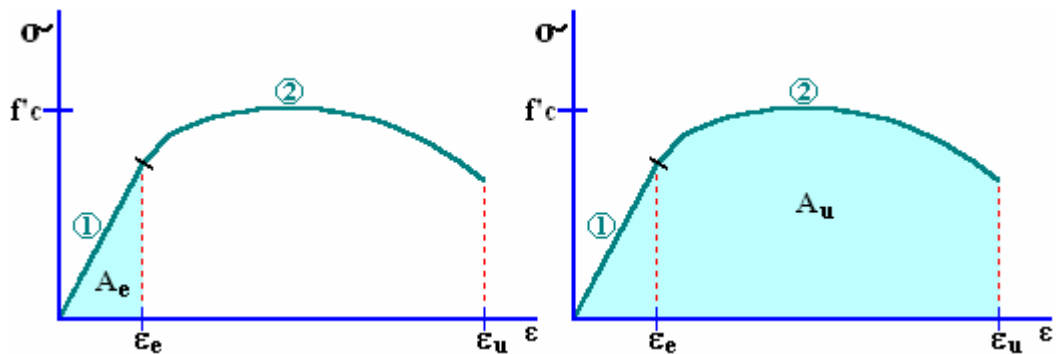


Figura 1.37: Representación gráfica de la ductilidad por energía de deformación.

$$D_{ed} = \frac{A_u}{A_e} \quad \text{Ecuación (1.5)}$$

Donde:

- D_{ed} : Índice de ductilidad por energía de deformación
 A_u : Energía de deformación unitaria de rotura
 A_e : Energía de deformación unitaria elástica máxima

Los índices de ductilidad por energía de deformación son mayores a los índices de ductilidad por deformación, y en muchos casos pueden superar valores de ocho.

Tabla 1.3: Índice de ductilidad por energía de deformación.

Resistencia a la Compresión (Kg/cm ²)	Índice de Ductilidad por Energía de Deformación
210	8.0 – 10.0
280	6.0 – 8.0
350	5.0 – 6.0
420	4.0 – 5.0
630	3.0 – 4.0
840	2.0 – 3.0

El índice de ductilidad por energía de deformación se emplea como referente de la capacidad del hormigón para disipar energía cuando incursiona dentro del rango de comportamiento inelástico, particularmente bajo solicitaciones estructurales por encima del rango normal y eventual de trabajo, como en el caso de sismos de baja probabilidad de ocurrencia que superan ampliamente al sismo de diseño.

Uno de los requisitos más importantes que debe reunir un hormigón en zonas sísmicas es su ductilidad, lo que en nuestro medio limita la utilización de hormigones de resistencia media **fm** superior a 500 Kg/cm², por ser sumamente frágiles (tienen una rotura muy rápida y explosiva).

d. RESISTENCIA A LA TRACCIÓN:

El hormigón es un material ineficiente resistiendo cargas de tracción; comparativamente esta resistencia representa hasta un 10% de su capacidad a la compresión. Es por ello que en el hormigón armado los esfuerzos de tracción son absorbidos por el acero de refuerzo.

El ensayo tradicional (Prueba Directa de Tracción) consiste en una pequeña muestra con sección transversal rectangular, que presenta un ensanchamiento en los extremos longitudinales, lo que permite que las abrazaderas del equipo utilizado en la prueba ejerzan fuerzas de tracción que romperán a la muestra en el sector central más débil (por tener menor sección transversal).

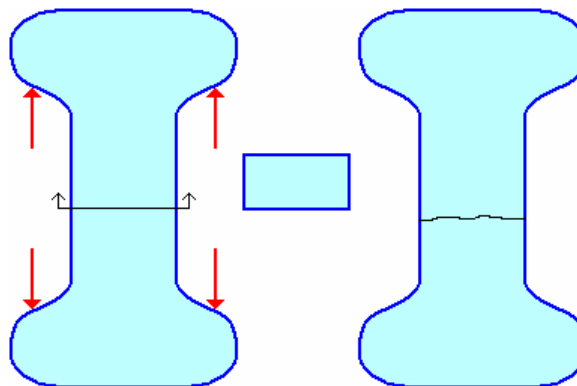


Figura 1.38: Prueba directa de tracción.

Las investigaciones sugieren utilizar expresiones como la siguiente para determinar un valor aproximado del esfuerzo máximo de tracción “ f_t ” que puede soportar el hormigón.

$f_t = 1.5\sqrt{f'c}$	Ecuación (1.6)

Donde:

- f_t : Resistencia a la tracción del hormigón medida en Kg/cm².
 $f'c$: Resistencia a la compresión del hormigón medida en Kg/cm².

A continuación se presenta una tabla con valores aproximados de resistencia a la tracción de los hormigones.

Tabla 1.4: Resistencia a la tracción del hormigón.

Resistencia a la Compresión (Kg/cm ²)	Resistencia a la Tracción (Kg/cm ²)
210	22
280	25
350	28
420	31
630	38
840	43

El ensayo descrito previamente presenta mucha variabilidad en los resultados por la pequeña dimensión transversal de la muestra, comparada con la dimensión máxima del agregado grueso y con las dimensiones de los elementos estructurales reales, por lo que con mucha frecuencia se utiliza, en su reemplazo, la **Prueba de Separación** (split test), que utiliza cilindros tradicionales de hormigón colocados horizontalmente. Tanto en la parte superior como en la inferior (a lo largo del cilindro) se colocan cartones para la aplicación de carga de compresión uniformemente lineal y transversal.

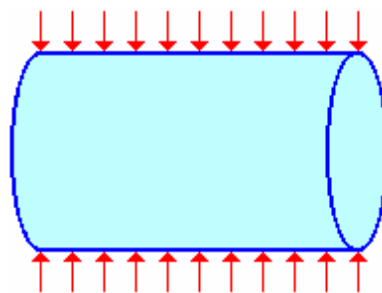


Figura 1.39: Solicitaciones externas en la prueba de separación (split test).

La falla del cilindro se produce por separación, sobre un eje vertical, de las dos mitades de la muestra.

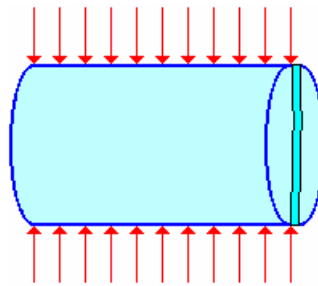


Figura 1.40: Rotura tipo en la prueba de separación.

e. RESISTENCIA AL CORTE:

Debido a que las fuerzas cortantes se transforman en tracciones diagonales, la resistencia al corte del hormigón “ v_c ” tiene órdenes de magnitud y comportamiento similares a la resistencia a la tracción.

El ensayo utilizado se conoce como la Prueba de Corte Directo, en el que se evita al máximo la introducción de esfuerzos de flexión.

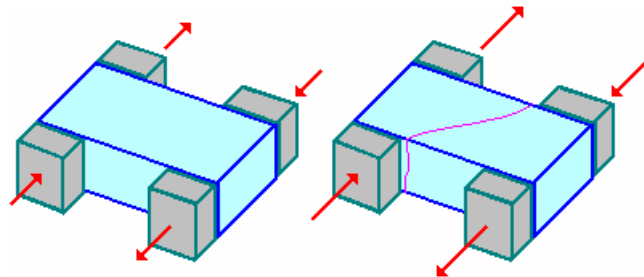


Figura 1.41: Prueba de corte directo del hormigón.

Los resultados de laboratorio sugieren expresiones como la siguiente, para describir la resistencia al corte:

$$v_c = \sqrt{f'c} \quad \text{Ecuación (1.7)}$$

Donde:

v_c : Resistencia al corte del hormigón medida en Kg/cm².

$f'c$: Resistencia a la compresión del hormigón medida en Kg/cm².

A continuación se presenta una tabla con valores aproximados de resistencia al corte de los hormigones, aunque el ACI [ACI 11.2.1.1] recomienda utilizar aproximadamente la mitad (el 53%), por provocar una falla frágil.

Tabla 1.5: Resistencia al corte del hormigón.

Resistencia a la Compresión (Kg/cm ²)	Resistencia al Corte (Kg/cm ²)
210	14
280	17
350	19
420	20
630	25
840	29

f. FLUJO PLÁSTICO:

Cuando se somete al hormigón a cargas de larga duración, el material tiene una deformación instantánea en el momento inicial de la carga y una deformación adicional a largo plazo como producto del flujo plástico del hormigón.

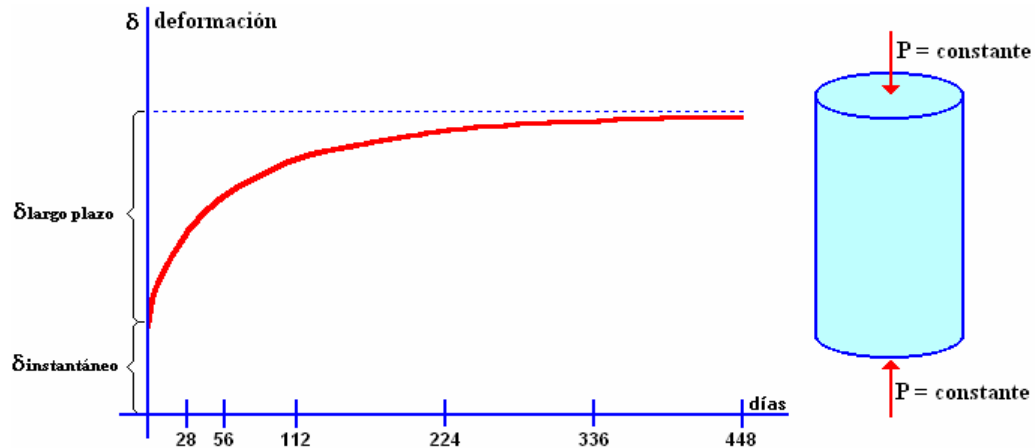


Figura 1.42: Deformaciones en el hormigón bajo cargas axiales a largo plazo.

La deformación a largo plazo depende de la resistencia del hormigón, y es comparativamente mayor cuando se utilizan hormigones de menor resistencia.

En el caso de los hormigones entre 210 y 280 Kg/cm² la deformación diferida es aproximadamente 2.2 veces mayor que la deformación instantánea.

El fenómeno del flujo plástico se produce por la migración de las partículas de agua que no alcanzan a combinarse con el cemento, y que debido a las altas presiones se mueven por las microporosidades del hormigón.

De manera análoga, si a un elemento de hormigón se le somete a una deformación constante sostenida en el tiempo, la fuerza que se requiere para sostener tal deformación decrece progresivamente por relajación del material.

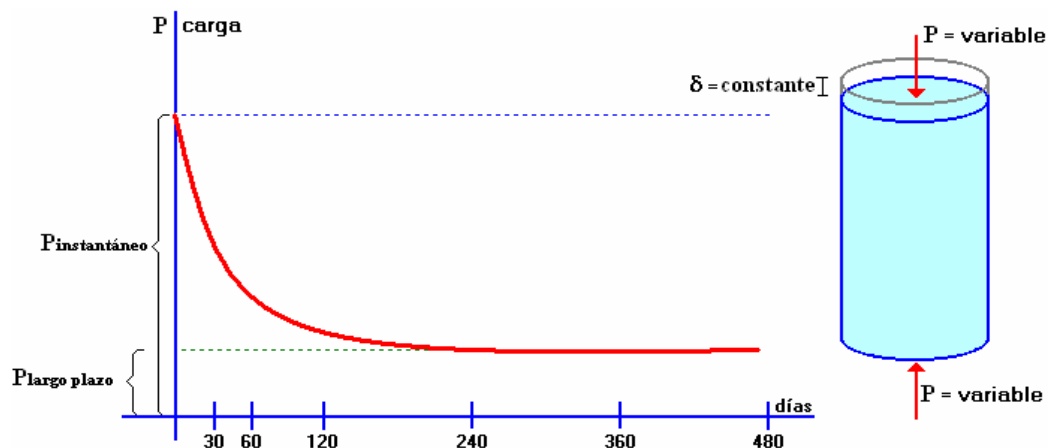


Figura 1.43: Cargas axiales en el hormigón bajo deformaciones axiales a largo plazo.

El incremento de la deformación con el tiempo, bajo cargas sostenidas, y la disminución de las solicitaciones con el tiempo, bajo deformaciones sostenidas, forman parte del comportamiento reológico del hormigón.

1.7 OTRAS PROPIEDADES DEL HORMIGÓN:

Existen otras características que se pueden especificar para el hormigón fresco y endurecido, como:

- Trabajabilidad
- Densidad
- Impermeabilidad
- Resistencia a la abrasión, etc.

a. TRABAJABILIDAD:

Un hormigón fresco se considera trabajable cuando puede adaptarse fácilmente a cualquier forma de encofrado, con un mínimo de trabajo mecánico (vibración) aplicado. Cuantitativamente la trabajabilidad se mide mediante el Asentamiento del Cono de Abrams o el diámetro de Dispersión en la Mesa de Flujo; mientras mayor es el asentamiento o mayor es el diámetro de dispersión, el hormigón es más trabajable.

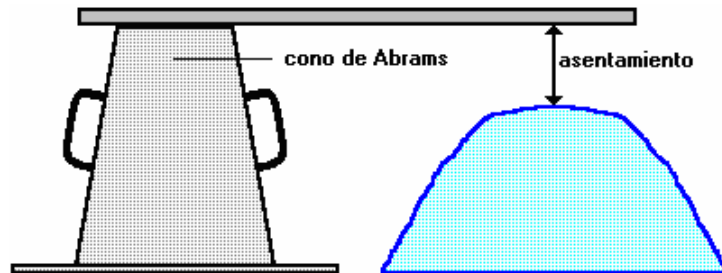


Figura 1.44: Cono de Abrams.

Los procesos de ensayo están definidos por ASTM a nivel internacional y por INEN en el Ecuador.

Asentamientos menores a 2" (5 cm.) corresponden a hormigones poco trabajables; asentamientos entre 3" (7.5 cm.) y 5" (12.5 cm.) corresponden a hormigones medianamente trabajables; asentamientos superiores a 6" (15 cm.) son característicos de hormigones muy trabajables.

b. DENSIDAD:

La densidad del hormigón simple endurecido estándar se ubica entre 2200 Kg/m³ y 2300 Kg/m³. El hormigón simple fresco de las mismas características presenta densidades entre 2250 Kg/m³ y 2350 Kg/m³ (esta información es útil para el diseño de encofrados).

En ambientes que contienen componentes radioactivos, pueden requerirse hormigones de mayor densidad que son mejores escudos ante el escape de radiaciones por lo que necesitan espesores menores, pero requieren agregados de mayor densidad, y a veces con una composición química específica. Estos hormigones más densos pueden llegar a densidades de 2800 Kg/m³.

En edificios altos puede resultar conveniente que el hormigón de las losas sea menos denso, para lo que se suele emplear piedra pómez en lugar de la grava

tradicional, o cubos de arcilla cocida en lugar de parte de la grava. El resultado será la obtención de densidades del orden de 1900 Kg/m^3 .

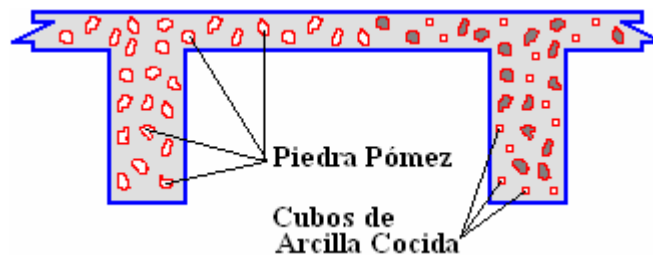


Figura 1.45: Hormigón ligero.

c. IMPERMEABILIDAD:

En el caso de presas y de tanques o piscinas de almacenamiento, se suelen requerir condiciones de impermeabilidad en el hormigón, que pueden ser logradas con la inclusión de aditivos químicos apropiados.

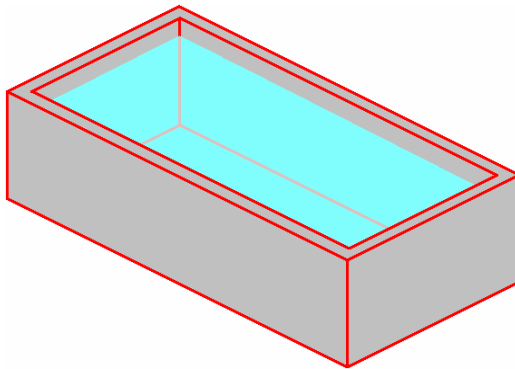


Figura 1.46: Hormigón impermeable.

d. RESISTENCIA A LA ABRASIÓN:

Cuando se diseñan y construyen estructuras que están sometidas a un intenso tráfico vehicular, como pavimentos rígidos en carreteras, o estacionamientos en edificios y centros comerciales, puede ser necesaria la utilización de hormigones resistentes a la abrasión, lo que requerirá de aditivos químicos que proporcionen tal característica.



Figura 1.47: Pavimento rígido de hormigón resistente a la abrasión.



1.8 TAREAS COMPLEMENTARIAS:

- a. Recopilar información sobre aditivos para el hormigón disponibles en el mercado local. Organizar dicha información en una tabla que contenga la siguiente información:

Categoría	Efecto del Aditivo	Casos de Uso del Aditivo
Plastificante / Reductor de agua	Mejora la trabajabilidad para una relación agua/cemento fija	Zonas de gran concentración de armadura
		Elementos estructurales muy delgados
	Mejora la resistencia para una trabajabilidad fija	Construcción de elementos prefabricados
		Elementos de hormigón preesforzado
Acelerante de fraguado	Acelera la obtención de la resistencia de diseño	Columnas de edificios altos
		Edificios en que se requiere un rápido desencofrado
		Elementos estructurales que están en contacto con agua corriente
:	:	:
:	:	:

- b. Realizar el análisis granulométrico de 2 muestras de agregado fino (arena de mina y polvo de piedra), y 2 muestras de grava visiblemente diferenciadas (diferente color que denote diferente roca de origen), disponibles en el medio. Presentar hipótesis sobre su comportamiento comparado en la fabricación de hormigones.
- c. Someter a la prueba de la Máquina de Los Ángeles a dos muestras de grava de origen y color diferentes, y analizar su efecto en el comportamiento de los hormigones fabricados con esas gravas.

REFERENCIAS:

- 1.1 Neville A., *Properties of Concrete*, Pitman Publishing Limited.
- 1.2 Romo M., *Microcracking, Macro Air Void System and Strength of Superplasticized Concrete*, Cornell University.
- 1.3 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 1.4 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.

CAPÍTULO II

DISEÑO Y FABRICACIÓN DE HORMIGONES

2.1 INTRODUCCIÓN:

El objetivo de un diseño de hormigones es obtener una mezcla que posea un mínimo de determinadas propiedades tanto en estado fresco como endurecido, al menor costo de producción posible.



Figura 2.1: Hormigón fresco y hormigón endurecido.

Las propiedades del concreto endurecido son especificadas por el proyectista de la estructura, y las propiedades del concreto fresco están definidas básicamente por el tipo de construcción y por las técnicas de colocación y transporte.

El costo de elaboración del concreto depende del costo de los materiales, del equipo y de la mano de obra. Dentro de los materiales, es la cantidad de cemento la que normalmente define el costo final, aunque el uso de aditivos especiales puede tener una incidencia importante.



Figura 2.2: Mezcladoras de hormigón.

2.2 CARACTERÍSTICAS DE LOS MATERIALES:

a. CEMENTO:

El cemento es el material ligante de los diferentes componentes del hormigón. El cemento para hormigones estructurales debe ser Portland.



Figura 2.3: Cemento portland.

Existen varios tipos de cemento Portland; entre los más importantes se pueden mencionar:

- **Tipo I:** De fraguado normal
- **Tipo II:** De propiedades modificadas
- **Tipo III:** De fraguado rápido
- **Tipo IV:** De fraguado lento
- **Tipo V:** Resistente a los sulfatos

En nuestro medio se dispone permanentemente de cemento Portland tipo I y ocasionalmente (cuando se ejecutan proyectos de uso masivo de hormigón como presas) de tipo IV. Otros tipos de cemento siempre requieren de importación.

El cemento utilizado en la fabricación de hormigón debe estar totalmente seco y suelto, y no debe presentar grumos de fraguado anticipado.

Para asegurar buenas condiciones en el cemento, debe ser almacenado en un sitio cubierto, seco, con ventilación apropiada que se puede conseguir mediante vigas de madera colocadas sobre el piso y un entablado superior que evite el contacto con el piso de los sacos de cemento colocados encima.

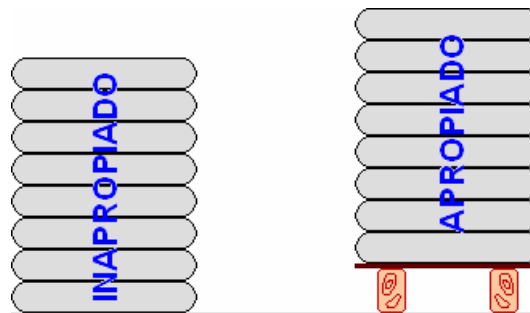


Figura 2.4: Sacos de cemento apilados sin ventilación inferior apropiada (izquierda) y con ventilación inferior apropiada (derecha).

Los sacos de cemento no deben conformar pilas de más de 10 unidades de altura para evitar el fraguado por presión.

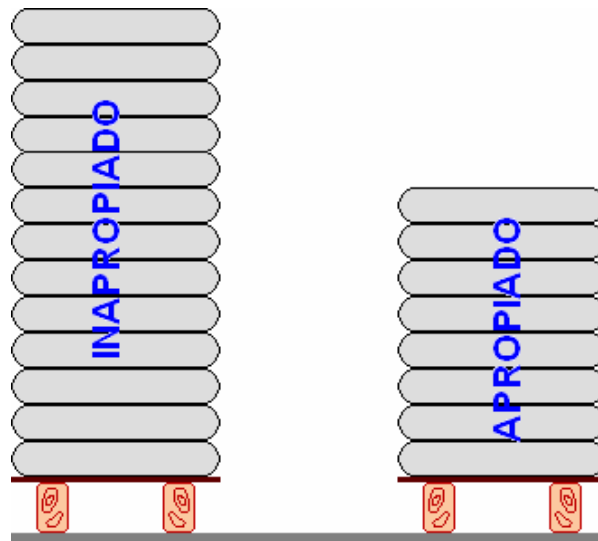


Figura 2.5: Sacos de cemento apilados en exceso (izquierda) o en número apropiado (derecha).

Deben proveerse mecanismos de almacenamiento que permitan la rotación adecuada del cemento, para conseguir que el producto más antiguo siempre esté accesible para su utilización inmediata, lo que se suele lograr mediante un apropiado diseño de la circulación dentro de la bodega.

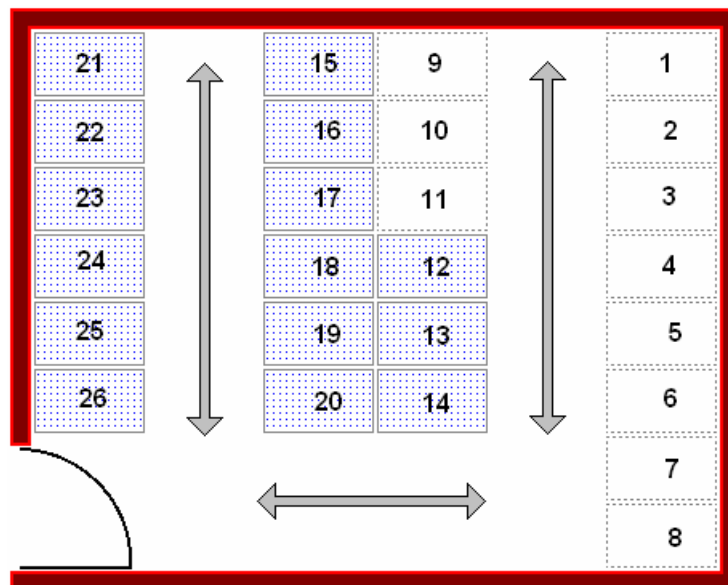


Figura 2.6: Almacenamiento óptimo de sacos de cemento para circulación del material.

Como alternativa puede utilizarse **cemento a granel** en lugar de cemento en sacos, el que debe ser almacenado en silos protegidos contra la humedad (silos herméticos). El cemento a granel puede llegar a ser entre un 20% y un 25% más económico que el cemento en saco, pero requiere de procesos de control de la cantidad de cemento empleada en obra.

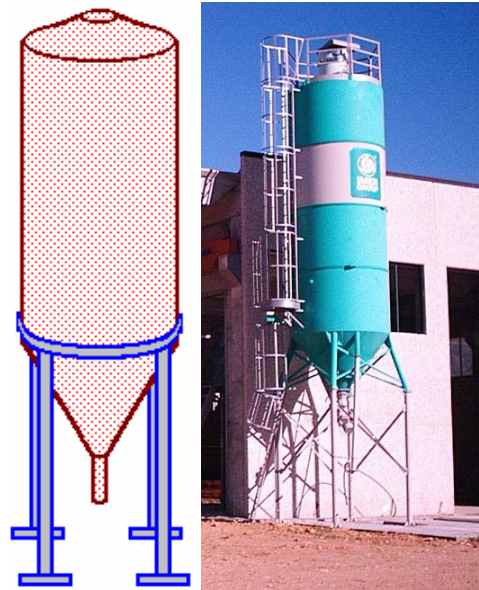


Figura 2.7: Silos de almacenamiento de cemento al granel.

b. AGREGADOS:

Más del 75% del volumen del concreto está ocupado por los agregados, por lo que las propiedades de los mismos tienen influencia definitiva sobre el comportamiento del hormigón.

De acuerdo al tamaño de las partículas, los agregados se clasifican en **agregados gruesos** (tamaño mayor a 5 mm) y **agregados finos** (tamaño entre 0.07 mm y 5 mm).

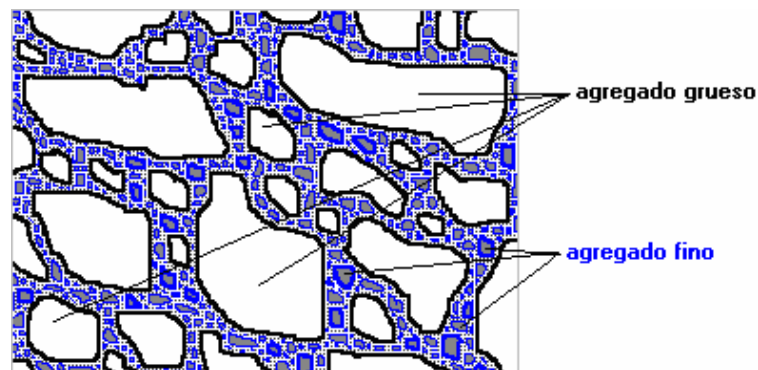


Figura 2.8: Agregado grueso y agregado fino.

Una buena graduación de los agregados da lugar a hormigones de mejores características y más económicos (el agregado grueso deberá tener partículas grandes, medianas y pequeñas como se observa en el gráfico previo; y el agregado fino también deberá presentar partículas grandes, medianas y pequeñas, a otra escala). Para conseguir una granulometría apropiada se mezclan en proporciones adecuadas al menos dos tipos de agregados.

Los agregados pueden ser utilizados en su estado natural o pueden provenir de un proceso de trituración. El agregado grueso triturado presenta mejores características de adherencia que el agregado natural, por lo que sus hormigones pueden alcanzar mayor resistencia.



Figura 2.9: Agregado grueso natural y agregado grueso triturado.

En el caso del agregado fino triturado (también conocido como polvo de piedra), su empleo exclusivo, sin combinarse con arena, no es el más apropiado desde el punto de vista económico pues a pesar de que presenta una resistencia de los granos apropiada, su granulometría tiende a ser demasiado homogénea lo que implica que se requiera una mayor cantidad de cemento para alcanzar la resistencia especificada del hormigón, y por consiguiente genera un mayor costo.

Los agregados deben estar libres de partículas orgánicas, sales, limos y arcillas que puedan afectar las reacciones químicas de fraguado o produzcan porosidades indeseables.

Dependiendo del tipo de hormigón que se desee fabricar, se pueden emplear **agregados ligeros**, **agregados normales** o **agregados pesados**. También pueden utilizarse **agregados artificiales**.

c. AGUA:

El agua utilizada en el hormigón debe ser potable en lo posible o al menos debe estar libre de impurezas. Nunca debe usarse agua de mar, pues su salinidad afecta al acero en el hormigón armado y en el hormigón preesforzado.

d. ADITIVOS:

Son compuestos químicos que, añadidos en pequeñas cantidades, modifican las propiedades del hormigón. Entre los de uso más frecuente están los acelerantes, retardantes y plastificantes. Los aditivos siempre deben ser probados previamente a su utilización en obra, por la gran variabilidad de la calidad del cemento que disponemos en el país, y muy especialmente cuando se combinan aditivos.

2.3 ESPECIFICACIONES TÉCNICAS DEL HORMIGÓN EN OBRA:

Las especificaciones técnicas son el punto de partida para el diseño de los hormigones. Entre las propiedades más importantes que deben considerarse se tiene:

- Resistencia a la compresión
- Trabajabilidad del hormigón fresco
- Velocidad de Fraguado
- Peso Específico

En zonas donde se produce congelamiento y descongelamiento sería necesario especificar también la cantidad de aire introducido.

a. RESISTENCIA DEL HORMIGÓN:

La resistencia a la compresión del hormigón normalmente se la cuantifica a los 28 días de fundido el concreto, aunque en estructuras especiales como túneles y presas, o cuando se emplean cementos especiales, pueden definirse tiempos menores o mayores a esos 28 días.



Figura 2.10: Prueba de resistencia a la compresión del hormigón.

En túneles es bastante frecuente utilizar la resistencia a los 7 días o menos, mientras en presas se suele utilizar como referencia la resistencia a los 56 días o más.

b. TRABAJABILIDAD DEL HORMIGÓN FRESCO:

Trabajabilidad es la facilidad que presenta el hormigón fresco para ser colocado y vibrado en cualquier molde. Los hormigones con baja trabajabilidad presentan problemas de mezclado y problemas de compactación dentro de los moldes, lo que puede redundar en una disminución de la resistencia.

Si bien la trabajabilidad del hormigón se puede categorizar en función del asentamiento del **Cono de Abrams** o de la medición del diámetro de **Dispersión en la Mesa de Flujo**, en nuestro medio se suele utilizar más frecuentemente al Cono de Abrams.

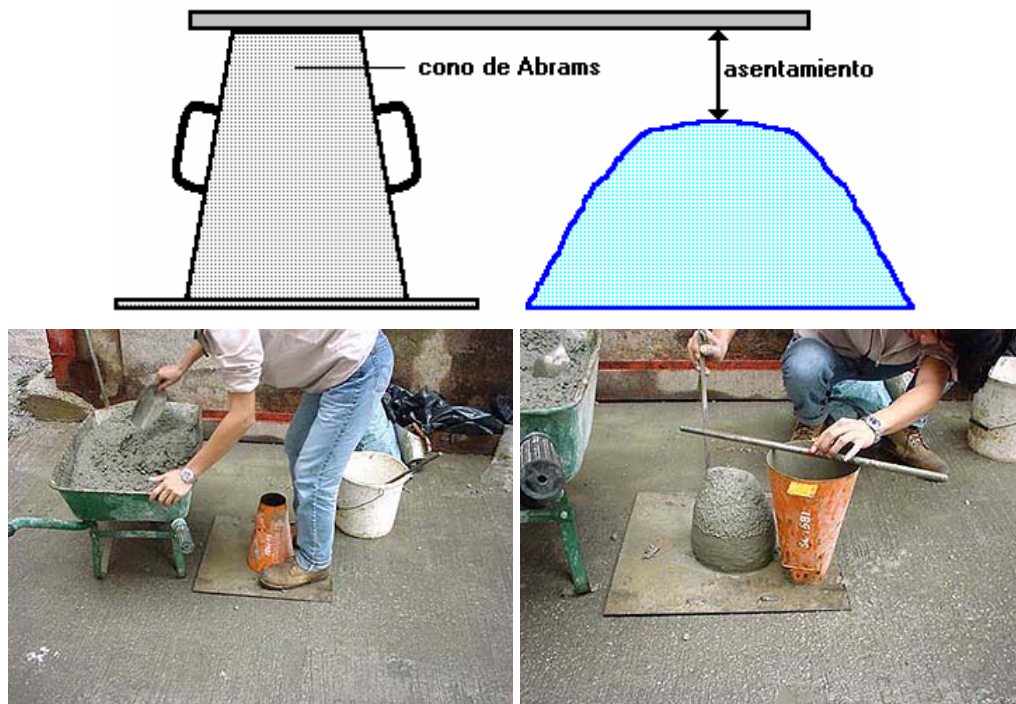


Figura 2.11: Medición de la trabajabilidad en el hormigón.

Para mejorar la trabajabilidad de un hormigón, se puede añadir agua con la consiguiente disminución de resistencia, o se pueden incluir aditivos plastificantes que no disminuirán su resistencia final.

c. VELOCIDAD DE FRAGUADO:

Las características propias de la estructura que se desea fundir pueden dar lugar a la necesidad de acelerar o retardar el fraguado del hormigón, para lo cual pueden utilizarse cementos especiales (muy poco utilizados en nuestro país) o aditivos acelerantes y retardantes. El hormigón lanzado para la construcción de túneles que tienen filtraciones requerirá de hormigones de fraguado muy rápido, mientras que el hormigón colocado en grandes volúmenes, como presas, necesitará hormigones de fraguado lento.



Figura 2.12: Hormigón lanzado de fraguado rápido.



d. **PESO ESPECÍFICO:**

La necesidad de disponer de un hormigón ligero o pesado requerirá la utilización de agregados ligeros o pesados respectivamente. Los hormigones ligeros podrían ser utilizados en losas de edificios altos o en muros aislantes de temperatura, mientras que los hormigones pesados podrían emplearse en anclajes de puentes colgantes, como bunkers de cobertura de materiales radioactivos, o para almacenar materiales explosivos.

2.4 **PROCESO DE DISEÑO DE MEZCLAS**

Existen una gran cantidad de métodos empíricos de diseño de mezclas para obtener hormigones con características específicas, sin embargo todos estos métodos deben ser tomados solamente como referenciales pues siempre requieren de pruebas de laboratorio para su afinamiento.

A continuación se presenta el método propuesto por el ACI en la norma 211.1-70 (con ajustes de ACI-2008), el mismo que se ilustra con un ejemplo.

EJEMPLO 2.1:

Se desea dosificar un metro cúbico de hormigón de resistencia característica $f'_c = 300 \text{ Kg/cm}^2$ para una obra donde existe un buen control de calidad de producción, con asentamiento de 50 mm en el cono de Abrams (hormigón magro). Se empleará cemento Portland ordinario (tipo I). El tamaño máximo del agregado grueso es 40 mm y su peso volumétrico aparente (incluidos los espacios vacíos) es 1600 kg/m^3 ; su densidad es 2.64 gr/cm^3 . El agregado fino tiene un módulo de finura de 2.60 (suma de porcentajes totales retenidos en cada tamiz desde 0.141 mm hasta el diámetro máximo del agregado fino, dividido para cien) y una densidad de 2.58 gr/cm^3 .

a. **Resistencia Media y Resistencia Característica del Hormigón:**

Se determina la variabilidad de la resistencia del hormigón, en base al nivel de control de calidad del proceso de mezclado en obra, para lo que se puede utilizar la siguiente tabla:

Tabla 2.1: Variabilidad de la resistencia del hormigón en función del control de calidad de fabricación.

TIPO DE CONTROL	DESVIACION ESTANDAR (σ)
Muy bueno	0.07 fm
Bueno	0.14 fm
Regular	0.21 fm
Deficiente	0.28 fm

- Un **control de calidad muy bueno** se obtiene solamente en laboratorios especializados que dosifican sus mezclas al peso, tienen control de la humedad antes del mezclado, utilizan agregados seleccionados y controlan la trabajabilidad del hormigón fresco.

- Un **control de calidad bueno** se consigue en obras que emplean hormigón premezclado en fábricas especializadas y controlan el asentamiento del cono de Abrams; o en obras que mecanizan la producción de mezclas al peso, realizan corrección de dosificaciones por la humedad, emplean agregados de calidad y verifican la trabajabilidad de la mezcla.
- Un **control de calidad regular** se obtiene con dosificaciones volumétricas y control frecuente de la cantidad de agua mediante el asentamiento del cono de Abrams.
- Un nivel de control inferior al regular se cataloga como **control de calidad deficiente**.

Si representáramos gráficamente la dispersión de la distribución de resultados de resistencia, para los cuatro niveles de control anotados, se obtendría cualitativamente el siguiente tipo de curvas.

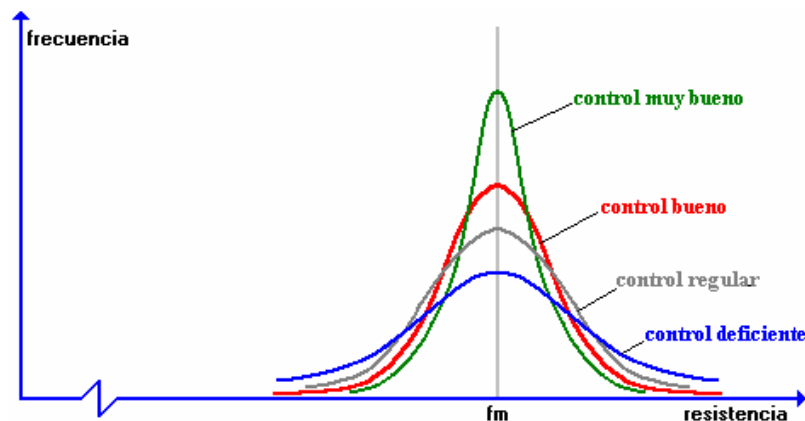


Figura 2.13: Dispersión de resistencias del hormigón conforme al control de calidad de fabricación.

En el presente caso tendríamos la siguiente información:

$f'c = 300 \text{ Kg/cm}^2$ dato del ejemplo
 $\sigma = 0.14 f_m$ se toma de la tabla para un control de calidad de fabricación bueno
 $f'c = f_m - 1.34 \sigma$ para un 9 % de muestras que no alcancen la resistencia especificada [ACI 5.3.2.1] (la norma 211.1-70 recomendaba la expresión $f'c = f_m - 1.65 \sigma$, para un 5% de muestras que no alcancen la resistencia especificada)

Reemplazando el valor de σ en la última expresión:

$$\begin{aligned}
 f'c &= f_m - 1.34 \times (0.14 f_m) \\
 f'c &= f_m - 0.1876 f_m \\
 f'c &= 0.8124 f_m
 \end{aligned}$$

Se calcula la resistencia media del hormigón f_m , que siempre será superior a su resistencia característica.

$$f_m = \frac{f'_c}{0.8124} = \frac{300 \text{ Kg/cm}^2}{0.8124}$$

$$f_m = 369 \text{ Kg/cm}^2$$

b. Cantidad de Agua Requerida:

Se determina la cantidad de agua que se requiere por m³ de hormigón, y el porcentaje de volumen de aire atrapado, en función del tamaño máximo del agregado (40 mm) y del asentamiento en el cono de Abrams (50 mm), mediante la siguiente tabla:

Tabla 2.2: Cantidad aproximada de agua de mezclado para diferentes asentamientos y tamaños máximos de los agregados.

Asentamiento (mm)	Cantidad de agua (Kg/m ³ de concreto para agregados de tamaño máximo)							
	10mm	12.5mm	20mm	25mm	40mm	50mm	70mm	150mm
30 a 50	205	200	185	180	160	155	145	125
80 a 100	225	215	200	195	175	170	160	140
150 a 180	240	230	210	205	185	180	170	—
Contenido de aire atrapado (porcentaje)	3.0	2.5	2.0	1.5	1.0	0.5	0.3	0.2

Cantidad de agua por metro cúbico de hormigón = 160 Kg (se toma de la tabla anterior)

Porcentaje de volumen de aire atrapado = 1% (se toma de la tabla anterior)

c. Relación Agua/Cemento:

La relación agua / cemento de la mezcla (medida al peso) se puede estimar de la siguiente figura tomada del libro **Propiedades del Concreto** de A. M. Neville:

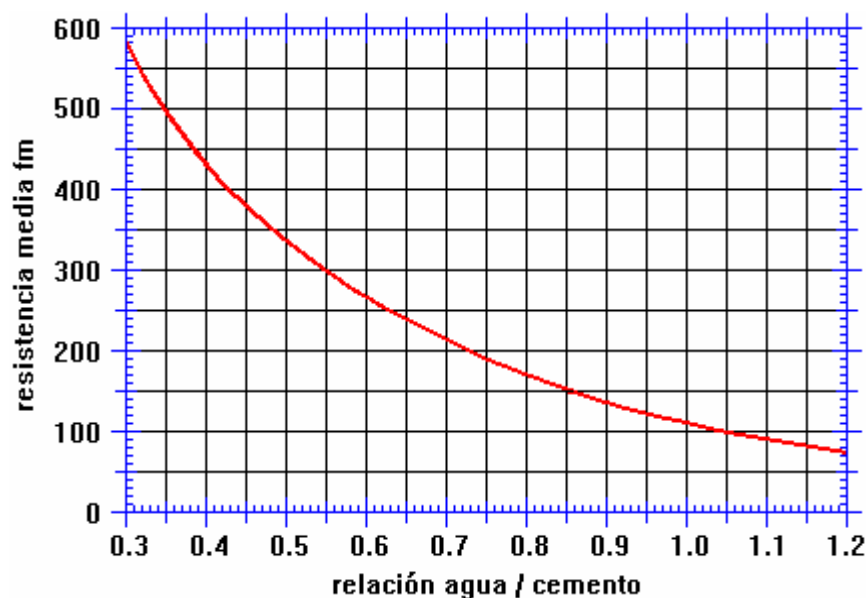


Figura 2.14: Curva de la resistencia media del hormigón como función de la relación agua/cemento.



Para una resistencia media del hormigón de 369 Kg/cm^2 , de la curva anterior se desprende que:

$$\text{peso de agua} / \text{peso de cemento} = 0.465$$

d. Contenido de Cemento:

El contenido de cemento será:

$$\text{peso de cemento} = \text{peso de agua} / 0.465 = 160 \text{ Kg} / 0.465$$

$$\text{peso de cemento} = 344 \text{ Kg}$$

e. Volumen Aparente de Agregado Grueso:

Se calcula el volumen aparente de agregado grueso mediante la siguiente tabla, en función del módulo de finura del agregado fino (2.60) y el tamaño máximo del agregado grueso (40 mm).

Tabla 2.3: Volumen aparente de agregado grueso por metro cúbico de hormigón.

Tamaño máximo del agregado (mm)	Volumen de agregado grueso compactado con varilla, por volumen de concreto para módulo de finura de la arena de:			
	2.40	2.60	2.80	3.00
10	0.50	0.48	0.46	0.44
12.5	0.59	0.57	0.55	0.53
20	0.66	0.64	0.62	0.60
25	0.71	0.69	0.67	0.65
40	0.75	0.73	0.71	0.69
50	0.78	0.76	0.74	0.72
70	0.82	0.80	0.78	0.76
150	0.87	0.85	0.83	0.81

De acuerdo a la tabla anterior, el volumen aparente de agregado grueso por metro cúbico de hormigón es:

$$\text{volumen aparente del agregado grueso} = 0.73 \text{ m}^3$$

f. Peso del Agregado Grueso:

El peso del agregado grueso se obtiene multiplicando su volumen aparente por su peso específico aparente.

$$\text{Peso agregado grueso} = 0.73 \text{ m}^3 \times 1600 \text{ Kg/m}^3$$

$$\text{Peso agregado grueso} = 1168 \text{ Kg.}$$

g. Volúmenes de Cemento, Agua, Agregado Grueso y Aire Atrapado:

Se calculan los volúmenes efectivos de cemento, agua, agregado grueso y aire atrapado:

$$\text{Volumen cemento} = \frac{344 \text{ Kg}}{3150 \text{ Kg/m}^3}$$



$$\text{Volumen cemento} = 0.109 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen agua} = \frac{160 \text{ Kg}}{1000 \text{ Kg/m}^3}$$

$$\text{Volumen agua} = 0.160 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen agregado grueso} = \frac{1168 \text{ Kg}}{2640 \text{ Kg/m}^3}$$

$$\text{Volumen agregado grueso} = 0.442 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen de aire atrapado} = 0.01 \times 1 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen de aire atrapado} = 0.01 \text{ m}^3$$

h. Volumen de Agregado Fino:

Se calcula el volumen de agregado fino.

$$\text{Volumen agregado fino} = 1.000 \text{ m}^3 - 0.109 \text{ m}^3 - 0.160 \text{ m}^3 - 0.442 \text{ m}^3 - 0.010 \text{ m}^3$$

$$\text{Volumen agregado fino} = 0.279 \text{ m}^3$$

j. Peso del Agregado Fino:

Se calcula el peso de agregado fino.

$$\text{Peso agregado fino} = (0.279 \text{ m}^3) \cdot (2.58 \times 1000 \text{ Kg/m}^3)$$

$$\text{Peso agregado fino} = 720 \text{ Kg}$$

k. Resumen de Materiales por Metro Cúbico de Hormigón:

Material	Volumen Neto	Peso
Cemento	0.109 m ³	344 Kg
Agregado fino	0.279 m ³	720 Kg
Agregado grueso	0.442 m ³	1168 Kg
Agua	0.160 m ³	160 Kg
Aire atrapado	0.010 m ³	0 Kg

Hormigón Fresco	1.000 m³	2392 Kg

Este diseño sirve de base para iniciar pruebas de comprobación en laboratorio que permitirán su ajuste. Algunos criterios básicos para corrección del diseño, en laboratorio, pueden ser los siguientes:

- Si la mezcla resulta demasiado seca, debería incorporarse un aditivo plastificante.
- Si la mezcla presenta oquedades internas (hormigueros), debería incrementarse proporcionalmente la cantidad de arena, cemento y agua, disminuyendo simultáneamente la cantidad de agregado grueso.
- Si la mezcla presenta segregación, debería disminuirse proporcionalmente la cantidad de arena, cemento y agua, aumentándose simultáneamente la cantidad de agregado grueso.



Para poder definir una dosificación al volumen, que a pesar de no ser técnicamente apropiada es la más empleada en nuestro medio, sería necesario determinar adicionalmente, en laboratorio, la densidad aparente del agregado grueso y del cemento.

2.5 CONTROL EN OBRA:

El control en obra del proceso de fabricación de los hormigones constituye un aspecto fundamental. Debe prestarse especial atención a los siguientes puntos:

- Respetar las proporciones obtenidas en laboratorio de los componentes del hormigón, a menos que se produzcan cambios en sus características, en cuyo caso deberán efectuarse ajustes al diseño.
- Controlar la humedad de los agregados, particularmente apilándolos en lugares protegidos contra la lluvia. En caso de no ser posible controlar los cambios de humedad se debe verificar periódicamente su contenido.
- No utilizar agregados que contengan sales o materiales orgánicos.
- No utilizar cemento que denote inicios de un proceso de fraguado.
- Controlar constantemente que el asentamiento del cono de Abrams se encuentre dentro de límites aceptables. El propio cono de Abrams puede ser utilizado para ajustar un diseño si los agregados se han humedecido por permanecer a la intemperie, en cuyo caso se deberá modificar fundamentalmente la cantidad de agua añadida.
- Si se usan aditivos, deben hacerse previamente mezclas de prueba para asegurarse de su buen comportamiento.
- Se deberá tener especial cuidado con el transporte del hormigón para no producir segregación.
- Se deberá tomar un número suficiente de muestras cilíndricas para poder realizar ensayos representativos a los 7, 14 y 28 días. Se deberán reservar muestras para poder ensayarlas ocasionalmente a los 56 días, cuando el comportamiento a los 28 días haga presumir la utilización de cemento de fraguado lento o de aditivo retardante de fraguado.

2.6 TAREAS COMPLEMENTARIAS:

- a. Realizar los ensayos de laboratorio a agregados y cemento de la zona, para efectuar el diseño de un hormigón.
- b. Con materiales de la zona, realizar el diseño, al peso, de un hormigón con resistencia característica $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$, para una obra en la que existirá un muy buen control de producción del hormigón. Probar los resultados en laboratorio.



REFERENCIAS:

- 2.1 Neville A., *Properties of Concrete*, Pitman Publishing Limited.
- 2.2 Andrade D., Dávila I., Villacís W., Romo M.y Aguiar R., *Memorias del II Curso de Actualización de Conocimientos Básicos de Estructuras*, Editorial de la Escuela Politécnica del Ejército.
- 2.3 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.

CAPÍTULO III

EL ACERO ESTRUCTURAL EN EL HORMIGÓN ARMADO

3.1 INTRODUCCION:

El acero es una aleación basada en hierro, que contiene carbono y pequeñas cantidades de otros elementos químicos metálicos. Generalmente el carbono representa entre el 0.5% y el 1.5% de la aleación.

El acero utilizado en estructuras (barras y cables) es un material apto para resistir solicitaciones traccionantes, lo que lo convierte en el componente ideal para combinarse técnicamente con el hormigón simple, con el que conforma el hormigón armado y el hormigón preesforzado.



Figura 3.1: Varillas de acero.

Además, el acero en barras está en capacidad de resistir eficientemente solicitaciones de cortante y de torsión, aunque por su costo mucho más elevado que el del hormigón simple, el porcentaje volumétrico del acero dentro del hormigón armado y del hormigón preesforzado es relativamente pequeño (generalmente entre 0.5% y 3%, dependiendo del elemento estructural).

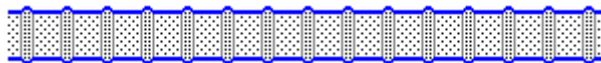


Figura 3.2: Corrugado en las varillas de acero.

Cuando está adecuadamente confinado o arriostrado, el acero en barras también es capaz de resistir adecuadamente las solicitaciones de compresión, aunque económicamente no sea la solución más apropiada.

El acero empleado en el hormigón armado normalmente debe presentar reslates (varillas corrugadas) [ACI 3.5.1], con excepción del acero empleado en zunchos espirales, en cuyo caso puede ser liso. Comercialmente es distribuido en varillas con distintos diámetros nominales.

Tabla 3.1: Sección transversal y peso unitario de varillas de acero.

Diámetro Nominal (mm)	Sección Transversal (cm ²)	Peso por Metro Lineal (Kg/m)
8	0,50	0,39
10	0,79	0,61
12	1,13	0,88
14	1,54	1,20
16	2,01	1,57
18	2,54	1,98
20	3,14	2,45
22	3,80	2,97
25	4,91	3,83
28	6,16	4,80
30	7,07	5,51
35	9,62	7,50

Varillas desde 10 hasta 25 mm. de diámetro se las consigue directamente en el mercado, en longitudes de 6, 9 y 12 m., y a partir de ese diámetro se las fabrica bajo pedido. Varillas de menos de 10 mm. se las suele expender en rollos.



Figura 3.3: Varillas y rollos de acero.

En el diseño se suelen escoger varias varillas de un mismo diámetro o combinaciones de diámetros de varillas para obtener las secciones transversales requeridas.

Tabla 3.2: Sección transversal de múltiples varillas de acero.

Diám. mm	Sección Transversal de Varillas de Acero (cm ²)														
	Número de Varillas														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
8	0,50	1,01	1,51	2,01	2,51	3,02	3,52	4,02	4,52	5,03	5,53	6,03	6,53	7,04	7,54
10	0,79	1,57	2,36	3,14	3,93	4,71	5,50	6,28	7,07	7,85	8,64	9,42	10,21	11,00	11,78
12	1,13	2,26	3,39	4,52	5,65	6,79	7,92	9,05	10,18	11,31	12,44	13,57	14,70	15,83	16,96
14	1,54	3,08	4,62	6,16	7,70	9,24	10,78	12,32	13,85	15,39	16,93	18,47	20,01	21,55	23,09
16	2,01	4,02	6,03	8,04	10,05	12,06	14,07	16,08	18,10	20,11	22,12	24,13	26,14	28,15	30,16
18	2,54	5,09	7,63	10,18	12,72	15,27	17,81	20,36	22,90	25,45	27,99	30,54	33,08	35,63	38,17
20	3,14	6,28	9,42	12,57	15,71	18,85	21,99	25,13	28,27	31,42	34,56	37,70	40,84	43,98	47,12
22	3,80	7,60	11,40	15,21	19,01	22,81	26,61	30,41	34,21	38,01	41,81	45,62	49,42	53,22	57,02
25	4,91	9,82	14,73	19,63	24,54	29,45	34,36	39,27	44,18	49,09	54,00	58,90	63,81	68,72	73,63
28	6,16	12,32	18,47	24,63	30,79	36,95	43,10	49,26	55,42	61,58	67,73	73,89	80,05	86,21	92,36
30	7,07	14,14	21,21	28,27	35,34	42,41	49,48	56,55	63,62	70,69	77,75	84,82	91,89	98,96	106,03
35	9,62	19,24	28,86	38,48	48,11	57,73	67,35	76,97	86,59	96,21	105,83	115,45	125,07	134,70	144,32

En hormigón preesforzado se utilizan cables de acero, de diámetro relativamente pequeño (3, 4, 5 y 6 mm.).



Figura 3.4: Tendido de ductos para cables de acero de preesfuerzo y sistemas de anclaje de cables.

3.2 PROPIEDADES MECÁNICAS DEL ACERO:

La descripción más completa de las propiedades mecánicas de los aceros (propiedades utilizadas en el diseño estructural) se la realiza mediante sus curvas esfuerzo – deformación bajo cargas de tracción, las mismas que varían dependiendo de la composición química del material y de sus procesos de fabricación.

En el siguiente diagrama se presentan algunas curvas esfuerzo – deformación características de los aceros.

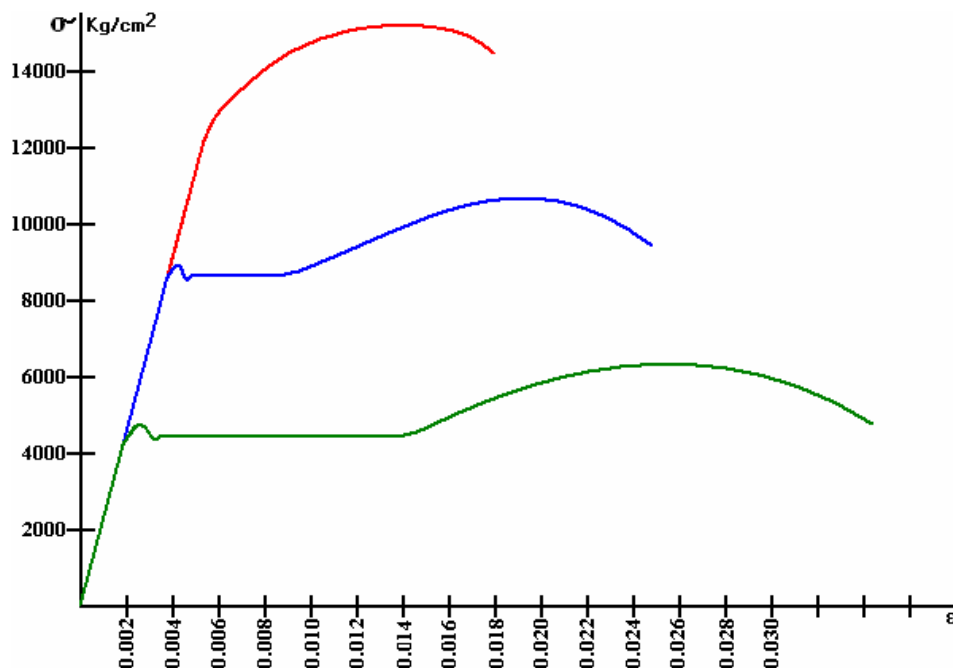


Figura 3.5: Curvas esfuerzo-deformación de los aceros estructurales.

Algunos de los elementos que aparecen en las curvas esfuerzo – deformación serán discutidos a continuación.

a. RANGO DE COMPORTAMIENTO ELÁSTICO:

Es el rango de esfuerzos, a partir de la carga nula, en que el acero se deforma por cargas de tracción, pero cuando se retira tal carga recupera su geometría inicial. En la curva esfuerzo – deformación ese rango coincide con la recta que parte desde el punto de esfuerzo y deformación nulos.

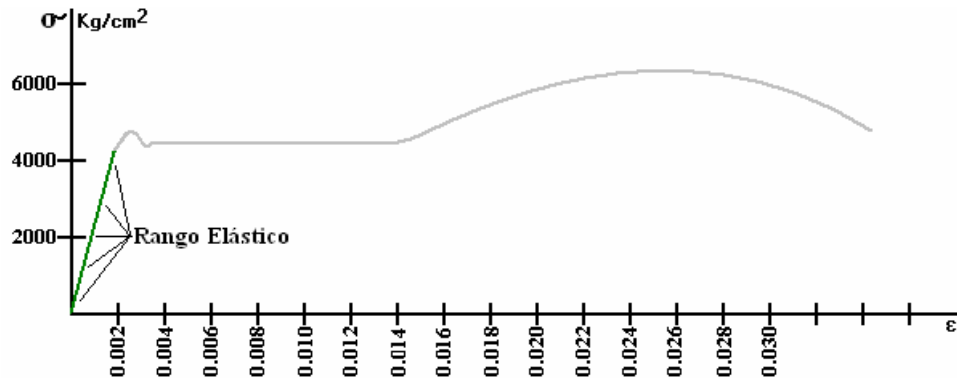


Figura 3.6: Rango elástico del acero estructural.

b. ESFUERZO DE FLUENCIA:

Se define como el esfuerzo bajo el cual el acero continúa deformandose sin necesidad de encrementar las cargas de tracción. En el diagrama esfuerzo – deformación de los aceros tradicionales, la fluencia coincide con una recta horizontal —o casi horizontal—, a continuación del rango elástico y de un pequeño tramo de transición. El esfuerzo asociado se identifica como “ F_y ”.

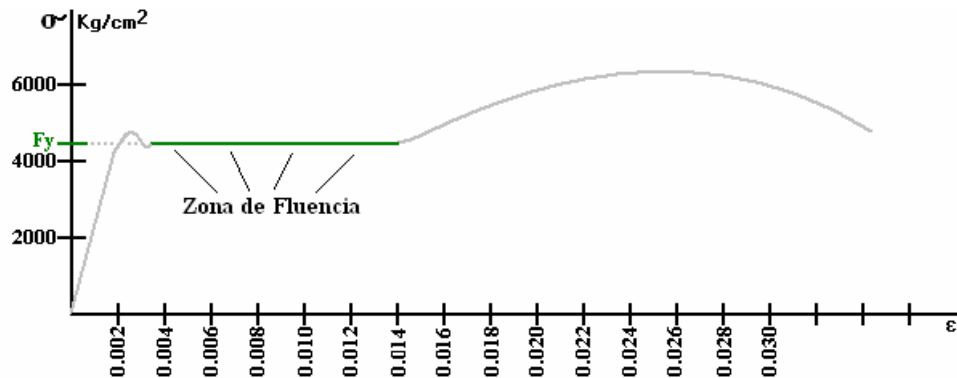


Figura 3.7: Zona de fluencia del acero estructural.

Existen aceros estructurales, trabajados en frío para lograr una mayor resistencia, que no revelan la presencia de una zona de fluencia, en cuyo caso ASTM recomienda trazar una recta paralela a la de comportamiento elástico, que arranque en el eje de las deformaciones unitarias con una deformación de 0.002. El punto de cruce de esa recta con la curva esfuerzo – deformación definirá el esfuerzo teórico de fluencia del material.

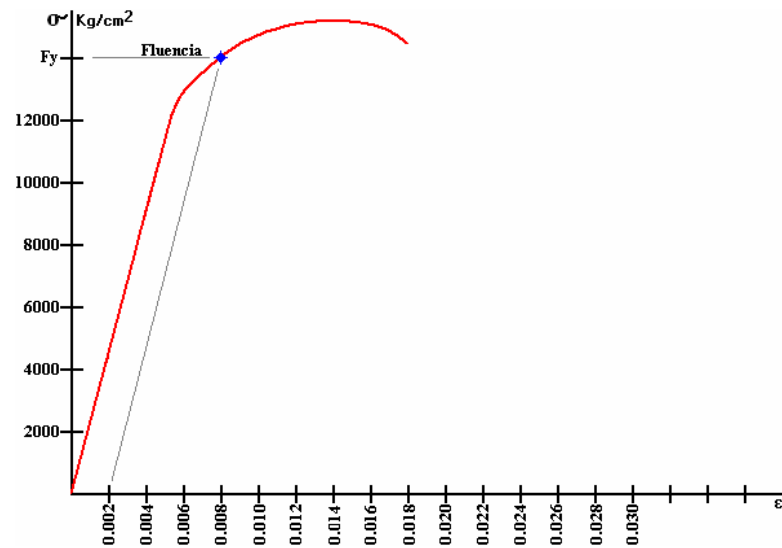


Figura 3.8: Esfuerzo de fluencia en aceros sin meseta de fluencia, según ASTM.

ACI, por su parte, especifica que si el esfuerzo de fluencia observado gráficamente supera los 4200 Kg/cm², el esfuerzo de fluencia deberá obtenerse de la curva esfuerzo-deformación para una deformación unitaria de 0.0035 [ACI 3.5.3.2]. No se podrá utilizar en diseño un esfuerzo de fluencia superior a 5500 Kg/cm² [ACI 9.4], con excepción del refuerzo en espiral, en cuyo caso podrá llegar hasta 7000 Kg/cm² [ACI 10.9.3], y el acero de preesfuerzo.

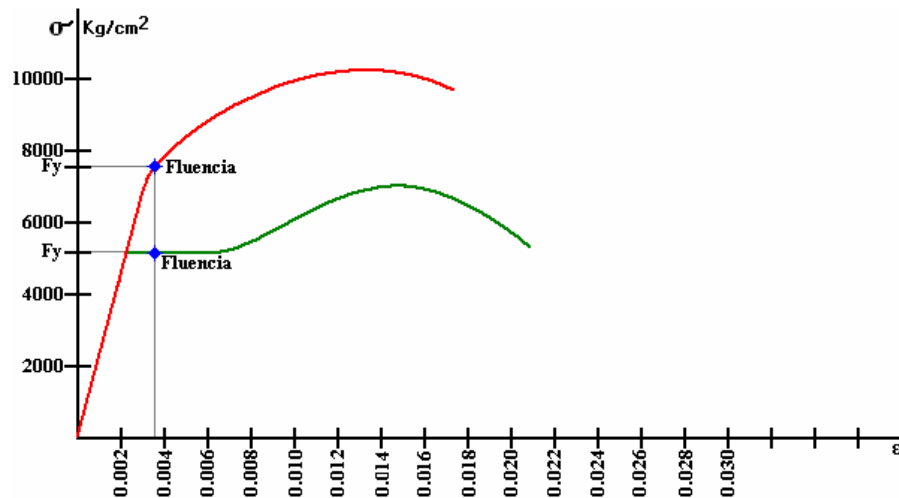


Figura 3.9: Esfuerzo de fluencia en aceros según ACI.

c. RESISTENCIA A LA ROTURA:

Es el mayor esfuerzo que puede soportar el acero, previo al proceso de colapso del material. Dentro del diagrama esfuerzo – deformación del material el inicio del colapso queda identificado mediante el punto de mayor ordenada, que se representa “Fr”.

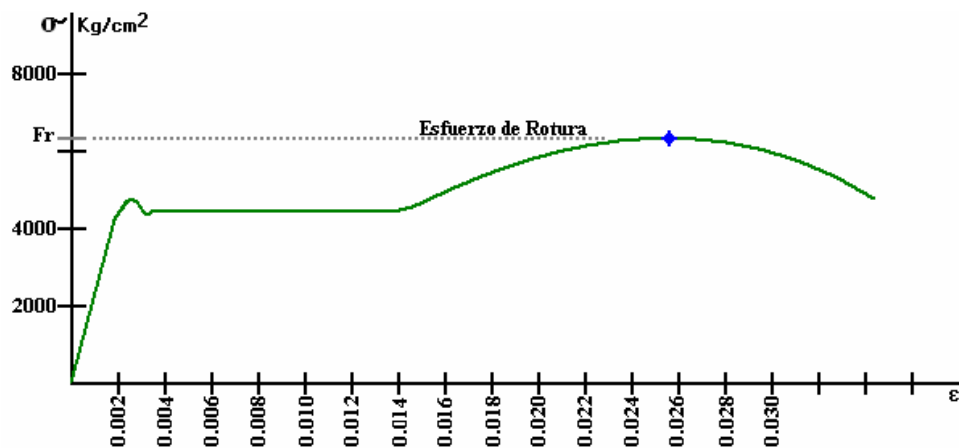


Figura 3.10: Resistencia a la rotura del acero de refuerzo.

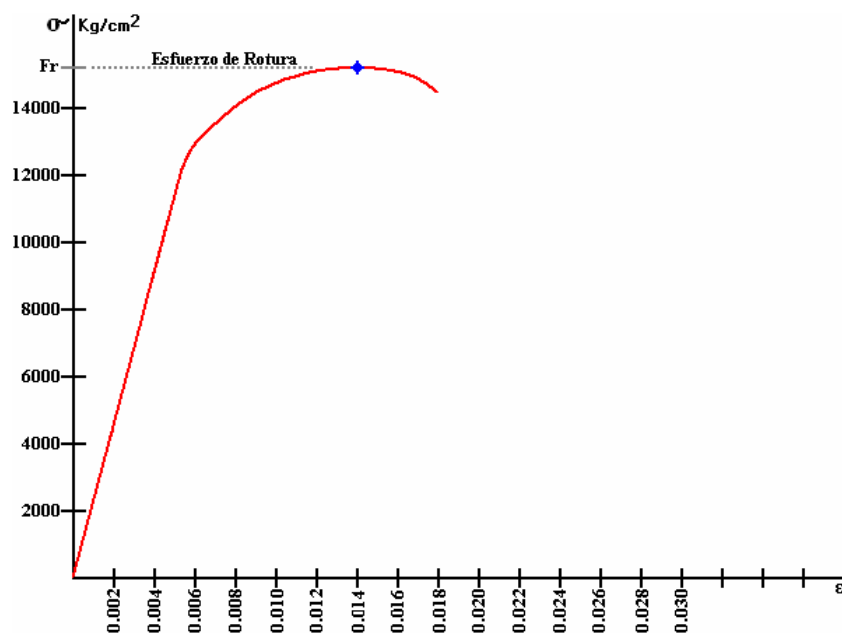


Figura 3.11: Resistencia a la rotura de cables de acero de preesfuerzo.

El esfuerzo de rotura es siempre superior al esfuerzo de fluencia, para todo tipo de acero estructural.

En hormigón armado, la reserva de capacidad entre el esfuerzo de fluencia y el de rotura no es utilizada directamente en el diseño, debido a las grandes deformaciones que se requerirían para alcanzar ese esfuerzo mayor, por lo que se utiliza como elemento de diseño exclusivamente al esfuerzo de fluencia.

En hormigón preesforzado, donde se utilizan aceros de alta resistencia, en el diseño se emplea el esfuerzo de fluencia, y en la verificación a carga última se emplea el esfuerzo de rotura, pues las deformaciones involucradas en las cercanías del colapso del material compuesto son comparativamente menores a las del hormigón armado.

d. MÓDULO DE ELASTICIDAD:

Es la pendiente de la recta que identifica al rango elástico de comportamiento de los materiales, y en el caso del acero se representa “**Es**”.

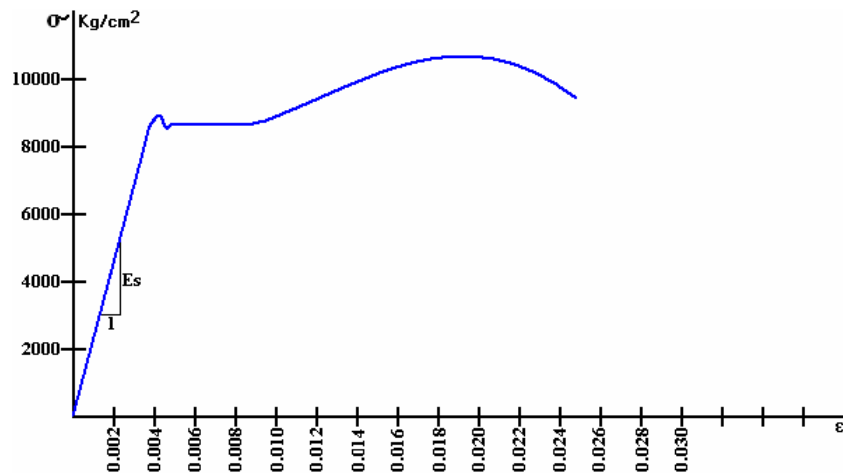


Figura 3.12: Módulo de elasticidad del acero de refuerzo.

Numéricamente el módulo de elasticidad es el cociente entre el esfuerzo y la deformación unitaria dentro del rango elástico.

$$E_s = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

En los aceros estructurales sólidos en barra o en perfil, utilizados en el hormigón armado, prácticamente en todos los casos se tiene un único módulo de elasticidad, lo que en las curvas esfuerzo – deformación se refleja en la pendiente única de los aceros con características diferentes [ACI 8.5.2].

$$E_s = 2'100'000 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{Ecuación (3.1)}$$

e. DUCTILIDAD:

Igual que en el caso del hormigón, existen dos maneras básicas de medir la ductilidad: por deformación y por energía de deformación.

La ductilidad por deformación de los aceros estructurales utilizados en hormigón armado fácilmente supera a diez. Los aceros de alta resistencia empleados en hormigón preesforzado tienen una ductilidad limitada, del orden de tres a cinco.

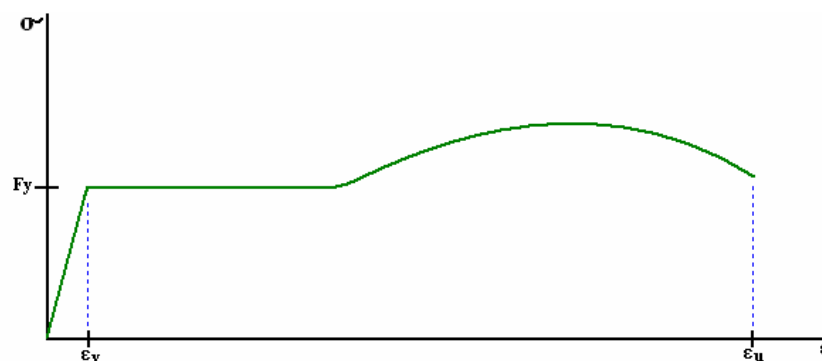


Figura 3.13: Deformaciones unitarias de fluencia y última.

$$D_d = \frac{\epsilon_u}{\epsilon_y} \quad \text{Ecuación (3.2)}$$

Donde:

- D_d : Índice de ductilidad por deformación
 ϵ_u : Deformación unitaria de rotura
 ϵ_y : Deformación unitaria de inicio de fluencia

Para la especificación del inicio de fluencia se simplifica el diagrama esfuerzo – deformación, eliminándose la zona de transición entre el rango de comportamiento elástico y la zona de fluencia.

La ductilidad por energía de deformación de los aceros empleados en hormigón armado generalmente supera a veinte.

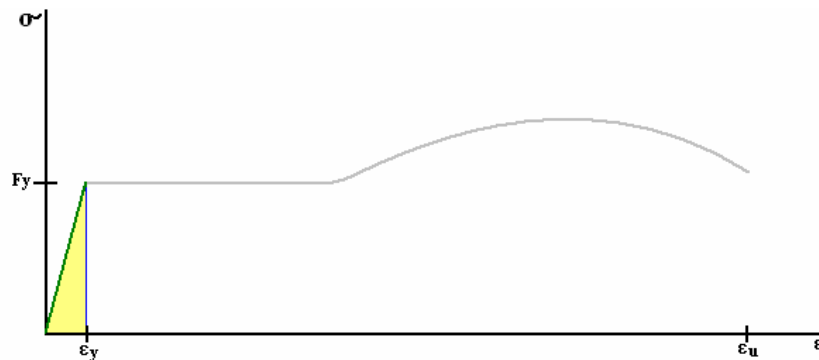


Figura 3.14: Energía de deformación elástica.

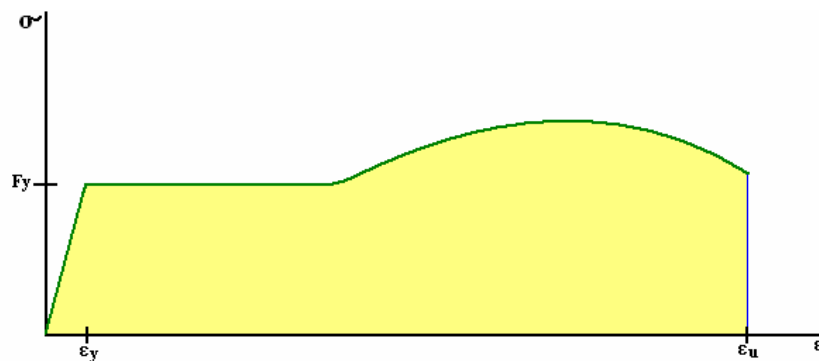


Figura 3.15: Energía de deformación última.

$$D_{ed} = \frac{A_u}{A_y} \quad \text{Ecuación (3.3)}$$

Donde:

- D_{ed} : Índice de ductilidad por energía de deformación
 A_u : Energía de deformación unitaria de rotura
 A_y : Energía de deformación unitaria de inicio de fluencia

3.3 OTRAS PROPIEDADES DEL ACERO:

a. DENSIDAD:

La densidad del acero sólido es de 7850 Kg/m³. Los cables de acero utilizados en hormigón preesforzado tienen una densidad menor, por la presencia de

espacios vacíos; dicha variación de densidad depende del diámetro exterior de los cables, del diámetro y número de hilos que forman parte del cable y del proceso de fabricación.

$$\rho_s = 7850 \text{ Kg/m}^3$$

Ecuación (3.4)

b. RESISTENCIA A LA CORROSIÓN:

Muchos aceros utilizados en estructuras requieren de una resistencia específica a la corrosión, cuando van a estar expuestos a ambientes agresivos, para lo que es necesario que en el proceso de fundición se incluyan componentes adicionales, especialmente níquel, con una proporción entre 2 y 4% de la aleación. Este tipo de aceros no se lo consigue en barras, en nuestro medio, pero se lo puede adquirir en perfiles importados, laminados en caliente.



Figura 3.16: Acero de refuerzo con corrosión (izquierda) y sin corrosión (derecha).

Existen aceros resistentes al desgaste, que suelen utilizarse en estructuras con elementos móviles como puentes grúas metálicos, que utilizan Manganeso entre un 10 y un 18% de la aleación.

La presencia de Níquel y Cromo en la aleación permite la obtención de aceros con propiedades combinadas como inoxidable y resistentes a ataques químicos, o de gran resistencia, dureza y elasticidad.

3.4 TAREAS COMPLEMENTARIAS:

- Realizar el ensayo de tracción en laboratorio de una varilla de acero estructural, e identificar los elementos de la curva esfuerzo – deformación (módulo de elasticidad, esfuerzo de fluencia, esfuerzo de rotura y deformación unitaria de rotura).
- Realizar el ensayo de tracción de un cable de acero de alta resistencia, e identificar los elementos de la curva esfuerzo – deformación (módulo de elasticidad, esfuerzo de fluencia, esfuerzo de rotura y deformación unitaria de rotura).



REFERENCIAS:

- 3.1 Winter G. y Nilson A., *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, Editorial Reverté, S.A.
- 3.2 Nilson A., (1999), *Diseño de Estructuras de Concreto*, Mc Graw Hill.
- 3.3 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 3.4 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.

CAPÍTULO IV

COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN ARMADO

4.1 INTRODUCCIÓN:

El hormigón armado es un material estructural en el que se integran las propiedades del hormigón simple y del acero de refuerzo. Para que se produzca ese trabajo integrado es necesario que ambos materiales básicos estén íntimamente unidos e interactúen a través de las fuerzas de adherencia que se desarrollan en sus superficies de contacto.



Figura 4.1: Integración del hormigón y el acero de refuerzo.

Con el objeto de favorecer esa adherencia, la superficie del acero debe ser rugosa por lo que estructuralmente se utilizan varillas de acero corrugado, y el hormigón debe ser vibrado luego de ser colocado en los moldes.



Figura 4.2: Acero corrugado y hormigón vibrado.

Por aspectos de costo, el acero de refuerzo representa un pequeño porcentaje del volumen total del hormigón armado de la estructura (generalmente alrededor del 2%, aunque en casos especiales puede superar el 5%). Para lograr un comportamiento unificado en el hormigón armado (como si fuera un único material), el hormigón simple debe recubrir totalmente a las varillas de acero.

4.2 EL PRINCIPIO DE COMPATIBILIDAD DE DEFORMACIONES:

Debido a la integración de los materiales (hormigón simple y acero), cuando actúan cargas sobre el hormigón armado, **las deformaciones en el acero son similares a las deformaciones del hormigón simple que rodea a las varillas**, hecho que ha sido verificado experimentalmente [ACI 10.2.1]. Inclusive cuando el hormigón simple se fisura a causa de exceso de sollicitaciones de tracción, en las zonas próximas a esas fisuras se cumple, en promedio, el principio de compatibilidad de deformaciones.

4.3 EL PRINCIPIO DE NAVIER - BERNOULLI:

En elementos estructurales de desarrollo lineal (vigas y columnas rectas y en arco), **las secciones transversales planas antes de la deformación permanecen planas luego de la deformación** [ACI 10.2.2].

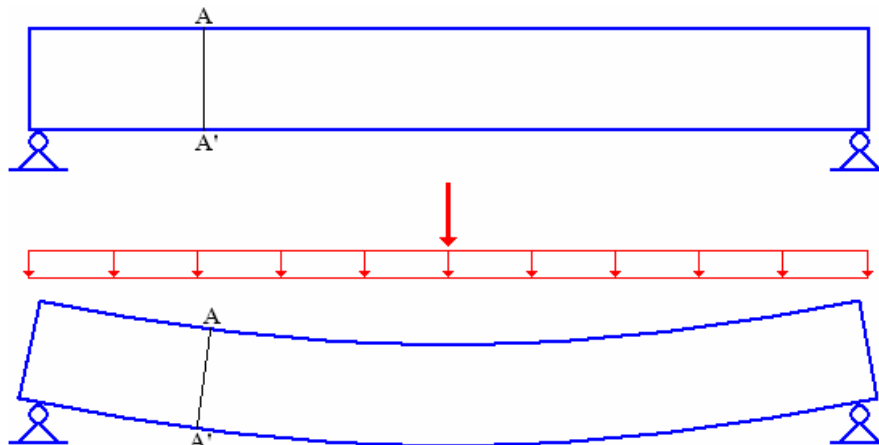


Figura 4.3: Principio de Navier-Bernoulli.

El principio de Navier-Bernoulli proporciona un modelo físico y matemático para analizar las deformaciones y los esfuerzos internos en los materiales estructurales homogéneos.

La combinación del Principio de Navier-Bernoulli y el Principio de Compatibilidad de Deformaciones permite modelar el comportamiento de materiales mixtos como el hormigón armado.

En este marco, como ejemplo, se puede decir que en elementos estructurales de desarrollo lineal sometidas a flexión, a flexo-compresión o a flexotracción, “las deformaciones unitarias en el refuerzo y en el concreto deben suponerse directamente proporcionales a la distancia al eje neutro” [ACI 10.2.2].

4.4 COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN ARMADO ANTE CARGAS DE COMPRESIÓN:

Se puede tomar una columna con varillas longitudinales embebidas.

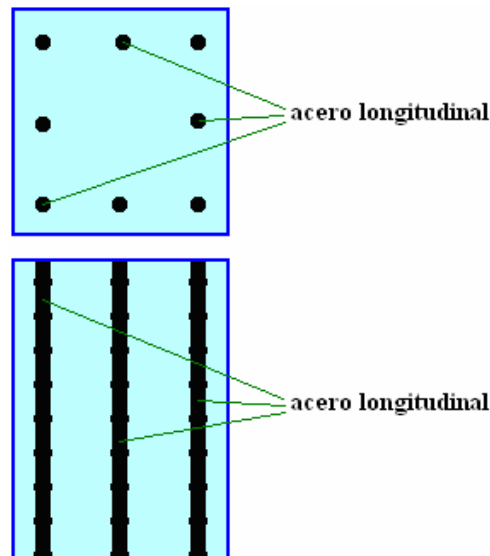


Figura 4.4: Varillas longitudinales de acero embebidas en una columna de hormigón.

Si a la columna se la somete exclusivamente a fuerzas de compresión, se producirá un acortamiento del hormigón y del acero, de la misma magnitud, lo que es consistente con el Principio de Compatibilidad de Deformaciones; además cualquier superficie horizontal plana se mantendrá plana luego de las deformaciones, lo que responde al Principio de Navier-Bernoulli.

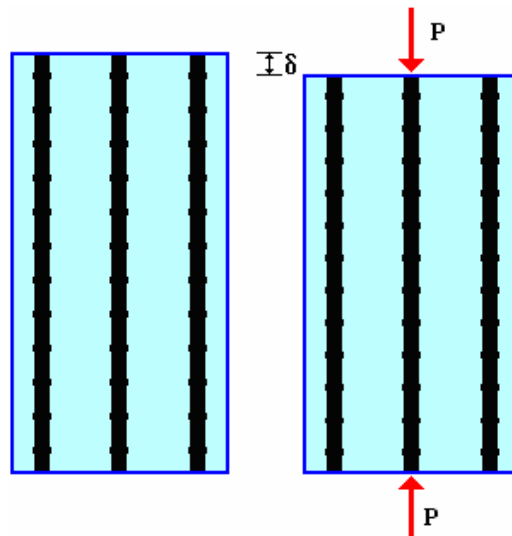


Figura 4.5: Deformaciones en una columna de hormigón armado sometida a compresión.

Cada uno de los materiales estará sometido a esfuerzos consistentes con sus respectivos diagramas esfuerzo-deformación unitaria (σ - ϵ).

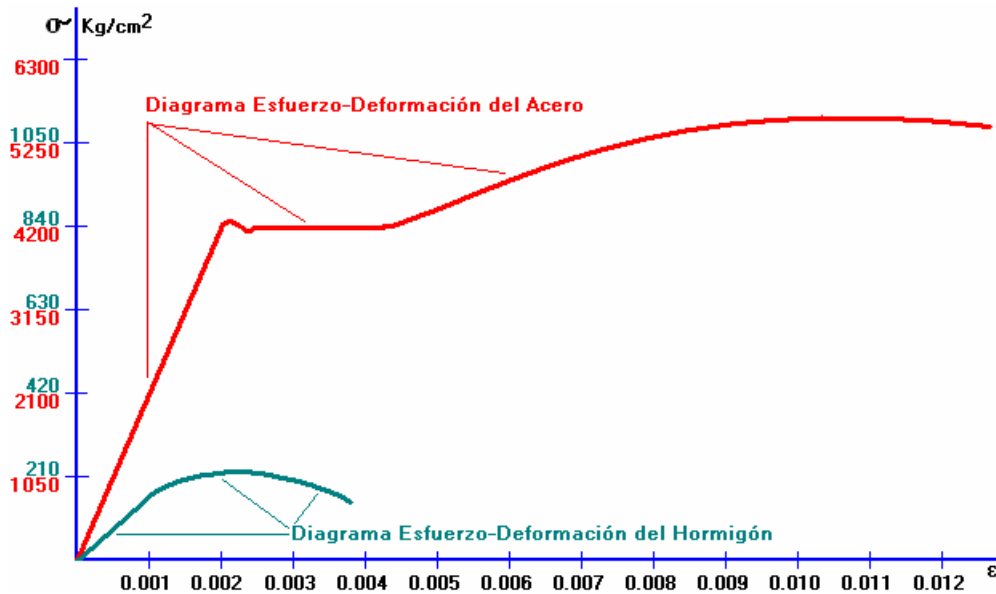


Figura 4.6: Diagramas esfuerzo-deformación del acero y del hormigón.

En el gráfico anterior se ha escogido una doble escala para representar a los esfuerzos en el hormigón y a los esfuerzos en el acero, con el objeto de que tengan proporciones comparables.

Primer Rango de Deformaciones a Compresión (Hormigón Elástico y Acero Elástico):

Tomando como referencia a las deformaciones en el diagrama previo, claramente se puede observar que existe un rango para el que tanto el hormigón como el acero tienen un comportamiento lineal (los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones). Ese rango se extiende desde cero hasta aproximadamente una deformación unitaria de 0.0007 para el hormigón escogido; este valor incrementará para hormigones de mayor resistencia, de acuerdo a la siguiente tabla aproximada.

Tabla 4.1: Máxima deformación y esfuerzo en rango elástico.

f'c (Kg/cm²)	Máxima deformación elástica (ε_e)	Máximo esfuerzo elástico aproximado (Kg/cm²)
210	0.00070	152
280	0.00085	213
350	0.00100	281
420	0.00115	354

Dentro de ese nivel de deformaciones el acero tendría su módulo de elasticidad tradicional:

$$E_s = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$$

Y el hormigón tendría un módulo de elasticidad que se calcularía como:

$$E_c = 15000\sqrt{f'c} = 15000\sqrt{210} = 217371 \text{ Kg/cm}^2$$

Para ese rango, la carga exterior podría calcularse mediante la siguiente expresión, que resulta de sumar la contribución del hormigón y la contribución del acero:

$$P = A_c \cdot \sigma_c + A_s \cdot \sigma_s$$

Dentro del rango elástico de los materiales, el esfuerzo se puede calcular multiplicando la deformación unitaria por el módulo de elasticidad correspondiente.

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

Reemplazando en la ecuación de la carga exterior se tiene:

$$P = A_c \cdot \varepsilon \cdot E_c + A_s \cdot \varepsilon \cdot E_s$$

Donde:

A_c : Sección transversal de hormigón (área total – área del acero)

A_s : Sección transversal de acero

ε : Deformación unitaria del hormigón que es igual a la del acero por compatibilidad

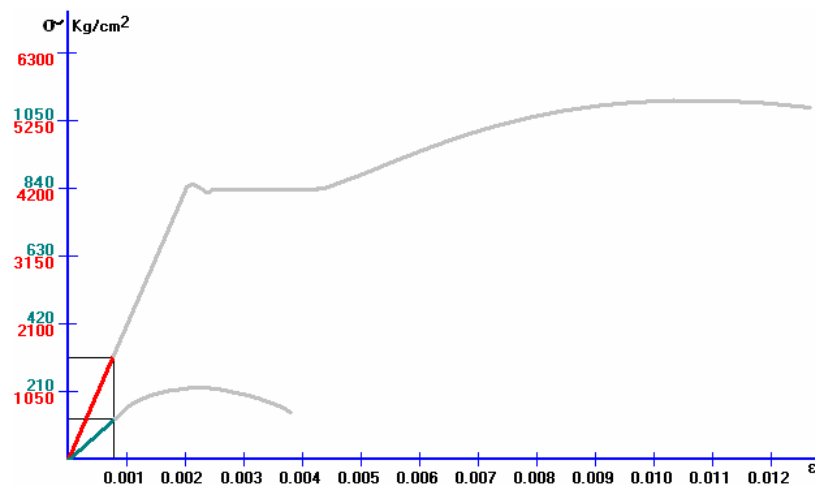


Figura 4.7: Esfuerzos en el hormigón y el acero a compresión, dentro del rango elástico del hormigón y del rango elástico del acero.

El siguiente gráfico representa el comportamiento lineal del hormigón armado, en el rango fijado de deformaciones, que proviene de añadir el comportamiento lineal del hormigón y el comportamiento lineal del acero.

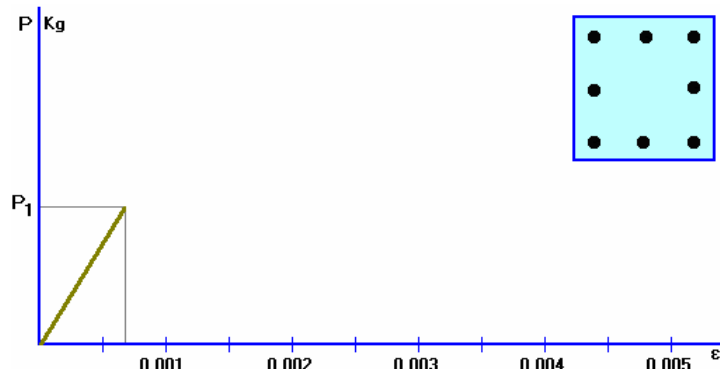


Figura 4.8: Comportamiento del hormigón armado a compresión en el rango elástico del hormigón y en el rango elástico del acero.

Segundo Rango de Deformaciones a Compresión (Hormigón Inelástico y Acero Elástico):

En el siguiente tramo, el acero continúa mostrando un comportamiento lineal elástico (hasta aproximadamente 0.002 de deformación unitaria para el acero escogido), mientras el hormigón inicia su comportamiento inelástico en el ramal creciente de esfuerzos.

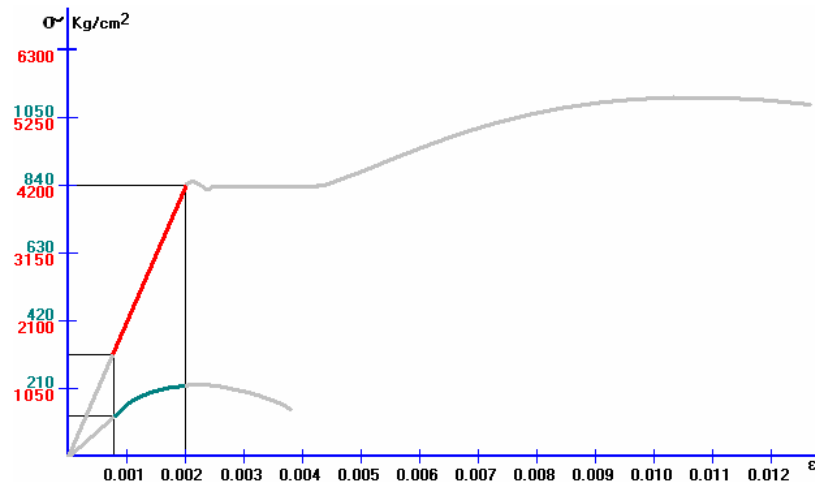


Figura 4.9: Esfuerzos en el hormigón y el acero, hasta el rango elástico del acero y dentro del rango inelástico del hormigón.

El resultado sobre la carga axial del hormigón armado es un tramo de comportamiento inelástico como el que se observa en la siguiente figura.

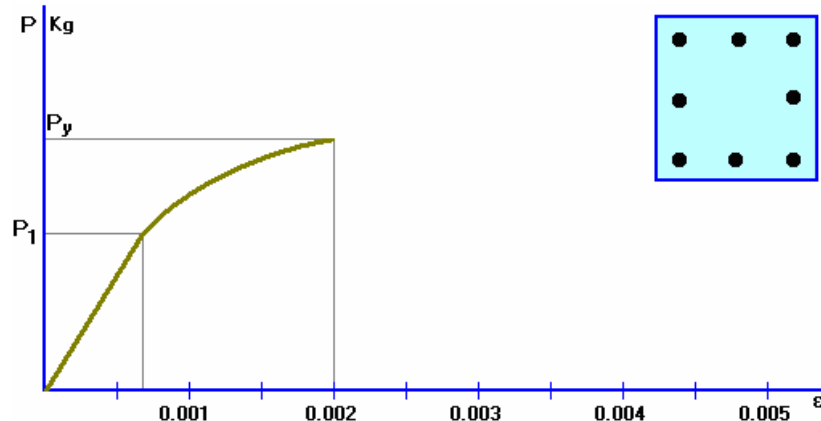


Figura 4.10: Comportamiento del hormigón armado a compresión, hasta el rango elástico del acero y dentro del rango inelástico del hormigón.

Tercer Rango de Deformaciones a Compresión (Hormigón Inelástico y Acero Inelástico):

A partir de este punto, el acero entra en fluencia por lo que no incrementa su capacidad resistente, y aproximadamente en ese mismo rango de deformaciones el hormigón empieza su proceso de colapso por lo que su capacidad se reduce continuamente cada vez que se incrementan las deformaciones. A pesar de que el acero podría continuar deformándose, al colapsar el hormigón, físicamente es imposible que el acero continúe resistiendo carga alguna, pues el hormigón armado ya ha sido destruido.

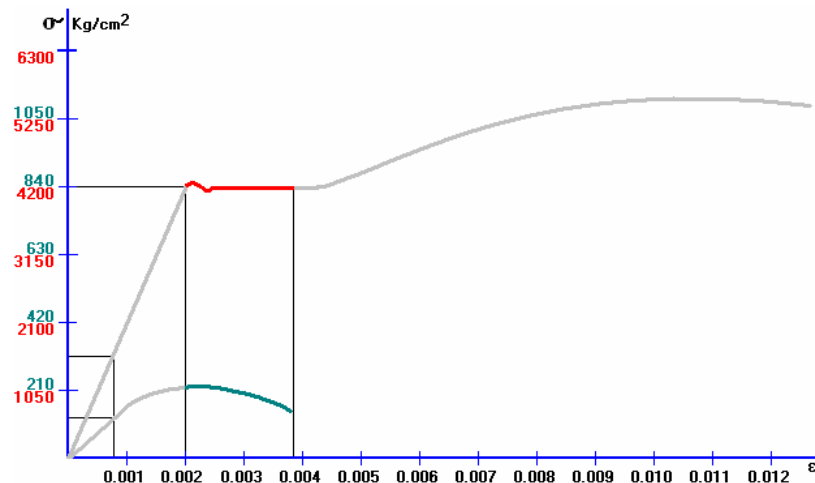


Figura 4.11: Esfuerzos en el hormigón y el acero, hasta la rotura del hormigón y dentro del rango plástico del acero.

Dado que la resistencia de la columna de hormigón armado es la suma de la resistencia del acero y del hormigón, el gráfico que describe la variación de capacidad de la columna es:

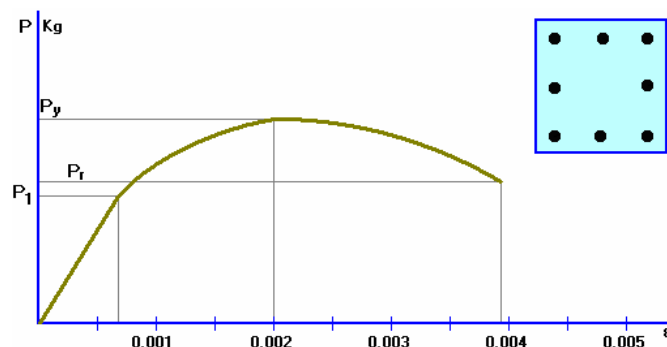


Figura 4.12: Comportamiento del hormigón armado a compresión, hasta la rotura del hormigón y dentro del rango plástico del acero.

Los códigos de diseño establecen deformaciones unitarias máximas que en el caso del ACI se fijan en 0.003 [ACI 10.2.3], lo que reduce el gráfico anterior al siguiente.

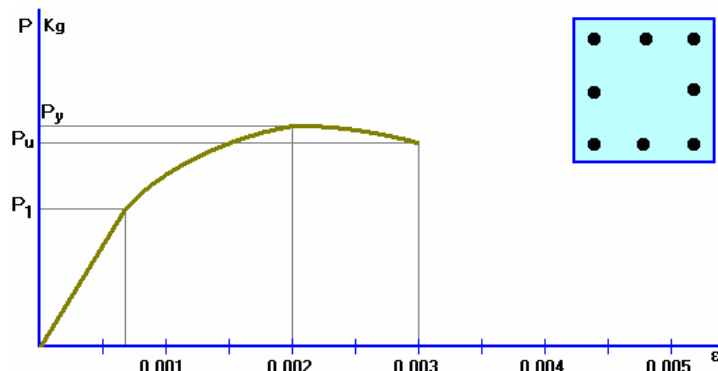


Figura 4.13: Comportamiento normalizado del hormigón armado a compresión.

Es importante notar que una vez que el acero entra en fluencia, la capacidad de carga de una columna sometida a fuerzas axiales de compresión no incrementa, de modo que la carga máxima que puede resistir es:

$$P_{\text{máx}} = A_c \cdot f'_c + A_s \cdot F_y$$

En el capítulo titulado “La Compresión Axial en los Elementos de Hormigón Armado” de esta publicación se describe con detalle el efecto de las cargas que actúan a largo plazo, que reducen la capacidad de carga del hormigón en aproximadamente un 15% lo que se traduce en la siguiente expresión, que se ajusta a lo dispuesto en [ACI 10.3.6.2]:

$$P_{\text{máx}} = 0.85 f'_c \cdot A_c + A_s \cdot F_y \quad \text{Ecuación (4.1)}$$

Así mismo, en el caso de hormigones altamente confinados la máxima deformación unitaria del hormigón se amplía considerablemente, los esfuerzos en el hormigón aumentan, y por consiguiente crece la máxima capacidad. Este aspecto será estudiado a detalle en el mismo capítulo al tratar columnas zunchadas y los detalles de armado de los nudos; en ambos casos se aprovecha la capacidad excedente del acero para confinar al hormigón.

4.5 COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN ARMADO ANTE CARGAS DE TRACCIÓN:

Se pueden dibujar en un único diagrama, las curvas esfuerzo – deformación del acero a compresión y tracción.

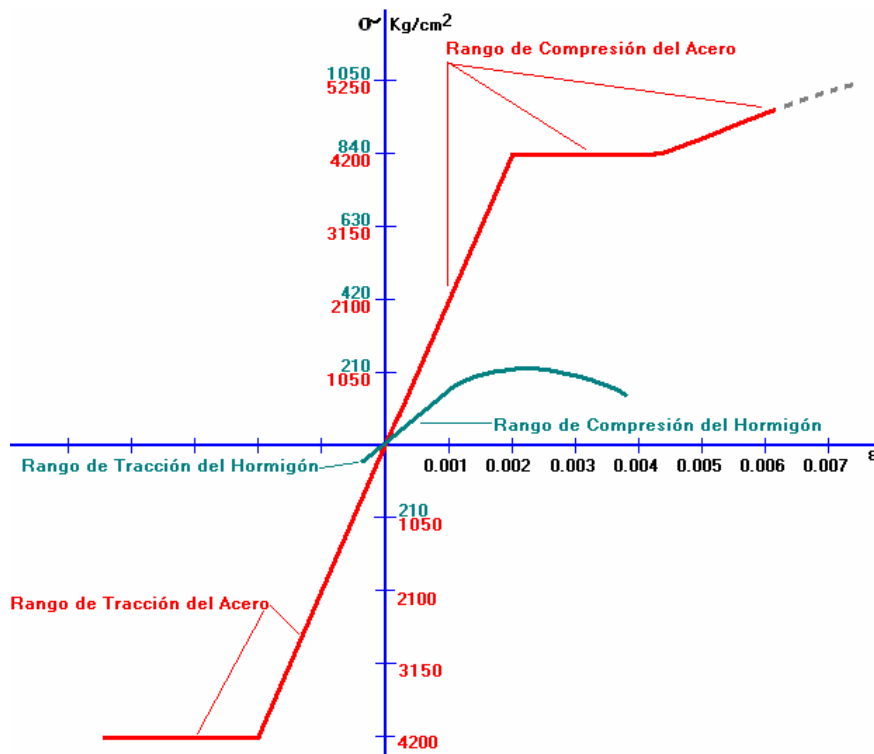


Figura 4.14: Diagrama único esfuerzo-deformación del acero y del hormigón.

Mientras el acero tiene un comportamiento similar a tracción y a compresión (cuando esta confinado), el hormigón tiene un comportamiento muy diferenciado bajo los 2 tipos de solicitaciones. El hormigón resiste a tracción el 10% o menos de su capacidad a la compresión, e inmediatamente se fisura y deja de soportar cargas [ACI 10.2.5].



Primer Rango de Deformaciones a Tracción (Hormigón Elástico y Acero Elástico):

En el diagrama previo, se puede observar que existe un pequeño rango de deformaciones para el que tanto el hormigón como el acero tienen un comportamiento lineal (los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones), y este hecho se produce hasta la capacidad a tracción del hormigón. Ese rango se extiende desde cero hasta aproximadamente una deformación unitaria de 0.0001 para el hormigón escogido.

Los módulos de elasticidad del acero y del hormigón serían similares a los correspondientes al rango elástico en compresión:

$$E_s = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$E_c = 15000\sqrt{f'_c} = 15000\sqrt{210} = 217371 \text{ Kg/cm}^2$$

Para ese rango, la carga exterior podría calcularse mediante la siguiente expresión:

$$P = A_c \cdot \sigma_c + A_s \cdot \sigma_s$$

Pero se tiene que:

$$\sigma = \varepsilon \cdot E$$

Reemplazando en la ecuación de la carga exterior se tiene:

$$P = A_c \cdot \varepsilon \cdot E_c + A_s \cdot \varepsilon \cdot E_s$$

Donde:

A_c : Sección transversal de hormigón (área total – área del acero)

A_s : Sección transversal de acero

ε : Deformación unitaria del hormigón que es igual a la del acero por compatibilidad

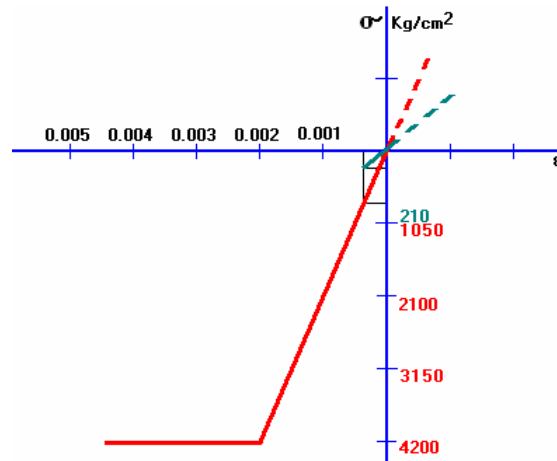


Figura 4.15: Esfuerzos en el hormigón y el acero a tracción, dentro del rango elástico del hormigón y del rango elástico del acero.

El siguiente gráfico representa el comportamiento lineal del hormigón armado, en el rango fijado de deformaciones, que proviene de añadir el comportamiento lineal del hormigón y el comportamiento lineal del acero.

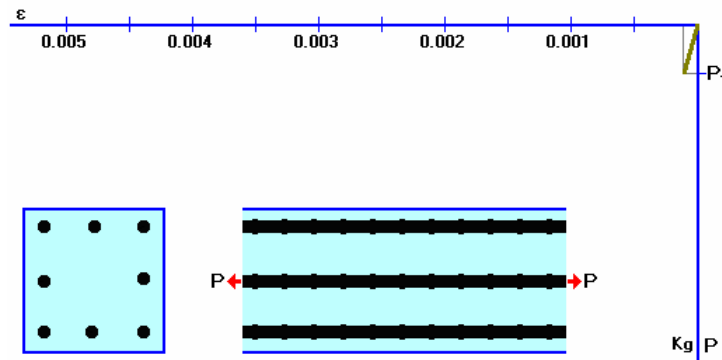


Figura 4.16: Comportamiento del hormigón armado a tracción en el rango elástico del hormigón y en el rango elástico del acero.

Comparado con el rango de comportamiento elástico del hormigón y del acero a la compresión, representa apenas un 10%.

Segundo Rango de Deformaciones a Tracción (Rotura del Hormigón y Acero Elástico):

Inmediatamente después de superar el esfuerzo de rotura del hormigón a la tracción se pierde toda colaboración del concreto.

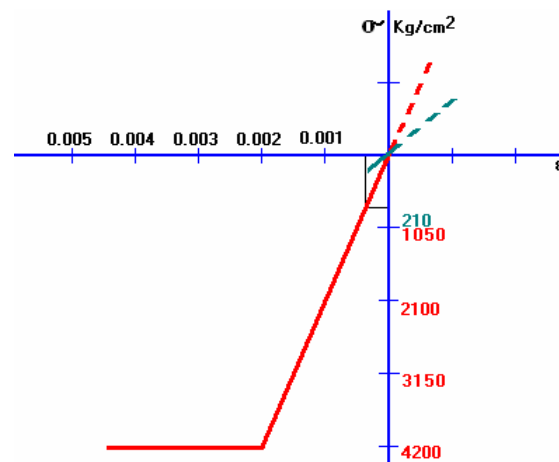


Figura 4.17: Esfuerzos en el hormigón y el acero a tracción en la rotura del hormigón.

El resultado sobre la carga axial del hormigón armado es una disminución violenta e instantánea de la capacidad de resistir solicitaciones.

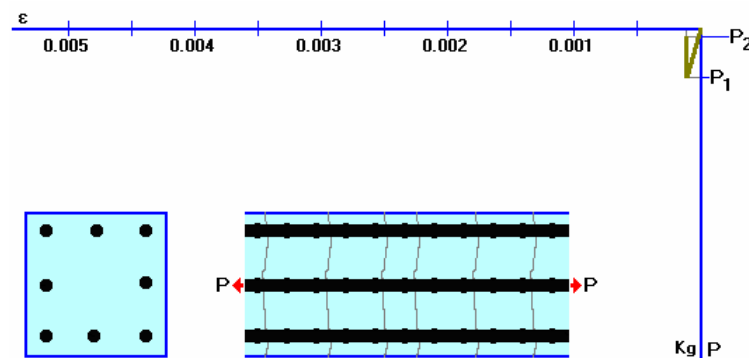


Figura 4.18: Comportamiento del hormigón armado a tracción hasta la rotura del hormigón.

La pérdida violenta de capacidad de la columna de hormigón requiere que exista suficiente armadura de acero para absorber la capacidad perdida en el hormigón, lo que está previsto en los códigos de diseño.

Tercer Rango de Deformaciones a Tracción (Hormigón Inhabilitado y Acero Elástico):

El hormigón ha perdido totalmente su capacidad de continuar absorbiendo cargas a tracción, por lo que es solamente el acero el que contribuye a la resistencia del hormigón armado. La continuidad de las solicitaciones de tensión a través del miembro está proporcionada por el acero de refuerzo, de modo que a partir de ese momento, el hormigón actúa como recubrimiento protector para el acero.

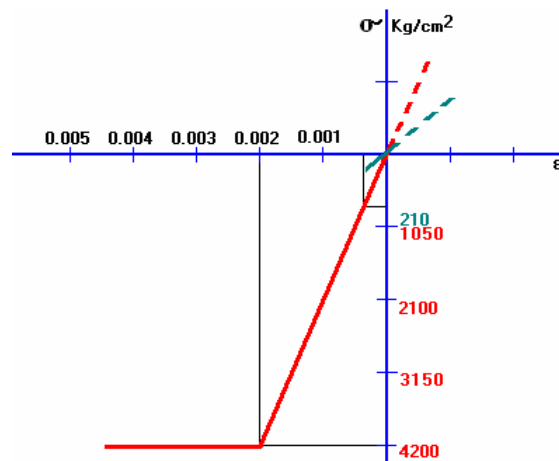


Figura 4.19: Esfuerzos en el hormigón y el acero a tracción hasta la fluencia del acero.

Dado que la resistencia de la columna de hormigón armado es la suma de la resistencia del acero y del hormigón, el gráfico que describe la variación de capacidad de la columna es:

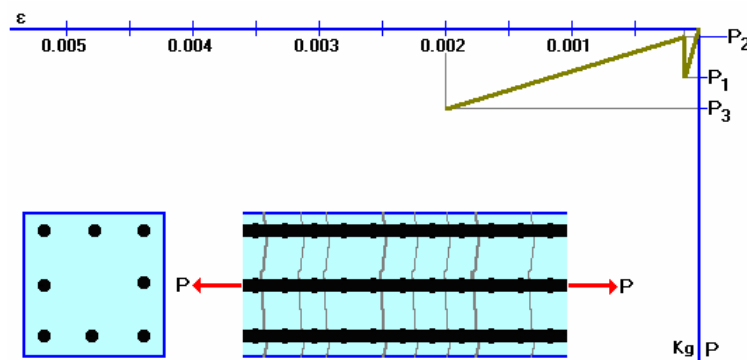


Figura 4.20: Comportamiento del hormigón armado a tracción hasta la fluencia del acero.

A pesar de que el acero se mantiene dentro de su rango de comportamiento elástico, debido a la desaparición de la cooperación del hormigón, la pendiente de la recta de capacidad disminuye considerablemente.

Cuarto Rango de Deformaciones a Tracción (Hormigón Inhabilitado y Acero Inelástico):

A partir de este punto, el acero entra en fluencia por lo que no incrementa su capacidad resistente, aunque podría continuar deformándose. Sin embargo, debido al papel que cumple el hormigón en la protección del acero ante el medio ambiente, las deformaciones unitarias en el acero no deben exceder el tradicional valor de 0.003

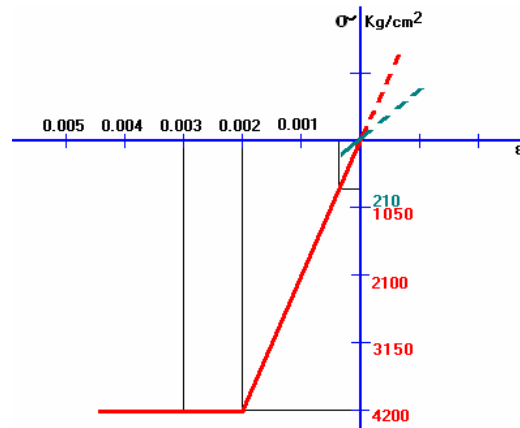


Figura 4.21: Esfuerzos en el hormigón y el acero a tracción hasta la deformación unitaria de 0.003

El gráfico que describe la variación de capacidad de la columna es:

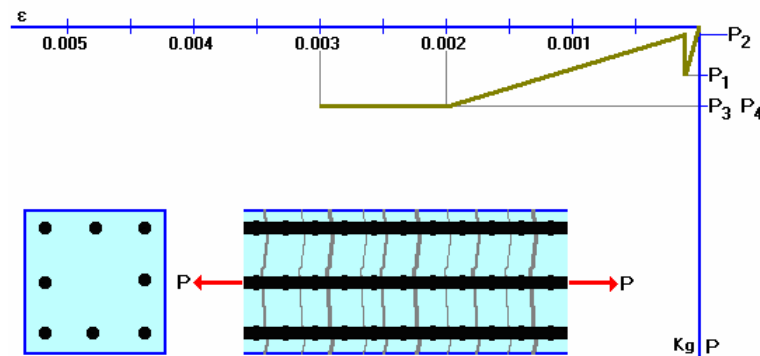


Figura 4.22: Comportamiento del hormigón armado a tracción hasta la deformación unitaria de 0.003

4.6 COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN ARMADO ANTE CARGAS DE FLEXIÓN:

Cuando los elementos están sometidos a flexión, parte de las fibras de hormigón armado están solicitadas a compresión y parte a esfuerzos de tracción, con una variación de deformaciones unitarias y de esfuerzos, por lo que los criterios esgrimidos en los dos numerales previos deben ser tomados en consideración simultáneamente.

El estudio del comportamiento del hormigón armado sometido a flexión debe ser analizado por fases, en vista de la gran diferencia de comportamiento del hormigón a solicitaciones de tracción y a solicitaciones de compresión.

Para el efecto se tomará como referencia una viga con armadura de tracción, cuyas cargas exteriores incrementan progresivamente de modo los momentos flectores crezcan gradualmente, y que las deformaciones en las zonas de tracción y compresión también lo hagan.

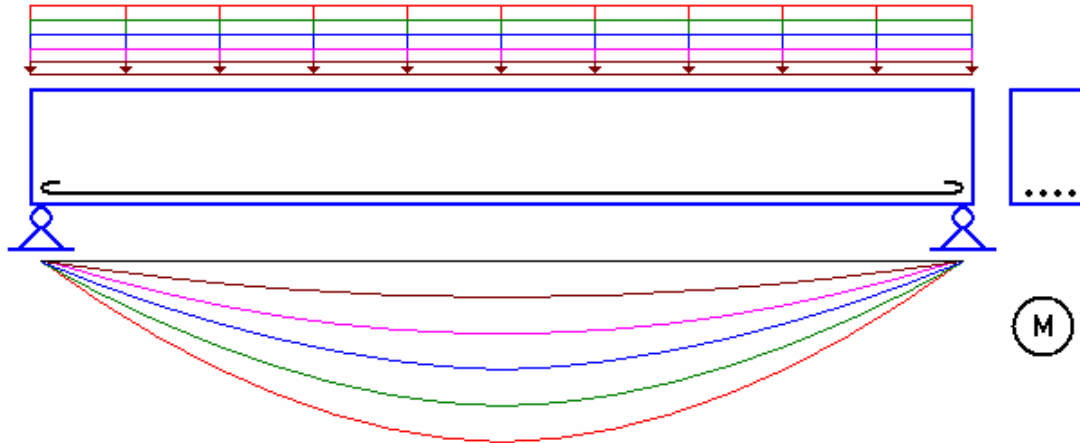


Figura 4.23: Viga simplemente apoyada bajo cargas uniformemente distribuidas crecientes.

Primer Rango de Deformaciones (Hormigón Elástico a Compresión, Hormigón Elástico a Tracción y Acero Elástico a Tracción):

Dos consideraciones deben incorporarse en este rango, que corresponde a la primera etapa de carga progresiva:

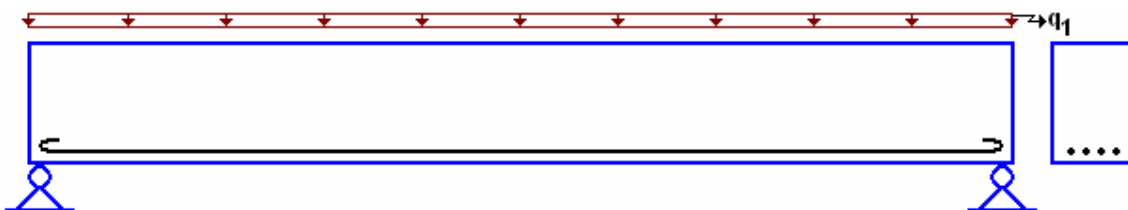


Figura 4.24: Viga simplemente apoyada bajo carga uniformemente distribuida antes de la fisuración del hormigón a tracción.

En primer lugar, debido a la presencia de acero en la zona traccionada, el eje neutro se desplaza ligeramente desde el centro de gravedad de la sección de hormigón hacia la zona en que está el acero de refuerzo (hacia abajo en el ejemplo).

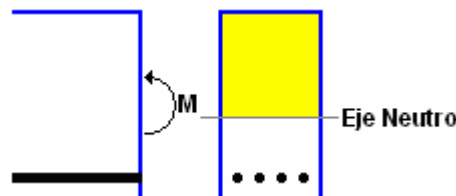


Figura 4.25: Posición de eje neutro y zona comprimida del hormigón previo a la fisuración del hormigón a tracción.

En segundo lugar, las deformaciones transversales tienen una variación lineal desde la fibra más comprimida hasta la fibra más traccionada, por el Principio de Navier-Bernoulli. Bajo esta hipótesis de comportamiento, las deformaciones unitarias máximas no pueden superar, en la zona de tracción, la deformación que produce la rotura del hormigón (aproximadamente 0.0001 para los hormigones de uso más frecuente).

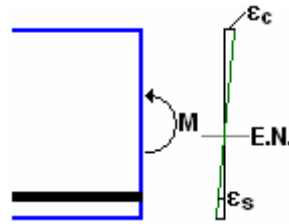


Figura 4.26: Diagrama de deformaciones transversales unitarias previo a la fisuración del hormigón a tracción.

Como resultado de todo lo anterior, las rotaciones (ϕ) que permiten las deformaciones unitarias internas y las deformaciones exteriores (δ) en la viga, son proporcionales a los momentos flectores (M) y a las solicitaciones externas (q) que generan esos momentos flectores.

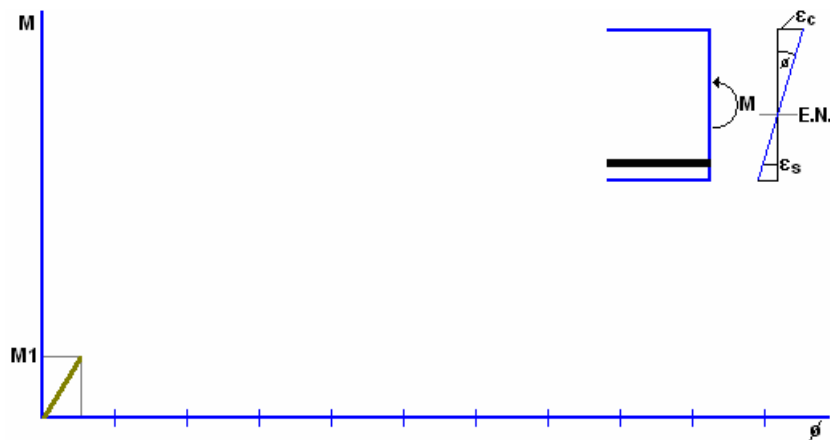


Figura 4.27: Diagrama momento-curvatura previo a la fisuración del hormigón a tracción.

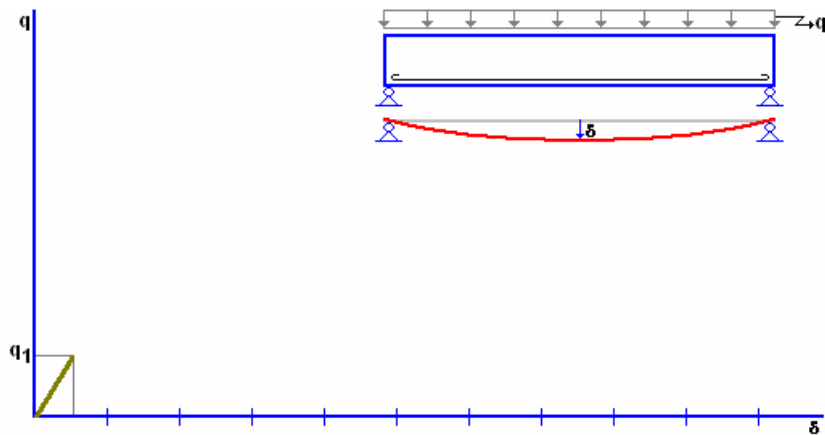


Figura 4.28: Diagrama carga-desplazamiento previo a la fisuración del hormigón a tracción.

Este tipo de comportamiento se mantiene hasta que el hormigón a tracción se fisura por haber superado su capacidad resistente, instante en que se produce un debilitamiento momentáneo de la sección, que requiere redistribución de esfuerzos.

Segundo Rango de Deformaciones (Hormigón Elástico a Compresión, Hormigón Fisurado a Tracción y Acero Elástico a Tracción):

Una vez fisurado el hormigón por tracción en una sección específica, si sostenemos momentáneamente las deformaciones y los esfuerzos en el acero, el eje neutro asciende instantáneamente pues el hormigón requiere equilibrar solamente la tensión del acero (ya no existe tracción en el hormigón que deba ser equilibrada con el propio hormigón en el extremo opuesto), mediante compresiones.

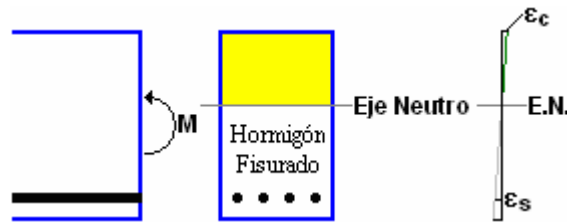


Figura 4.29: Posición de eje neutro y zona comprimida del hormigón bajo carga de fisuración del hormigón.

La fisuración del hormigón es violenta, y el material pierde toda capacidad a tracción pues las fisuras se propagan hasta llegar a la zona comprimida, donde se detienen. Instantáneamente se reduce la magnitud del momento flector (M) que puede soportar la sección, para el nivel de esfuerzos definido en el acero, pues una parte de la sección (el hormigón traccionado) ya no es capaz de resistir ningún esfuerzo.

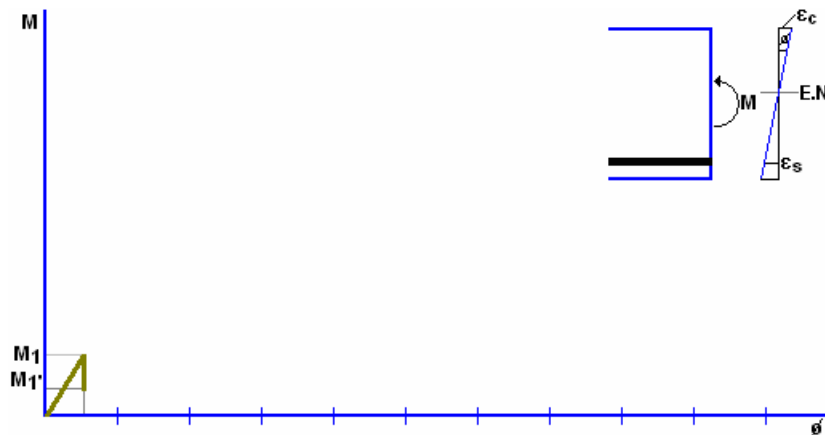


Figura 4.30: Diagrama momento-curvatura hasta carga de fisuración del hormigón traccionado.

El estado momentáneo en que se encuentra la viga ante las cargas exteriores es desequilibrado, en las secciones fisuradas, pues dichas cargas no disminuyen sino que permanecen presentes, mientras que el momento flector resistente ha decrecido, razón por la que, si el elemento estructural tiene la suficiente cantidad de acero de refuerzo [ACI 10.5.1], continuará deformándose hasta incrementar sus esfuerzos internos y resistir a las sollicitaciones externas (cargas) e internas (momentos flectores), prescindiendo del hormigón fisurado por tracción.

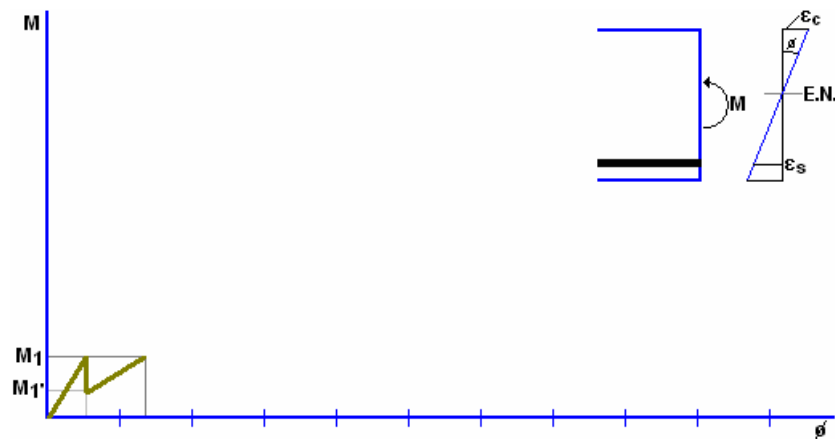


Figura 4.31: Diagrama momento-curvatura luego de la redistribución de esfuerzos por falla a tracción del hormigón.

La deformación en las secciones fisuradas se produce sobre una recta que pasa por el origen, pero tiene una pendiente diferente (menor a la pendiente del material no fisurado). La razón de este cambio de comportamiento es que el hormigón fisurado deja de colaborar con la inercia de la sección transversal.

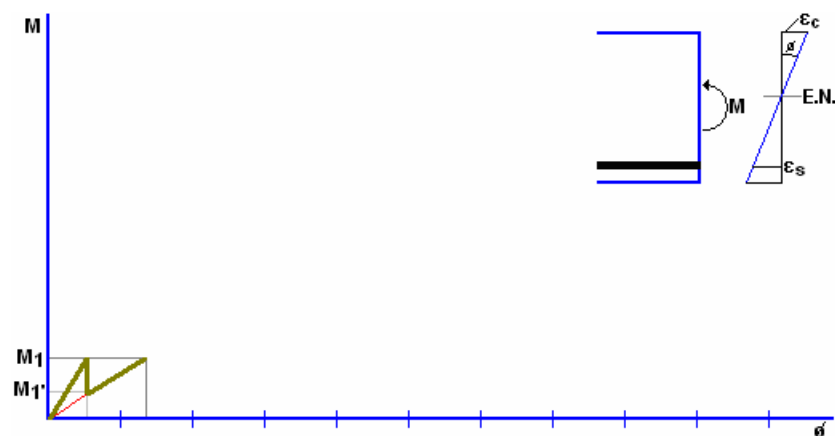


Figura 4.32: Diagrama momento-curvatura corregido por fisuración del hormigón a tracción.

Los códigos de diseño establecen la necesidad de un armado mínimo, de modo que el acero pueda compensar al hormigón que ha dejado de trabajar a tracción, para evitar la rotura explosiva de los elementos de hormigón armado sometidos a flexión.

A partir de este punto, con los incrementos de carga, el hormigón en las secciones fisuradas continúa comportándose linealmente hasta un esfuerzo aproximadamente de $0.70 f'c$ para los hormigones de uso más frecuente (deformaciones unitarias inferiores a 0.0007), momento en el que deja su rango elástico e ingresa progresivamente en su rango inelástico, soportando linealmente las nuevas cargas.

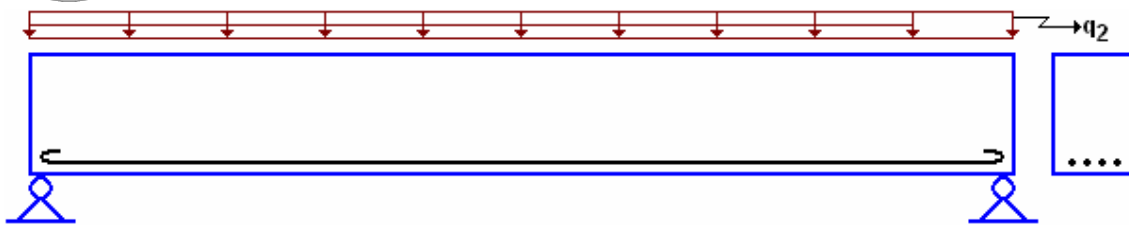


Figura 4.33: *Viga simplemente apoyada bajo carga uniformemente distribuida hasta el límite de comportamiento elástico del hormigón a compresión.*

Mientras el hormigón se mantiene en el rango elástico, las deformaciones locales (rotaciones de las secciones para producir las deformaciones unitarias correspondientes) continúan comportándose linealmente, con la nueva pendiente.

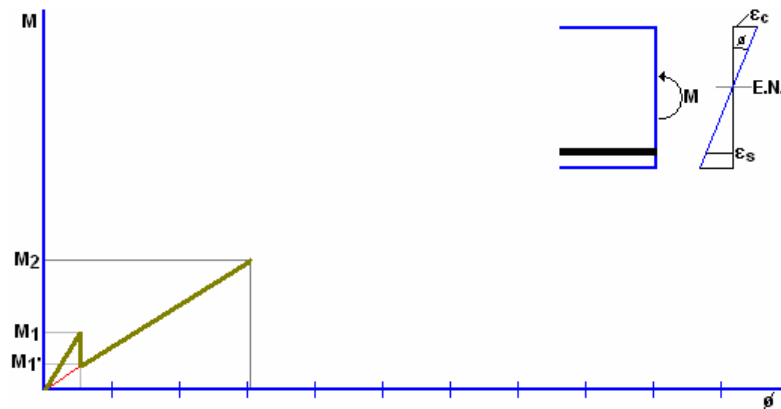


Figura 4.34: *Diagrama momento-curvatura hasta el límite de comportamiento elástico del hormigón a compresión.*

Las deformaciones externas no presentan ese salto abrupto del diagrama de solicitaciones-deformaciones previo, pues son el resultado de integrar el comportamiento de todas las secciones transversales de las vigas, y la aparición de estas secciones de comportamiento diferente es progresiva. En este rango las deformaciones externas se vuelven ligeramente no lineales debido a que poco a poco se van ampliando las zonas del elemento estructural en las que el hormigón de tracción se ha fisurado.

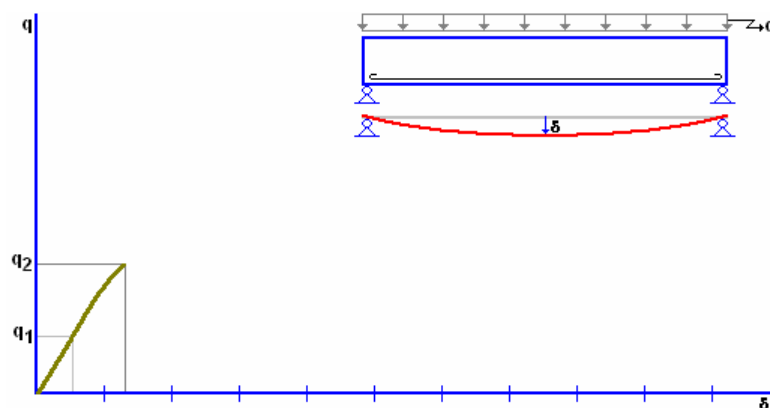


Figura 4.35: *Diagrama carga-desplazamiento hasta el comportamiento elástico a compresión del hormigón, en la zona de máximo momento.*

Tercer Rango de Deformaciones (Hormigón Inelástico a Compresión, Hormigón Fisurado a Tracción y Acero Elástico a Tracción):

Generalmente el hormigón a compresión es el primer material en ingresar en el rango inelástico ($\epsilon > 0.0007$ para un hormigón de 210 Kg/cm^2 y $\epsilon > 0.0008$ para un hormigón de 280 Kg/cm^2), mientras el acero a tracción aún se mantiene dentro del rango elástico ($\epsilon < 0.002$ para un acero con esfuerzo de fluencia de 4200 Kg/cm^2). Esto da lugar a que progresivamente el hormigón armado profundice más en su rango inelástico, en deformaciones internas y externas. En este rango tanto el acero a tracción como el hormigón a compresión incrementan sus esfuerzos conforme se incrementan las deformaciones.

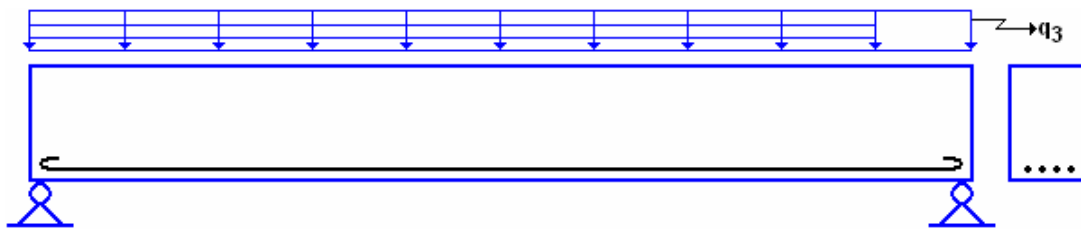


Figura 4.36: Viga simplemente apoyada bajo carga uniformemente distribuida hasta el límite de comportamiento elástico del acero a tracción.

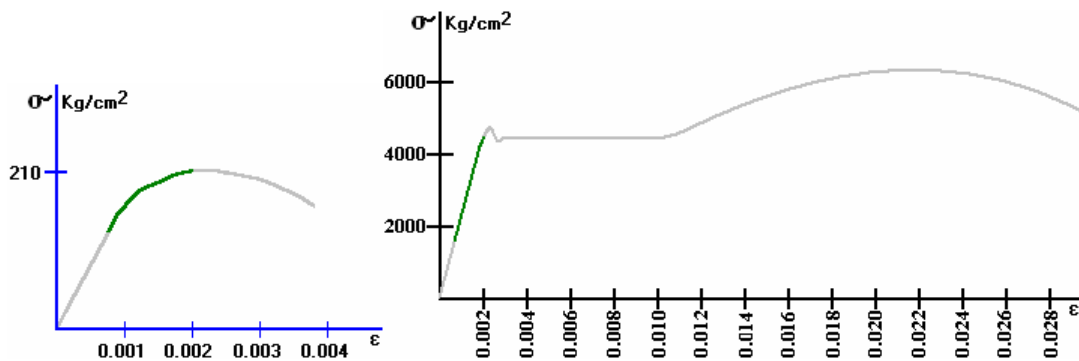


Figura 4.37: Curvas esfuerzo-deformación compatibles del hormigón y del acero hasta el límite de comportamiento elástico del acero.

Este comportamiento inelástico creciente es válido hasta que el acero alcance su esfuerzo de fluencia, lo que para aceros de 4200 Kg/cm^2 (disponibles en nuestro medio), aproximadamente coincide con el esfuerzo máximo en el hormigón ($\epsilon \approx 0.002$). Durante esta etapa el eje neutro se desplaza lentamente hacia la zona comprimida.

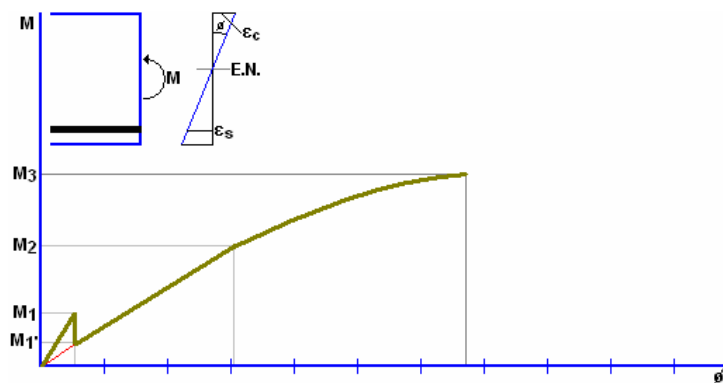


Figura 4.38: Diagrama momento-curvatura hasta el límite de comportamiento elástico del acero a tracción.

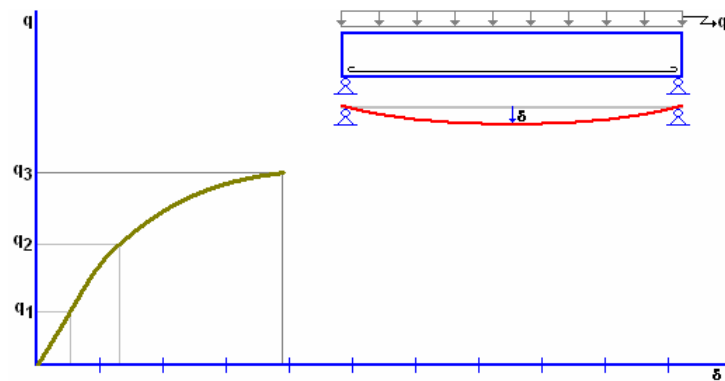


Figura 4.39: Diagrama carga-desplazamiento hasta el límite de comportamiento elástico del acero a tracción.

Cuarto Rango de Deformaciones (Hormigón Inelástico a Compresión, Hormigón Fisurado a Tracción y Acero en Fluencia):

En este rango la viga de hormigón armado se aproxima al colapso pues el hormigón ha ingresado en el rango de decrecimiento de esfuerzos ante mayores deformaciones, y el acero ha entrado en fluencia con capacidad resistente constante ($\epsilon > 0.002$).

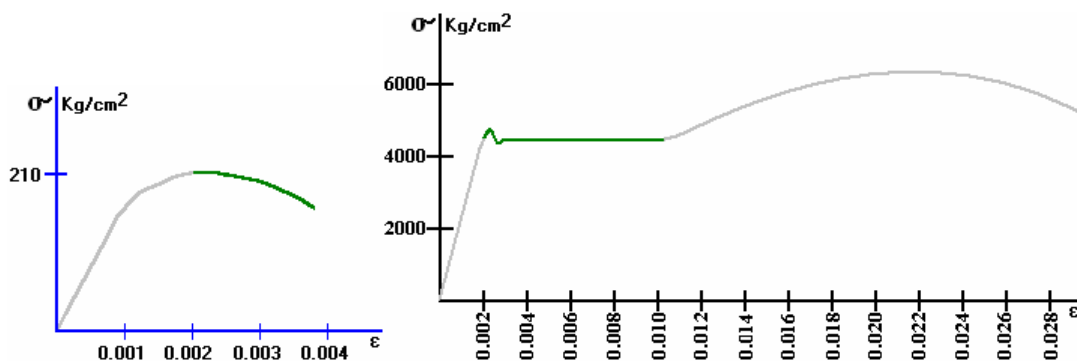


Figura 4.40: Curvas esfuerzo-deformación compatibles del hormigón y del acero hasta la falla de la sección.

La viga de hormigón armado progresivamente disminuye su capacidad hasta colapsar, a la vez que el eje neutro continúa ascendiendo progresivamente hacia la zona comprimida.

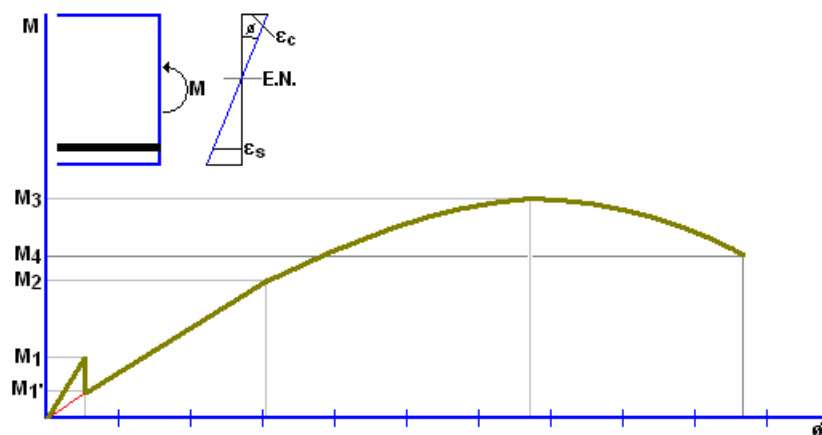


Figura 4.41: Diagrama momento-curvatura hasta la falla de la sección.

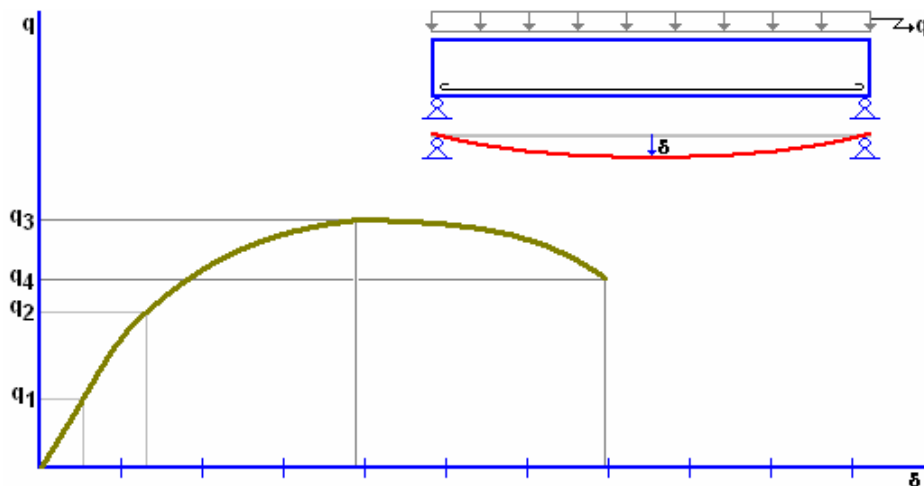


Figura 4.42: Diagrama carga-desplazamiento hasta la falla de la sección.

Debido a que el tramo en que resiste el hormigón a las tracciones es relativamente pequeño, se lo suele ignorar y directamente se asume que el hormigón sujeto a tracciones se fisura y no puede resistir tales esfuerzos.

4.7 RESUMEN DE FUNDAMENTOS DEL COMPORTAMIENTO DEL HORMIGÓN ARMADO:

- a. En el hormigón armado el hormigón y el acero trabajan integradamente.
- b. Las deformaciones en el acero son similares a las del hormigón que está alrededor del acero [ACI 10.2.1].
- c. El Principio de Navier – Bernoulli establece que “las secciones transversales planas antes de la deformación permanecen planas después de la deformación” [ACI 10.2.2].
- d. Las estructuras se deforman ante la presencia de solicitaciones pues deben resistir y equilibrar las cargas mediante esfuerzos internos y deformaciones externas.
- e. En el hormigón armado, el hormigón no resiste a la tracción sino el acero [ACI 10.2.5].
- f. El hormigón se comporta como material inelástico mientras el acero lo hace como material elasto – plástico.
- g. El hormigón armado se diseña para comportarse de manera dúctil ante la presencia de cargas que superen a las de servicio.
- h. El control de la formación de articulaciones plásticas en sitios seleccionados de la estructura aperticada es vital para lograr el comportamiento dúctil del hormigón armado.



REFERENCIAS:

- 4.1 Winter G. y Nilson A., *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, Editorial Reverté, S.A.
- 4.2 Park R. y Pauley T., *Estructuras de Concreto Reforzado*, Editorial LIMUSA S. A.
- 4.3 Nilson A., (1999), *Diseño de Estructuras de Concreto*, Mc Graw Hill.
- 4.4 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 4.5 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.

CAPÍTULO V

EMPALMES, ANCLAJES Y RECUBRIMIENTO DEL ACERO

5.1 ADHERENCIA ENTRE EL ACERO Y EL HORMIGÓN:

Para lograr el funcionamiento integrado del hormigón con el acero es necesario que se generen fuerzas de adherencia en la superficie de contacto de los 2 materiales.

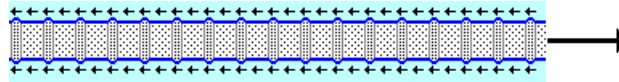


Figura 5.1: Fuerzas de adherencia entre el hormigón y el acero.

Son las fuerzas de adherencia el mecanismo básico de transferencia de las solicitaciones que actúan desde el hormigón hacia el acero de refuerzo, y desde el acero de refuerzo hacia el hormigón.

5.2 EMPALMES DE VARILLAS DE ACERO:

Mientras el hormigón, por su consistencia plástica en estado fresco, puede tener las dimensiones continuas que el diseño estructural requiera, las dimensiones longitudinales comerciales de las barras de acero pueden ser insuficientes para cubrir las necesidades de los elementos estructurales. En dichos casos será necesario empalmar algunas varillas o algunos segmentos de varillas, colocados de manera continua, para asegurar el comportamiento de cada sección de los elementos estructurales [ACI 12.14.2.2].

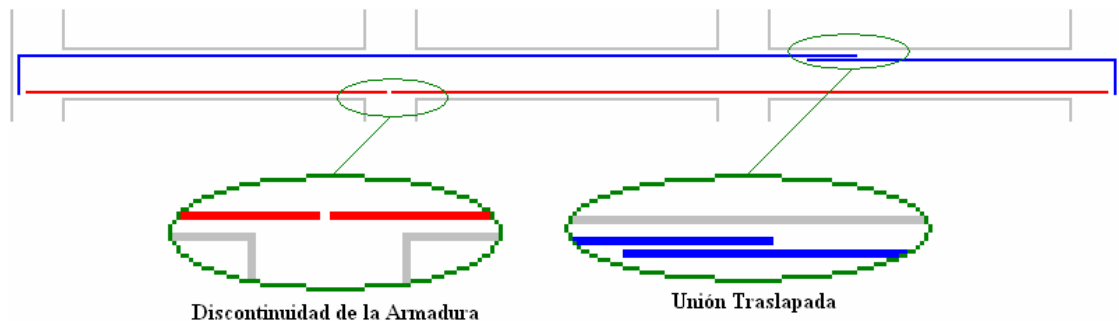


Figura 5.2: Discontinuidad y empalme por traslape.

La discontinuidad del acero de refuerzo puede atentar contra la capacidad resistente de la estructura, por lo que se requeriría de algún mecanismo de transferencia de los esfuerzos de una varilla hacia la varilla de continuidad geométrica. En caso de ser necesaria esa transferencia, se puede recurrir a varillas traslapadas, varillas soldadas o dispositivos mecánicos de continuidad.

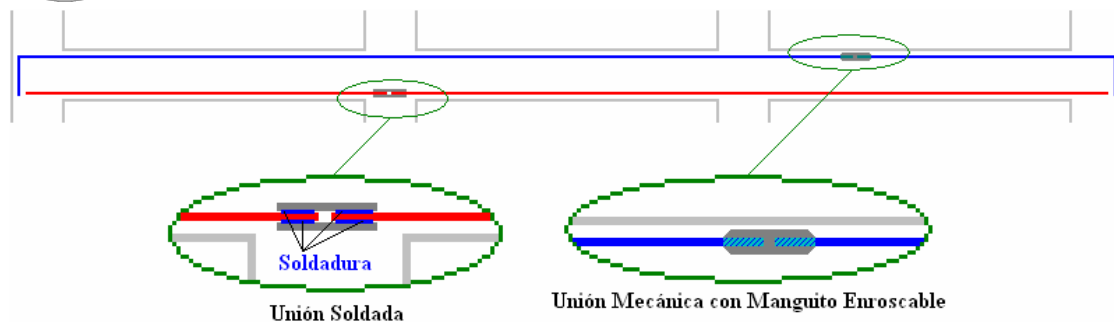


Figura 5.3: Empalme por soldadura y por unión mecánica.

El traslape de varillas es el mecanismo de empalme de mayor uso en nuestro medio. En principio las 2 varillas deben cruzarse una longitud apropiada para que el acero transmita esfuerzos al hormigón por adherencia, y este último los restituya a la otra varilla, sin acumular esfuerzos elevados de tracción en el hormigón, pues estos últimos provocarían una fisuración extensa, con sus consecuencias indeseables.

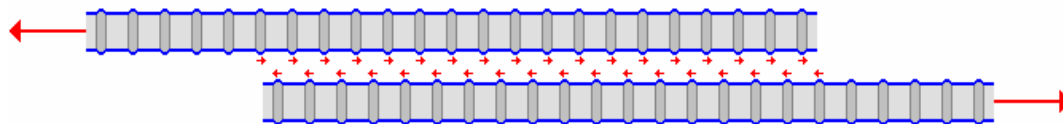


Figura 5.4: Esfuerzos de adherencia por traslape.

La distancia transversal entre las varillas que conforman el traslape debe ser pequeña para lograr el objetivo planteado. En el ACI y el CEC [ACI 12.14.2.3] se establece que dicha separación no debe superar un quinto de la longitud de traslape ni ser mayor a 15 cm.

Para la realización de uniones soldadas, por otra parte, se debe verificar que el tipo de acero constitutivo de las varillas admita este tipo de procesos (existen aceros que se vuelven frágiles luego de un proceso de soldado, y existen otros tipos de aceros cuyas características mecánicas no se ven afectadas con la soldadura), y se deberá realizar un diseño y control de calidad de las soldaduras. Generalmente se utilizan pedazos del mismo diámetro de varilla que se sueldan, en el extremo coincidente de las 2 varillas para lograr la continuidad [ACI 12.14.3].

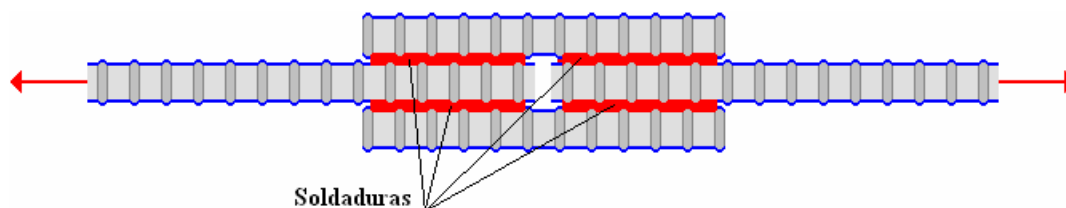


Figura 5.5: Soldadura de varillas.

Los empalmes soldados deben desarrollar al menos un 25% más que el esfuerzo de fluencia de las barras y deberán cumplir con las especificaciones del Structural Welding Code – Reinforcing Steel [ANSI/AWS D1.4].

Las uniones mecánicas de manguitos enroscables, por último, son muy utilizadas en países del primer mundo, pero prácticamente no se los emplea en nuestro país por su costo elevado. Por tener rosca interior en los 2 extremos que deben unirse, requieren que las varillas a integrar sean roscadas en los extremos de unión, lo que se lo puede hacer en obra o se puede adquirir en fábrica [ACI 12.14.3].

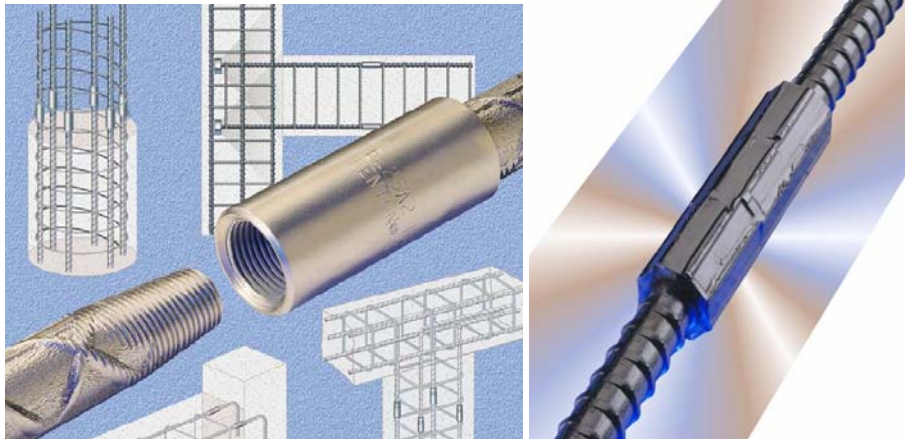


Figura 5.6: Manguitos roscables y de agarre para unión mecánica de varillas.

5.3 ANCLAJES:

A partir del sitio en que la barra de acero alcanza su esfuerzo máximo, se debe desarrollar un mecanismo de anclaje en el hormigón para asegurar su funcionamiento adecuado [ACI 12.1]. Las alternativas utilizadas son:

- Anclaje por desarrollo de la longitud de la varilla dentro del hormigón.
- Ganchos de anclaje dentro del hormigón en el extremo de la varilla
- Anclaje mecánico de la varilla a través de dispositivos especiales.

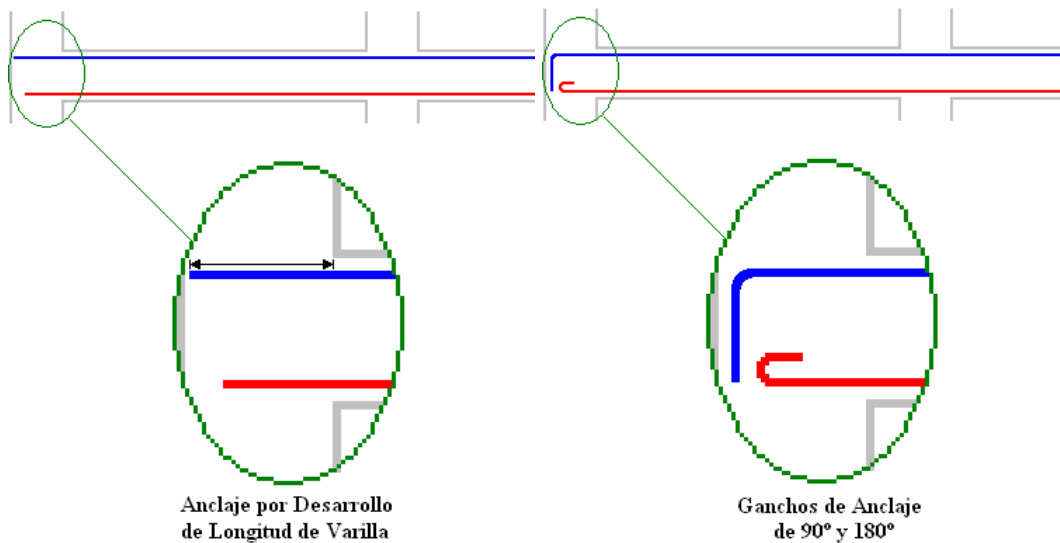


Figura 5.7: Anclajes por longitud de desarrollo y por ganchos doblados.

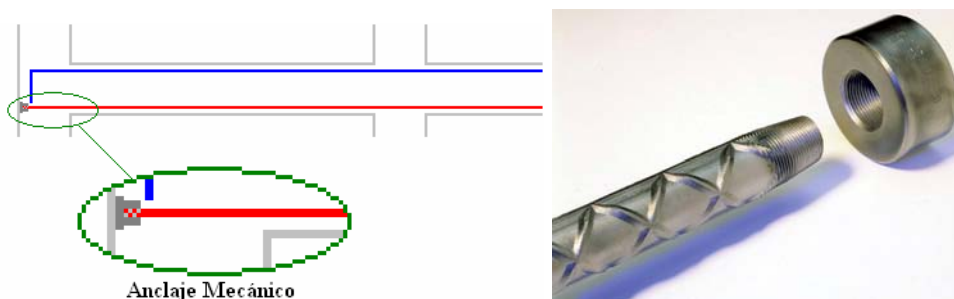


Figura 5.8: Anclajes mecánicos.



Los códigos permiten combinar técnicamente varias de las alternativas de anclaje antes mencionadas.

El desarrollo del anclaje se requiere en las 2 direcciones, aunque generalmente el propio detallamiento del refuerzo ya impone el cumplimiento en la una dirección (en los dibujos anteriores, el anclaje en la dirección del centro de la viga para el acero superior se cumple automáticamente).

5.4 LONGITUD DE DESARROLLO:

a. Definición:

Es la longitud que se requiere embeber a una varilla de acero dentro del hormigón, para alcanzar los esfuerzos especificados en el diseño (generalmente F_y).

b. Factores que Influyen en la Longitud de Desarrollo:

Los siguientes factores principales afectan directamente a la longitud de desarrollo de las varillas de acero en el hormigón armado:

- **Esfuerzo de Fluencia:** Mientras mayor sea el esfuerzo de fluencia, se requerirá proporcionalmente una mayor longitud de desarrollo.
- **Sección Transversal:** Cuanto mayor sea la sección transversal de la varilla, desarrollará una mayor fuerza, y se necesitará proporcionalmente una mayor longitud de desarrollo.
- **Perímetro de la Varilla:** Mientras mayor sea el perímetro de la varilla, existirá una mayor superficie de hormigón en la que se desarrolle adherencia, por lo que se requerirá proporcionalidad inversa con la longitud de desarrollo.
- **Resistencia del Hormigón:** Cuanto mayor sea la resistencia a tracción del hormigón se podrán desarrollar esfuerzos más altos de adherencia, por lo que existirá proporcionalidad inversa con la longitud de desarrollo.

En consideración a los criterios expuestos un primer tipo de fórmula para el cálculo de la longitud de desarrollo, que incluye todos los factores, sería:

$$L_d = \alpha \cdot \frac{F_y \cdot A_b}{P_b \cdot f_t}$$

Donde:

- L_d : longitud de desarrollo
- α : coeficiente de proporcionalidad
- F_y : esfuerzo de fluencia del acero
- A_b : área de una varilla
- P_b : perímetro de la varilla
- f_t : resistencia a la tracción del hormigón

Dado que la resistencia a la tracción del hormigón es proporcional a la raíz cuadrada de su resistencia a la compresión, se tendría la siguiente modificación:



$$L_d = \alpha_1 \cdot \frac{F_y \cdot A_b}{P_b \cdot \sqrt{f'c}}$$

Ecuación tipo 1

Por otro lado, mientras el área es proporcional al cuadrado del diámetro de la varilla, el perímetro es proporcional al diámetro.

$$L_d = \alpha_1 \cdot \frac{F_y \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot d_b^2}{\pi \cdot d_b \cdot \sqrt{f'c}}$$

Que simplificado queda:

$$L_d = \alpha_2 \cdot \frac{F_y \cdot d_b}{\sqrt{f'c}}$$

Ecuación tipo 2

Donde:

d_b : diámetro de la varilla

Los 2 tipos de ecuaciones generalmente gobiernan la descripción de la longitud de desarrollo del acero en los códigos de diseño.

c. Longitud de Desarrollo del Acero a Tracción:

La longitud básica de desarrollo L_d para barras y alambres con resaltes, en tracción [ACI 12.2.1 y 12.2.2], debe calcularse con las siguientes expresiones, pero en ningún caso podrá ser menor que 30 cm.

- Para varillas de 36 mm de diámetro y menores:

$$L_d = \frac{0.0632 A_b F_y}{\sqrt{f'c}} \quad \text{Ecuación (5.1)}$$

pero no menor que:

$$L_d = 0.006 d_b \cdot F_y \quad \text{Ecuación (5.2)}$$

- Para varillas de 44 mm de diámetro:

$$L_d = \frac{0.79 F_y}{\sqrt{f'c}} \quad \text{Ecuación (5.3)}$$

- Para varillas de 55 mm de diámetro:

$$L_d = \frac{1.106 F_y}{\sqrt{f'c}} \quad \text{Ecuación (5.4)}$$

- Para alambre con resaltes:

$$L_d = \frac{0.119 d_b \cdot F_y}{\sqrt{f'c}} \quad \text{Ecuación (5.5)}$$

Donde:

L_d : longitud de desarrollo en cm
 A_b : área de una varilla en cm^2
 d_b : diámetro de la varilla en cm
 F_y : esfuerzo de fluencia en Kg/cm^2



$f'c$: resistencia a la compresión del hormigón en Kg/cm^2

Tabla 5.1: Longitud de Desarrollo Básica en Varillas a Tracción.

Diámetro (cm)	Fy (Kg/cm ²)	f'c (Kg/cm ²)	L _d (cm)	Criterio gobernante
0,80	4200	210	30	L _{mín}
1,00	4200	210	30	L _{mín}
1,20	4200	210	30	L _{mín}
1,40	4200	210	35	ecu. 5.2
1,60	4200	210	40	ecu. 5.2
1,80	4200	210	47	ecu. 5.1
2,00	4200	210	58	ecu. 5.1
2,20	4200	210	70	ecu. 5.1
2,50	4200	210	90	ecu. 5.1
2,80	4200	210	113	ecu. 5.1
3,20	4200	210	147	ecu. 5.1
3,50	4200	210	176	ecu. 5.1
4,40	4200	210	229	ecu. 5.3
5,50	4200	210	321	ecu. 5.4

La longitud básica de desarrollo calculada previamente debe multiplicarse por los siguientes factores [ACI 12.2.3], cuando sean pertinentes:

- Cuando el refuerzo de lecho superior se coloca de tal manera que existe al menos un espesor de 30 cm de hormigón fresco recubriéndolo por debajo:
 $\psi = 1.4$
- Cuando el refuerzo tiene un esfuerzo de fluencia **Fy** mayor que 4200 Kg/cm^2 :
$$\psi = 2 - \frac{4200}{F_y}$$

La longitud básica de desarrollo afectada por los factores previos puede ser reducida, cuando sea pertinente, por los siguientes factores [ACI 12.2.4]:

- Cuando el refuerzo se ubica espaciado por lo menos 15 cm centro a centro y existen por lo menos 7 cm desde la cara del elemento estructural a la varilla externa, medido en la dirección del espaciamiento:
 $\psi = 0.8$
- Donde exista refuerzo en exceso con respecto al requerido en el diseño:
$$\psi = \frac{A_{\text{requerida}}}{A_{\text{proporcionada}}}$$
- Cuando el refuerzo esté confinado por armadura en espiral que tenga un diámetro no menor a 8 mm, y un paso no mayor a 10 cm:
 $\psi = 0.75$

Una vez calculada la longitud de desarrollo, afectada por todos los factores previos, no puede ser menor que 30 cm [ACI 12.2.1], excepto en el cálculo de traslapes clase A, B y C.



d. Longitud de Desarrollo del Acero a Compresión:

La longitud básica de desarrollo L_d para barras corrugadas en compresión [ACI 12.3.1] debe calcularse como la mayor de las siguientes expresiones:

$$L_d = \frac{0.079d_b \cdot F_y}{\sqrt{f'_c}} \quad \text{Ecuación (5.6)}$$

$$L_d = 0.004d_b \cdot F_y \quad \text{Ecuación (5.7)}$$

$$L_d = 20 \text{ cm} \quad \text{Ecuación (5.8)}$$

Tabla 5.2: Longitud de Desarrollo Básica en Varillas a Compresión.

Diámetro (cm)	F_y (Kg/cm ²)	f'_c (Kg/cm ²)	L_d (cm)	Criterio gobernante
0,80	4200	210	20	$L_{\min}$
1,00	4200	210	23	ecu. 5.6
1,20	4200	210	27	ecu. 5.6
1,40	4200	210	32	ecu. 5.6
1,60	4200	210	37	ecu. 5.6
1,80	4200	210	41	ecu. 5.6
2,00	4200	210	46	ecu. 5.6
2,20	4200	210	50	ecu. 5.6
2,50	4200	210	57	ecu. 5.6
2,80	4200	210	64	ecu. 5.6
3,20	4200	210	73	ecu. 5.6
3,50	4200	210	80	ecu. 5.6
4,40	4200	210	101	ecu. 5.6
5,50	4200	210	126	ecu. 5.6

La longitud básica de desarrollo puede ser reducida por los siguientes factores [ACI 12.3.3]:

- Donde exista refuerzo en exceso con respecto al requerido en el diseño:

$$\psi = \frac{A_{\text{requerida}}}{A_{\text{proporcionada}}}$$
- Cuando el refuerzo esté confinado por armadura en espiral que tenga un diámetro no menor a 8 mm, y un paso no mayor a 10 cm:

$$\psi = 0.75$$

e. Longitud de Desarrollo en Paquetes de Varillas:

La longitud de desarrollo de cada varilla a tracción o compresión, dentro de un paquete de varillas, debe ser aumentada en un 20% para paquetes de tres varillas, y en un 33% para paquetes de cuatro varillas [ACI 12.4]. Sin embargo, cuando se trate de paquetes de varillas, los traslapes deberán ser escalonados.



5.5 ESPECIFICACIONES PARA EMPALMES POR TRASLAPE:

a. Empalmes de Alambres y Varillas Corrugadas a Tracción:

El empalme por traslape mínimo a tracción deberá cumplir con los requisitos de empujes clases A, B o C, pero no puede tener una longitud menor a 30 cm [ACI 12.15.1].

Los empalmes clase A, B y C deben tener la siguiente longitud:

- Empalme Clase A: $L_e = 1.0 L_d$
- Empalme Clase B: $L_e = 1.3 L_d$
- Empalme Clase C: $L_e = 1.7 L_d$

Donde:

L_e : longitud del empalme por traslape

L_d : longitud de desarrollo a tracción afectada por todos los factores ψ

Los traslapes de alambres y varillas corrugadas sometidos a tracción deben cumplir con la siguiente tabla [ACI 12.15.2]:

Tabla 5.3: Traslapes a Tracción.

$\frac{A_{\text{proporcionada}}}{A_{\text{requerida}}}$	Porcentaje máximo de A_s empalmado dentro de la longitud de traslape requerida		
	50%	75%	100%
≥ 2	Clase A	Clase A	Clase B
< 2	Clase B	Clase C	Clase C

Los empalmes de tracción por traslape deben estar escalonados cada 60 cm de manera que desarrollen en cada sección por lo menos 2 veces la fuerza de tracción calculada [ACI 12.15.4.1].

b. Empalmes de Alambres y Varillas Corrugadas a Compresión:

La longitud mínima de un empalme a compresión por traslape será la longitud de desarrollo a compresión con sus respectivos factores ψ [ACI 12.16.1].

Para F_y mayor que 4200 Kg/cm² la longitud de empalme por traslape no podrá ser menor que las siguientes expresiones:

$L_e = 0.007 F_y \cdot d_b$	Ecuación (5.9)
$L_e = (0.013 F_y - 24) \cdot d_b$	Ecuación (5.10)
$L_e = 30 \text{ cm}$	Ecuación (5.11)

Donde:

L_e : longitud del empalme por traslape en cm

F_y : esfuerzo de fluencia del acero en Kg/cm²

d_b : diámetro de la varilla en cm

Cuando f'_c sea inferior a 210 Kg/cm², la longitud del empalme por traslape debe incrementarse en un tercio.

c. Requisitos Especiales de Empalmes de Varillas Corrugadas para Columnas:

- Cuando como producto de las cargas mayoradas, el esfuerzo en las barras de acero es de compresión, los empalmes deben cumplir con los requisitos de empalmes a compresión, del literal previo [ACI 12.17.2.1].
- Cuando como producto de las cargas mayoradas, el esfuerzo en las barras de acero es de tracción, pero no excede de $0.5 F_y$, los empalmes por traslape serán clase B si más de la mitad de las barras se empalman en cualquier sección, pero los empalmes podrán ser clase A si sólo la mitad o menos de las barras se empalman en cualquier sección. Los empalmes tomados alternadamente deberán escalonarse al menos una distancia L_d [ACI 12.17.2.2].
- Cuando el esfuerzo de tracción en las barras de acero traslapadas excede de $0.5 F_y$, los empalmes por traslape deben ser clase B [ACI 12.17.2.3].

5.6 ESPECIFICACIONES PARA GANCHOS ESTÁNDARES O NORMALIZADOS:

Los ganchos solamente se considerarán efectivos en varillas de tracción [ACI 12.1].

De acuerdo a [ACI 7.1], la expresión “gancho normalizado” tiene uno de los siguientes significados:

- Doble de 180° más una extensión de $4d_b$, pero no menos de 6 cm en el extremo libre de la varilla [ACI 7.1.1].

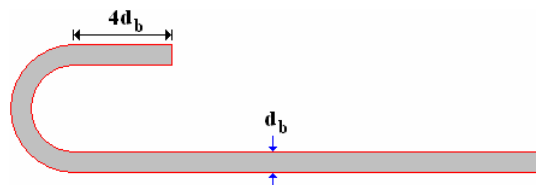


Figura 5.9: Dimensiones mínimas del gancho de 180° .

- Doble de 90° más una extensión de $12d_b$ en el extremo libre de la varilla [ACI 7.1.2].

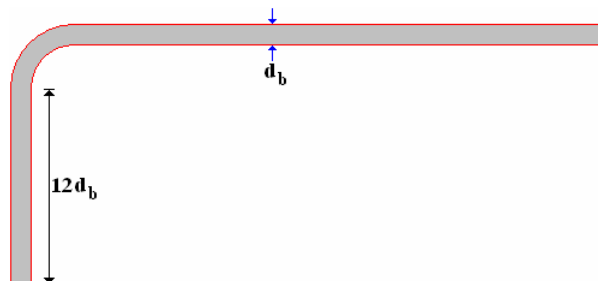


Figura 5.10: Dimensiones mínimas del doblez de 90° .

- Para estribos [ACI 7.1.3]:
 - o En varillas de 14 mm y menores, doblez de 90° más una extensión de $6d_b$ en el extremo libre de la varilla, pero no menor de 6.5 cm.

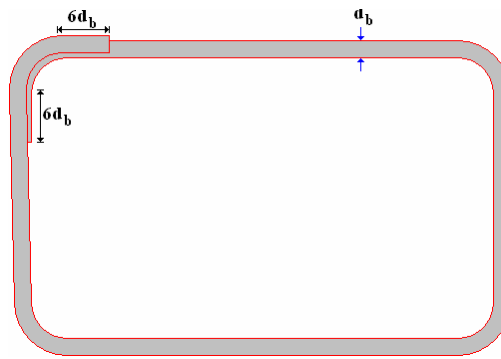


Figura 5.11: Dimensiones mínimas del doblez de 90° en estribos de hasta 14 mm de diámetro.

- o En varillas de 16 mm a 25 mm, doblez de 90° más una extensión de **12d_b** en el extremo libre de la varilla.

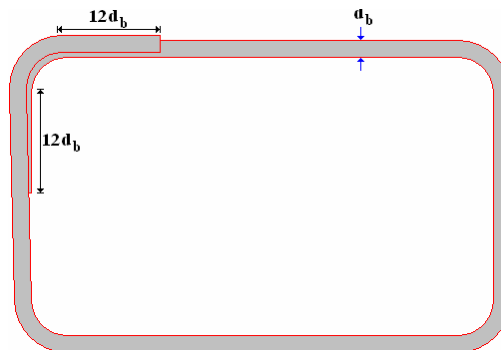


Figura 5.12: Dimensiones mínimas del doblez de 90° en estribos de 16 a 25 mm de diámetro.

- o En varillas de 25 mm y menores, doblez de 135° más una extensión de **6d_b** en el extremo libre de la varilla.

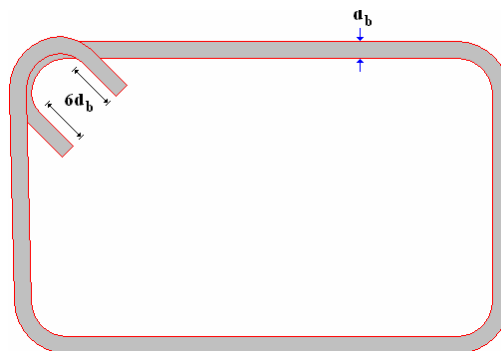


Figura 5.13: Dimensiones mínimas del doblez de 135° en estribos de hasta 25 mm de diámetro.

El diámetro interior de doblez de estribos y anillos con diámetro entre 8 mm y 16mm no debe ser menor de **6d_b** [ACI 7.2].

El diámetro de doblez de la cara interior de los estribos de más de 16 mm, deberá cumplir con la tabla 5.4.

Todas las otras varillas requeridas en las estructuras deberán cumplir con las especificaciones de la tabla 5.4.

Tabla 5.4: Diámetros mínimos de doblado.

Diámetro de la varilla	Diámetro mínimo de doblado
8 mm a 25 mm	6d _b
28 mm a 32 mm	8d _b
Mayor de 32 mm	10d _b

5.7 RECUBRIMIENTO DEL ACERO:

Con el objeto de que el acero pueda desarrollar los esfuerzos de adherencia con el hormigón que le rodea, y que además se encuentre adecuadamente protegido del medio ambiente, el CEC-2001 especifica los siguientes recubrimientos mínimos de hormigón para el acero [CEC 7.7].

Tabla 5.5: Recubrimiento mínimo del acero con hormigón no preesforzado fundido en la obra.

TIPO	RECUBRIMIENTO MÍNIMO, mm
Hormigón fundido en contacto con el suelo y permanentemente expuesto a él	70
Hormigón expuesto al suelo o a la acción del clima:	
➤ Varillas de 18 mm y mayores	50
➤ Varillas de 16 mm y menores	40
Hormigón no expuesto a la acción del clima ni en contacto con el suelo:	
➤ Losas, muros, nervaduras:	
o Varillas mayores a 36 mm	40
o Varillas de 36 mm y menores	20
➤ Vigas, columnas:	
o Refuerzo principal, anillos, estribos, espirales	40
o Cascarones y placas plegadas:	
▪ Varillas de 18 mm y mayores	20
▪ Varillas y alambre de 16 mm y menores	15

Tabla 5.6: Recubrimiento mínimo del acero con hormigón prefabricado (fabricado en condiciones de control en la planta).

TIPO	RECUBRIMIENTO MÍNIMO, mm
Hormigón expuesto al suelo o a la acción del clima	
➤ Tableros para muros:	
o Varillas mayores a 36 mm	40
o Varillas de 36 mm y menores	20
➤ Otros elementos:	
o Varillas mayores a 36 mm	50
o Varillas de 18 mm a 36 mm	40
o Varillas y alambres de 16 mm y menores	30
Hormigón no expuesto a la acción del clima ni en contacto con el suelo:	



➤ Losas, muros, nervaduras:	
o Varillas mayores a 36 mm	30
o Varillas de 36 mm y menores	15
➤ Vigas, columnas:	
o Refuerzo principal, anillos, estribos, espirales (diámetro no menor a 15 mm ni mayor a 40 mm)	10
o Cascarones y placas plegadas:	
▪ Varillas de 18 mm y mayores	15
▪ Varillas y alambre de 16 mm y menores	10

Tabla 5.7: Recubrimiento mínimo del acero con hormigón preesforzado.

TIPO	RECUBRIMIENTO MÍNIMO, mm
Hormigón fundido en contacto con el suelo y permanentemente expuesto a él	80
Hormigón expuesto al suelo o a la acción del clima:	
➤ Tableros para muros, losas y nervaduras	25
➤ Otros elementos	40
Hormigón no expuesto a la acción del clima ni en contacto con el suelo:	
➤ Losas, muros, nervaduras	20
➤ Vigas, columnas:	
o Refuerzo principal	40
o Anillos, estribos, espirales	25
o Cascarones y placas plegadas:	
▪ Varillas de 16 mm o menores	10
▪ Otro tipo de refuerzo	20

5.8 LÍMITES DEL ESPACIAMIENTO DEL REFUERZO:

Con el objeto de que el hormigón trabaje de manera integrada con el acero, las varillas deben tener la separación suficiente para que interactúen con el hormigón que las rodea a través de los esfuerzos de adherencia.

El CEC-2001 [CEC 7.6.1] especifica que la separación mínima entre barras paralelas de una capa no debe ser inferior al diámetro de la varilla ni a 2.5 cm.

REFERENCIAS:

- 5.1 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 5.2 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.

CAPÍTULO VI

FUNDAMENTOS PARA EL DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO

6.1 LA SEGURIDAD EN EL DISEÑO DE LAS ESTRUCTURAS:

Al diseñar una estructura se debe realizar una comparación entre la magnitud de las solicitaciones y la capacidad resistente. En principio, la capacidad resistente debe ser mayor en un cierto porcentaje que la magnitud de las solicitaciones, de modo que el trabajo de la estructura tenga un nivel apropiado de confiabilidad en cuanto al comportamiento, ante las cargas reales de diseño.

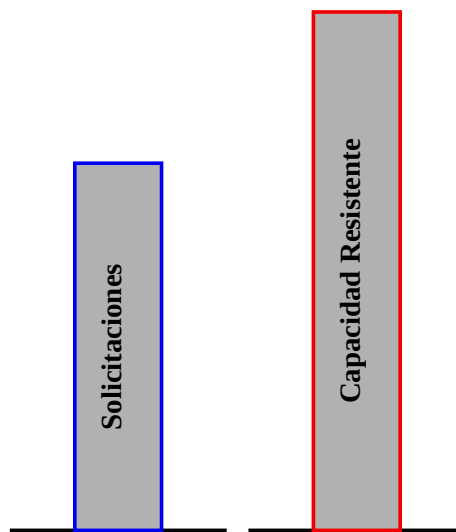


Figura 6.1: La capacidad resistente debe superar en cierta magnitud a las solicitaciones.

Esa diferencia entre las solicitaciones externas y la capacidad resistente interna es la que proporciona los diferentes niveles de seguridad a la estructura. Los estados de carga que actúan permanente o frecuentemente sobre la estructura (v.g.r. cargas gravitacionales) tendrán niveles de seguridad algo más altos que los estados de carga que ocurren muy ocasionalmente (v.g.r. sismos o vientos).

Existen 2 alternativas de modelos de diseño estructural que utilizan los códigos para lograr técnicamente el manejo de esa diferencia necesaria entre las solicitaciones y la capacidad resistente:

- Diseño por esfuerzos admisibles
- Diseño por capacidad resistente

a. Diseño por Esfuerzos Admisibles:

En el diseño por esfuerzos admisibles o diseño para cargas de servicio, la capacidad resistente de la estructura, del elemento estructural o de la sección específica de un elemento estructural (propriadamente el esfuerzo máximo del material que provoca la rotura o que genera grandes deformaciones) se divide para un factor de seguridad

aceptable para volverla comparable con la magnitud de las solicitaciones (comparable con los esfuerzos generados por las cargas de servicio).

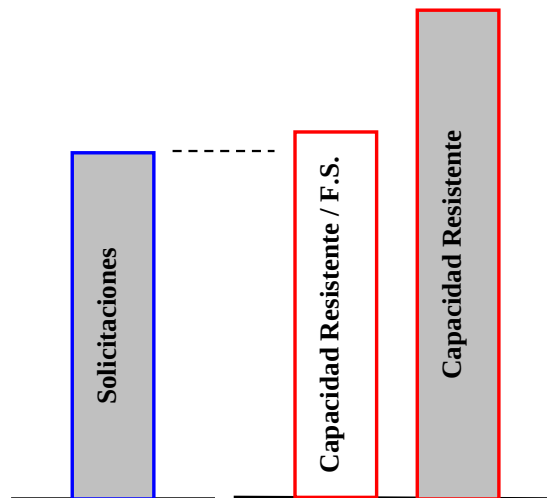


Figura 6.2: En diseño por esfuerzos admisible, la capacidad resistente dividida para un factor de seguridad no debe ser sobrepasada por las solicitaciones.

Se consigue un diseño apropiado cuando la magnitud de las Solicitaciones no supera a la Capacidad Resistente dividida para el Factor de Seguridad (F.S.).

Las estructuras de hormigón preesforzado y las de madera se suelen diseñar bajo este criterio.

b. Diseño por Capacidad Resistente:

En el diseño por capacidad resistente, las solicitaciones que actúan sobre la estructura se mayoran mediante factores apropiados para que las acciones exteriores sean comparables con la capacidad resistente de la estructura, del elemento estructural o de la sección específica de un elemento estructural.

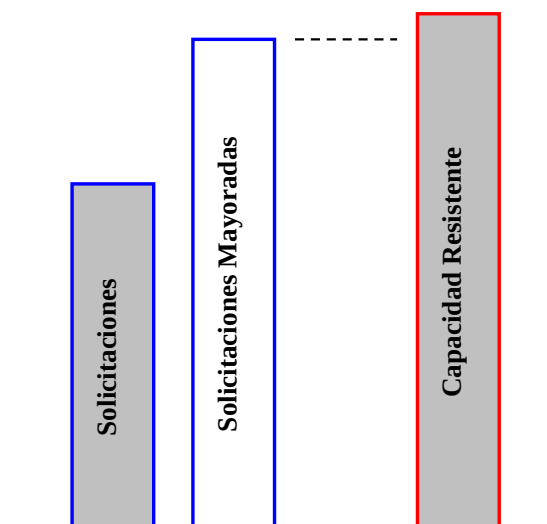


Figura 6.3: En diseño por capacidad resistente, la capacidad resistente no debe ser sobrepasada por las solicitaciones mayoradas.

Se consigue un diseño apropiado cuando la magnitud de las Solicitaciones Mayoradas no supera a la Capacidad Resistente.



Las estructuras de hormigón armado y de acero laminado en caliente, y los puentes se suelen diseñar bajo este criterio.

6.2 LAS CARGAS Y LAS COMBINACIONES DE CARGA PARA EL DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO:

Existen diversas cargas que actúan sobre las estructuras: cargas permanentes, cargas vivas, cargas sísmicas, empuje de suelos, etc. Sin embargo, durante el tiempo de vida de la estructura, las cargas rara vez actúan solas pues usualmente actúan combinadas.

Las combinaciones de carga afectadas por los factores de mayoración son la fuente para la obtención de las solicitaciones mayoradas que se requieren en el diseño por capacidad resistente de las estructuras de hormigón armado.

En nuestro medio se utiliza como referente al Código Ecuatoriano de la Construcción del año 2001 (que es Ley de la República) y diferentes versiones del Código ACI (usualmente la versión del 2008 excepto para solicitaciones mayoradas y factor de reducción de capacidad en que se usa la versión 2002 por ser consistente con los procesos constructivos del país).

El Código Ecuatoriano de la Construcción 2001 (CEC 2001) y el Código ACI 2002 [CEC 9.2.1, ACI 9.2.1] establecen que ninguna estructura, ningún elemento y ninguna sección de un elemento podrán tener una capacidad resistente inferior a las solicitaciones que provienen de la siguiente combinación de cargas básica:

$$U = 1.4 D + 1.7 L \quad \text{Ecuación (6.1)}$$

Donde:

- U:** Carga última
D: Carga Permanente
L: Carga Viva

La ecuación previa se interpreta como que las cargas gravitacionales permanentes deben ser mayoradas mediante un factor “1.4”, mientras las cargas gravitacionales vivas se mayoran con un factor “1.7”. La diferencia entre las magnitudes de los 2 factores de mayoración radica en la relativa precisión con que se pueden estimar las cargas que actúan permanentemente sobre la estructura (**D**), y la gran incertidumbre para establecer las máximas cargas vivas (**L**).

El CEC 2001 [CEC 9.2.3] establece que cuando actúen cargas sísmicas, además de la ecuación anterior, las estructuras deben tener capacidad suficiente para resistir los siguientes estados de carga:

$$U = 0.75 (1.4 D + 1.7 L + 1.87 E) \quad \text{Ecuación (6.2)}$$

$$U = 0.9 D + 1.43 E \quad \text{Ecuación (6.3)}$$

Donde:

- E:** Carga Sísmica

La **Ecuación (6.1)** proporciona solicitaciones máximas cuando el efecto del sismo se añade al de las cargas permanentes y las cargas vivas (cuando tienen el mismo signo), y



el factor de reducción de 0.75 que precede a la fórmula toma en consideración la eventualidad de ocurrencia del sismo de diseño.

La **Ecuación (6.2)** proporciona solicitaciones máximas reversibles cuando el efecto del sismo se resta del efecto de las cargas permanentes. (tienen signo cambiado). En la **Ecuación (6.3)**, está implícito un factor de reducción semejante a 0.75 para la carga sísmica ($0.75 \times 1.87 = 1.41 \approx 1.43$).

Existen otras solicitaciones que deben ser consideradas en el diseño, tal es el caso de las cargas de viento (**W**). Las combinaciones de cargas establecida por el CEC 2001 [CEC 9.2.2] son:

$$U = 0.75 (1.4 D + 1.7 L + 1.7 W)$$

Ecuación (6.4)

$$U = 0.9 D + 1.3 W$$

Ecuación (6.5)

Generalmente las cargas de viento no son críticas para estructuras de hormigón armado en nuestro medio, excepto en el diseño de bóvedas cáscara por su limitado peso.

El empuje lateral de suelos (**H**) es incluido en las combinaciones de carga de diseño en los siguientes términos [CEC 9.2.4]:

$$U = 1.4 D + 1.7 L + 1.7 H$$

Ecuación (6.6)

La presión hidrostática de los fluidos (**F**) es incluida en las combinaciones de carga de diseño en los siguientes términos [CEC 9.2.5]:

$$U = 1.4 D + 1.7 L + 1.4 F$$

Ecuación (6.7)

Los cambios de temperatura, la retracción de fraguado, el flujo plástico y los asentamientos diferenciales (**T**) son considerados en el diseño mediante las siguientes expresiones [CEC 9.2.7]:

$$U = 0.75(1.4 D + 1.7 L + 1.4 T)$$

Ecuación (6.8)

$$U = 1.4(D + T)$$

Ecuación (6.9)

El ACI 2008 establece una combinación de carga base en reemplazo de la que aparece en el ACI 2002, cuando actúan sólo cargas gravitacionales [ACI 9.2.1]:

$$U = 1.2 D + 1.6 L$$

Ecuación (6.1a)

El uso de esta última combinación de carga, cuyas solicitaciones son menores a las del ACI 2002, debe ser investigado con mucho detalle en nuestro medio antes de incluirlo en el CEC, pues las prácticas constructivas de Ecuador no están al nivel de los países desarrollados, y generalmente nuestras estructuras (especialmente las losas alivianadas) tienen una carga permanente superior a la que podemos estimar a partir de los planos estructurales y arquitectónicos, lo que haría peligrar la seguridad de las estructuras. Inclusive la magnitud de las cargas vivas es muy incierta pues en nuestro país se cambia fácilmente el tipo de uso de una estructura (sin consultar al diseñador).

6.3 LOS FACTORES DE REDUCCIÓN DE LA CAPACIDAD RESISTENTE:

Adicionalmente a la mayoración de las cargas, el CEC 2001 [CEC 9.3] y el ACI 2002 [ACI 9.3] establecen factores de reducción de la capacidad resistente (ϕ) de las estructuras,



factores que dependen del tipo de solicitación que esté siendo considerada en el diseño estructural.

Los valores de capacidad nominal se deben multiplicar por los siguientes factores reductores para obtener la capacidad resistente real de los elementos estructurales (también llamada capacidad última):

Tabla 6.1: Factor de reducción de capacidad para distintos tipos de solicitaciones.

Tipo de Solicitación	Factor de Reducción de Capacidad (ϕ)
Flexión sin carga axial	0.90
Tensión axial y tensión axial con flexión:	0.90
Compresión axial y compresión axial con flexión:	
• Elementos con refuerzo en espiral	0.75
• Otros elementos reforzados	0.70
Cortante y Torsión	0.85
Aplastamiento en el hormigón	0.70

La magnitud de la reducción de capacidad se fundamenta en 2 aspectos:

- En primer lugar, los elementos estructurales no son construidos en obra con el mismo nivel de prolijidad que aquel que se logra en laboratorio, por lo que su capacidad real es algo menor; es decir que bajo este primer criterio se debería reducir por igual la capacidad resistente bajo cualquier tipo de solicitación. En este caso el factor de reducción de capacidad debería ser único y los códigos han establecido una reducción conservadora del orden del 10% ($\phi \approx 0.90$).
- En segundo lugar, existen solicitaciones en la estructura que son más críticas que otras por los tipos de falla que generan: la falla por flexión es dúctil por estar controlada por la gran capacidad de alargamiento del acero de tracción, mientras que las fallas por cortante, por carga axial y por aplastamiento son fallas frágiles, por estar controladas por la rotura del hormigón a tracción la primera y compresión las dos últimas.

Se requiere que cuando la estructura falle lo haga de una manera dúctil y progresiva (dando avisos externos de lo que está ocurriendo internamente), por lo que a partir de $\phi = 0.90$ se manejan factores de reducción de capacidad diferenciados. Mientras mayor sea la reducción de capacidad resistente (ϕ es más pequeño) la estructura requiere ser reforzada en mayor medida para ese tipo de solicitación, con la finalidad de recuperar la capacidad perdida por especificación de los códigos. La secuencia de falla establecida en los códigos de diseño es la siguiente:

- o **Primer Tipo de Falla - Falla por flexión ($\phi = 0.90$):** Cuando se cumplen todas las normas de diseño impuestas por los códigos ACI y CEC, es el tipo de falla que primero se produce en la estructura, ante un incremento inesperado de las cargas. Este tipo de falla es totalmente dúctil (el diseño a flexión cumple este precepto) y da aviso de su presencia por las deformaciones exteriores visibles y progresivas en la



estructura, especialmente en vigas y losas. Las especificaciones de los códigos de diseño apuntan a que el colapso de la estructura esté controlado por la aparición sucesiva de secciones dentro de la estructura que fallen dúctilmente (se formen articulaciones plásticas).

- **Segundo Tipo de Falla - Falla por corte ($\phi = 0.85$):** A diferencia de la falla por flexión, la falla por corte es frágil, lo que condiciona el comportamiento de los elementos estructurales.

Si el miembro afectado es una viga perteneciente a un pórtico, se produce la falla del elemento pero generalmente no se llega a la falla de la estructura en su totalidad.

Si la falla de corte se produce en una columna, se puede generar, además de la falla del elemento, también el colapso de la estructura total, por el papel que juegan las columnas en la estabilidad de los pórticos. Los códigos promueven el criterio de diseño de **Columna Fuerte – Viga Débil**, lo que corrige esa potencial deficiencia pues provoca que, luego de las fallas por flexión, fallen las vigas a corte, y posteriormente fallen las columnas por el mismo tipo de solicitación.

Además, en zonas sísmicas como las que tenemos en nuestro país, tanto vigas como columnas se diseñan para resistir los cortantes generados por la formación de articulaciones plásticas de flexión en los 2 extremos de las barras, lo que proporciona un margen de seguridad aún mayor ante las fuerzas de corte, comparado con la flexión (las fallas por cortante solamente se producirían luego de desarrollarse todas las articulaciones plásticas de flexión, con el consiguiente colapso de la estructura por ese motivo).

La diferencia de valores del factor de seguridad ϕ establece que en una primera instancia las barras serán un 6% más resistentes a corte que a flexión (0.90/0.85). Este valor se ve incrementado considerablemente (aproximadamente a un 15% - 20%) cuando los miembros se diseñan para resistir la formación de articulaciones plásticas extremas de barra. Este tipo de falla solamente se produciría muy ocasionalmente, ante la mínima posibilidad de que la resistencia a flexión en algún sitio de la estructura fuera menor que aquella utilizada en el diseño, por aspectos probabilísticos.

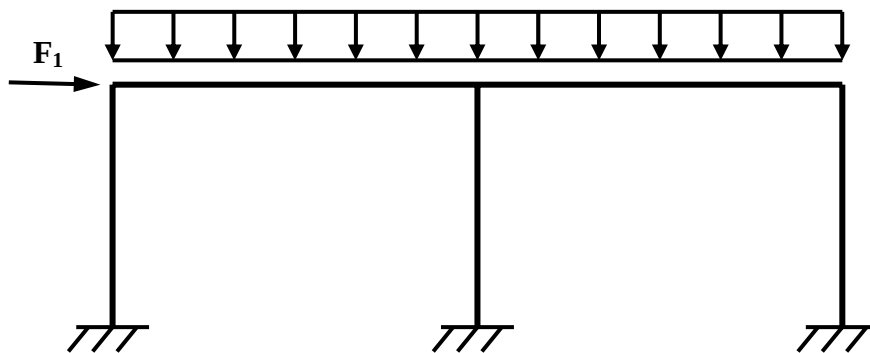
- **Tercer Tipo de Falla - Falla por compresión axial ($\phi = 0.70$ o $\phi = 0.75$):** Es la falla de tercera instancia. La falla por compresión es frágil y explosiva, lo que conduce al colapso de toda la estructura, pues los elementos involucrados son generalmente las columnas. Al reducir la capacidad resistente en mayor proporción que bajo otros tipos de solicitaciones, el código de diseño obliga a reforzar aún más las columnas para asegurarse que esta falla colapsiva se produzca cuando los otros tipos de falla se hayan agotado en la estructura. El incremento de capacidad con relación a la flexión es del orden del 20% al 29% (0.90/0.75 y 0.90/0.70), razón por la que la probabilidad de ocurrencia de este tipo de falla es aún menor que la falla por cortante.

Los factores de reducción más bajos obligan a incrementar la capacidad resistente de los elementos, en mayor proporción, para el tipo de sollicitación específica analizada. Eso significa que las estructuras que se diseñan con el CEC 2001 y el ACI 2002 o ACI 2008 están normalmente reforzadas para sollicitaciones de flexión, se encuentran más reforzadas para sollicitaciones de corte y están mucho más reforzadas para sollicitaciones de carga axial.

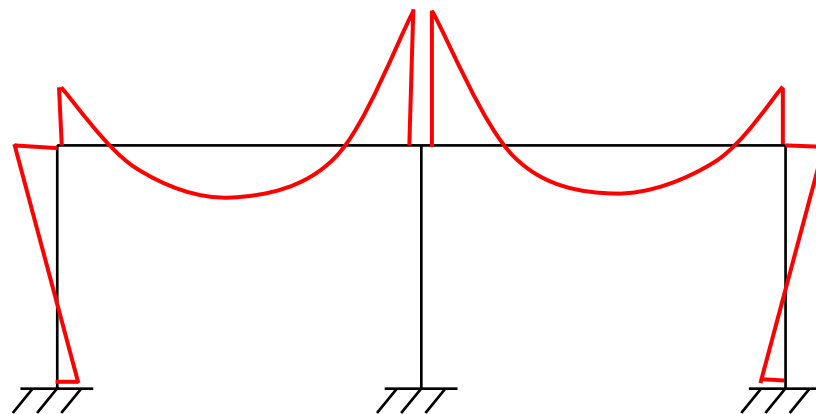
6.4 LA FALLA DÚCTIL POR FLEXIÓN EN PÓRTICOS:

La falla dúctil por flexión aparece especificada a través de muchas de las disposiciones de los códigos de diseño, pudiendo aparecer como elementos dispersos pero en realidad tienen un altísimo nivel de integración y consistencia.

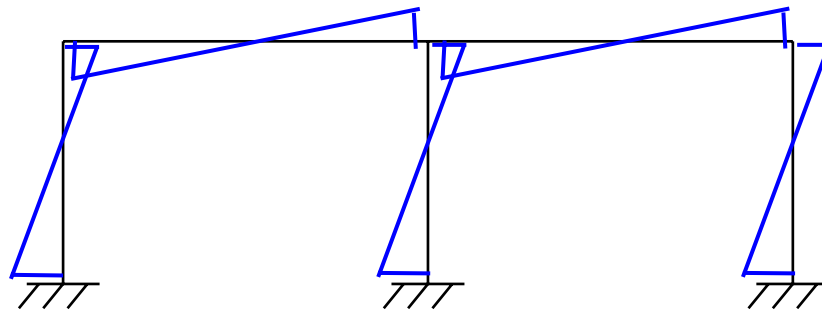
Si se dispone de la siguiente estructura aporticada sometida tanto a cargas gravitacionales como a cargas sísmicas.



Cualitativamente, los diagramas de momentos flectores correspondientes serían:

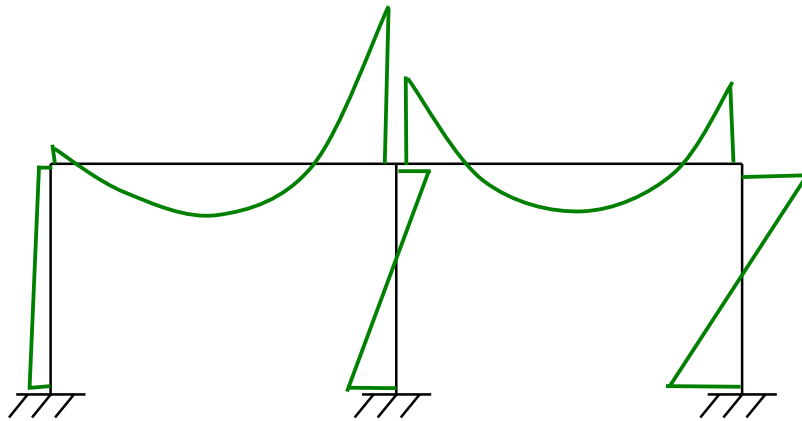


Momentos por Cargas Gravitacionales



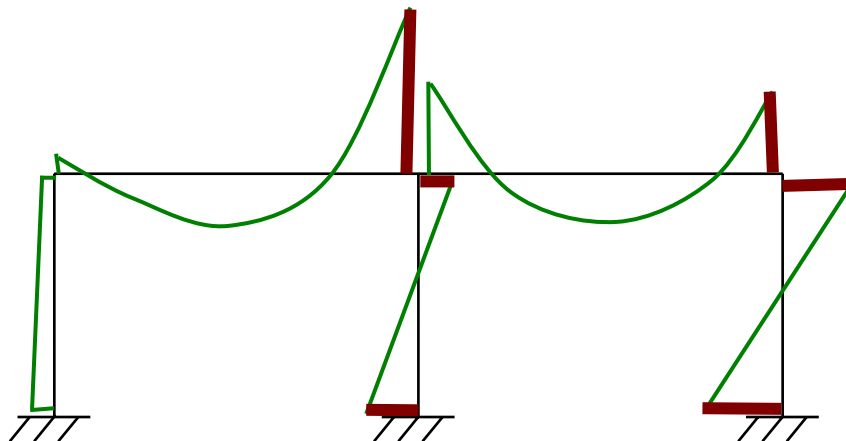
Momentos por Cargas Sísmicas Nivel 1

La combinación de cargas gravitacionales y cargas sísmicas en la dirección propuesta definiría un diagrama de momentos flectores como el siguiente (se debe recordar que las solicitaciones sísmicas son reversibles, por lo que estos diagramas cambiarían apreciablemente si la fuerza estática equivalente al sismo actuara de derecha a izquierda):



Momentos por Cargas Gravitacionales y Cargas Sísmicas Nivel 1

Claramente se nota que, ante la presencia de sismos, hay secciones de la estructura que incrementan de manera considerable la magnitud de sus solicitaciones flexionantes, mientras otras secciones disminuyen tal magnitud y en algunos casos llegan a revertir su signo (si se empleara la fuerza equivalente al sismo, en la dirección opuesta, la relación de crecimiento, o decrecimiento y reversión se invertirían).



Zonas de Incremento de Momento Flector

Es evidente que las secciones en que el momento flector crece son las candidatas naturales a incursionar rápidamente dentro de un rango de comportamiento inelástico, con grandes deformaciones. A continuación se describe esquemáticamente ese comportamiento inelástico en una sección sometida a flexión:

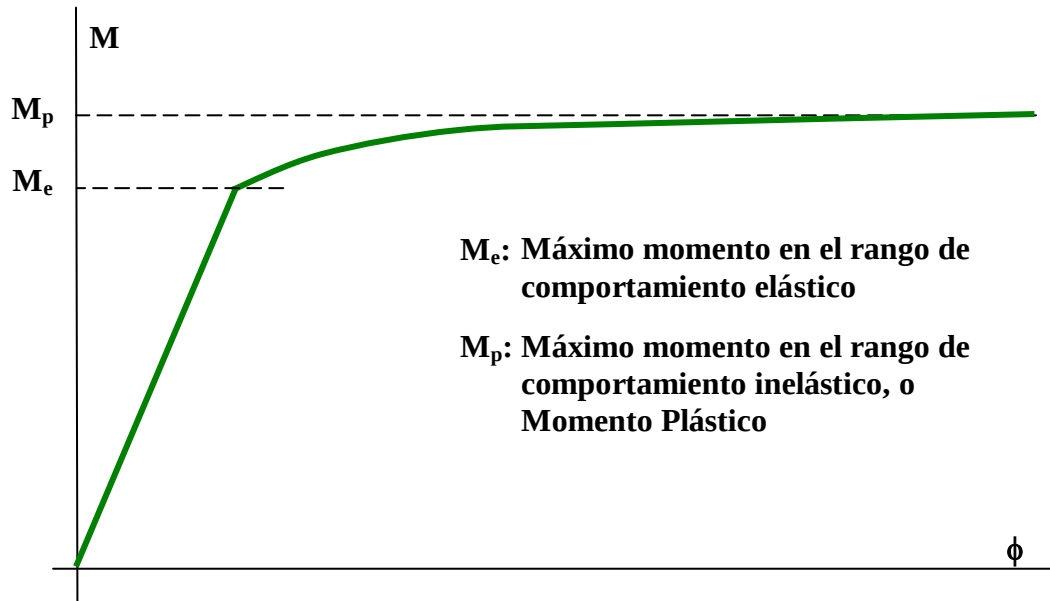


Diagrama Real Momento Flector - Curvatura

El punto de quiebre de pendiente se produce cuando el acero de tracción entra en fluencia. El diagrama previo puede ser idealizado en los siguientes términos, para facilitar el modelamiento:

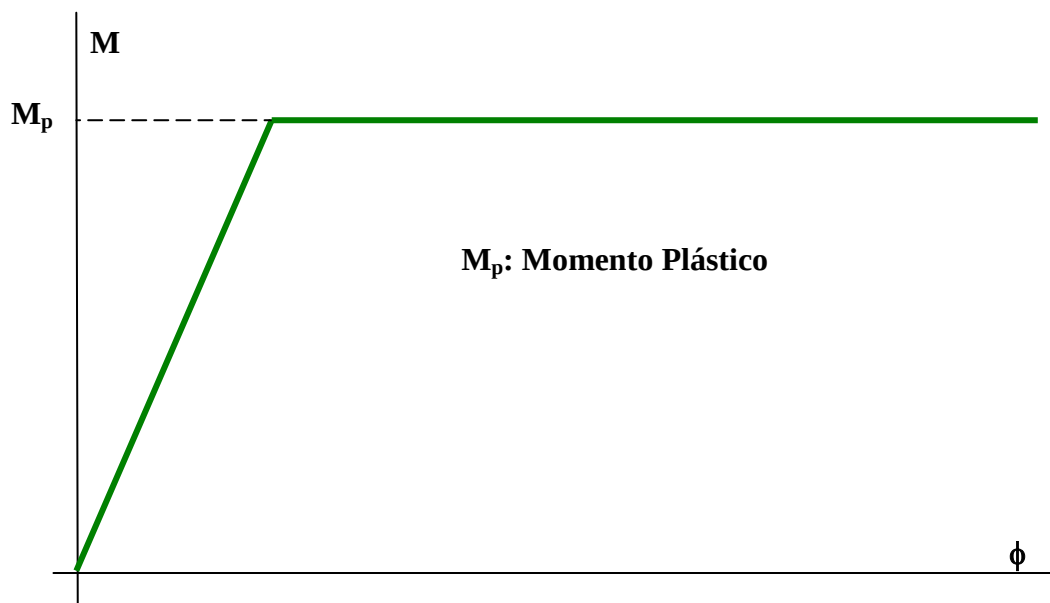
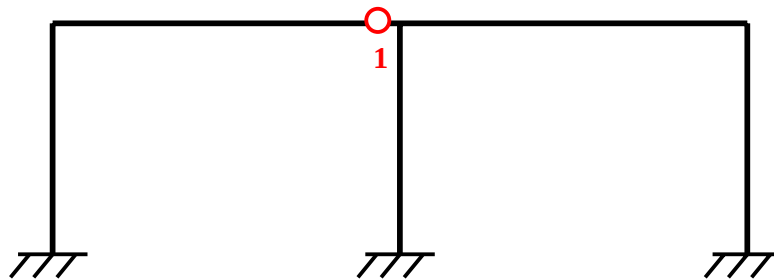


Diagrama Idealizado Momento Flector - Curvatura

El gráfico obtenido corresponde a un material idealizado elásto – plástico. La descripción física y matemática del comportamiento de este material idealizado es mucho más sencilla que la que se requiere para el material real, y los resultados de la idealización son similares al comportamiento real.

Existen también secciones en el pórtico, como los centros de luz de las vigas y de las columnas, que prácticamente no sufren ningún cambio en la magnitud de los momentos flectores.

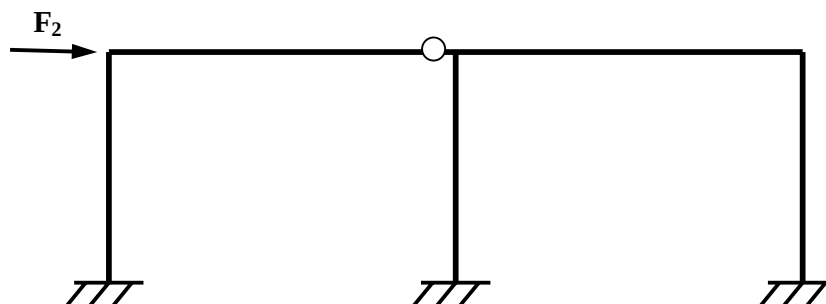
Debido al criterio de **Viga Débil – Columna Fuerte**, que promueven los códigos [ACI 21.6.2.2], en un nudo serán las secciones críticas de las vigas las que lleguen más rápidamente a su capacidad resistente, y por consiguiente alguna de ellas (probablemente el extremo derecho de la viga izquierda por ser la sección con mayor momento flector) conformará una articulación plástica, como se observa en la siguiente figura.



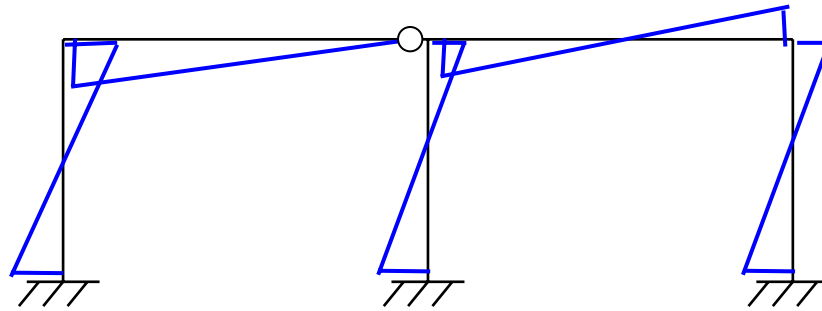
La articulación plástica se logra cuando el acero traccionado continúa deformándose sin ser capaz de generar más fuerza de tracción (por la fluencia), y simultáneamente el hormigón logra sostener deformaciones importantes, por lo que a pesar de esas deformaciones en los 2 materiales, no se puede incrementar el momento flector resistente. Se requiere, por consiguiente, que el acero se comporte como un material elasto-plástico sumamente dúctil (el tipo de acero que utilizamos en hormigón armado se comporta como tal), y que el hormigón se encuentre confinado para resistir mayores deformaciones unitarias que las que fijan los códigos para el diseño base (esto se logra pues los códigos exigen, para zonas sísmicas, una concentración de estribos en las zonas de posible formación de las articulaciones plásticas).

Si la fuerza sísmica continuara incrementando hasta un **Nivel 2**, por encima del **sismo nominal de diseño**, todos los momentos flectores que en la fase previa se incrementaron continuarían haciéndolo, con excepción de la sección en que se formó previamente una articulación plástica, que permanecerá inalterada en cuanto a sollicitaciones flexionantes (por el efecto de momento nulo de absorción en una articulación). De igual manera la tendencia a la disminución de momentos y a la reversión de signos también se mantendría.

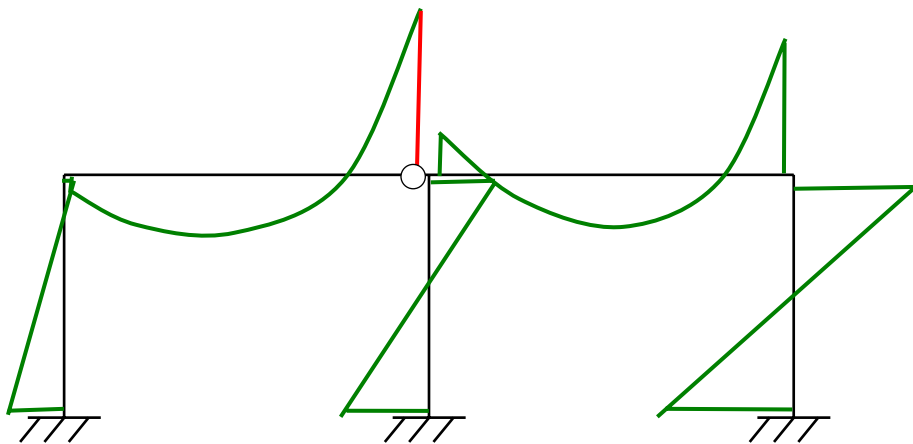
El modelo estructural para la carga adicional y sus momentos flectores son:



Cargas Sísmicas Adicionales de Nivel 1 a Nivel 2

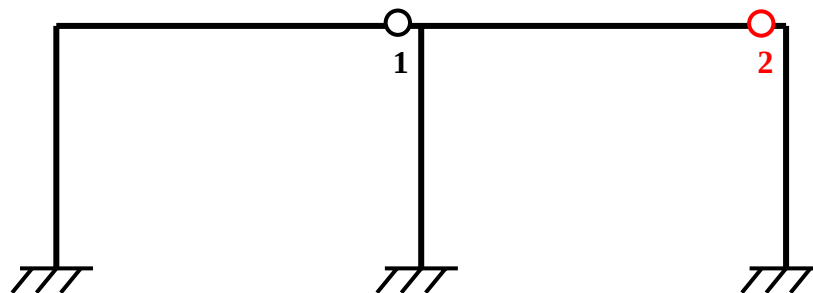


Momentos Flectores Adicionales de Nivel 1 a Nivel 2



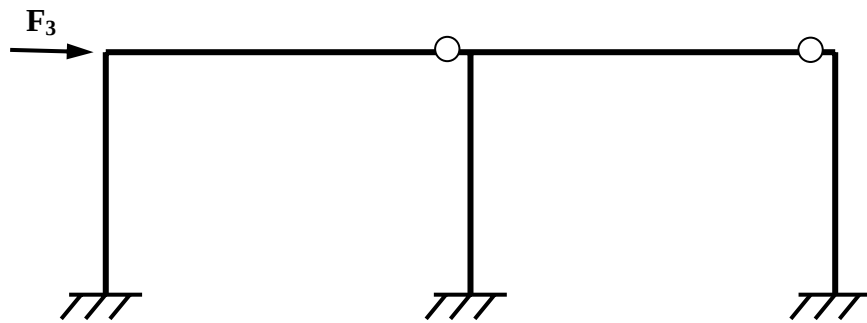
Momentos Acumulados Gravitacionales y por Sismo hasta Nivel 2

Se puede visualizar que la segunda sección que generará una articulación plástica probablemente estará ubicada en el extremo derecho de la viga derecha, por ser la sección no articulada plásticamente de mayor momento flector (no se produciría en la cabeza de la columna derecha, que tiene el mismo momento solicitante por el criterio de **columna fuerte – viga débil**), aunque el momento de plastificación de la viga derecha podría ser diferente al de la viga izquierda pues depende básicamente de la cantidad de acero de tracción que tenga la sección.

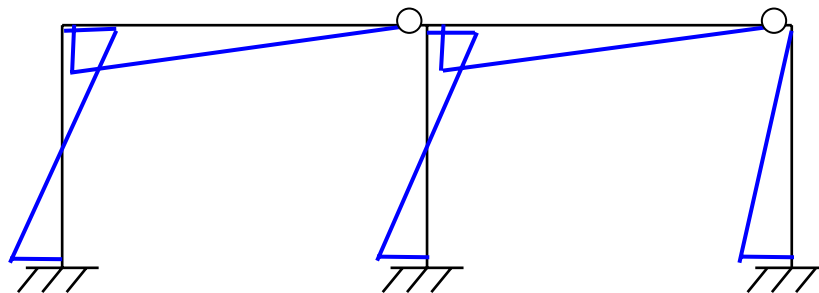


Estructura con 2 Articulaciones Plásticas

Si la fuerza sísmica continuara incrementando hasta un **Nivel 3**, todos los momentos flectores que en las fases previas se incrementaron continuarían haciéndolo, con excepción de las 2 secciones en que existen articulaciones plásticas, que permanecerían inalteradas.

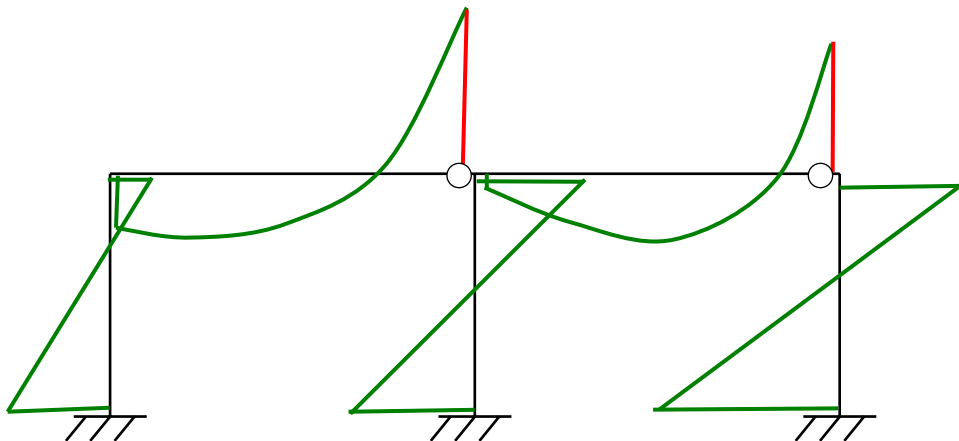


Cargas Sísmicas Adicionales de Nivel 2 a Nivel 3



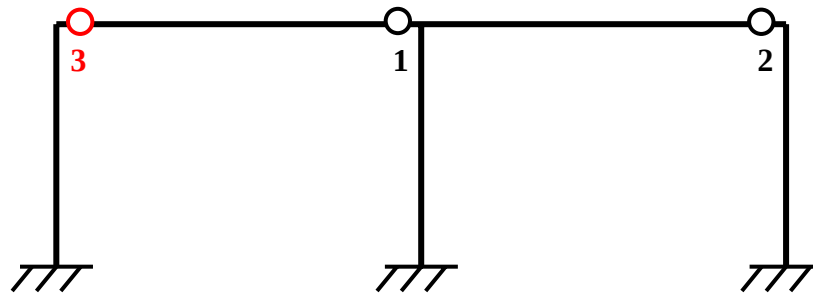
Momentos Flectores Adicionales de Nivel 2 a Nivel 3

Es importante notar que al no existir incremento de momento flector en el extremo derecho de la viga derecha, por equilibrio de nudo, tampoco puede incrementar el momento flector de la cabeza de la columna derecha.



Momentos Acumulados Gravitacionales y por Sismo hasta Nivel 3

De acuerdo al diagrama de momentos acumulados, la tercera potencial sección de formación de articulaciones plásticas sería el extremo izquierdo de la viga izquierda, por **momento reversible** (las cargas gravitacionales provocan tracciones en la fibra superior, pero la presencia del sismo severo invierte el efecto y tracciona la fibra inferior).

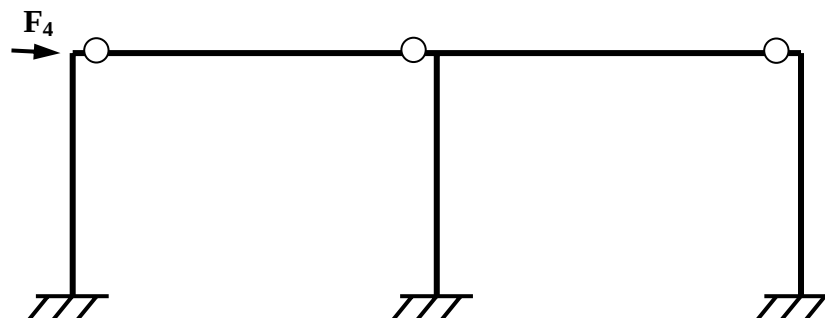


Estructura con 3 Articulaciones Plásticas

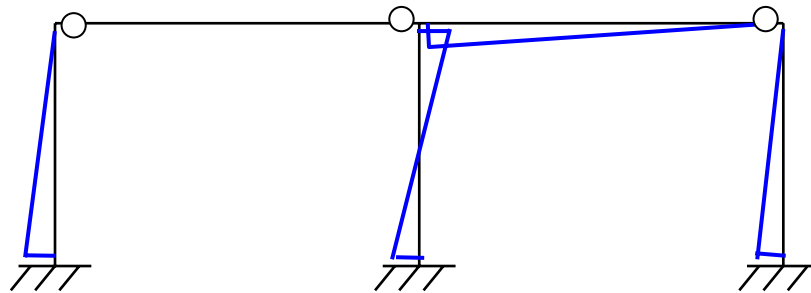
El análisis estructural convencional de pórticos hiperestáticos podría no proporcionar momentos flectores reversibles en los extremos de viga (y de columna) pues las fuerzas sísmicas utilizadas en ese análisis representan apenas un 10% o 15% de las fuerzas que podrían actuar sobre la estructura. Sin embargo, el instante en que se lleva el pórtico hasta el colapso, los momentos reversibles aparecen ampliamente (como se observa en la fase previa y se observará en la fase posterior).

Se debe reconocer que los sismos reales de diseño, en estructuras aporticadas redundantes, son resistidos apenas en un 15% por capacidad pura de las secciones específicas (sección de acero y de hormigón), mientras de un 25% a un 35% son resistidos por redistribución de esfuerzos por la ductilidad general de la estructura (formación progresiva de articulaciones plásticas), y de un 50% a un 60% por reducción de las fuerzas inerciales debido a la flexibilización de la estructura ante fallas dúctiles progresivas (aumento de los períodos naturales de vibración) que provocan un comportamiento inelástico.

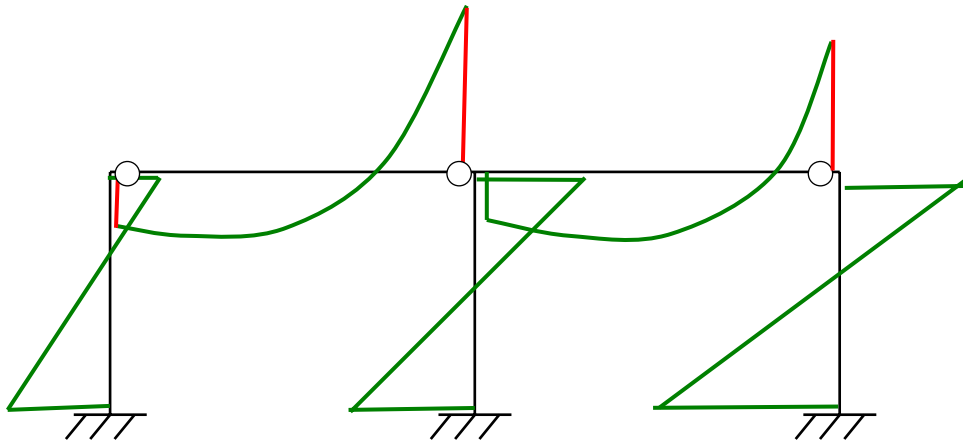
Con cargas sísmicas incrementales (cuyos incrementos son cada vez más pequeños), que nos conduzcan a ese colapso dúctil, se obtendrían los siguientes modelos estructurales y diagramas de momentos conforme continúa incrementando el número de articulaciones plásticas formadas:



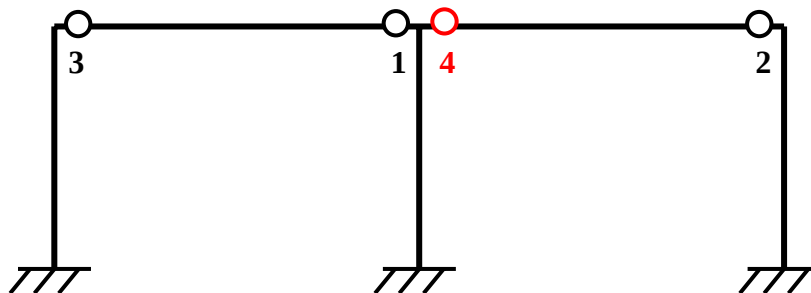
Cargas Sísmicas Adicionales de Nivel 3 a Nivel 4



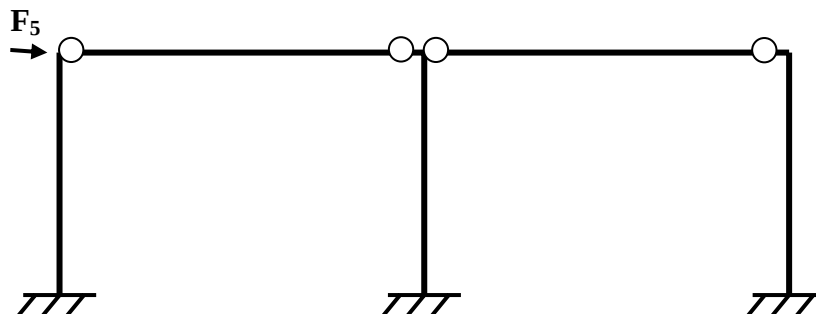
Momentos Flectores Adicionales de Nivel 3 a Nivel 4



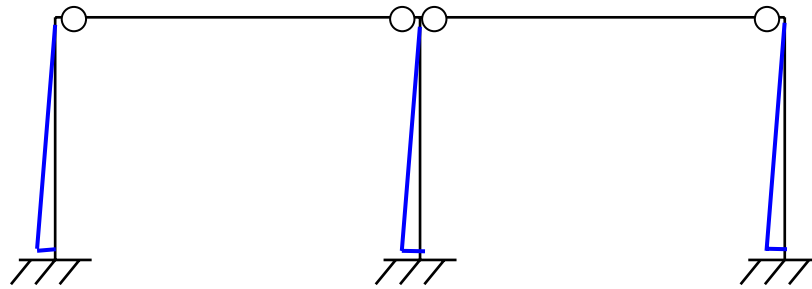
Momentos Acumulados Gravitacionales y por Sismo hasta Nivel 4



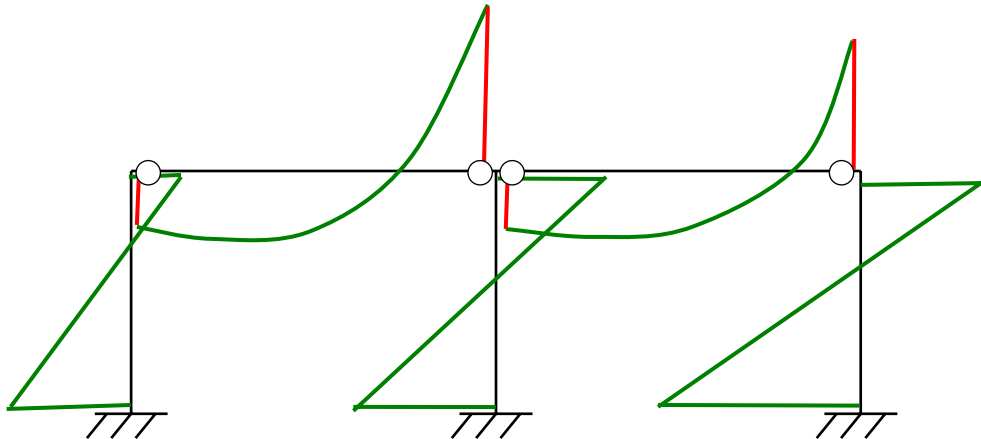
Estructura con 4 Articulaciones Plásticas



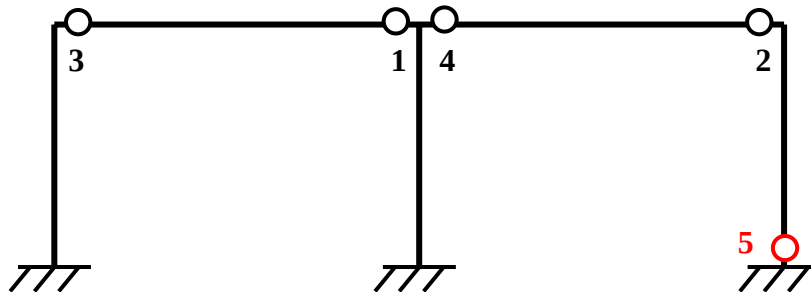
Cargas Sísmicas Adicionales de Nivel 4 a Nivel 5



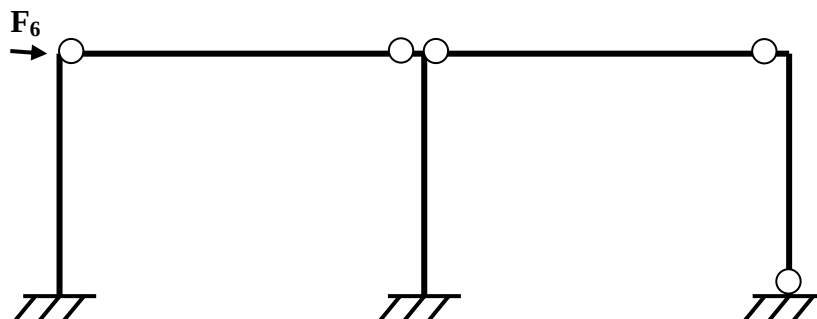
Momentos Flectores Adicionales de Nivel 4 a Nivel 5



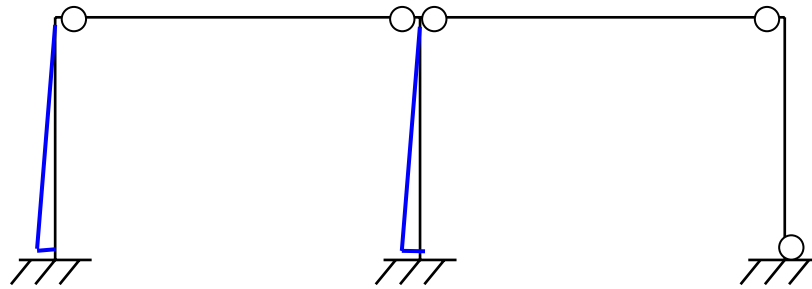
Momentos Acumulados Gravitacionales y por Sismo hasta Nivel 5



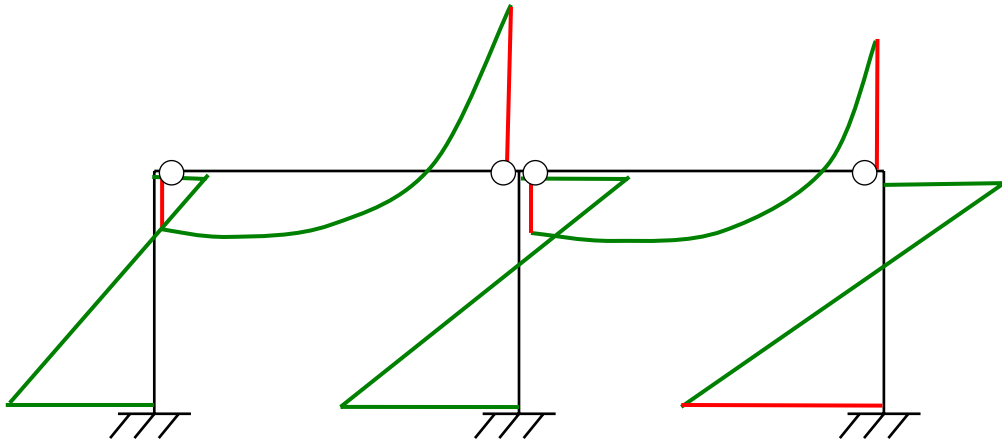
Estructura con 5 Articulaciones Plásticas



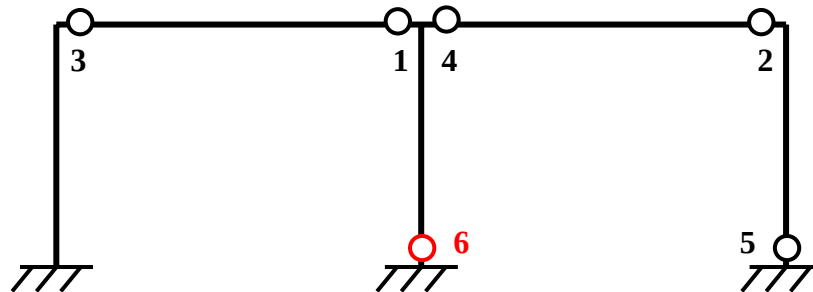
Cargas Sísmicas Adicionales de Nivel 5 a Nivel 6



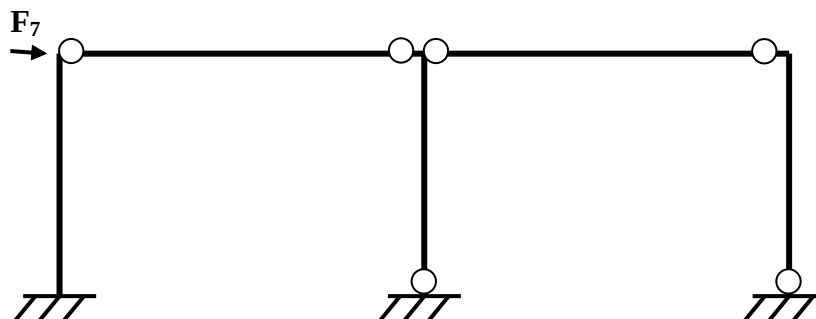
Momentos Flectores Adicionales de Nivel 5 a Nivel 6



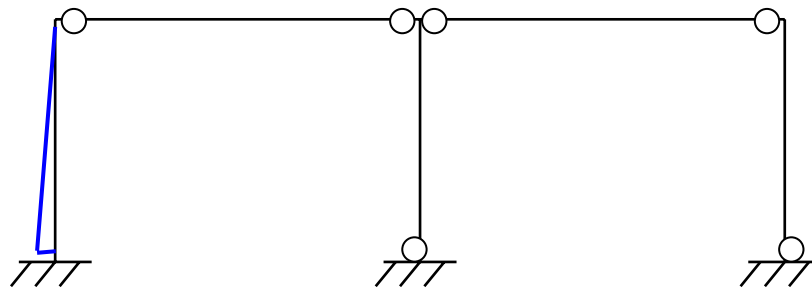
Momentos Acumulados Gravitacionales y por Sismo hasta Nivel 6



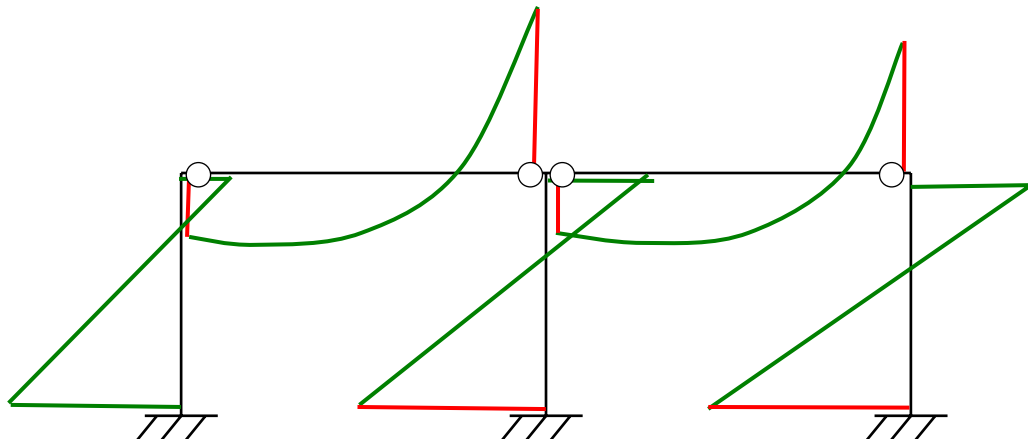
Estructura con 6 Articulaciones Plásticas



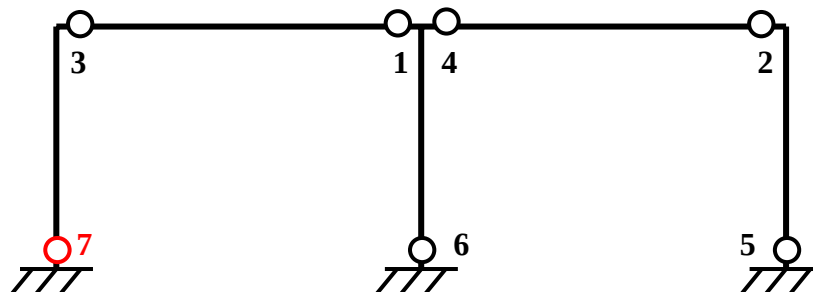
Cargas Sísmicas Adicionales de Nivel 6 a Nivel 7



Momentos Flectores Adicionales de Nivel 6 a Nivel 7



Momentos Acumulados Gravitacionales y por Sismo hasta Nivel 7



Estructura con 7 Articulaciones Plásticas

El último modelo estructural (con 7 articulaciones plásticas) constituye el **Mecanismo de Colapso** de la estructura, pues el pórtico deja de ser estable.

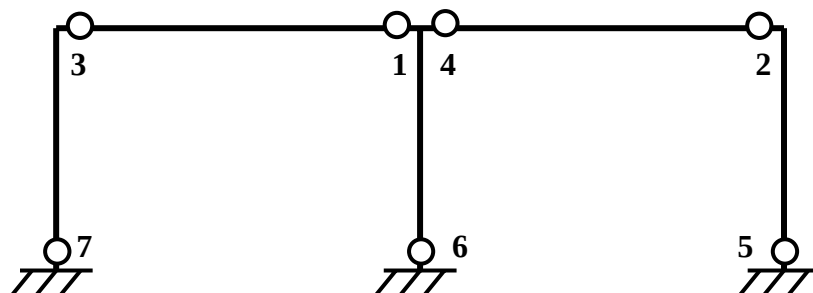


Figura 6.4: Mecanismo de colapso de estructuras aporticadas dúctiles ante cargas sísmicas.

Los códigos de diseño de hormigón armado prevén que una estructura aporricada falle dúctil y progresivamente, como se acaba de explicar con el ejemplo previo.

A continuación se presenta un diagrama cualitativo que caracteriza a la fuerza horizontal y al desplazamiento horizontal de piso, en el proceso de colapso del pórtico, tomando como punto de partida la existencia de cargas gravitacionales reales en la estructura.

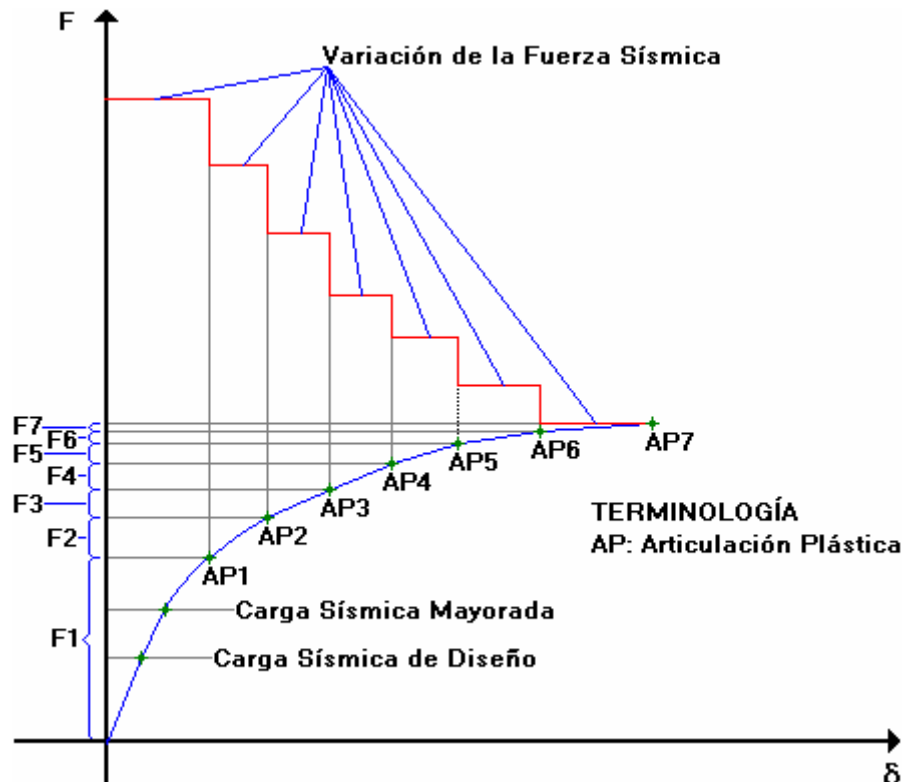


Figura 6.5: Disminución de las fuerzas sísmicas que actúan en los pórticos e incremento de la deformación lateral, en función de la formación de articulaciones plásticas en los extremos de barra y de la flexibilización de la estructura.

En el diagrama previo se observa claramente que cada vez que se genera una articulación plástica que conduce a la formación del mecanismo de colapso de la estructura, esta última se va flexibilizando con lo que se aumenta su período natural de vibración, lo que a su vez conduce a una disminución progresiva de la fuerza sísmica actuante. Por otro lado, si el pórtico tiene un suficiente nivel de redundancia para la formación de varias articulaciones plásticas, la carga que produce la primera articulación plástica no es la que lleva al colapso a la estructura pues tienen que agotarse las reservas de capacidad de otras secciones antes de que ello ocurra. Estos dos hechos permiten que se puedan diseñar las diferentes secciones de las estructuras para sollicitaciones mucho menores que las que actuarán en el pórtico como un todo.

Si fueran las cargas gravitacionales (la carga viva más específicamente) las que incrementaran, se podrían formar articulaciones plásticas tanto en los extremos de las vigas como en los centros de luz, lo que proporcionaría adicionalmente determinados mecanismos locales de colapso, que no producen la falla de la totalidad de la estructura, por sí solos.

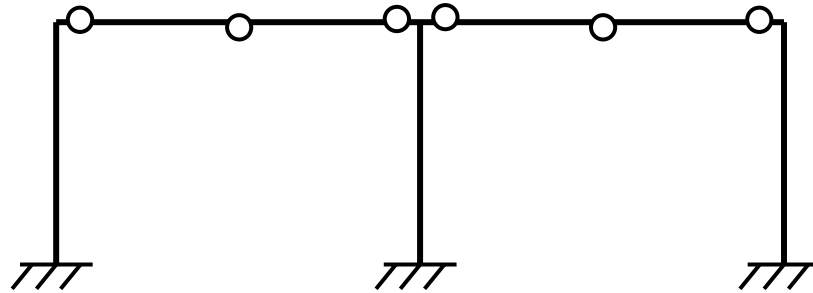


Figura 6.6: Mecanismos de colapso locales de estructuras aporticadas dúctiles ante cargas gravitacionales.

Los criterios previos pueden ser extendidos hacia pórticos espaciales en los que si alguno de los pórticos planos que lo conforman ha ingresado más rápidamente en el rango inelástico, su flexibilización permitirá que los otros pórticos planos empiecen a absorber una mayor proporción de la carga sísmica por ser más rígidos en un momento dado, lo que facilita una redistribución de esa carga de los pórticos más débiles hacia los pórticos más resistentes.

REFERENCIAS:

- 6.1 Nilson A., (1999), *Diseño de Estructuras de Concreto*, Mc Graw Hill.
- 6.2 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 6.3 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.

CAPÍTULO VII

DISEÑO A FLEXIÓN DE VIGAS DE HORMIGÓN ARMADO

7.1 ESFUERZOS Y DEFORMACIONES DEFINIDOS EN LOS CÓDIGOS DE DISEÑO:

Las curvas de descripción del hormigón armado sometido a compresión han sido objeto de estudios por parte de numerosos investigadores. Es frecuente representarlas por un tramo recto (rango de comportamiento elástico) añadido a un tramo aproximadamente parabólico (rango de comportamiento inelástico), o por tres tramos rectilíneos. Lamentablemente el manejo matemático de esas representaciones simplificadas del comportamiento del hormigón se vuelve algo enredado para fines prácticos.

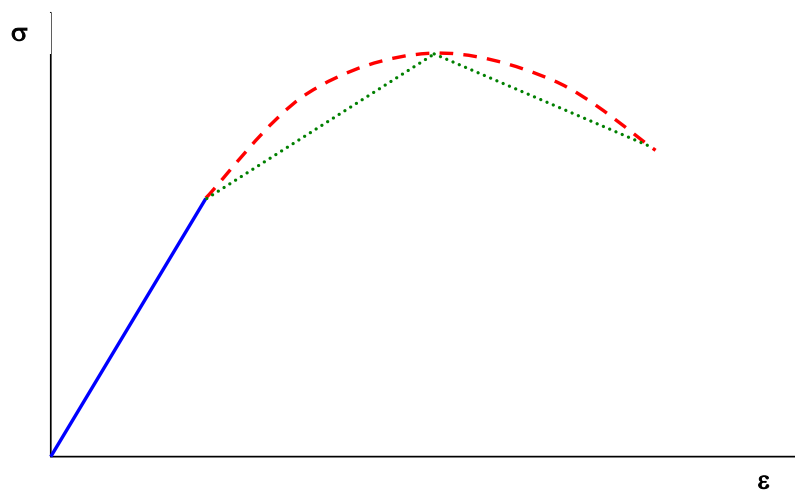


Figura 7.1: Modelos elasto-parabólico y trilineal de descripción de la curva esfuerzo-deformación del hormigón.

Si se tuviera una viga de hormigón armado de sección rectangular, sometida a flexión, y se quisiera analizar el comportamiento en una sección transversal específica (por ejemplo la sección más solicitada de la viga), una parte de esa sección transversal estará sometida a esfuerzos y deformaciones de compresión de magnitud variable, mientras que otra parte de la viga estará sometida a sollicitaciones de tracción. La resistencia del hormigón a tracción puede considerarse nula pues luego de su fisuración esas tensiones desaparecen y son reemplazadas por tracciones en el acero de refuerzo.

Los códigos de diseño ACI y CEC establecen que cuando un elemento trabaja a flexión, el hormigón en la zona de compresión no debe sobrepasar de una deformación máxima unitaria (ϵ) de **0.003**, ^[ACI 10.2.3] lo que representa una posición conservadora para hormigones de hasta 420 Kg/cm² de resistencia característica (estos hormigones tienen deformaciones unitarias de rotura superiores a 0.003 según los ensayos de laboratorio), y una posición ajustada a los resultados experimentales para hormigones entre 420 Kg/cm² y 560 Kg/cm² de mayor resistencia (en estos hormigones la deformación máxima es del orden de 0.003). Esa deformación máxima podría estar en exceso para hormigones de mayor resistencia, por lo que la especificación debe ser reformulada, mediante una base experimental y matemática, para estos hormigones.

Simultáneamente los códigos fijan en sus especificaciones que debe cumplirse que todo el acero de tracción debe superar el esfuerzo de fluencia (ϵ_y), en proporciones que dependen de que la estructura se ubique en zonas sísmicas o zonas no sísmicas.

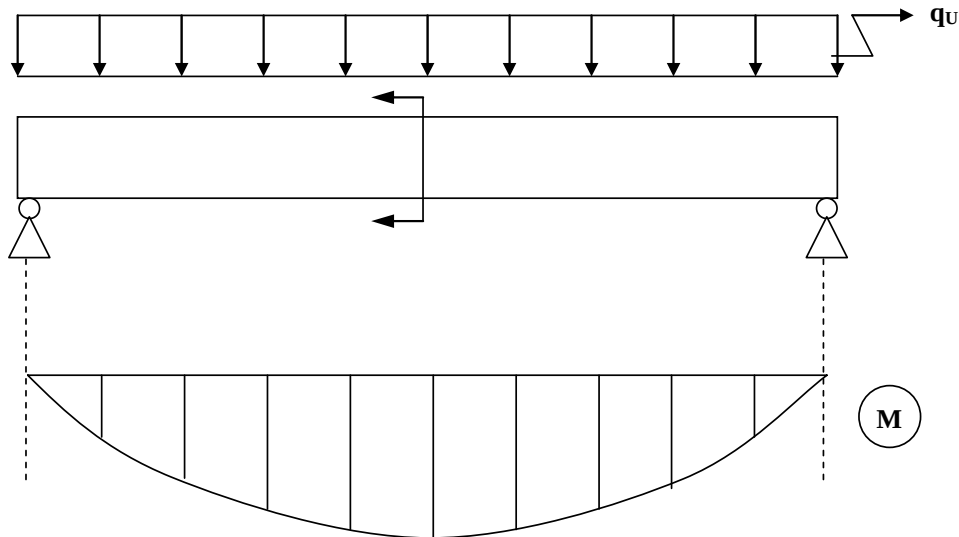


Figura 7.2: Viga simplemente apoyada con carga uniformemente distribuida y diagrama de momentos flectores.

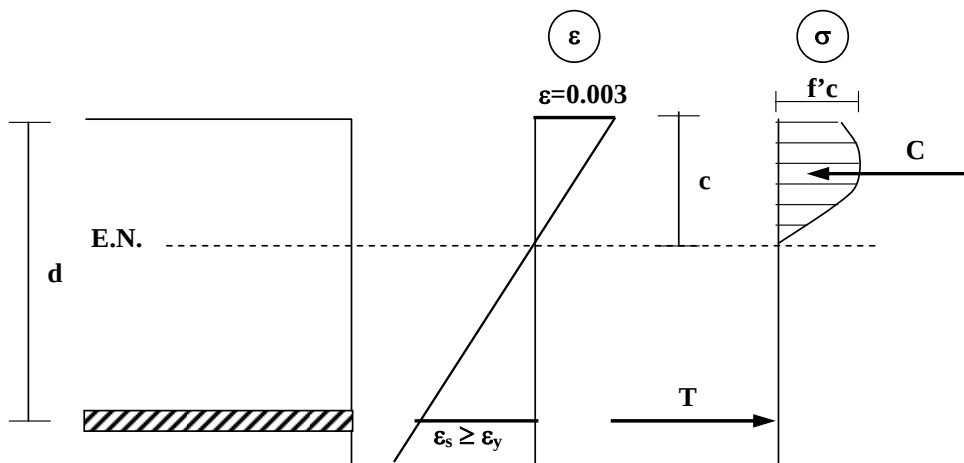


Figura 7.3: Diagrama de deformaciones unitarias y de esfuerzos bajo cargas últimas.

Debido a que las deformaciones unitarias (ϵ) son proporcionales a la distancia respecto al eje neutro (E.N.), el diagrama de compresiones por flexión tiene la misma geometría que el diagrama esfuerzo – deformación del hormigón a compresión.

En la zona de tracción se supone que el hormigón se ha fisurado totalmente y que no colabora en la capacidad resistente, por lo que solamente el acero trabaja a tracción [ACI 10.2.5].

La fuerza de tracción (T), dado que el acero debe encontrarse en fluencia, se calcula rápidamente mediante la siguiente expresión:

$$T = A_s \cdot F_y$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales la magnitud de la fuerza de compresión debe ser igual a la magnitud de la fuerza de tracción.

$$C = T$$

Claramente se puede observar que si la viga tiene una armadura importante de tracción, el bloque de compresión será también grande y el eje neutro tenderá a descender.

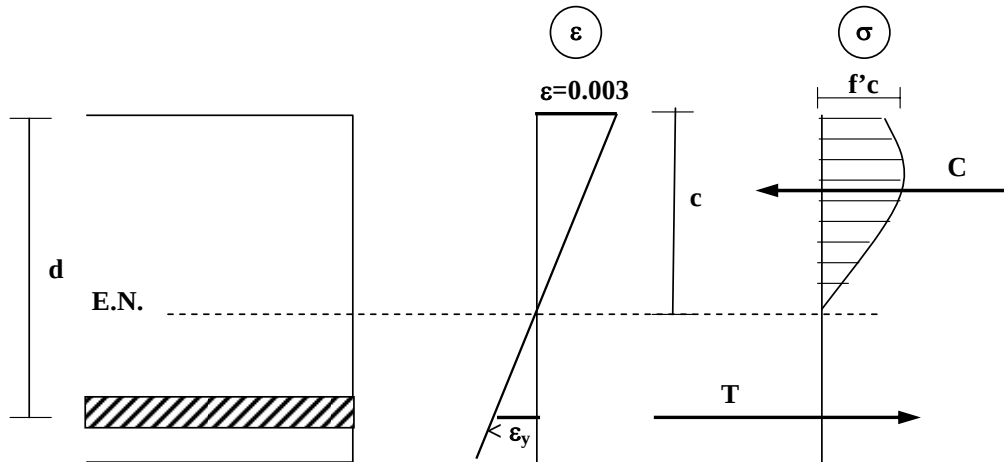


Figura 7.4: Diagrama de deformaciones unitarias y de esfuerzos bajo cargas últimas en vigas con armadura de tracción importante.

El descenso del eje neutro puede conducir en caso extremo a que la deformación unitaria en el acero sea pequeña y el acero no alcance el esfuerzo de fluencia, lo que lleva a un comportamiento frágil de la sección transversal, en contraposición con las especificaciones de los códigos de diseño.

Así mismo, si la cantidad de acero es pequeña, el bloque de compresión será pequeño y el eje neutro ascenderá.

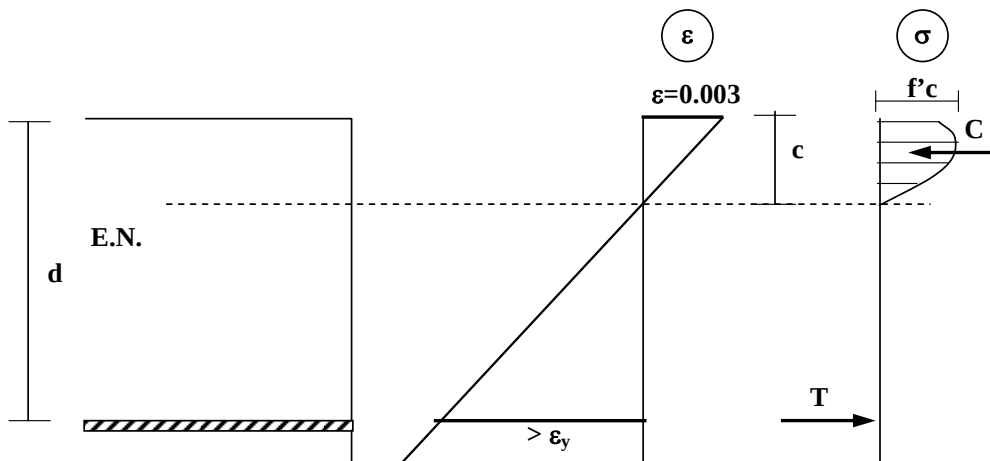


Figura 7.5: Diagrama de deformaciones unitarias y de esfuerzos bajo cargas últimas en vigas con armadura de tracción pequeña.

El ascenso del eje neutro proporcionará deformaciones unitarias importantes al acero, lo que asegura que el acero incurra ampliamente en la zona de fluencia, conduciendo a un comportamiento dúctil de la sección analizada, conforme lo establecen los códigos de diseño.

En definitiva, es la cantidad de acero de tracción la que controla el tipo de falla de las estructuras bajo solicitaciones flexionantes. Contrariamente a lo que se podría pensar, el

exceso de armadura de tracción puede ser perjudicial para el comportamiento de una estructura de hormigón armado, al volverla más frágil.

7.2 EL BLOQUE DE COMPRESIÓN DE WHITNEY:

Los aspectos matemáticos del manejo de la curva esfuerzo-deformación del hormigón en la zona comprimida del hormigón sometido a flexión pueden ser complejos. El Dr. Whitney propuso la utilización de un bloque de compresión rectangular cuya área sea equivalente a la que queda bajo la curva real, y cuyo centro de gravedad coincida aproximadamente con el centro de gravedad de la curva real. La investigación del Dr. Whitney fue acogida por el ACI [ACI 10.2.7], y posteriormente adoptada por el CEC [CEC 10.2.7].

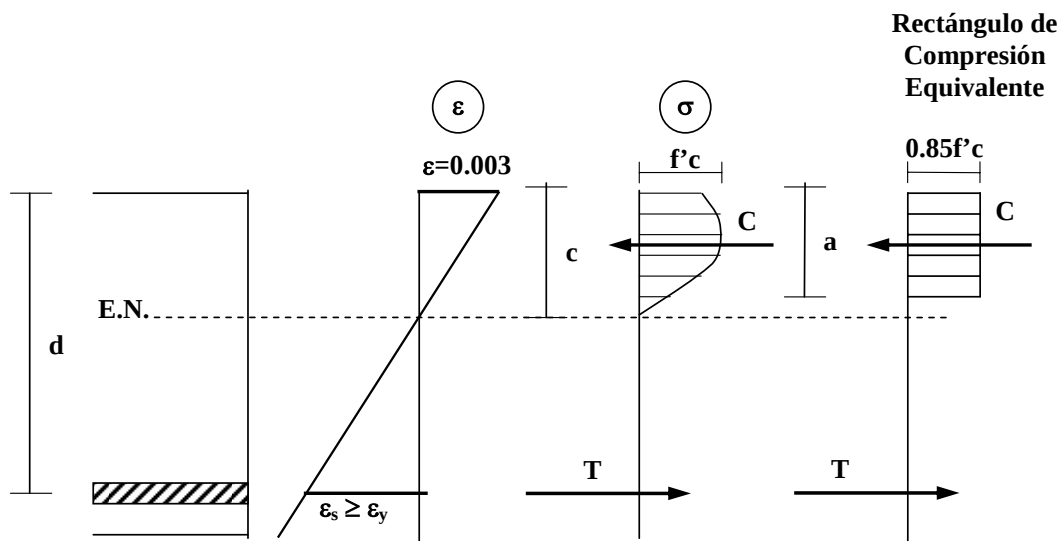


Figura 7.6: Rectángulo de compresión equivalente bajo cargas últimas.

La altura del bloque de compresión rectangular equivalente (de acuerdo al modelo de Whitney), para secciones transversales rectangulares, se calcula mediante la siguiente expresión [ACI 10.2.7.1]:

$$a = \beta_1 \cdot c$$

Ecuación (7.1)

El valor de β_1 se estima a partir de la siguiente tabla [ACI 10.2.3]:

Tabla 7.1: Valores del coeficiente β_1 .

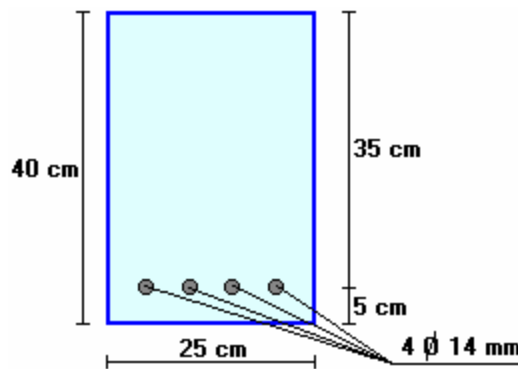
f'_c (Kg/cm ²)	β_1
210	0.85
280	0.85
350	0.80
420	0.75
490	0.70
≥560	0.65

Hasta resistencias de 280 Kg/cm^2 , el valor de β_1 es de 0.85, y por cada incremento de resistencia de 70 Kg/cm^2 , β_1 decrece en 0.05, sin bajar de 0.65. Para valores de resistencia intermedios se debe realizar una interpolación lineal.

Los ensayos experimentales han demostrado que el modelo de Whitney es conservador en cuanto al cálculo de la magnitud de la fuerza de compresión, lo que provoca que la verdadera posición del eje neutro sea ligeramente superior a la que aparece en los cálculos. Ese hecho es beneficioso desde el punto de vista de aseguramiento de la ductilidad de las estructuras de hormigón armado.

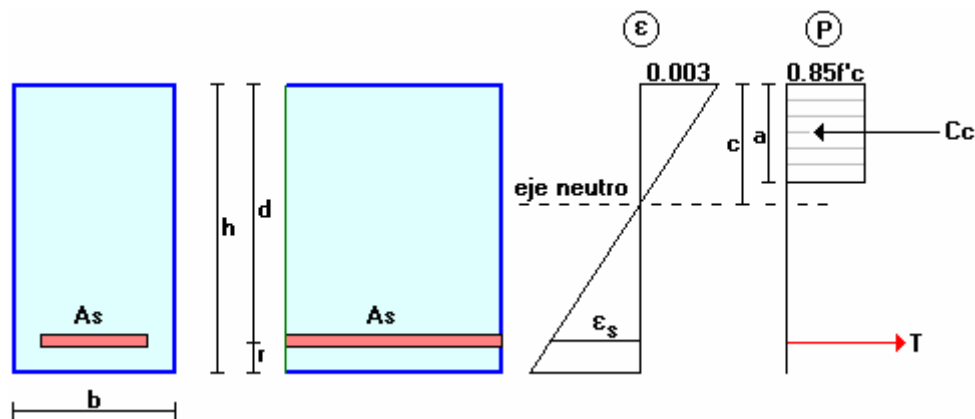
EJEMPLO 7.1:

Determinar la capacidad resistente última de la siguiente viga de sección transversal rectangular, si el hormigón tiene una resistencia a la rotura $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y el acero tiene un esfuerzo de fluencia $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.



Solución:

En primer lugar se dibuja el diagrama de deformaciones unitarias, y el diagrama de esfuerzos y fuerzas que se espera que tenga la viga:



El diagrama de deformaciones unitarias se caracteriza por tener un valor de 0.003 en la fibra extrema de compresión del hormigón, conforme a los códigos.

El esfuerzo uniforme equivalente de compresión en el hormigón es “ $0.85 f'_c$ ”.

La sección de acero en la zona traccionada es:

$$A_s = 4 \times 1.54 \text{ cm}^2 = 6.16 \text{ cm}^2$$



Se puede suponer que el acero ha alcanzado el nivel de fluencia (deberá verificarse posteriormente) por lo que:

$$\epsilon_s > \epsilon_y \Rightarrow F_s = F_y$$

La fuerza de tracción **T** es:

$$T = A_s \cdot F_y$$

$$T = (6.16 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2)$$

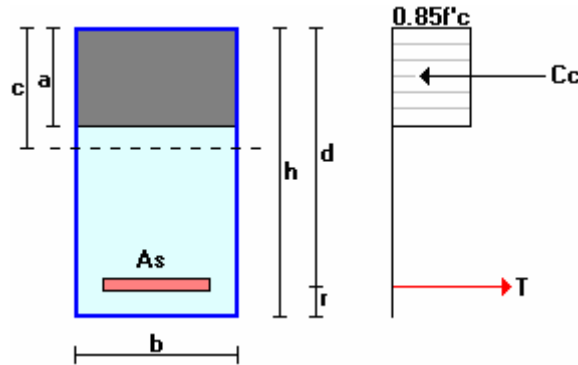
$$T = 25872 \text{ Kg}$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales la resultante de la compresión en el hormigón (**Cc**) es igual en magnitud a la fuerza de tracción del acero.

$$C_c = T$$

$$C_c = 25872 \text{ Kg}$$

La fuerza de compresión también puede calcularse como el producto del esfuerzo uniforme por el área sobre la que se aplica ese esfuerzo.



$$C_c = (0.85 f'c) \cdot b \cdot a$$

Reemplazando los datos conocidos en la ecuación previa se tiene:

$$(25872) = (0.85)(210)(25)(a)$$

Despejando “a”:

$$a = \frac{(25872)}{(0.85)(210)(25)}$$

$$a = 5.80 \text{ cm.}$$

La relación entre “a” y “c” es:

$$a = \beta_1 \cdot c$$

Despejando “c” se tiene:

$$c = \frac{a}{\beta_1}$$

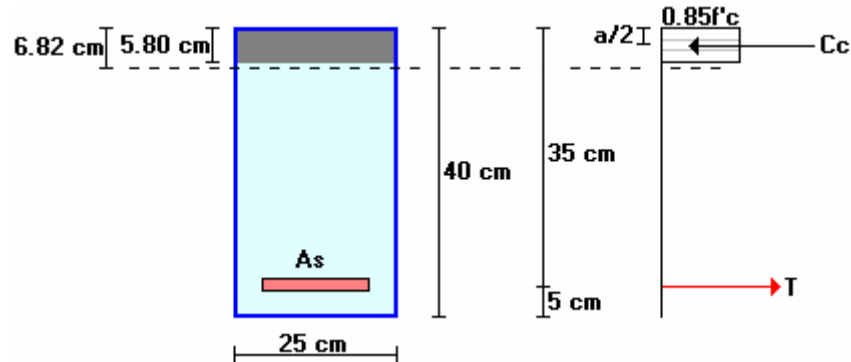
Para hormigones cuya resistencia característica es 210 Kg/cm², el valor de β_1 , es de 0.85:



$$c = \frac{5.80 \text{ cm}}{0.85}$$

$$c = 6.82 \text{ cm}$$

Se grafica detalladamente, y a escala, la nueva información:



El momento flector nominal es igual a la magnitud de la resultante de compresión o tracción multiplicada por el brazo de palanca ($d - a/2$).

$$M_n = T \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

Reemplazando los valores correspondientes:

$$M_n = (25872 \text{ Kg}) \cdot \left(35 \text{ cm} - \frac{5.80 \text{ cm}}{2} \right)$$

$$M_n = 830491 \text{ Kg-cm}$$

El momento flector resistente último se obtiene al multiplicar el momento nominal por el factor de reducción de capacidad.

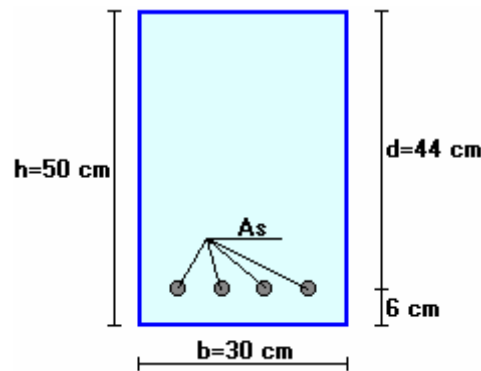
$$M_u = \phi \cdot M_n$$

$$M_u = (0.90) \cdot (830491 \text{ Kg-cm})$$

$$M_u = 747442 \text{ Kg-cm}$$

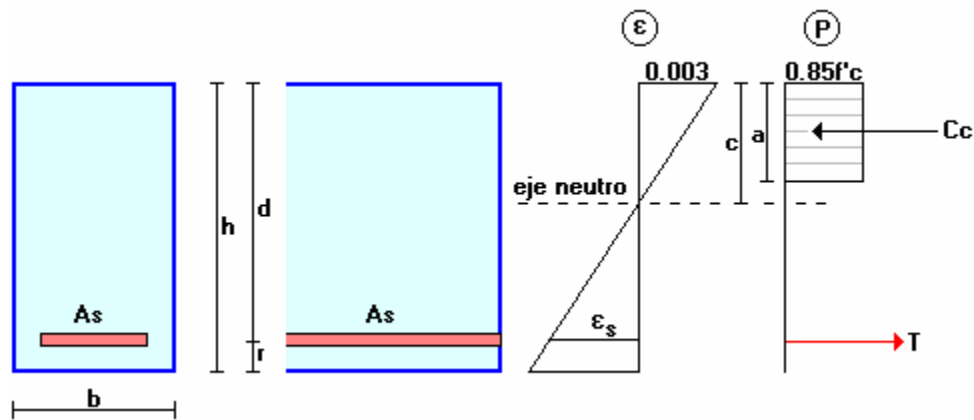
EJEMPLO 7.2:

Diseñar una viga cuya sección transversal es de 30 cm de base por 50 cm de altura geométrica, que está sometida a un momento flector último de 23 T-m. La viga utiliza un hormigón con resistencia característica de 210 Kg/cm^2 , y acero con esfuerzo de fluencia de 4200 Kg/cm^2 . La distancia desde la cara exterior hasta el centro de gravedad de las varillas de acero traccionado es de 6 cm.



Solución:

Se dibuja un diagrama con las fuerzas de compresión y tracción.



A partir del diagrama previo se puede calcular el Momento Flector Nominal **Mn**.

$$M_n = T \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

El momento último se calcula con:

$$M_u = \phi \cdot M_n$$

De donde:

$$M_u = \phi \cdot T \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

Pero si el acero se encuentra en fluencia, la fuerza de tracción **T** sería:

$$T = A_s \cdot F_y$$

Reemplazando en la ecuación previa:

$$M_u = \phi \cdot A_s \cdot F_y \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

Si se conociera la altura del bloque de compresión “a”, podríamos determinar la magnitud de la sección de acero de tracción “As”.



$$A_s = \frac{M_u}{\phi \cdot F_y \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)} \quad \text{Ecuación (7.2)}$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales, la resultante de compresión **C_c** debe ser igual a la fuerza de tracción **T**.

$$C_c = T$$

La fuerza tracción se definió previamente, y la fuerza de compresión sería:

$$C_c = 0.85 f'_c \cdot a \cdot b$$

De donde:

$$0.85 f'_c \cdot a \cdot b = A_s \cdot F_y$$

Despejando “a” se tiene:

$$a = \frac{A_s \cdot F_y}{0.85 f'_c \cdot b} \quad \text{Ecuación (7.3)}$$

Las 2 ecuaciones (7.11 y 7.12) expresan la interdependencia entre la sección de acero requerida para absorber un momento flector último y la altura del bloque de compresión.

Primera Aproximación:

Se supone que “a” tiene un valor estimado de 8 cm (este es un valor totalmente arbitrario, pero en un diseño acorde a los códigos un 20% de la altura efectiva es un buen punto de partida – 20% de 44 cm).

$$a = 8 \text{ cm}$$

Se podría estimar la sección transversal de acero mediante la Ecuación (7.2).

$$A_s = \frac{M_u}{\phi \cdot F_y \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)}$$

$$A_s = \frac{2300000 \text{ Kg} \cdot \text{cm}}{(0.90) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2) \cdot \left(44 \text{ cm} - \frac{8 \text{ cm}}{2} \right)}$$

$$A_s = 15.21 \text{ cm}^2$$

Luego se aplica la Ecuación (7.3) para obtener una mejor estimación de la altura del bloque de compresión “a”.

$$a = \frac{A_s \cdot F_y}{0.85 f'_c \cdot b}$$

$$a = \frac{(15.21 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2)}{(0.85) \cdot (210 \text{ Kg/cm}^2) \cdot (30 \text{ cm})}$$

$$a = 11.93 \text{ cm}$$



Se estimó inicialmente un valor de “a” de **8 cm**, y se concluyó que una mejor aproximación era **11.93 cm**, lo que requiere un reajuste del proceso.

Segunda Aproximación:

El nuevo valor de “a” es sin duda una mejor aproximación al valor real, por lo que se lo utilizará en esta segunda fase, que es una repetición de la primera fase:

$$a = 11.93 \text{ cm}$$

Se utiliza la Ecuación (7.2) para mejorar la estimación de “As”.

$$A_s = \frac{M_u}{\phi \cdot F_y \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)}$$
$$A_s = \frac{2300000 \text{ Kg} - \text{cm}}{(0.90) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2) \cdot \left(44 \text{ cm} - \frac{11.93 \text{ cm}}{2} \right)}$$

$$A_s = 16.00 \text{ cm}^2$$

Con la Ecuación (7.3) se obtiene la altura del bloque de compresión.

$$a = \frac{A_s \cdot F_y}{0.85 f'_c \cdot b}$$
$$a = \frac{(16.00 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2)}{(0.85) \cdot (210 \text{ Kg/cm}^2) \cdot (30 \text{ cm})}$$

$$a = 12.53 \text{ cm}$$

Debido a que aún existe una diferencia importante (mucho menor que en la primera aproximación) entre el valor de “a” asumido inicialmente (**11.93 cm**) y el valor recalculado (**12.53 cm**), se necesita una tercera etapa de aproximación.

Tercera Aproximación:

$$a = 12.53 \text{ cm}$$

Se utiliza la Ecuación (7.2) para estimar el valor de “As”.

$$A_s = \frac{M_u}{\phi \cdot F_y \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)}$$
$$A_s = \frac{2300000 \text{ Kg} - \text{cm}}{(0.90) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2) \cdot \left(44 \text{ cm} - \frac{12.53 \text{ cm}}{2} \right)}$$

$$A_s = 16.12 \text{ cm}^2$$

Con la Ecuación (7.3) se obtiene la altura del bloque de compresión.

$$a = \frac{A_s \cdot F_y}{0.85 f'_c \cdot b}$$



$$a = \frac{(16.12 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2)}{(0.85) \cdot (210 \text{ Kg/cm}^2) \cdot (30 \text{ cm})}$$

$$a = 12.64 \text{ cm}$$

El valor de “a” asumido inicialmente (**12.53 cm**) y el valor recalculado (**12.64**) son suficientemente cercanos para afirmar que se ha alcanzado la convergencia. En la siguiente tabla, que resume el proceso anterior, se puede observar tal convergencia:

Iteración	a _{asumido}	As	a _{recalculado}
1	8.00 cm	15.21 cm ²	11.93 cm
2	11.93 cm	16.00 cm ²	12.53 cm
3	12.53 cm	16.12 cm ²	12.64 cm

Se concluye que:

$$As = 16.12 \text{ cm}^2$$

Antes de escoger las varillas que proporcionen la sección transversal requerida se debe verificar si el acero realmente se encuentra en fluencia.

La relación entre la posición del eje neutro “c” y la altura del bloque de compresión “a” es:

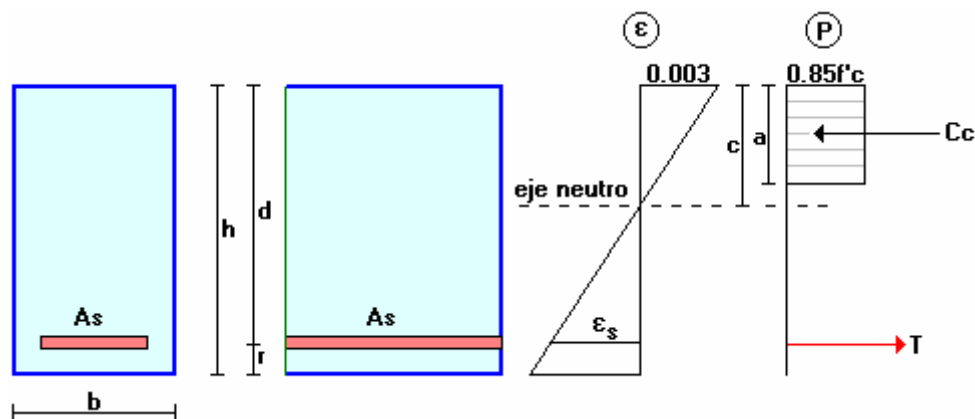
$$a = \beta_1 \cdot c$$

$$c = \frac{a}{\beta_1}$$

$$c = \frac{12.64 \text{ cm}}{0.85}$$

$$c = 14.87 \text{ cm}$$

Se representa gráficamente el diagrama de deformaciones unitarias y el diagrama de fuerzas y esfuerzos.



Por semejanza de triángulos se puede determinar la deformación unitaria del acero ϵ_s .

$$\frac{\epsilon_s}{d - c} = \frac{0.003}{c}$$

Reemplazando los valores conocidos y simplificando se tiene:



$$\frac{\varepsilon_s}{44 - 14.87} = \frac{0.003}{14.87}$$

$$\varepsilon_s = 0.00588$$

La deformación unitaria de fluencia es:

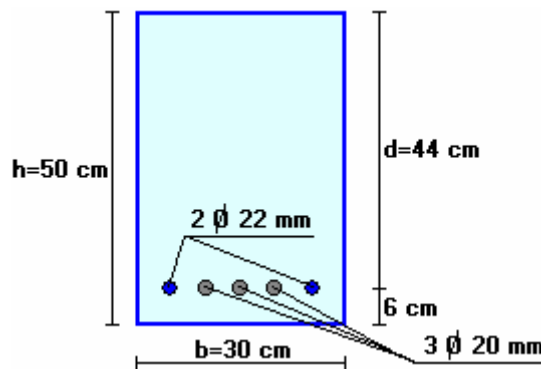
$$\varepsilon_y = \frac{F_y}{E_s}$$

$$\varepsilon_y = \frac{4200}{2100000}$$

$$\varepsilon_y = 0.002$$

Debido a que la deformación unitaria en el acero ε_s es mayor que la deformación de fluencia ε_y , el acero se encuentra en fluencia.

La sección transversal de acero que requiere la viga podría estar conformada por 3 varillas de 20 mm de diámetro más 2 varillas de 22 mm, que proporcionan un área total de 17.02 cm^2 , algo mayor que los 16.12 cm^2 requeridos.



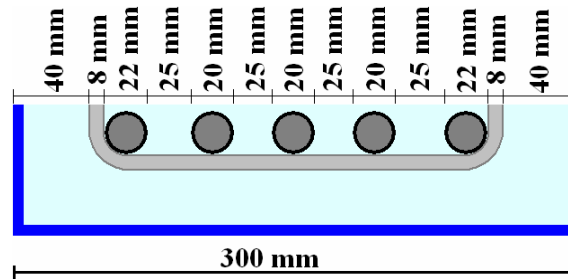
El CEC 2001 [CEC 7.7] y el ACI 2008 [ACI 7.7] establecen que el recubrimiento mínimo del acero en vigas debe ser de 4 cm para protección de las varillas, lo que añadido al diámetro de los estribos (8 mm) y la mitad del diámetro de las varillas (11 mm) proporciona el siguiente valor:

Distancia al centro de gravedad del acero = 4 cm + 0.8 cm + 1.1 cm = 5.9 cm.

Ese valor es consistente con los 6 cm propuestos desde la cara exterior del hormigón hasta el centro de gravedad de las varillas.

Los códigos de diseño (ACI 2005 y CEC 2001) [ACI 7.6.1, ACI 3.3.2] disponen que para varillas a tracción, el espaciamiento mínimo entre caras exteriores de las varillas debe ser el mayor entre el diámetro de las varillas, 4/3 el tamaño mayor del agregado grueso y 25 mm, lo que significa que en este caso el espaciamiento mínimo es de 25 mm.

La distribución tentativa de las varillas calculadas sería:



Para varillas longitudinales cuyo diámetro fuera superior a los 22 mm, el ancho de 30 cm de la viga no sería suficiente para colocar 5 varillas aisladas pues no se cumpliría con las condiciones básicas de recubrimiento del acero (sólo podrían ubicarse hasta 4 varillas).

NOTA: Debe mencionarse, en este punto, que el diseño realizado hasta el momento solamente toma en consideración aspectos relativos a la capacidad resistente del hormigón armado, pero los aspectos relacionados con ductilidad no han sido analizados. Esos aspectos adicionales se estudiarán detalladamente en el numeral subsiguiente de este capítulo, en lo referente a cuantías de armado máximo.

7.3 ECUACIONES PARA LA OBTENCIÓN DE LA SECCIÓN TRANSVERSAL DE ACERO EN VIGAS RECTANGULARES:

En el ejemplo anterior se dedujeron 2 ecuaciones que permiten realizar el diseño, de manera iterativa, de la sección de acero requerida en una sección rectangular, para resistir un momento flector último específico. Tales ecuaciones son

$$A_s = \frac{M_u}{\phi \cdot F_y \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)} \quad \text{Ecuación (7.2)}$$

$$a = \frac{A_s \cdot F_y}{0.85 f'_c \cdot b} \quad \text{Ecuación (7.3)}$$

Se puede reemplazar la Ecuación (7.3) en la Ecuación (7.2):

$$A_s = \frac{M_u}{\phi \cdot F_y \cdot \left(d - \frac{\frac{A_s \cdot F_y}{0.85 f'_c \cdot b}}{2} \right)}$$

$$A_s = \frac{M_u}{\phi \cdot F_y \cdot \left(d - \frac{A_s \cdot F_y}{1.70 f'_c \cdot b} \right)}$$

Se obtiene el denominador común en el denominador del miembro derecho, y se simplifica:



$$A_s = \frac{M_u}{\phi \cdot F_y \cdot \left(\frac{1.70f'c \cdot b \cdot d - A_s \cdot F_y}{1.70f'c \cdot b} \right)}$$

$$A_s = \frac{1.70f'c \cdot b \cdot M_u}{\phi \cdot F_y \cdot (1.70f'c \cdot b \cdot d - A_s \cdot F_y)}$$

$$A_s \cdot F_y \cdot (1.70f'c \cdot b \cdot d - A_s \cdot F_y) = \frac{1.70f'c \cdot b \cdot M_u}{\phi}$$

Se destruyen los paréntesis:

$$1.70f'c \cdot b \cdot d \cdot (A_s \cdot F_y) - (A_s \cdot F_y)^2 = \frac{1.70f'c \cdot b \cdot M_u}{\phi}$$

$$(A_s \cdot F_y)^2 - 1.70f'c \cdot b \cdot d \cdot (A_s \cdot F_y) + \frac{1.70f'c \cdot b \cdot M_u}{\phi} = 0$$

Se llega a una ecuación de segundo grado en la que la incógnita es “**As.Fy**”, cuya forma general es:

$$x^2 + b \cdot x + c = 0$$

La solución simplificada de este tipo de ecuación es:

$$x = -\left(\frac{b}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$$

Aplicando la solución a la ecuación obtenida:

$$A_s \cdot F_y = (0.85f'c \cdot b \cdot d) \pm \sqrt{(0.85f'c \cdot b \cdot d)^2 - \frac{1.70f'c \cdot b \cdot M_u}{\phi}}$$

Se puede reorganizar la fracción dentro del radical de modo que se pueda factorar la expresión **(0.85f'c.b.d)²**

$$A_s \cdot F_y = (0.85f'c \cdot b \cdot d) \pm \sqrt{(0.85f'c \cdot b \cdot d)^2 - (0.85f'c \cdot b \cdot d)^2 \frac{2 \cdot M_u}{0.85\phi \cdot f'c \cdot b \cdot d^2}}$$

$$A_s \cdot F_y = (0.85f'c \cdot b \cdot d) \pm \sqrt{(0.85f'c \cdot b \cdot d)^2 \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot M_u}{0.85\phi \cdot f'c \cdot b \cdot d^2} \right]}$$

Se extrae el factor fuera del radical:

$$A_s \cdot F_y = (0.85f'c \cdot b \cdot d) \pm (0.85f'c \cdot b \cdot d) \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_u}{0.85\phi \cdot f'c \cdot b \cdot d^2}}$$

Se factora:

$$A_s F_y = (0.85 f'_c b d) \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{0.85 \phi f'_c b d^2}} \right]$$

Se puede generar una constante de simplificación:

$$k = 0.85 f'_c b d \quad \text{Ecuación (7.4)}$$

Reemplazando en la expresión previa se tiene:

$$A_s F_y = k \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{\phi k d}} \right]$$

Despejando “ A_s ”:

$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{\phi k d}} \right]$$

Si bien matemáticamente existen 2 soluciones, físicamente sólo existe la que tiene signo negativo en el radical (valor menor).

$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 M_u}{\phi k d}} \right] \quad \text{Ecuación (7.5)}$$

La representación gráfica de la solución obtenida (con el signo negativo del radical) sería:

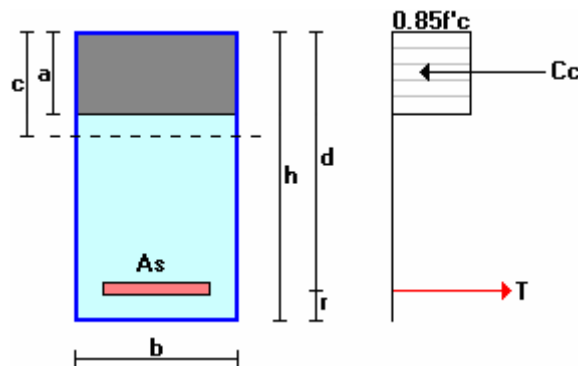


Figura 7.7: Representación gráfica de la solución de la ecuación de armadura por flexión, con el signo negativo del radical.

La solución con el signo positivo corresponde a un bloque de compresión irreal extremadamente grande con un brazo de palanca pequeño, de modo que el momento que se genera (fuerza por brazo de palanca) se mantenga similar al del gráfico previo.

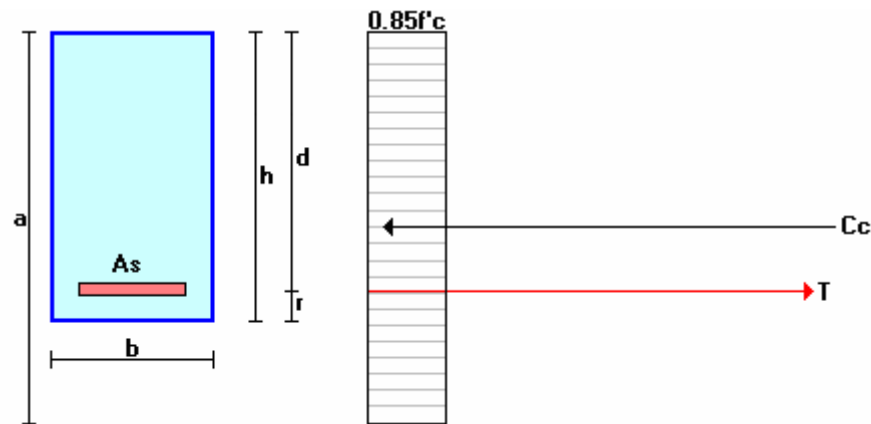
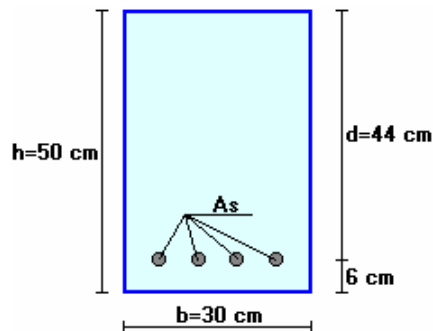


Figura 7.8: Representación gráfica de la solución irreal de la ecuación de armadura por flexión, con el signo positivo del radical.

EJEMPLO 7.3:

Mediante el uso de las fórmulas deducidas previamente, diseñar la viga del ejemplo previo (ejemplo 7.2).



Solución:

Las fórmulas de diseño son:

$$k = 0.85f'c.b.d$$

Ecuación (7.4)

$$As = \frac{k}{Fy} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2.Mu}{\phi.k.d}} \right]$$

Ecuación (7.5)

Los datos de la viga, en unidades compatibles, son:

$$Mu = 2300000 \text{ Kg-cm}$$

$$f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$Fy = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 44 \text{ cm}$$

Utilizando la Ecuación (7.4) se tiene:

$$k = 0.85f'c.b.d$$

$$k = 0.85(210 \text{ Kg/cm}^2).(30 \text{ cm}).(44 \text{ cm})$$



$$k = 235620 \text{ Kg}$$

Reemplazando en la Ecuación (7.5):

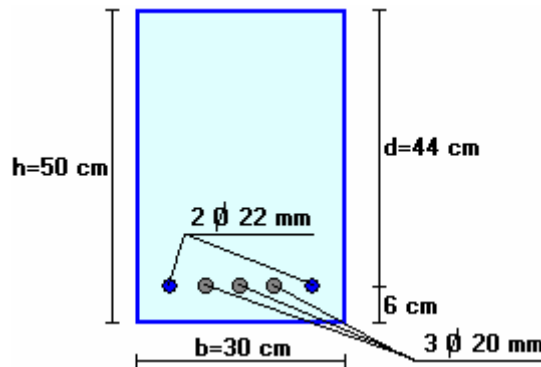
$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_u}{\phi \cdot k \cdot d}} \right]$$

$$A_s = \frac{235620 \text{ Kg}}{4200 \text{ Kg/cm}^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (23000000 \text{ Kg} \cdot \text{cm})}{(0.90) \cdot (235620 \text{ Kg}) \cdot (44 \text{ cm})}} \right]$$

$$A_s = 16.15 \text{ cm}^2$$

La diferencia entre la sección de acero que se obtuvo por medios iterativos y la que se obtuvo con las ecuaciones exactas es mínima (16.12 cm^2 y 16.15 cm^2).

La sección transversal de acero será la misma, es decir podría estar conformada por 3 varillas de 20 mm de diámetro más 2 varillas de 22 mm, que proporcionan un área total de 17.02 cm^2 .



Si se utiliza el signo positivo del radical en el cálculo de la sección de acero se tendría:

$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_u}{\phi \cdot k \cdot d}} \right]$$

$$A_s = \frac{235620 \text{ Kg}}{4200 \text{ Kg/cm}^2} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (23000000 \text{ Kg} \cdot \text{cm})}{(0.90) \cdot (235620 \text{ Kg}) \cdot (44 \text{ cm})}} \right]$$

$$A_s = 96.04 \text{ cm}^2$$

La altura del bloque de compresión, si el acero está en fluencia, sería:

$$a = \frac{(96.04 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2)}{0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})}$$

$$a = \frac{(96.04 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2)}{0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})}$$

$$a = 75.33 \text{ cm}$$

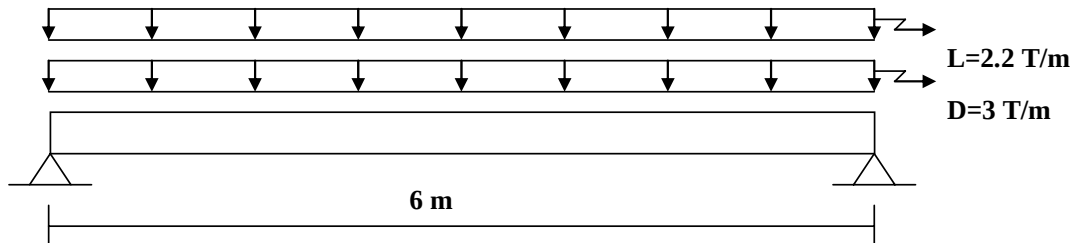
Esta magnitud es incompatible con la geometría de la sección transversal, pues una viga de 50 cm de altura jamás podría tener un bloque rectangular de compresión de 75.33 cm



de altura (o una zona comprimida de $75.33/0.85 = 88.62$ cm de altura), razón por la que esta solución irreal debe ser desechada.

EJEMPLO 7.4:

Diseñar la viga simplemente apoyada de la figura.



La sección transversal de la viga mide 30 cm x 55 cm, el hormigón tiene una resistencia característica $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$, y el acero tiene un esfuerzo de fluencia $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.

Solución:

La carga última se calcula mediante la siguiente expresión:

$$U = 1.4 D + 1.7 L$$

De donde la carga distribuida última será:

$$q_u = 1.4 (3) + 1.7 (2.2)$$

$$q_u = 7.94 \text{ T/m}$$

El momento flector máximo se producirá en el centro de la luz y su valor será:

$$M_u = \frac{(7.94) \cdot (6)^2}{8}$$

$$M_u = 35.73 \text{ T-m}$$

Para mantener compatibilidad de unidades el momento último se debe expresar en Kg y cm.

$$M_u = 3573000 \text{ Kg-cm}$$

Aplicando el formulario correspondiente al cálculo de la sección transversal de acero se tiene:

$$k = 0.85 f'_c b d$$

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 49 \text{ cm}$$

$$k = 0.85(210) \cdot (30) \cdot (49)$$

$$k = 262395$$

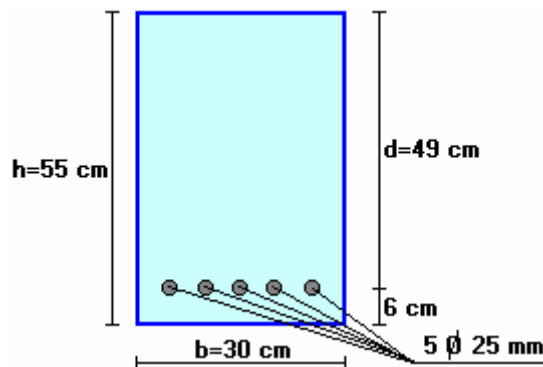
$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_u}{\phi \cdot k \cdot d}} \right]$$

$$A_s = \frac{262395}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (3573000)}{(0.90) \cdot (262395) \cdot (49)}} \right]$$

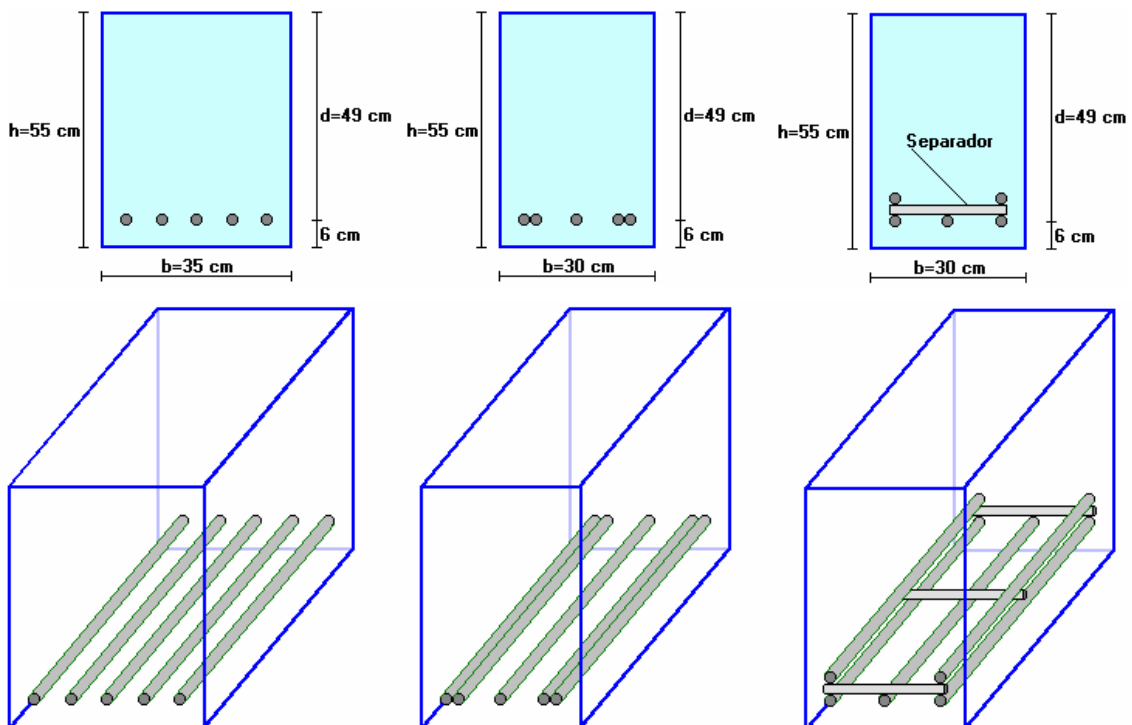
$$A_s = 23.84 \text{ cm}^2$$

En varillas comerciales la sección crítica requiere de 5 varillas de 25 mm de diámetro ($A = 24.55 \text{ cm}^2$), una sección ligeramente superior a la requerida.

$$A_s = 5 \phi 25 \text{ mm}$$



Las 5 varillas de 25 mm separadas no alcanzan en un ancho de viga de 30 cm, por lo que se presentan 3 alternativas de solución: se puede incrementar la base de la viga a 35 cm para que quepan todas las varillas; se pueden colocar las varillas en 2 capas con varillas alineadas verticalmente; o se puede recurrir a formar paquetes de 2 varillas en las esquinas y una varilla en el centro.



NOTA 1: El número máximo de varillas de acero que pueden conformar un paquete es cuatro [ACI 7.6.6.1], que deben colocarse dentro de estribos [ACI 7.6.6.2]. Solamente las varillas cuyo diámetro no sobrepase de 36 mm pueden conformar paquetes [ACI 7.6.6.3].

NOTA 2: Al colocar las varillas de acero en capas, se deben ubicar alineadas verticalmente, con la presencia de un separador (un pedazo de varilla de hierro) de al menos 25 mm de espesor entre capa y capa [ACI 7.6.2].

En el presente caso se puede escoger conformación de paquetes de varillas.

Cuando se tienen paquetes de varillas la separación mínima entre caras externas se calcula suponiendo que el diámetro del paquete es equivalente al diámetro de una varilla ficticia cuya área es igual a la suma de las áreas de las varillas en dicho paquete [ACI 7.6.6.5].

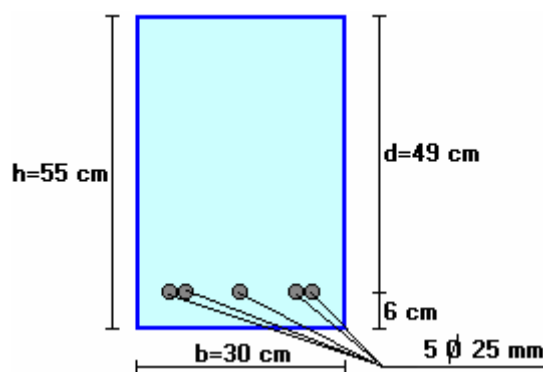


Tabla 7.2: *Diámetro equivalente de los paquetes de varillas.*

Número de Varillas en el Paquete	Geometría del Paquete	Diámetro de las Varillas	Diámetro Equivalente del Paquete
2		D	1.41D
3		D	1.73D
4		D	2D

7.4 CUANTÍAS DE ARMADO:

a. DEFINICIÓN:

En una viga, la **cuantía de armado** es el cociente entre la sección transversal de acero y la sección efectiva de hormigón; se representa con el símbolo “ ρ ”.

Para vigas rectangulares se tendría la siguiente expresión:

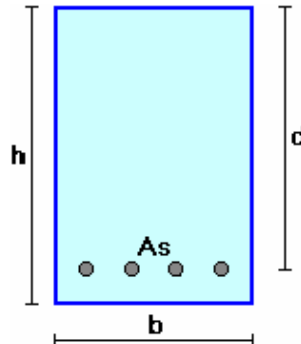
$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \text{Ecuación (7.6)}$$

Donde:

As: Sección transversal de acero de tracción
 b: Base de la sección rectangular

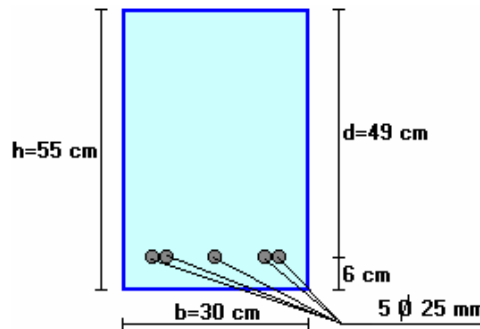


- d: Altura efectiva de la sección rectangular (distancia desde el centro de gravedad de las varillas de acero hasta la fibra comprimida extrema de hormigón)



EJEMPLO 7.5:

Determinar la cuantía de armado de una viga que tiene la siguiente sección transversal:



Solución:

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} = \frac{24.54 \text{ cm}^2}{(30 \text{ cm}) \cdot (49 \text{ cm})}$$

$\rho = 0.0167$

NOTA: Para nuestro medio, cuantías de armado longitudinal promedio en vigas entre 1% y 1.2% denotan un buen diseño técnico-económico.

b. CUANTÍA BALANCEADA:

Es la cuantía de armado en una viga que simultáneamente provoca la deformación unitaria máxima permitida en el hormigón de compresión (0.003), y que el acero de tracción empiece a fluir [ACI 10.3.2].

Se dibuja la sección transversal (en este caso una sección rectangular) de una viga con su diagrama de deformaciones y de fuerzas para la condición balanceada.

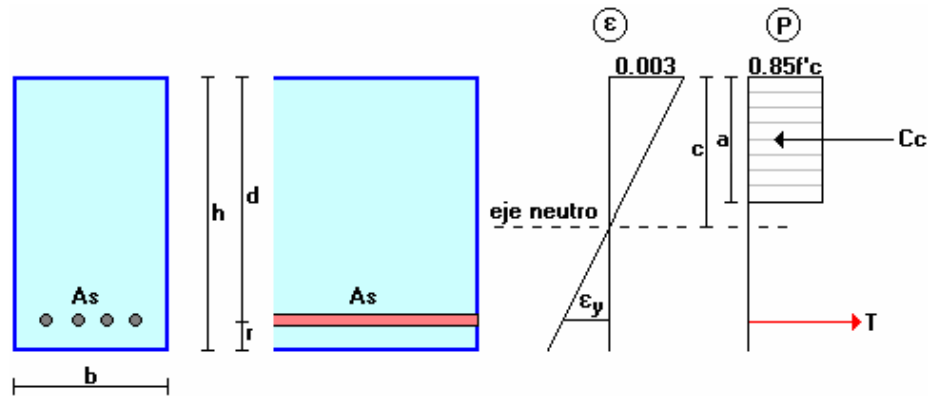


Figura 7.9: Deformaciones unitarias, esfuerzos y posición del eje neutro para la cuantía balanceada.

La deformación unitaria en el acero, el instante de iniciar la fluencia se puede calcular con la siguiente expresión:

$$\varepsilon_y = \frac{F_y}{E_s}$$

Se puede calcular la posición del eje neutro por semejanza de triángulos:

$$\frac{c}{0.003} = \frac{d - c}{\varepsilon_y}$$

Reemplazando ε_y :

$$\frac{c}{0.003} = \frac{d - c}{\frac{F_y}{E_s}}$$

El módulo de elasticidad del acero E_s es 2'100.000 Kg/cm².

$$\frac{c}{0.003} = \frac{d - c}{\frac{F_y}{2100000}}$$

Simplificando:

$$\left(\frac{c}{0.003}\right) \left(\frac{F_y}{2100000}\right) = d - c$$

$$\frac{c \cdot F_y}{6300} = d - c$$

$$c \cdot F_y = 6300(d - c)$$

$$c \cdot F_y = 6300d - 6300c$$

Despejando "c":

$$c \cdot F_y + 6300c = 6300d$$

$$c \cdot (F_y + 6300) = 6300d$$



$$c = \frac{6300}{F_y + 6300} \cdot d$$

La resultante de compresión en el hormigón es:

$$C_c = 0.85 f'_c \cdot b \cdot a$$

La relación entre la altura del bloque de compresión y la posición del eje neutro es:

$$a = \beta_1 \cdot c$$

Se reemplaza en la ecuación previa:

$$C_c = 0.85 f'_c \cdot b \cdot \beta_1 \cdot c$$

Reemplazando el valor de “c”:

$$C_c = 0.85 f'_c \cdot b \cdot \beta_1 \cdot \frac{6300}{F_y + 6300} \cdot d$$

Por otro lado, la fuerza de tracción en el acero es:

$$T = A_s \cdot F_y$$

Pero por equilibrio las fuerzas de tracción y compresión deben ser iguales:

$$T = C$$

$$A_s \cdot F_y = 0.85 f'_c \cdot b \cdot \beta_1 \cdot \frac{6300}{F_y + 6300} \cdot d$$

Dado que la cuantía de armado es $A_s/(b \cdot d)$ conviene reproducir esa expresión en el miembro izquierdo.

$$\frac{A_s}{b \cdot d} = \frac{0.85 f'_c \cdot \beta_1}{F_y} \cdot \frac{6300}{F_y + 6300}$$

$$\rho = \frac{0.85 f'_c \cdot \beta_1}{F_y} \cdot \frac{6300}{F_y + 6300}$$

La cuantía obtenida es la **cuantía balanceada de una viga rectangular**.

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \cdot \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{6300}{F_y + 6300} \quad \text{Ecuación (7.7)}$$

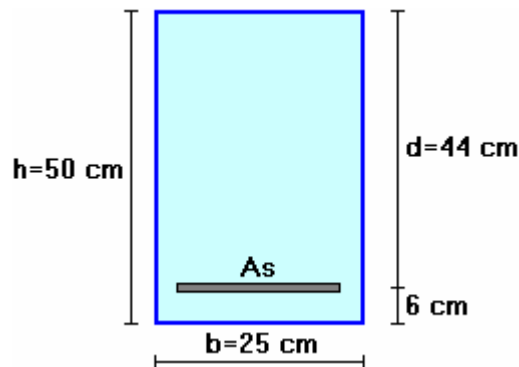
Si se divide numerador y denominador de la fracción derecha para el módulo de elasticidad del acero “Es”, se obtiene una expresión alternativa para la cuantía balanceada de una viga rectangular.

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \cdot \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003} \quad \text{Ecuación (7.8)}$$



EJEMPLO 7.6:

Determinar la sección transversal de acero de tracción que requiere una viga de 25 cm x 50 cm para tener una falla balanceada, si se conoce que la distancia desde la cara exterior al centro de gravedad del acero es de 6cm, que el acero tiene un esfuerzo de fluencia de 4200 Kg/cm² y el hormigón tiene una resistencia característica a la compresión de 280 Kg/cm². Calcular el momento flector último resistente de la sección propuesta.



Solución:

La ecuación que define la cuantía balanceada es:

$$\rho_b = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003}$$

Los datos conocidos son:

$$E_s = 2100000 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

El valor de β_1 para un hormigón de 280 Kg/cm² es:

$$\beta_1 = 0.85$$

Reemplazando los valores conocidos en la ecuación de cuantía balanceada se tiene:

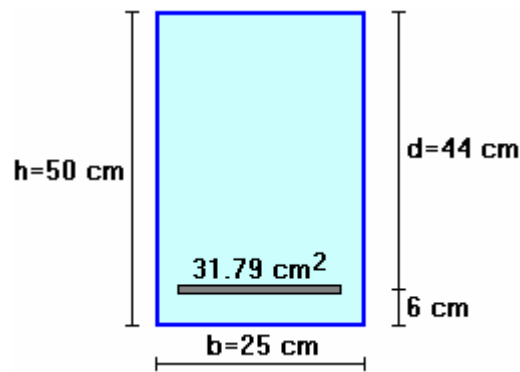
$$\rho_b = 0.85(0.85) \frac{280}{4200} \cdot \frac{0.003}{\frac{4200}{2100000} + 0.003}$$

$$\rho_b = 0.0289$$

La sección transversal de acero es:

$$A_s = \rho \cdot b \cdot d = (0.0289) \cdot (25 \text{ cm}) \cdot (44 \text{ cm})$$

$$A_s = 31.79 \text{ cm}^2$$



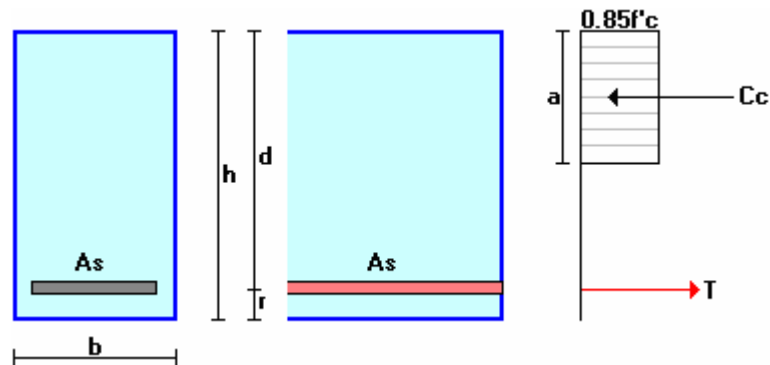
Una vez calculada la sección de acero se procede a determinar el momento flector último resistente.

Dado que se trata de la cuantía balanceada, el esfuerzo en el acero es el de fluencia.

Se determina la fuerza de tracción provocada por los 31.79 cm² de acero.

$$T = A_s \cdot F_y = (31.79 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg / cm}^2)$$

$$T = 133518 \text{ Kg}$$



Por equilibrio de fuerzas horizontales, la fuerza de compresión en el hormigón es igual a la fuerza de tracción en el acero.

$$C_c = T$$

$$C_c = 133518 \text{ Kg}$$

La altura del bloque de compresión es:

$$a = \frac{C_c}{(0.85f'_c) \cdot b} = \frac{133518}{(0.85)(280)(25)}$$

$$a = 22.44 \text{ cm}$$

El momento flector nominal que resiste la sección es:

$$M_n = T \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right) = (133518) \cdot \left(44 - \frac{22.44}{2} \right)$$

$$M_n = 4376720 \text{ Kg - cm} = 43.77 \text{ T - m}$$

El momento flector último resistente es:

$$M_u = \phi \cdot M_n = (0.90) \cdot (43.77)$$

$$M_u = 39.39 \text{ T – m}$$

NOTA: Cuando la sección transversal de acero de la viga propuesta es de 31.79 cm^2 , el acero alcanza la fluencia, a la par que el hormigón llega a su deformación unitaria máxima (0.003). Un diseño de estas características es útil solamente desde el punto de vista académico, pues no presentaría características de ductilidad apropiadas como se podrá observar en el siguiente acápite.

c. CUANTÍAS MÁXIMAS DE ARMADO EN VIGAS:

El CEC-2001, al igual que sus versiones anteriores, establece que en zonas no afectadas por sismos, o estructuras cuyo efecto sísmico es despreciable, la máxima cuantía de armado permitida es el 75% de la cuantía balanceada [CEC 10.3.3].

$$\rho_{\text{máx}} = 0.75\rho_b$$

Ecuación (7.9)

Este criterio asegura que el acero entre en fluencia un poco antes de que el hormigón ingrese en la zona de decrecimiento de capacidad resistente a la compresión, con lo que se logra un cierto nivel de ductilidad de las secciones antes de la falla.

Para secciones rectangulares con aceros de 4200 Kg/cm^2 de fluencia [CEC 21.2.5.1], la condición de cuantía balanceada implica una deformación en el acero de 0.002 cuando el hormigón está al borde de la rotura, lo que provocaría una rotura frágil de la sección. Por su parte una cuantía de armado del 75% de la cuantía balanceada es equivalente a una deformación unitaria mínima del acero de tracción de 0.00367.

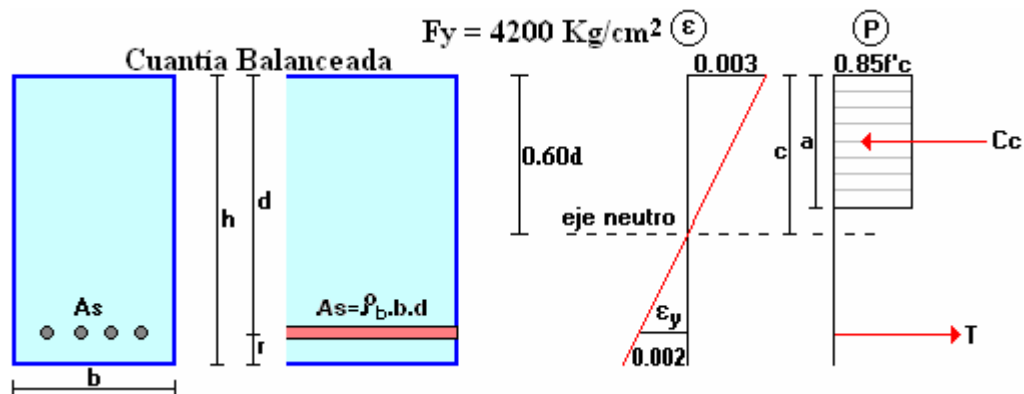


Figura 7.10: Diagramas de deformaciones unitarias y de esfuerzos bajo la cuantía balanceada.

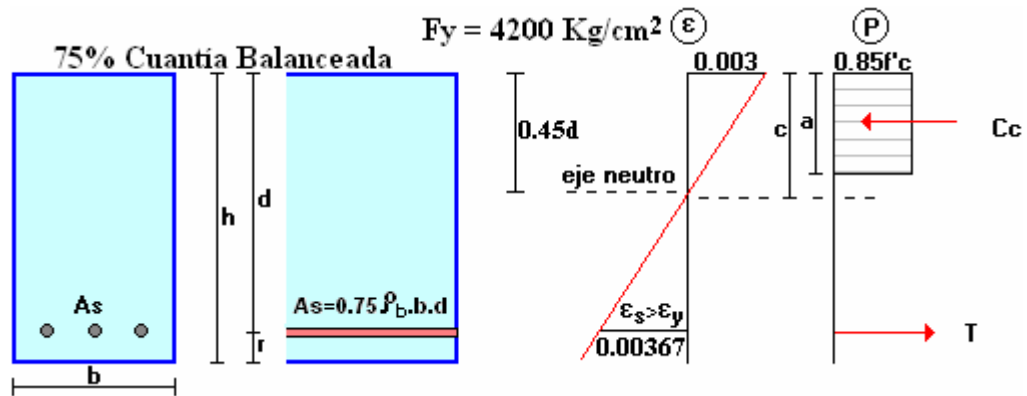


Figura 7.11: Diagramas de deformaciones unitarias y de esfuerzos bajo el 75% de la cuantía balanceada.

Cuando se trabaja con aceros de 4200 Kg/cm² de fluencia, y se analizan los diagramas momento-curvatura básicos, utilizar el 75 % de la cuantía balanceada es equivalente a incrementar en un 33% la curvatura del hormigón armado antes de la falla, con relación a la falla balanceada.

$$\frac{\phi_2}{\phi_1} = \frac{0.003 + 0.00367}{0.003 + 0.002} = 1.33$$

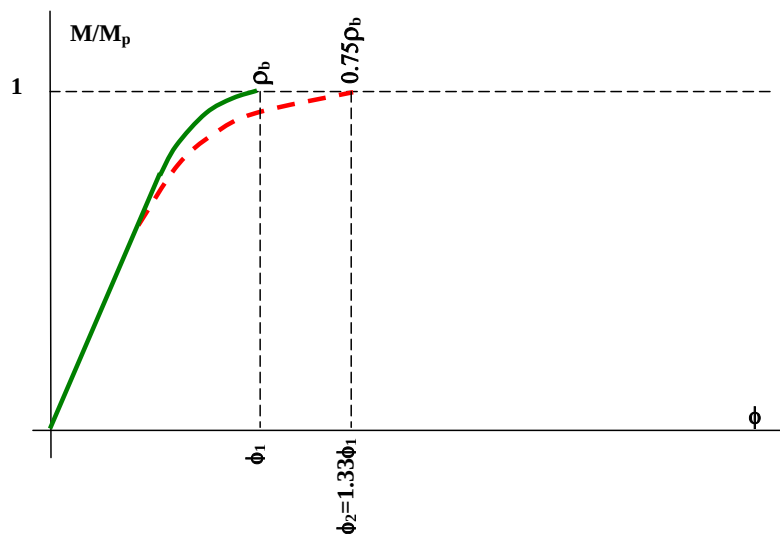


Figura 7.12: Diagrama momento flector normalizado – curvatura.

Cuando las vigas disponen de armadura de compresión, el CEC-2001 [CEC 10.3.3] exige niveles de ductilidad análogos a los analizados para vigas sin armadura de compresión ($\phi_2/\phi_1 \approx 1.33$), de modo que en zonas no afectadas por sismos o en elementos en que el efecto del sismo no es importante, la cuantía máxima del acero de tracción es:

$$\rho_{\max} = 0.75(\rho_b + \rho')$$

Ecuación (7.10)

Donde:

ρ_b : Cuantía balanceada de armado a tracción

ρ' : Cuantía de armado a compresión

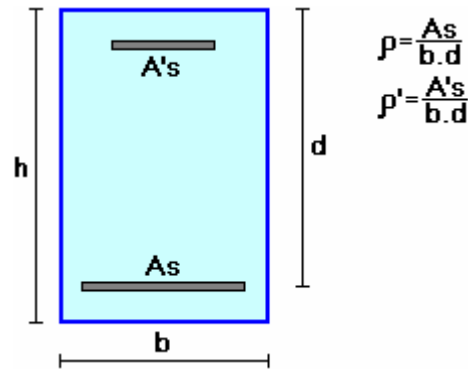


Figura 7.13: Armadura de tracción y de compresión.

A partir de la Ecuación (7.10), si el acero de compresión se encuentra en fluencia, el nivel de ductilidad será igual al logrado en vigas sin armadura de compresión.

Sin embargo, si el acero de compresión no alcanza el esfuerzo de fluencia [ACI 10.2.4] antes que el hormigón llegue a su máxima deformación (esto ocurre particularmente en vigas de peralte limitado en edificaciones pequeñas), los niveles de ductilidad pueden reducirse en alguna magnitud con relación a las vigas que tienen solamente armadura de tracción ($\phi_2/\phi_1 < 1.33$), pues el eje neutro deberá descender para compensar la fuerza horizontal de compresión que no puede proveer el acero.

Por su parte el ACI 2005 es más riguroso en cuanto a niveles de ductilidad especificados para vigas rectangulares, pues exige que la deformación unitaria en el acero de tracción en vigas sea al menos de 0.005 [ACI 10.3.4].

$\epsilon_t \geq 0.005$	Ecuación (7.11)

La deformación de 0.005 en el acero de tracción, en secciones rectangulares con refuerzo de 4200 Kg/cm² es equivalente a una cuantía de armado de 0.625 de la cuantía balanceada ($\rho = 0.625\rho_b$).

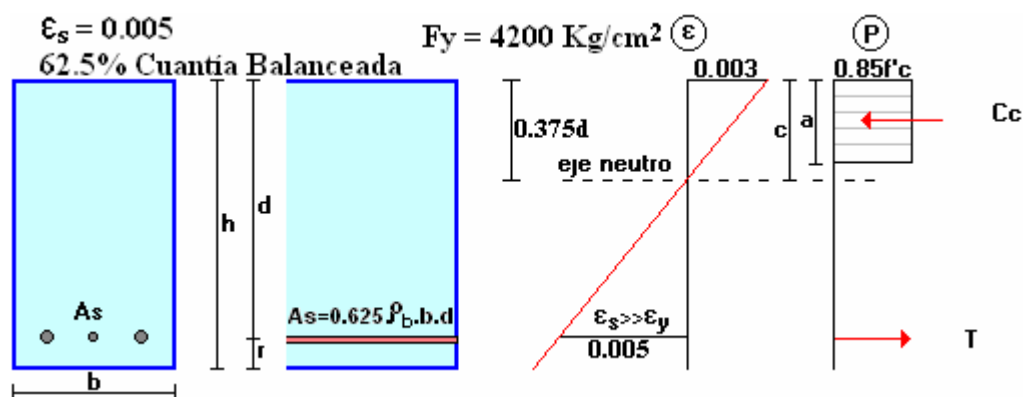


Figura 7.14: Diagramas de deformaciones unitarias y de esfuerzos bajo deformación unitaria en el acero de 0.005

Cuando se analizan los diagramas momento-curvatura básicos, utilizar una deformación mínima en el acero de 0.005 es equivalente a incrementar en un 60% la curvatura del hormigón armado antes de la falla, con relación a la falla balanceada.

$$\frac{\phi_3}{\phi_1} = \frac{0.003 + 0.005}{0.003 + 0.002} = 1.60$$

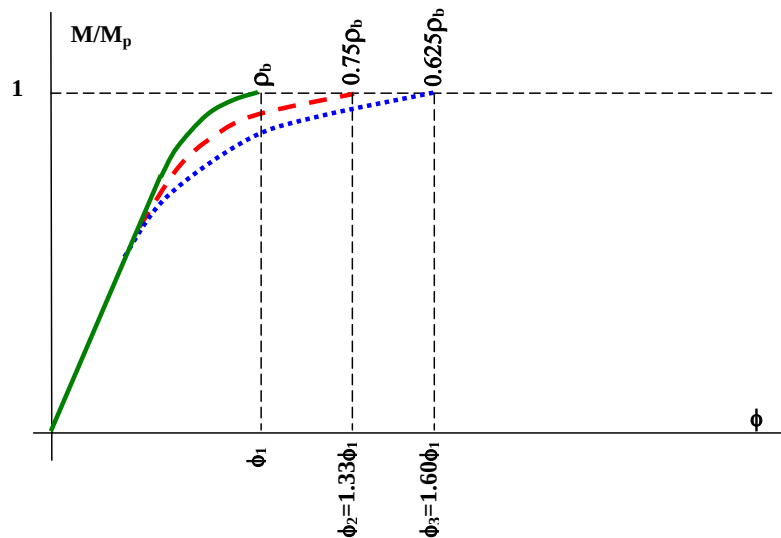


Figura 7.15: Diagramas momento flector normalizado – curvatura.

Es importante mencionar que en el caso de la presencia de armadura de compresión, los niveles de ductilidad exigidos por la deformación de tracción de 0.005 siguen siendo los mismos que cuando no se tiene armadura de compresión, aunque el acero de compresión no alcance la fluencia ($\phi_2/\phi_1 \approx 1.60$), pues por geometría el eje neutro no puede descender.

La versión anterior del Código Ecuatoriano de la Construcción tomaba del SEAOC (Structural Engineers Association of California) una especificación aún más rigurosa respecto a la ductilidad de las secciones sometidas a flexión en zonas sísmicas, pues establecía que la máxima cuantía de armado utilizable era del 50% de la cuantía balanceada.

$$\rho_{\max} = 0.50\rho_b$$

Ecuación (7.12)

Para secciones rectangulares y acero de 4200 Kg/cm² de fluencia, que es el máximo permitido por el CEC [CEC 21.2.5.1], el 50% de la cuantía balanceada es equivalente a una deformación unitaria mínima del acero de tracción de 0.007.

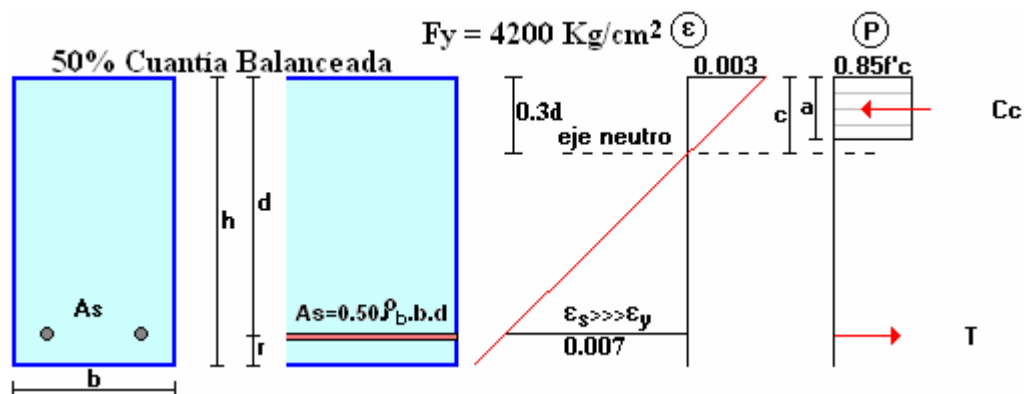


Figura 7.16: Diagramas de deformaciones unitarias y de esfuerzos bajo el 50% de la cuantía balanceada.

El criterio del 50% de la cuantía balanceada para zonas sísmicas permitía la formación progresiva de articulaciones plásticas en diferentes sectores de las estructuras aporticadas.

Cuando se trabaja con aceros de 4200 Kg/cm² de fluencia, y se analizan los diagramas momento-curvatura básicos, utilizar el 50 % de la cuantía balanceada es equivalente a incrementar en un 133% la curvatura del hormigón armado antes de la falla, con relación a la falla balanceada.

$$\frac{\phi_4}{\phi_1} = \frac{0.003 + 0.007}{0.003 + 0.002} = 2.33$$

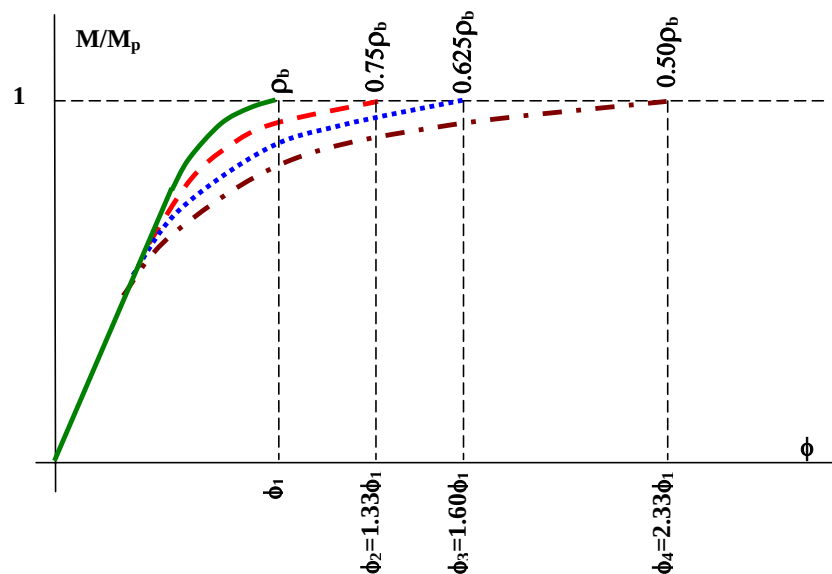


Figura 7.17: Diagramas momento flector normalizado – curvatura.

Para secciones con armadura de compresión, el antiguo CEC y el SEAOC fijaban la siguiente limitación con criterios de ductilidad análogos a las vigas sin acero para compresión:

$\rho_{\text{máx}} = 0.50(\rho_b + \rho')$	Ecuación (7.13)

La nueva especificación del código ACI ($\epsilon_t = 0.005$), para aceros de 4200 Kg/cm², se ubica exactamente en el punto medio entre el 50% y el 75% de la cuantía balanceada ($\rho = 0.625\rho_b$).

En el Capítulo 21 de Disposiciones Especiales para el Diseño Sísmico, el CEC-2001 eliminó el criterio del SEAOC, y también ignoró la recomendación de deformación mínima del acero del ACI, de modo que predominan los criterios de ductilidad limitada para zonas no sísmicas, con o sin armaduras de compresión.

$\rho_{\text{máx}} = 0.75\rho_b$	Ecuación (7.9)

$\rho_{\text{máx}} = 0.75(\rho_b + \rho')$	Ecuación (7.10)



Este hecho es a todas luces inconveniente desde el punto de vista de comportamiento dúctil de las estructuras de hormigón armado en un país de alta sismicidad como es el nuestro.

De las disposiciones para diseño sismorresistente del ACI (Capítulo 21), el CEC solamente incluyó que la cuantía máxima de armado a tracción no debe superar el 2.5 % [CEC 21.3.2.1].

$$\rho_{\text{máx}} = 0.025$$

Ecuación (7.12)

A pesar de que la disposición previa aparece en el capítulo 21 del ACI y del CEC, en realidad no es un estándar para mejorar la ductilidad de las estructuras, sino una especificación para controlar la disminución de ductilidad que puede causar el uso de armadura de compresión controlada por la Ecuación (7.11).

Por estas circunstancias, a pesar de no especificarse en el CEC, para vigas rectangulares al menos debería incluirse la deformación mínima de 0.005 del ACI como criterio de ductilidad básica.

$$\varepsilon_t \geq 0.005$$

Ecuación (7.11)

O más óptimamente se debería limitar la cuantía de armado al 50% de la cuantía balanceada incluido el efecto de la armadura de compresión, como lo fija el SEAOC y se establecía en la versión anterior del CEC.

$$\rho_{\text{máx}} = 0.50\rho_b$$

Ecuación (7.12)

$$\rho_{\text{máx}} = 0.50(\rho_b + \rho')$$

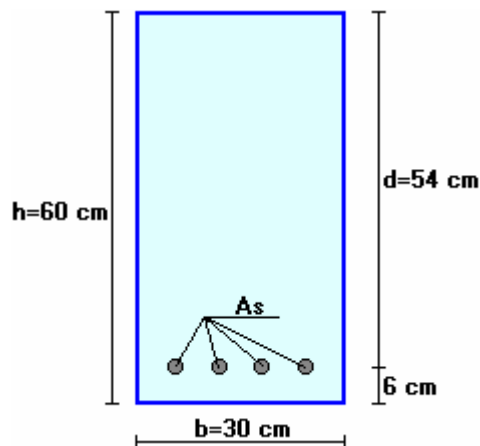
Ecuación (7.13)

Las últimas 2 ecuaciones tienen la ventaja de que no solamente imponen comportamientos adecuados para vigas rectangulares, sino también para vigas T y L, para las que el criterio del ACI ($\varepsilon_t \geq 0.005$) puede ser insuficiente al tratar de asegurar un comportamiento dúctil con deformaciones progresivas.

NOTA: El criterio de limitar la cuantía de armado a un máximo del 50% de la cuantía balanceada [$\rho \leq 0.50 \rho_b$], o al 50% de la cuantía balanceada más la cuantía de compresión [$\rho \leq 0.50 (\rho_b + \rho')$], son más apropiados para comportamiento dúctil con deformaciones progresivas de cualquier sección transversal que el criterio de una deformación unitaria mínima [$\varepsilon_s \geq 0.005$].

EJEMPLO 7.7:

Determinar el mayor momento flector último que se puede resistir con una viga de 30 cm x 60 cm, en una zona altamente sísmica, si sólo posee acero de tracción cuyo esfuerzo de fluencia es de 4200 Kg/cm², si se conoce que el hormigón tiene una resistencia característica a la compresión de 350 Kg/cm², y que el acero tiene un recubrimiento hasta su centro de gravedad de 6 cm.



Solución:

Por encontrarse en zona sísmica, la máxima cuantía de armado será el 50% de la cuantía balanceada.

$$\rho_{\text{máx}} = 0.50\rho_b$$

La ecuación que permite el cálculo de la cuantía balanceada es:

$$\rho_b = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003}$$

Para el cálculo de la cuantía balanceada se tiene la siguiente información básica:

$$f'_c = 350 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

Para un hormigón de 350 Kg/cm² de resistencia característica, el valor de β_1 es:

$$\beta_1 = 0.80$$

Se reemplazan los valores conocidos en la ecuación de la cuantía balanceada:

$$\rho_b = (0.85) \cdot (0.80) \cdot \frac{350}{4200} \cdot \frac{0.003}{\frac{4200}{2100000} + 0.003}$$

$$\rho_b = 0.034$$

La cuantía máxima de armado será el 50% de la cuantía balanceada.

$$\rho_{\text{máx}} = 0.50(0.034)$$

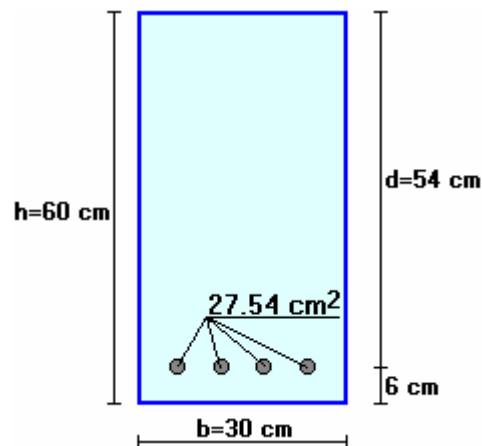
$$\rho_{\text{máx}} = 0.017$$

La cantidad de acero que proporciona esa cuantía de armado es:

$$A_s = \rho \cdot (b \cdot d)$$

$$A_s = (0.017) \cdot [(30\text{cm}) \cdot (54\text{cm})]$$

$$A_s = 27.54\text{cm}^2$$



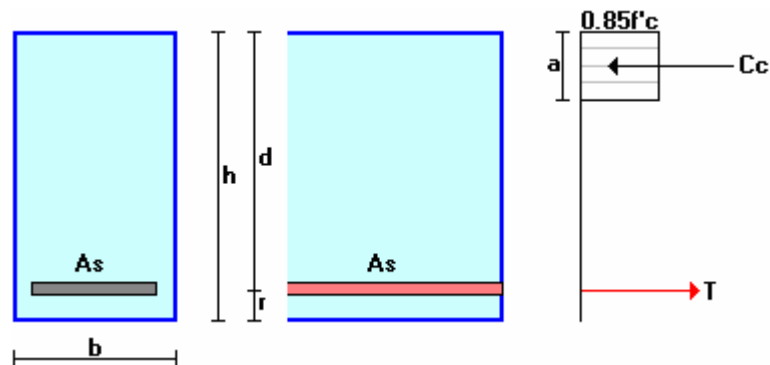
Una vez determinada la máxima sección transversal de acero se procede a calcular cual es el momento flector último que resiste la viga.

Dado que el acero está en fluencia, la fuerza de tracción que absorben los 27.54 cm² de acero sería:

$$T = A_s \cdot F_y$$

$$T = (27.54 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg / cm}^2)$$

$$T = 115668 \text{ Kg}$$



Por equilibrio de fuerzas horizontales, la fuerza de compresión en el hormigón es igual a la fuerza de tracción en el acero.

$$C_c = T$$

$$C_c = 115668 \text{ Kg}$$

La altura del bloque de compresión es:

$$a = \frac{C_c}{(0.85f'c) \cdot b}$$

$$a = \frac{115668}{(0.85)(350)(30)}$$

$$a = 12.96 \text{ cm}$$

El momento flector nominal que resiste la sección es:



$$M_n = T \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

$$M_n = (115668) \cdot \left(54 - \frac{12.96}{2} \right)$$

$$M_n = 5496543 \text{ Kg} - \text{cm} = 54.97 \text{ T} - \text{m}$$

El momento flector último resistente es:

$$M_u = \phi \cdot M_n$$

$$M_u = (0.90) \cdot (54.97)$$

$$M_u = 49.47 \text{ T} - \text{m}$$

d. CUANTÍAS MÍNIMAS DE ARMADO EN VIGAS:

En aquellas vigas en que las dimensiones geométricas superan a la capacidad resistente requerida sin rotura por tracción del hormigón, se deberá proveer un armado mínimo que sea capaz de absorber, con márgenes de seguridad apropiados, la carga de tracción que le es transferida el instante en que el hormigón traccionado se fisura por falta de capacidad. La incapacidad del acero de absorber la totalidad de esa fuerza de tracción provocaría una falla frágil indeseable de la viga.

Los códigos [ACI 10.5.1] establecen que el armado mínimo deberá ser:

$$A_{s_{\min}} = \frac{0.79 \sqrt{f'c}}{F_y} \cdot (b_w \cdot d) \quad \text{Ecuación (7.15)}$$

Donde:

$f'c$: resistencia característica del hormigón en Kg/cm^2

F_y : esfuerzo de fluencia del acero en Kg/cm^2

b_w : ancho de la viga rectangular, ancho del alma de la viga T o L cuando está en tracción el alma

d : altura de la viga rectangular, T o L

La cuantía mínima correspondiente es:

$$\rho_{\min} = \frac{0.79 \sqrt{f'c}}{F_y} \quad \text{Ecuación (7.16)}$$

En ningún caso la sección de acero podrá ser menor que:

$$A_{s_{\min}} = \frac{14}{F_y} \cdot (b_w \cdot d) \quad \text{Ecuación (7.17)}$$

La cuantía mínima correspondiente es:

$$\rho_{\min} = \frac{14}{F_y} \quad \text{Ecuación (7.18)}$$

Para elementos isostáticos en **T** o **L**, con el ala en tracción, en la fórmula de área mínima se deberá reemplazar b_w por $2b_w$, o el ancho del ala (b_f), el que sea menor [ACI 10.5.2].

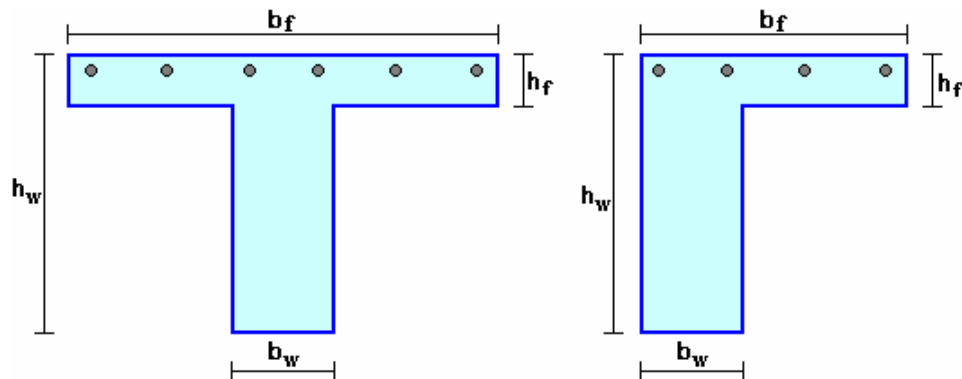


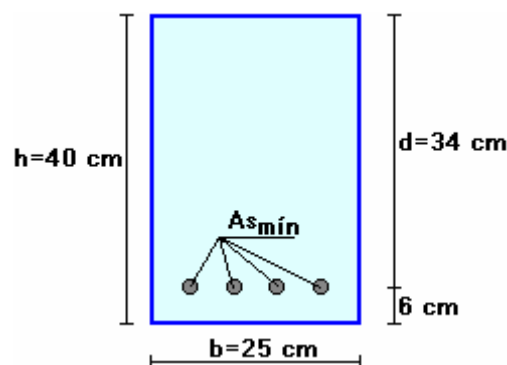
Figura 7.18: Vigas “T” y vigas “L”.

Los códigos establecen que cuando una viga tiene armadura que supera en un tercio a la necesaria para resistir a las solicitaciones de diseño, no es necesario que se utilicen las armaduras mínimas establecidas en las fórmulas previas [ACI 10.5.3].

NOTA: Para zonas sísmicas la disposición de no usar las cuantías de armado mínimas para transferir la tracción en el hormigón al acero, a cambio de incrementar en un tercio las cuantías de diseño, no es aplicable pues las fuerzas reales que actúan sobre las estructuras son generalmente muchísimo mayores que las fuerzas que se utilizan en el diseño, y precisamente el mecanismo que permite esa reducción de solicitaciones es la provisión de amplias capacidades de ductilidad. La insuficiencia de acero de tracción ante cargas mayores que las de diseño provocaría una falla frágil por incapacidad de transferir las fuerzas de tracción del hormigón al acero.

EJEMPLO 7.8:

Determinar la cantidad mínima de acero a tracción en una viga de 25 cm x 40 cm, si el esfuerzo de fluencia del acero es 4200 Kg/cm^2 y la resistencia característica a la compresión del hormigón de 210 Kg/cm^2 , y que el acero tiene un recubrimiento hasta su centro de gravedad de 6 cm.





Solución:

El problema es similar al anterior con la variante de que el hormigón es de mejores características ($f'c = 350 \text{ Kg/cm}^2$).

Las dos ecuaciones de armado mínimo son:

$$As_{\min} = \frac{0.79\sqrt{f'c}}{F_y} \cdot (b_w \cdot d)$$

$$As_{\min} = \frac{14}{F_y} \cdot (b_w \cdot d)$$

Los datos conocidos son:

$$f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b_w = 25 \text{ cm}$$

$$d = 34 \text{ cm}$$

Reemplazando en las 2 ecuaciones se tiene:

$$As_{\min} = \frac{0.79\sqrt{210}}{4200} \cdot [(25) \cdot (34)] = (0.00273) \cdot [850]$$

$$As_{\min} = 2.32 \text{ cm}^2$$

$$As_{\min} = \frac{14}{4200} \cdot [(25) \cdot (34)] = (0.003333) \cdot [850]$$

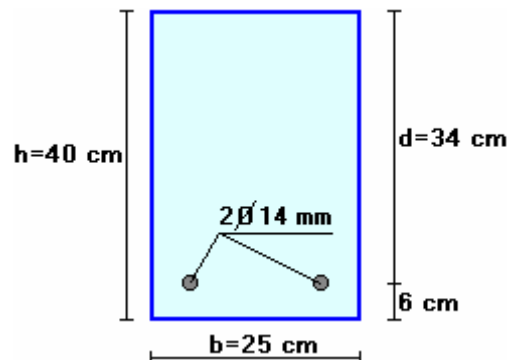
$$As_{\min} = 2.83 \text{ cm}^2$$

La cantidad mínima de acero requerida es:

$$As_{\min} = 2.99 \text{ cm}^2$$

La cantidad de acero requerida está gobernada por la segunda ecuación de cuantía mínima.

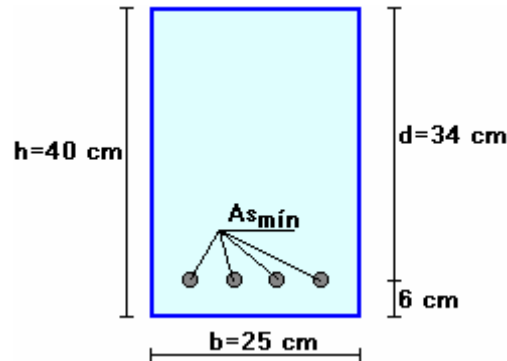
Para cubrir el acero necesario se podrían escoger 2 varillas de 14 mm (3.08 cm^2), que superan ligeramente la cantidad de acero requerida.





EJEMPLO 7.9:

Determinar la cantidad mínima de acero a tracción en una viga de 25 cm x 40 cm, si el esfuerzo de fluencia del acero es 4200 Kg/cm² y la resistencia característica a la compresión del hormigón de 210 Kg/cm², y que el acero tiene un recubrimiento hasta su centro de gravedad de 6 cm.



Solución:

Las dos ecuaciones de armado mínimo son:

$$As_{\min} = \frac{0.79\sqrt{f'_c}}{F_y} \cdot (b_w \cdot d)$$

$$As_{\min} = \frac{14}{F_y} \cdot (b_w \cdot d)$$

Los datos conocidos son:

$$As_{\min} = \frac{0.79\sqrt{350}}{4200} \cdot [(25) \cdot (34)] = (0.003519) \cdot [850]$$

$$As_{\min} = 2.99 \text{ cm}^2$$

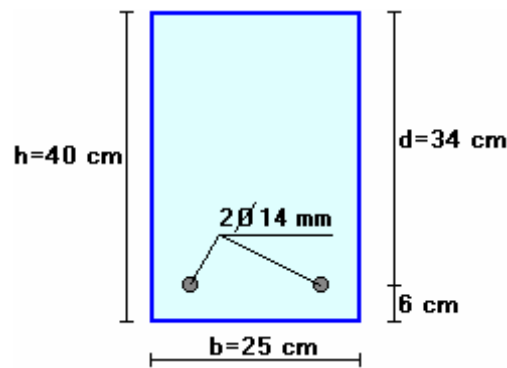
$$As_{\min} = \frac{14}{4200} \cdot [(25) \cdot (34)] = (0.003333) \cdot [850]$$

$$As_{\min} = 2.83 \text{ cm}^2$$

La cantidad mínima de acero requerida es:

$$As_{\min} = 2.99 \text{ cm}^2$$

La cantidad de acero requerida está gobernada por la primera ecuación de cuantía mínima. Nuevamente se podrían escoger 2 varillas de 14 mm (3.08 cm²).



NOTA: En nuestro medio, el armado mínimo en vigas con hormigones de resistencia característica inferior a los 300 Kg/cm² están definidos por la segunda ecuación de cuantía mínima, mientras que los hormigones con resistencia característica superior a 300 Kg/cm² (propriadamente 310 Kg/cm²) están definidos por la primera ecuación de cuantía mínima.

El siguiente gráfico describe los modos de falla del hormigón armado a flexión, para diferentes cuantías de armado.

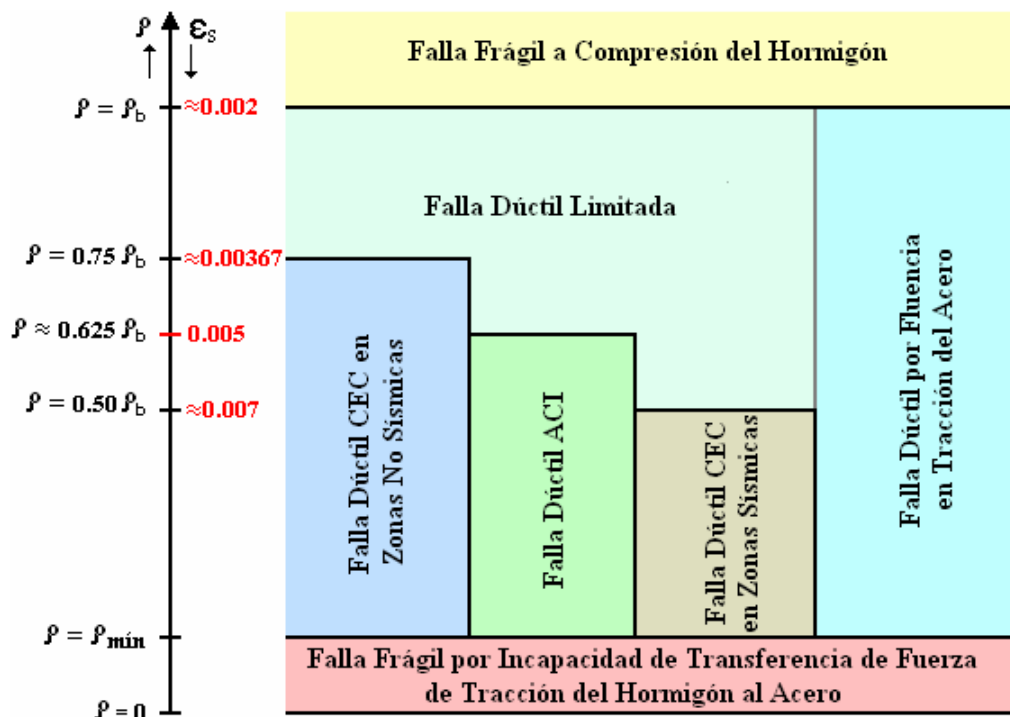


Figura 7.19: Modos de falla del hormigón armado a flexión, para diferentes cuantías de armado.

7.5 ESPECIFICACIONES DE LOS CÓDIGOS PARA FLEXIÓN:

a. SECCIÓN CRÍTICA EN ZONA DE APOYO:

Se toma como sección crítica, para el diseño a flexión de vigas, a aquella ubicada a la altura de la cara interna del elemento perpendicular de apoyo [ACI 12.10.2, ACI R.12.10.2, ACI 12.12, ACI R12.12]. Esto significa que en pórticos, la zona de

apoyo de las vigas se diseña a flexión a la altura de las caras internas de las columnas extremas, y las columnas se diseñan a la altura de las caras internas de las vigas transversales.

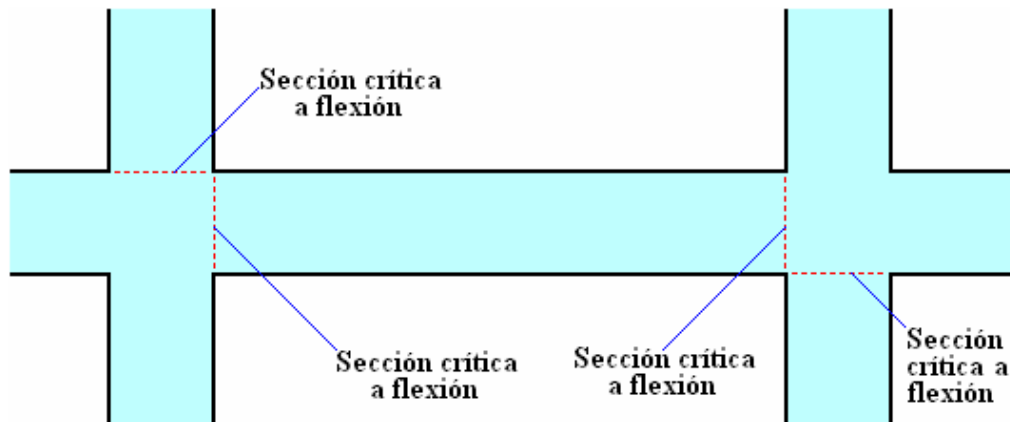


Figura 7.20: Secciones críticas a flexión en zonas de apoyo.

Desde el punto de momento crítico hasta el nudo (cruce de ejes) en el que se idealiza la ubicación del apoyo se extiende todo el acero de flexión requerido para la sección crítica, y luego se le proporciona el desarrollo longitudinal adecuado al tipo de solicitaciones que actúan sobre dicho acero.

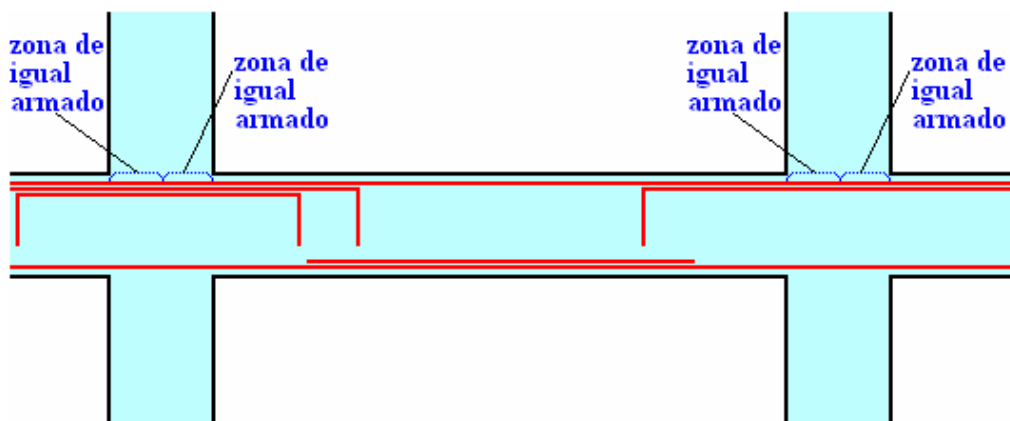


Figura 7.21: Armado uniforme en zona de apoyo de vigas de marcos dúctiles.

Esta disposición permite tomar en consideración que en la zona en que la viga se cruza con la columna (nudo real), la altura de la viga crece considerablemente por lo que su capacidad resistente también aumenta, lo que en principio compensa, más allá de lo requerido, el efecto del incremento de momento flector desde la cara de la columna hasta el cruce de ejes centroidales. Lo propio sucede con las columnas en la zona en que se cruzan con las vigas.

b. DISEÑO SÍSMICO A MOMENTO FLECTOR REVERSIBLE MÍNIMO:

En la zona de apoyo de las vigas, para asegurar un comportamiento dúctil de todo el pórtico, el CEC exige diseñarlas para resistir por lo menos un momento flector reversible positivo igual a la mitad del momento flector principal negativo [CEC 21.3.2.2]. El código ACI tiene una disposición análoga menos exigente, que requiere resistir un momento reversible de al menos la tercera parte del momento principal [ACI 21.3.4.1]. Se utilizarán las disposiciones del CEC.

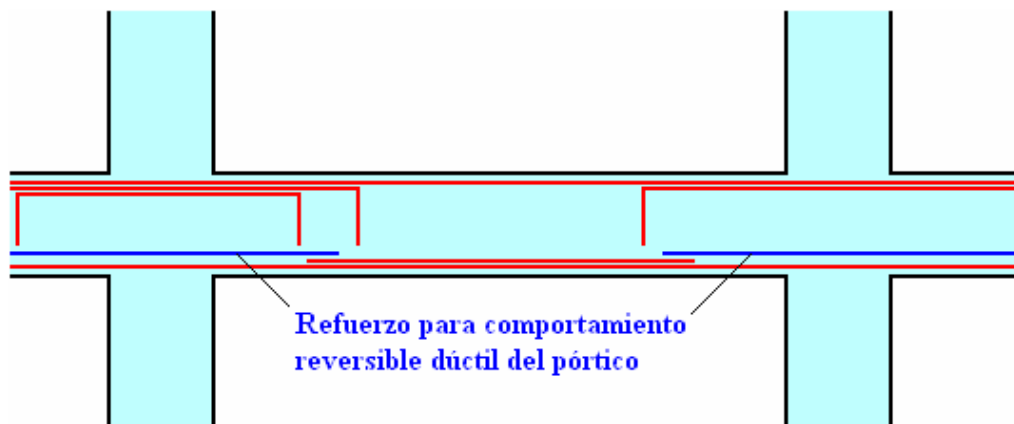
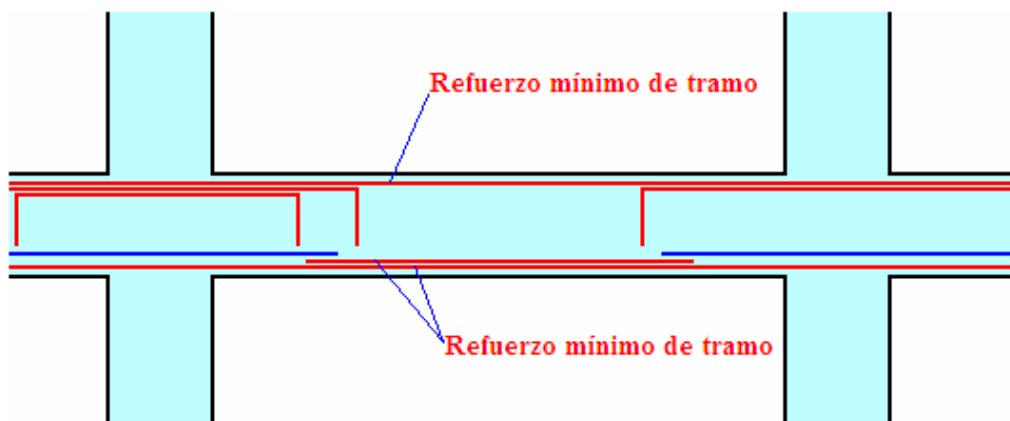


Figura 7.22: Armado uniforme para momento reversible en zona de apoyo de vigas de marcos dúctiles.

Esta disposición permite que ante cargas sísmicas muy severas, en el un extremo de la viga se forme una articulación plástica (rótula plástica) para momento flector negativo (tracción en las fibras superiores), y en el otro extremo una articulación plástica para momento flector positivo (tracción en las fibras inferiores), sacando provecho a toda la armadura de la viga (ver numeral 6.4, *La Falla Dúctil por Flexión en Pórticos*).

Debido a la movilidad de los diagramas de momentos cuando se incluyen las acciones sísmicas, el ACI exige un armado mínimo tanto positivo como negativo en el tramo central de las vigas correspondiente al menos a la quinta parte del máximo momento flector en la cara de los nudos [ACI 21.3.4.1].



Por consistencia con el momento reversible exigido por el CEC, una disposición más apropiada para el tramo sería disponer de una armadura que resista al menos el 30% del máximo momento flector en la cara de los nudos.

c. VIGA DÉBIL Y COLUMNA FUERTE:

En pórticos, en los puntos de confluencia de vigas y columnas, la capacidad resistente de las columnas debe ser mayor que la capacidad resistente de las vigas para lograr que las articulaciones plásticas se formen primeramente en las vigas, lo que permite desarrollar un mayor número de articulaciones plásticas y una mayor disipación de energía antes de llegar al colapso de la estructura.

Debe cumplirse que la suma de los momentos nominales resistentes de las columnas que lleguen a un nudo exceda al menos en un 20 % a la suma de los momentos nominales resistentes de las vigas que llegan al mismo nudo [ACI 21.4.2.2].

$$\sum M_{nc} \geq 1.2 \sum M_{nb} \quad \text{Ecuación (7.19)}$$

Donde:

$\sum M_{nc}$: suma de momentos nominales resistentes de las columnas que llegan a un nudo específico

$\sum M_{nb}$: suma de momentos nominales resistentes de las vigas que llegan a un nudo específico

7.6 DISEÑO DE VIGAS “T” Y VIGAS “L”:

En muchos casos las vigas rectangulares de hormigón no trabajan aisladamente sino que se integran a losas de hormigón conformando vigas “T” y vigas “L” [ACI 8.10]. En otras ocasiones puede ser conveniente recurrir a vigas con una geometría en “T” o en “L” por así convenir al diseño del elemento.

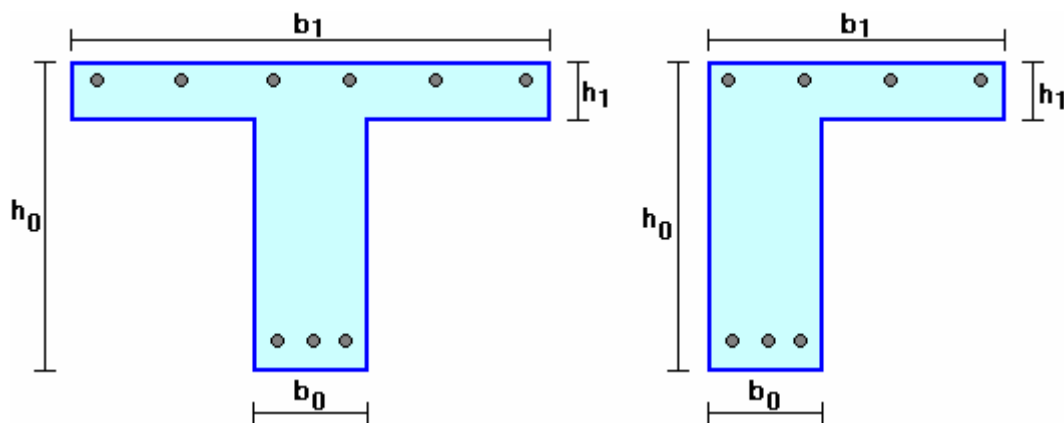


Figura 7.23: Vigas “T” y vigas “L”.

Los criterios expuestos en el diseño de vigas rectangulares deben ser incorporados para diseñar vigas “T” y vigas “L”. Las diferencias de procedimiento con relación a vigas rectangulares se basan en el análisis geométrico de la zona que está comprimida, que en algunos casos puede ser rectangular (sólo en el ala o sólo en el alma) y en otros una sección “T” o “L” (parte en el ala y parte en el alma). Entre las vigas “T” y las vigas “L” no existe prácticamente ninguna diferencia en el diseño, excepto que las vigas “T” poseen 2 alas y las vigas “L” tienen 1 ala.

Cuando la sección comprimida de la viga es rectangular, puede ser diseñada directamente como viga rectangular cuyo ancho es el ancho de la zona comprimida, pero cuando el área comprimida es una “T” o una “L” se requiere hacer un análisis especial.

Ante una sección “T” o “L” comprimida, a partir de la definición de la zona comprimida se puede realizar un diseño “razonablemente ajustado” mediante la utilización de la geometría idealizada del diagrama esfuerzo-deformación del hormigón,

o se pueden generar bloques rectangulares de compresión análogos al que se emplea en el modelamiento de vigas rectangulares.

➤ **Primer Caso: Ala Comprimida**

La primera posibilidad de diseño corresponde a un momento flector positivo (tracciones en el alma), cuya ala se encuentra comprimida, y cuyo eje neutro no alcanza a llegar al alma de la viga. En ese caso todo el bloque rectangular de compresión estará ubicado en el ala.

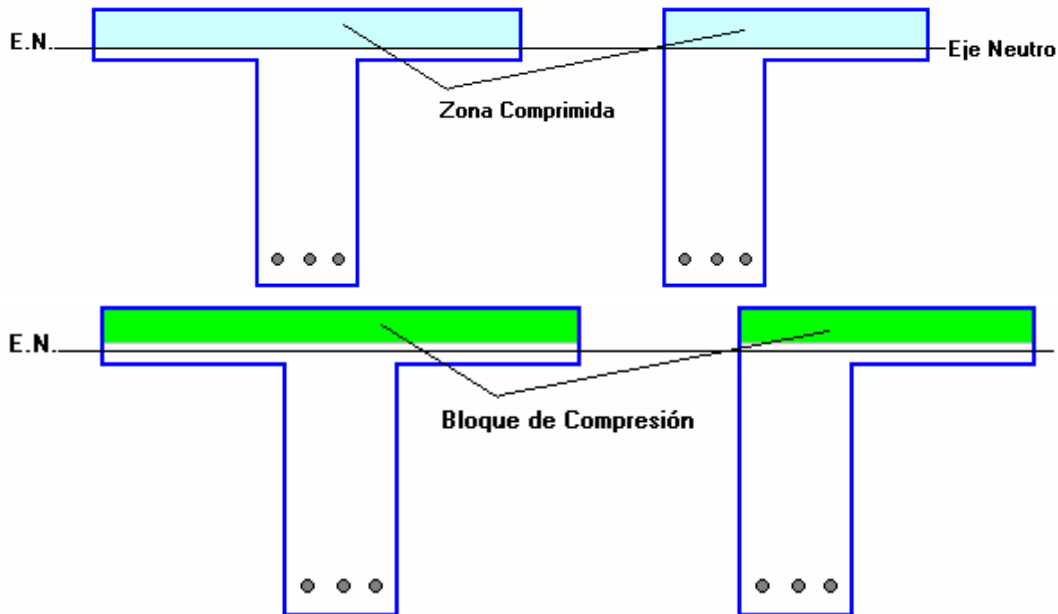


Figura 7.24: Zona comprimida y bloque de compresión equivalente para ala comprimida.

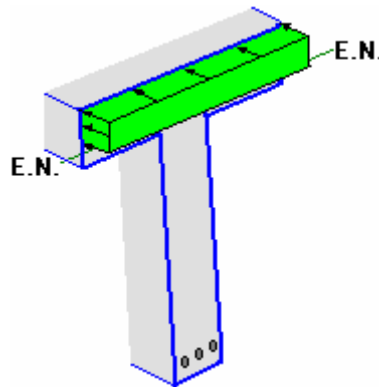


Figura 7.25: Vista tridimensional del bloque de compresión equivalente para ala comprimida.

La viga deberá diseñarse como una viga rectangular cuyo ancho es el ancho del ala, pues el ancho del bloque de compresión es coincidente con el ancho del ala, y la zona de tracción en el hormigón —que tiene ancho variable— no tiene ninguna influencia en la capacidad resistente de la sección.

➤ **Segundo Caso: Ala y Parte del Alma Comprimidas**

La segunda posibilidad corresponde también a un momento flector positivo, en la que toda el ala y parte del alma se encuentran comprimidas pues el eje neutro alcanza a

llegar al alma de la viga. En ese caso podría utilizarse el diagrama esfuerzo-deformación del hormigón o, como alternativa de simplificación, parte del bloque rectangular podría asociarse al comportamiento a flexión del alma y otra parte al comportamiento del ala, por lo que en realidad se producirían 2 rectángulos de compresión.

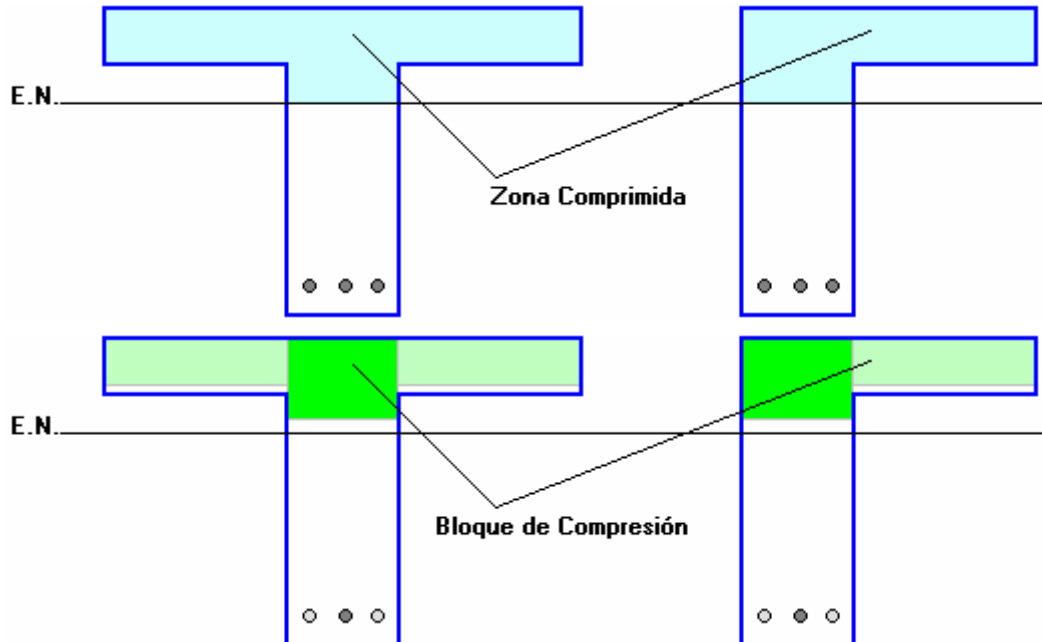


Figura 7.26: Zonas comprimidas y bloques de compresión equivalentes para ala y alma comprimidas.

La viga deberá diseñarse como una superposición de una viga rectangular cuyo ancho es el ancho del alma, y otra viga rectangular cuyo ancho de zona comprimida es la diferencia entre el ancho del ala y el ancho del alma.

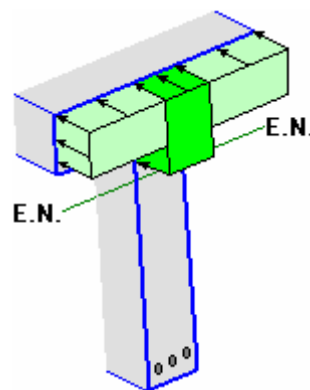


Figura 7.27: Vista tridimensional de los bloques de compresión equivalentes para ala y alma comprimidas.

La altura del bloque de compresión en el ala sería " β_1 " veces la altura del ala (es una consideración que siempre va por el lado de la seguridad), y la altura del bloque de compresión en el alma es " β_1 " veces la altura de la zona comprimida de la viga "T" o "L".

➤ Tercer Caso: Alma Comprimida

La tercera posibilidad corresponde a un momento flector negativo (tracciones en el ala), cuya zona de compresión se ubica totalmente sobre el alma. En ese caso todo el bloque rectangular de compresión estará ubicado en el alma.

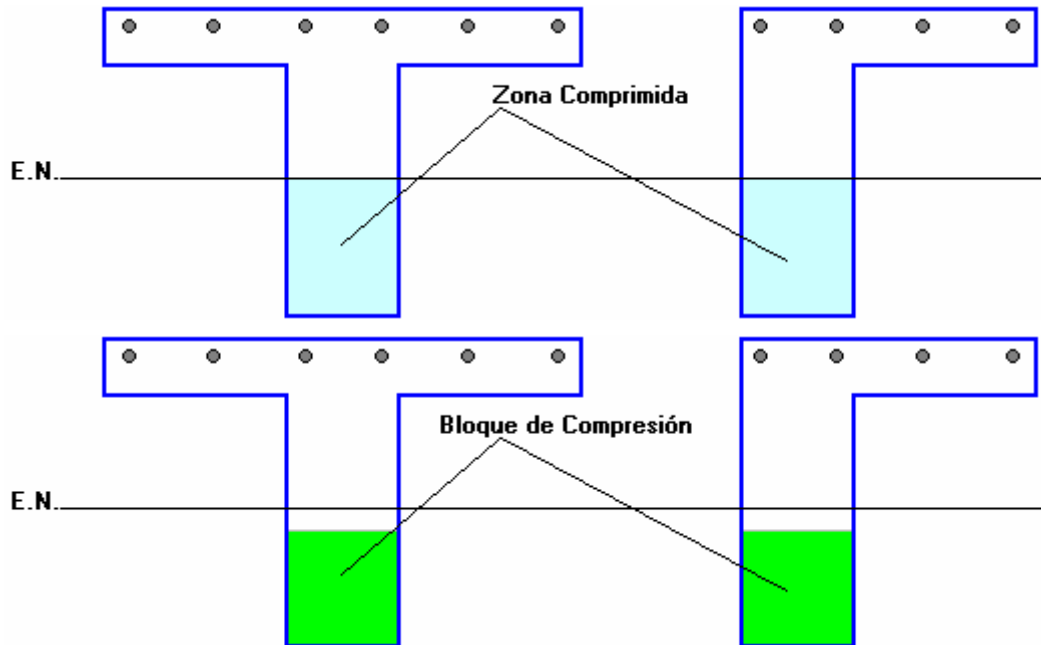


Figura 7.28: Zona comprimida y bloque de compresión equivalente para alma comprimida.

La viga deberá diseñarse como una viga rectangular cuyo ancho es el ancho del alma, pues el ancho del bloque de compresión es coincidente con el ancho del alma, y la zona de tracción en el hormigón —que tiene ancho variable— no tiene ninguna influencia en la capacidad resistente de la sección.

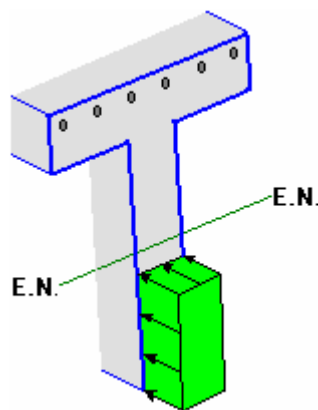


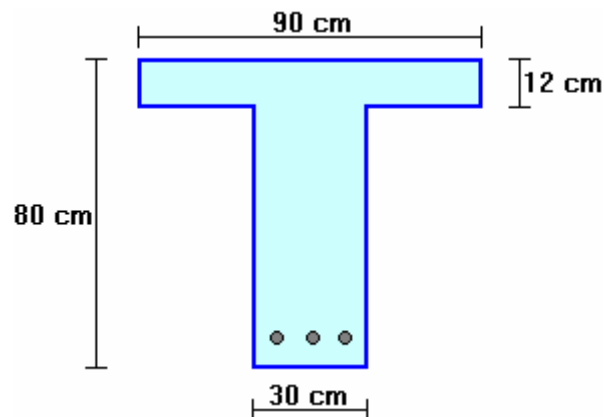
Figura 7.29: Vista tridimensional del bloque de compresión equivalente para alma comprimida.

EJEMPLO 7.10:

Determinar la cantidad acero a tracción requerida en la viga “T” de la figura, si debe soportar un momento último positivo (tracciones en la fibra inferior) de 50 T-m. El

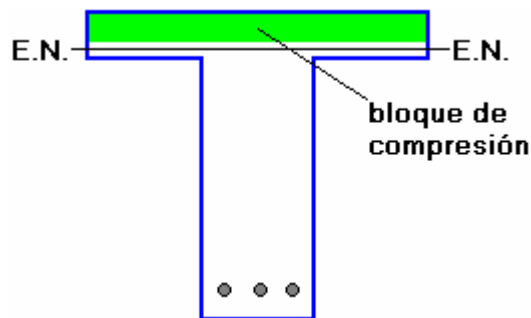


hormigón empleado tiene una resistencia característica de 210 Kg/cm^2 y el esfuerzo de fluencia del acero es de 4200 Kg/cm^2 . La estructura se construirá en zona sísmica.



Solución:

Inicialmente se puede suponer —es una hipótesis— que el eje neutro se ubica dentro del ala de la viga ($c \leq 12 \text{ cm}$).



El ancho del bloque de compresión será el ancho del ala (como se observa en la figura previa), de modo que los datos conocidos serían:

$$M_u = 5000000 \text{ Kg-cm}$$

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b = 90 \text{ cm}$$

$$d = 74 \text{ cm (6 cm de distancia desde la cara inferior al centro de gravedad de las varillas)}$$

Las ecuaciones para el cálculo de la sección de acero son:

$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_u}{\phi \cdot k \cdot d}} \right]$$

$$k = 0.85 f'_c b d$$

El valor de la constante “k” es:

$$k = 0.85(210) \cdot (90) \cdot (74)$$

$$k = 1188810$$

La sección de acero es:



$$A_s = \frac{1188810}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (5000000)}{(0.90) \cdot (1188810) \cdot (74)}} \right]$$

$$A_s = 18.48 \text{ cm}^2$$

A continuación se debe verificar la posición del eje neutro, que inicialmente se supuso que estaba ubicado en el ala.

La fuerza de tracción que genera la sección de acero es:

$$T = A_s \cdot F_y$$

$$T = (18.48) \cdot (4200)$$

$$T = 77616 \text{ Kg}$$

La Fuerza de compresión es igual a la fuerza de tracción:

$$C_c = T$$

$$C_c = 77616 \text{ Kg}$$

La altura del bloque rectangular de compresión es:

$$a = \frac{C_c}{0.85 f'_c \cdot b}$$

$$a = \frac{77616}{0.85(210) \cdot (90)}$$

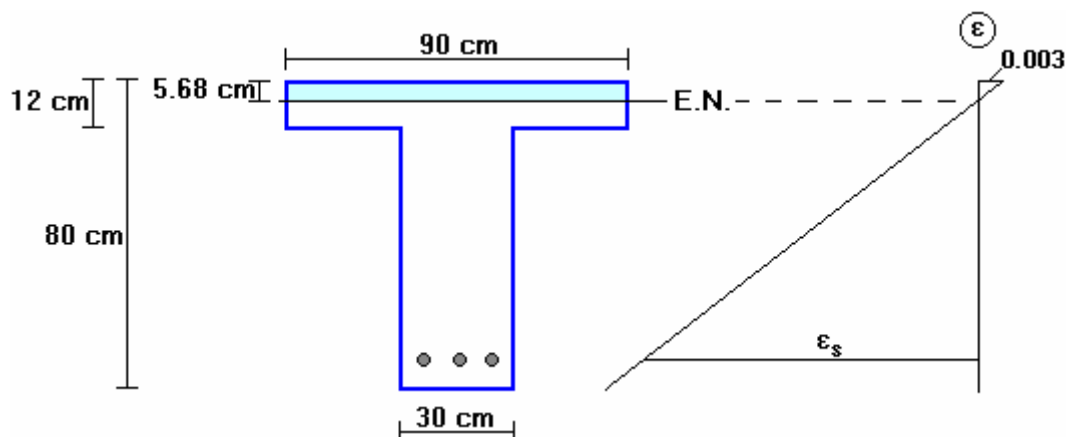
$$a = 4.83 \text{ cm}$$

La posición del eje neutro es:

$$c = \frac{a}{\beta_1}$$

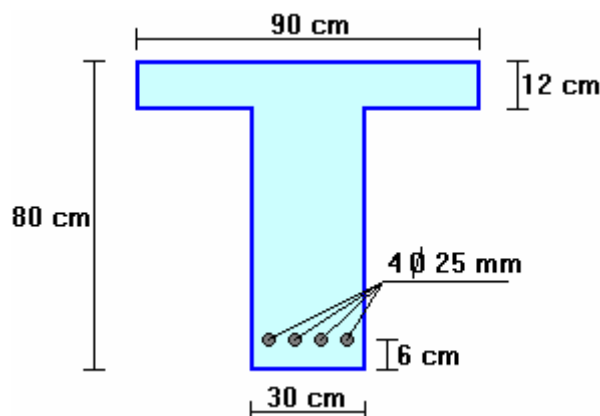
$$c = \frac{4.83}{0.85}$$

$$c = 5.68 \text{ cm}$$

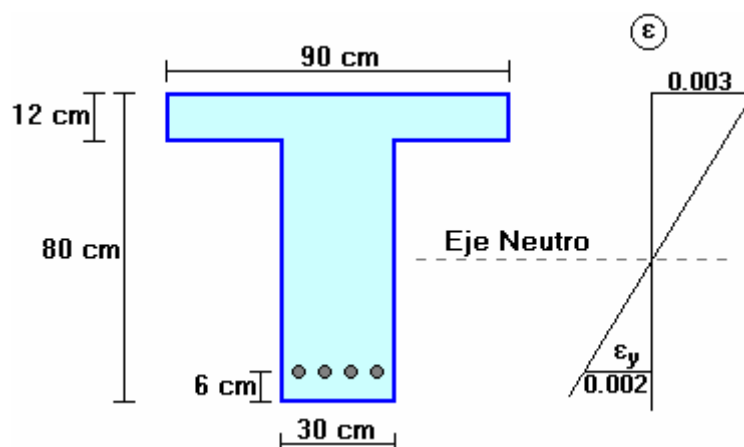


Debido a que la altura obtenida de la zona comprimida (5.68 cm) es menor que 12 cm (la altura del ala), se ha cumplido con la hipótesis inicial pues la zona en compresión coincide con el ala, por lo que el diseño realizado es correcto y la sección de acero de

tracción requerida es de 18.48 cm^2 . La sección puede ser cubierta con 4 varillas de 25 mm de diámetro (19.63 cm^2).



Para una rápida verificación del cumplimiento de la cuantía máxima de armado permitida en zonas sísmicas ($0.50 \rho_b$) se puede observar el siguiente gráfico relacionado con la falla balanceada (el acero tiene la deformación de fluencia y el hormigón tiene la deformación unitaria máxima).



El eje neutro para el armado propuesto claramente se ubica en la parte central del alma por lo que al dividir $5.68/12 = 0.473$ (5.68 es la posición del eje neutro y 12 es la altura del ala), se estaría comparando las fuerzas de compresión en este problema con la fuerza que se generaría si el eje neutro estuviera ubicado en la base del ala, lo que es equivalente a comparar las cuantía de armado correspondientes.

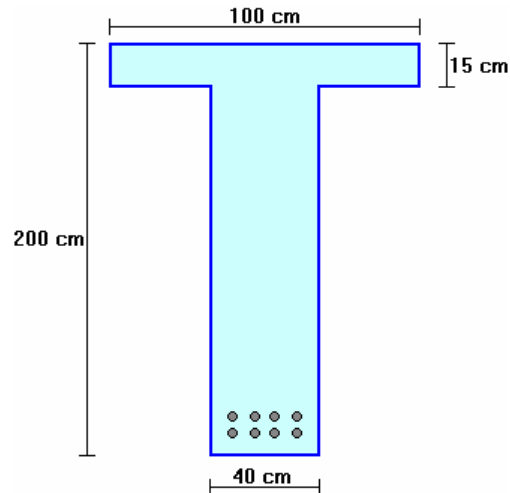
Dado que el valor obtenido en la división anterior es inferior a 0.50, y dado también que la cuantía balanceada es superior a la cuantía con el eje neutro en la base del ala, la cuantía obtenida en el problema analizado es mucho menor que el 50% de la cuantía balanceada, con lo que se cumple el requisito para zonas sísmicas.

NOTA: Cuando el valor de la división rápida supera lo que se especifica en los códigos, es necesario hacer un análisis más detallado como se observará en el siguiente ejemplo.



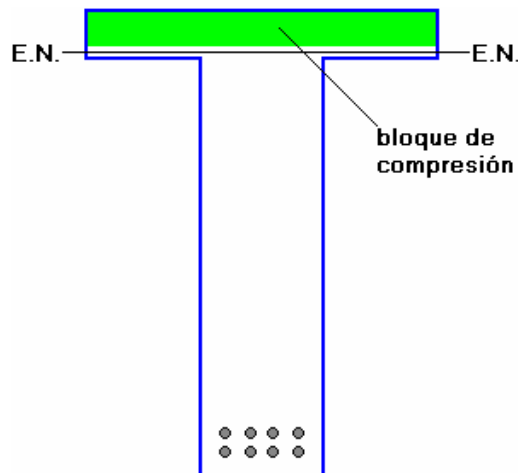
EJEMPLO 7.11:

Determinar la cantidad acero a tracción requerida en la viga de puente de la figura, si debe soportar un momento último positivo de 500 T-m. El hormigón empleado tiene una resistencia característica de 240 Kg/cm^2 y el esfuerzo de fluencia del acero es de 4200 Kg/cm^2 . El puente se construirá en zona sísmica.



Solución:

Inicialmente se puede suponer (es una hipótesis) que el eje neutro se ubica dentro del ala de la viga ($c \leq 15 \text{ cm}$).



Los datos conocidos serían:

$$M_u = 50000000 \text{ Kg-cm}$$

$$f'_c = 240 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b = 100 \text{ cm}$$

$d = 190 \text{ cm}$ (10 cm de distancia desde la cara inferior al centro de gravedad de las varillas, pues se esperan 2 capas de varillas)

Las ecuaciones para el cálculo de la sección de acero son:



$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_u}{\phi \cdot k \cdot d}} \right]$$

$$k = 0.85 f'_c \cdot b \cdot d$$

El valor de la constante “k” es:

$$k = 0.85(240) \cdot (100) \cdot (190)$$

$$k = 3876000$$

La sección de acero es:

$$A_s = \frac{3876000}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (50000000)}{(0.90) \cdot (3876000) \cdot (190)}} \right]$$

$$A_s = 72.46 \text{ cm}^2$$

A continuación se debe verificar la posición del eje neutro, que inicialmente se supuso que estaba ubicado en el ala.

La fuerza de tracción que genera la sección de acero es:

$$T = A_s \cdot F_y$$

$$T = (72.46) \cdot (4200)$$

$$T = 304332 \text{ Kg}$$

La Fuerza de compresión es igual a la fuerza de tracción:

$$C_c = T$$

$$C_c = 304332 \text{ Kg}$$

La altura del bloque rectangular de compresión es:

$$a = \frac{C_c}{0.85 f'_c \cdot b}$$

$$a = \frac{304332}{0.85(240) \cdot (100)}$$

$$a = 14.92 \text{ cm}$$

La posición del eje neutro es:

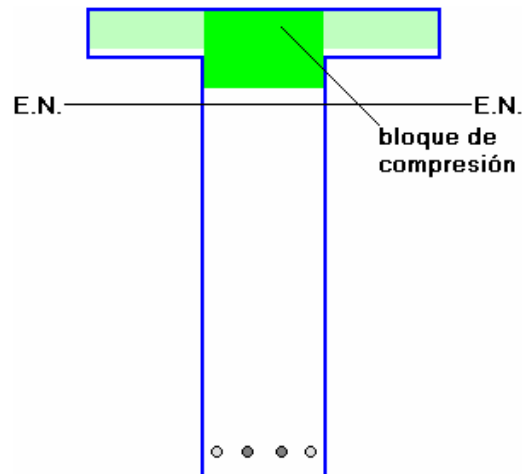
$$c = \frac{a}{\beta_1}$$

$$c = \frac{14.92}{0.85}$$

$$c = 17.55 \text{ cm}$$

Debido a que la altura obtenida de la zona comprimida (17.55 cm) es mayor que 15 cm (la altura del ala), no se ha cumplido con la hipótesis inicial concluyéndose que la zona comprimida incluye tanto al ala como a parte del alma.

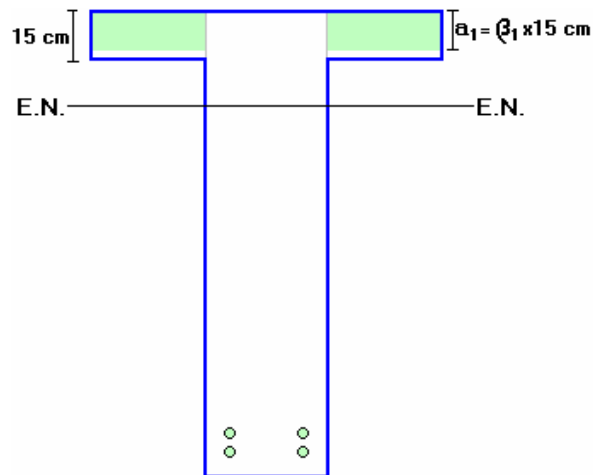
Debe cambiarse totalmente el proceso de diseño pues el eje neutro estará ubicado sobre el alma de la viga “T” como aparece en la siguiente figura.



Fase 1: Momento Flector Absorbido por el Hormigón en las Alas

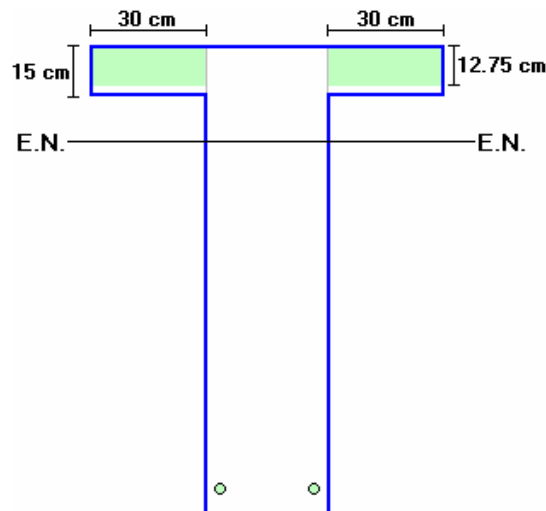
Momentáneamente se prescinde de la capacidad resistente del alma, y se analiza solamente la capacidad de las alas.

Dado que la parte lateral de las alas se encuentra totalmente a compresión, se desarrollará un bloque rectangular al menos equivalente en una altura igual a β_1 veces la altura de las alas.



La altura del bloque rectangular de compresión en las partes laterales del ala es:

$$\begin{aligned}a_1 &= \beta_1 (15 \text{ cm}) \\a_1 &= (0.85) \cdot (15) \\a_1 &= 12.75 \text{ cm}\end{aligned}$$



La magnitud de la fuerza de compresión en las partes laterales de las alas (C_{c1}) se obtiene multiplicando “**0.85f’c**” por el área del bloque de compresión.

$$C_{c1} = 0.85 \cdot (240 \text{ Kg/cm}^2) \cdot (60 \text{ cm}) \cdot (12.75 \text{ cm})$$
$$C_{c1} = 156060 \text{ Kg}$$

La fuerza de compresión debe estar acompañada por una fuerza de tracción en el acero (T_1) que logre el equilibrio.

$$T_1 = C_{c1}$$
$$T_1 = 156060 \text{ Kg}$$

Dado que el acero está en fluencia, la sección de acero que se requiere para generar esa fuerza es:

$$A_{s1} = \frac{T_1}{F_y}$$
$$A_{s1} = \frac{156060 \text{ Kg}}{4200 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$\mathbf{A_{s1} = 37.16 \text{ cm}^2}$$

El momento flector nominal que puede ser absorbido por las partes laterales de las alas, y la sección de acero calculada es:

$$M_{n1} = (A_s \cdot F_y) \cdot \left(d - \frac{a_1}{2} \right)$$
$$M_{n1} = (37.16 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2) \cdot \left(190 \text{ cm} - \frac{12.75 \text{ cm}}{2} \right)$$
$$M_{n1} = 28658721 \text{ Kg - cm}$$

El momento último correspondiente es:

$$M_{u1} = \phi \cdot M_{n1}$$
$$M_{u1} = (0.90) \cdot (28658721 \text{ Kg - cm})$$

$$\mathbf{M_{u1} = 25792849 \text{ Kg - cm}}$$



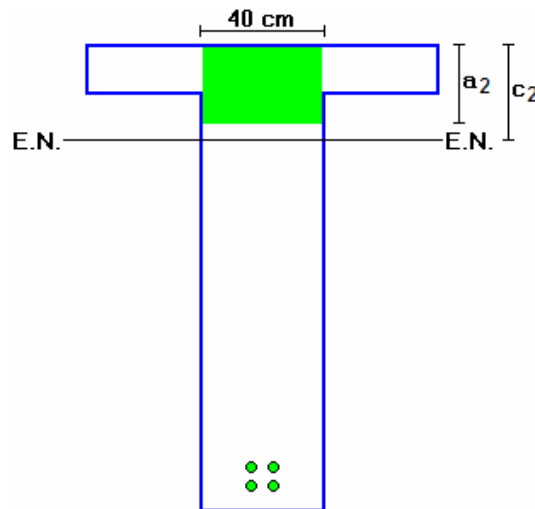
NOTA: El momento último resistente real de las alas es algo mayor que el que se acaba de calcular pues el promedio de los esfuerzos debe ser superior a 0.85 f'c por corresponder a la zona con mayores deformaciones de compresión.

Fase 2: Momento Flector Absorbido por el Alma

Si el momento flector último que debe absorber la viga es de 500 T-m, y el hormigón de la parte lateral de las alas en conjunto con 37.16 cm² de acero resiste 257.9 T-m, se requiere que el alma y su contraparte de acero resistan la diferencia.

$$Mu_2 = (500000000 \text{ Kg} - \text{cm}) - (25792849 \text{ Kg} - \text{cm})$$

$$Mu_2 = 24207151 \text{ Kg} - \text{cm}$$



De acuerdo al gráfico previo, el momento flector faltante **Mu₂** debe ser absorbido por una viga rectangular de 40 cm de ancho.

Las ecuaciones que permiten calcular la sección de acero son:

$$As = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot Mu}{\phi \cdot k \cdot d}} \right]$$

$$k = 0.85 f' c \cdot b \cdot d$$

El valor de la constante “k” es:

$$k = 0.85(240) \cdot (40) \cdot (190)$$

$$k = 1550400$$

La sección de acero es:

$$As_2 = \frac{1550400}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (24207151)}{(0.90) \cdot (1550400) \cdot (190)}} \right]$$

$$As_2 = 35.40 \text{ cm}^2$$

Se calcula la altura del bloque de compresión en el alma.



$$a_2 = \frac{A_{s2} \cdot F_y}{0.85f'_c \cdot b_w}$$
$$a_2 = \frac{(35.40 \text{ cm}^2) \cdot 4200 \text{ Kg/cm}^2}{0.85(240 \text{ Kg/cm}^2) \cdot (40 \text{ cm})}$$
$$a_2 = 18.22 \text{ cm}$$

Se calcula la posición del eje neutro.

$$c_2 = \frac{a_2}{\beta_1}$$
$$c_2 = \frac{18.22 \text{ cm}}{0.85}$$
$$c_2 = 21.44 \text{ cm}$$

Fase 3: Momento Flector Absorbido por la Viga “T”

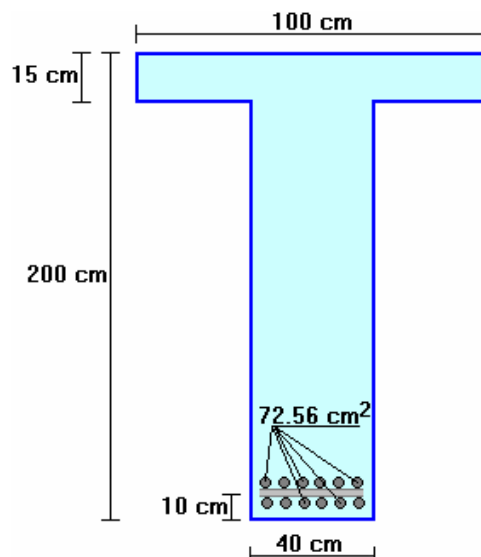
El momento que absorbe la viga “T” es la suma de los momentos últimos absorbidos por las alas y por el alma.

$$M_u = M_{u1} + M_{u2}$$
$$M_u = 25792849 \text{ Kg-cm} + 24207151 \text{ Kg-cm}$$

$$M_u = 50000000 \text{ Kg-cm} = 500 \text{ T-m}$$

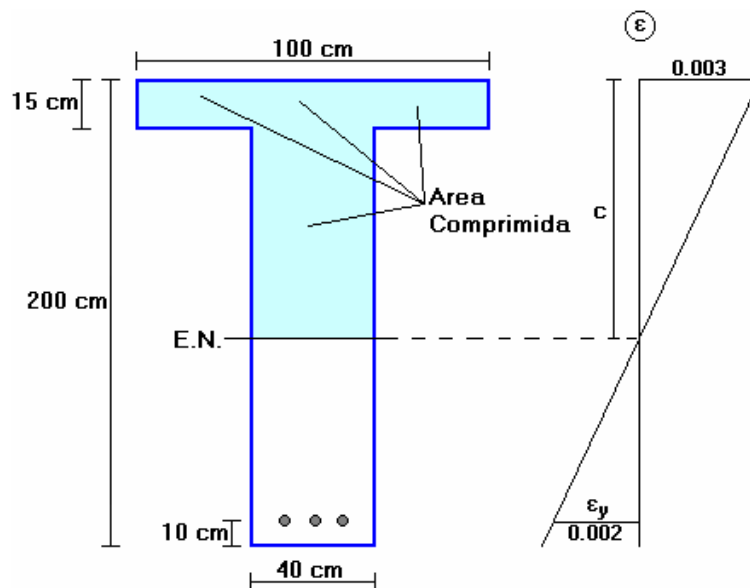
La sección de acero requerida para absorber ese momento último es la suma de las secciones de acero de las 2 fases previas.

$$A_s = 37.16 \text{ cm}^2 + 35.40 \text{ cm}^2$$
$$A_s = 72.56 \text{ cm}^2$$



Fase 4: Verificación de la Cuantía Máxima Permitida

A continuación se presenta un gráfico de las deformaciones unitarias asociadas a la falla balanceada de la viga, con la localización del área comprimida de hormigón (deformación de fluencia en el acero y 0.003 de deformación en el hormigón).



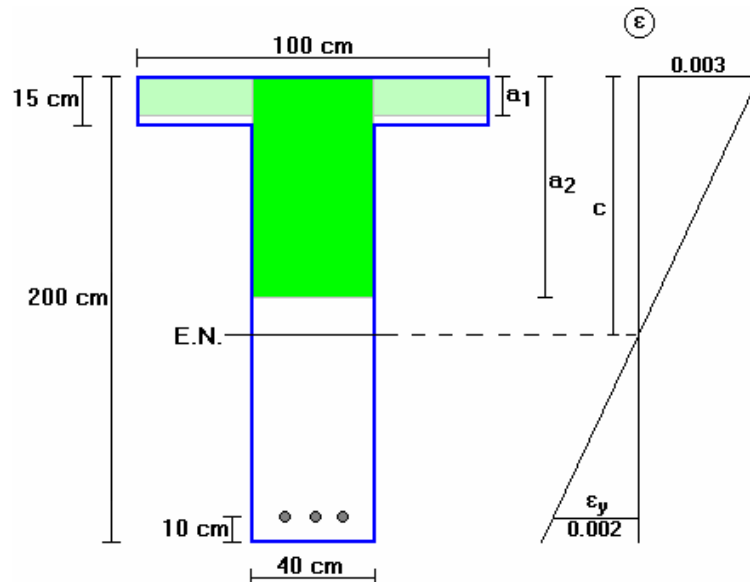
La posición del eje neutro queda definida por semejanza de triángulos en el diagrama de deformaciones unitarias.

$$c = \frac{0.003}{0.003 + 0.002} \cdot d$$

$$c = \frac{0.003}{0.003 + 0.002} \cdot (190 \text{ cm})$$

$$\mathbf{c = 114 \text{ cm}}$$

En base al grafico previo se puede identificar la profundidad de los bloques rectangulares de compresión correspondientes a las alas (a_1) y al alma (a_2).



La magnitud de la altura de los bloques de compresión es:

$$a_1 = \beta_1 \cdot (15 \text{ cm})$$

$$a_1 = (0.85) \cdot (15 \text{ cm})$$

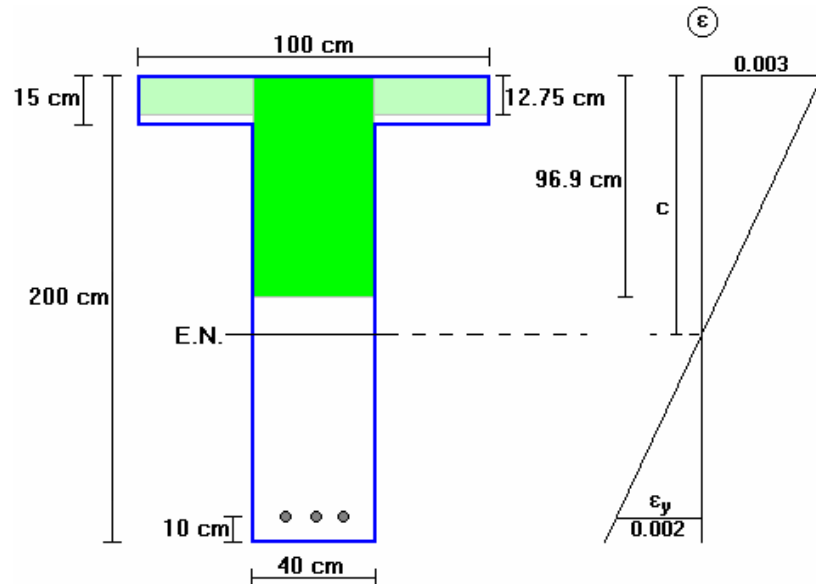
$$\mathbf{a_1 = 12.75 \text{ cm}}$$



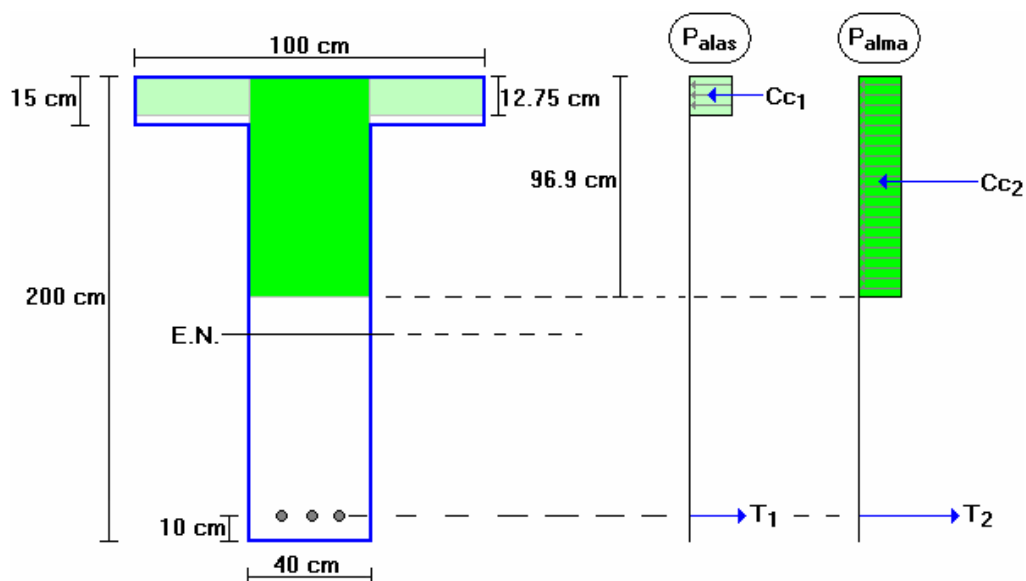
$$a_2 = \beta_1 \cdot c$$

$$a_2 = (0.85) \cdot (114 \text{ cm})$$

$$a_2 = 96.9 \text{ cm}$$



Las fuerzas de compresión asociadas a los bloques de compresión en las alas y en el alma, y las fuerzas de tracción correspondientes son:



La fuerza de compresión en las alas Cc_1 es:

$$Cc_1 = 0.85f'_c \cdot (60 \text{ cm}) \cdot (12.5 \text{ cm})$$

$$Cc_1 = 0.85 \cdot (240 \text{ Kg/cm}^2) \cdot (60 \text{ cm}) \cdot (12.5 \text{ cm})$$

$$Cc_1 = 153000 \text{ Kg}$$

La fuerza de tracción correspondiente T_1 debe equilibrar a la fuerza de compresión Cc_1 .

$$T_1 = Cc_1$$



$$T_1 = 153000 \text{ Kg}$$

La sección de acero As_1 que se requiere para proveer la fuerza de tracción T_1 es:

$$As_1 = \frac{T_1}{F_y}$$

$$As_1 = \frac{153000 \text{ Kg}}{4200 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$As_1 = 36.43 \text{ cm}^2$$

La fuerza de compresión en el alma Cc_2 es:

$$Cc_2 = 0.85f'_c \cdot (40 \text{ cm}) \cdot (96.9 \text{ cm})$$

$$Cc_2 = 0.85 \cdot (240 \text{ Kg/cm}^2) \cdot (40 \text{ cm}) \cdot (96.9 \text{ cm})$$

$$Cc_2 = 790704 \text{ Kg}$$

La fuerza de tracción correspondiente T_2 debe equilibrar a la fuerza de compresión Cc_2 .

$$T_2 = Cc_2$$

$$T_2 = 790704 \text{ Kg}$$

La sección de acero As_2 que se requiere para proveer la fuerza de tracción T_2 es:

$$As_2 = \frac{T_2}{F_y}$$

$$As_2 = \frac{790704 \text{ Kg}}{4200 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$As_2 = 188.26 \text{ cm}^2$$

La sección de acero total para que se produzca la falla balanceada es:

$$As_b = As_1 + As_2$$

$$As_b = 36.43 \text{ cm}^2 + 188.26 \text{ cm}^2$$

$$As_b = 224.69 \text{ cm}^2$$

La relación entre el armado requerido y el armado balanceado es:

$$\frac{As}{As_b} = \frac{72.56 \text{ cm}^2}{224.69 \text{ cm}^2}$$

$$\frac{As}{As_b} = 0.32$$

La relación entre secciones de acero es la misma que la relación entre cuantías, por lo que:

$$\frac{\rho}{\rho_b} = 0.32$$



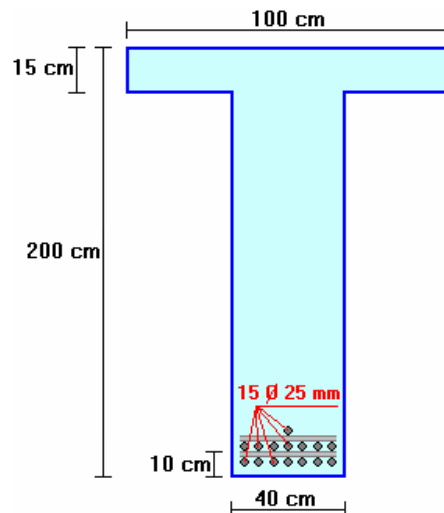
Dado que el armado requerido representa el 32% del armado balanceado se ha cumplido con el requerimiento para zona sísmica.

$$\rho \leq 0.50\rho_b$$

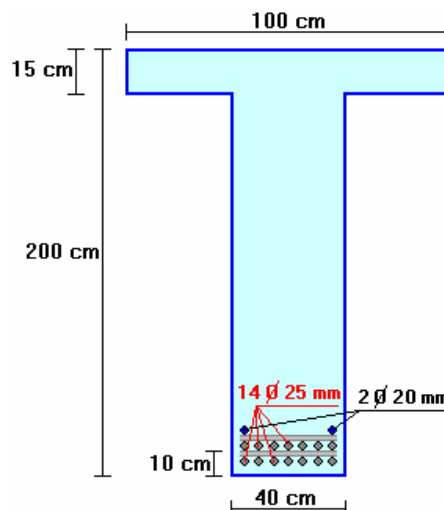
NOTA: En el presente problema no se pudo aplicar la fórmula de cuantía balanceada pues fue desarrollada para secciones rectangulares, sino que fue necesario recurrir a su definición (armado balanceado es la cantidad de acero requerida para que al mismo tiempo que el acero de tracción extremo entre en fluencia, el hormigón empiece a fallar a compresión con una deformación unitaria de 0.003).

Fase 5: Escogimiento del Armado

El armado de 72.56 cm^2 se cubre con 15 varillas de 25 mm de diámetro (73.63 cm^2), lo que proporcionará a la estructura una capacidad aproximada de 507.37 T-m ($500 \times 73.63 / 72.56 = 507.37$). Por otro lado, para satisfacer la separación mínima entre varillas y el recubrimiento mínimo [ACI 7.6.2] se requeriría armar 3 capas de varillas (2 capas de 7 varillas y 1 capa de 1 varilla).



No es conveniente que en la tercera capa quede una varilla aislada de 25 mm de diámetro en el centro, por lo que resultaría conveniente reemplazarla por 2 varillas esquineras de 20 mm.



Con esta distribución de varillas también se cumple con el requerimiento de que las varillas ubicadas en varias capas, las varillas de las capas superiores deben colocarse exactamente sobre las de las de las capas inferiores con una separación mínima de 25 mm [ACI 7.6.2].

7.7 DISEÑO DE VIGAS DE SECCIÓN TRANSVERSAL ARBITRARIA:

La utilización de bloques rectangulares de compresión proporciona facilidades matemáticas para el diseño de vigas rectangulares, en “T” o en “L”. Para otro tipo de secciones será necesario utilizar los diagramas esfuerzo-deformación de los hormigones para distintas resistencias [ACI 10.2.6], y efectuar integraciones numéricas para determinar cuantías, cuantías balanceadas y capacidades de secciones específicas.

Diversos modelos se han desarrollado para representar la curva esfuerzo-deformación del hormigón, incluidos modelos bilineales, modelos trilineales, y modelos combinados lineales-parabólicos.

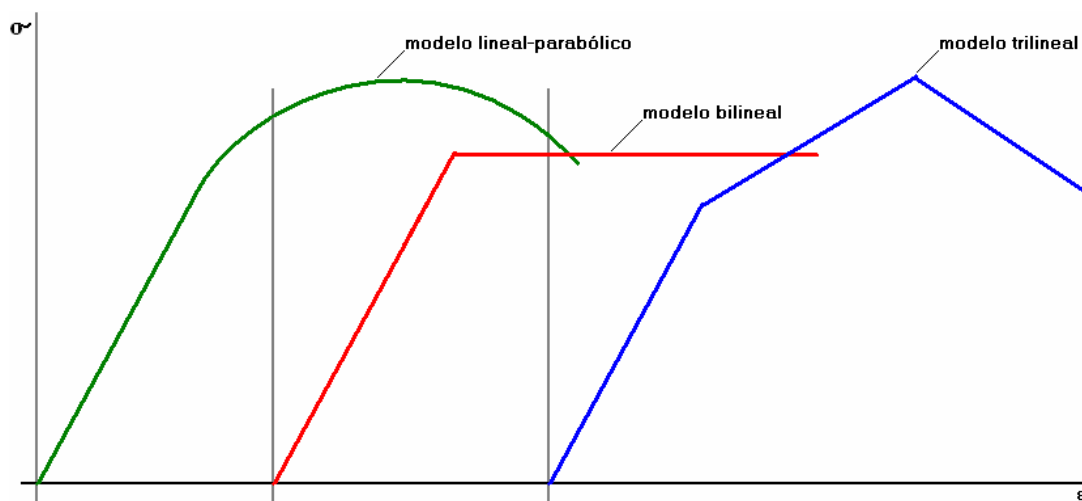


Figura 7.30: Modelos lineal – parabólico, bilineal y trilineal de descripción de la curva esfuerzo – deformación del hormigón.

El uso de este tipo de modelos se vuelve complejo por la necesidad de tomar en cuenta las variaciones geométricas de la sección transversal de la viga, interactuando con las variaciones matemáticas del modelo esfuerzo-deformación.

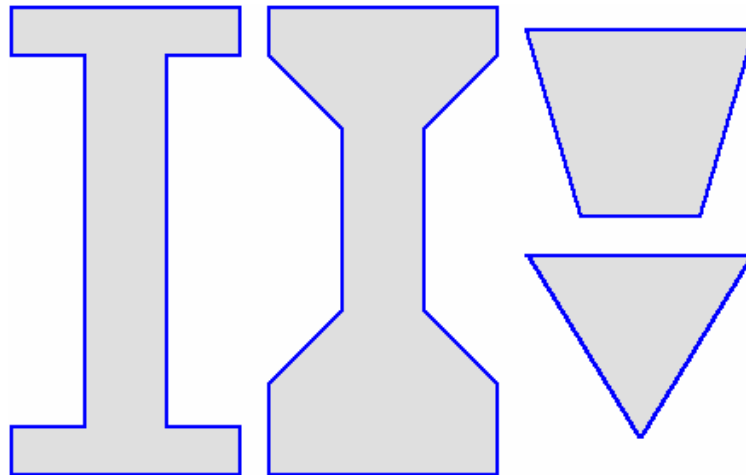


Figura 7.31: Secciones transversales no tradicionales para vigas.

A través de este estudio se buscan funciones que definan la curva esfuerzo-deformación del hormigón, de modo que puedan ser utilizadas fácilmente en una hoja electrónica, lo que deja exclusivamente el problema de la variación geométrica de las secciones.

Para el desarrollo de los modelos propuestos se han utilizado curvas esfuerzo-deformación con hormigones de baja, mediana y alta resistencia, según estándares internacionales.

A continuación se presenta un diagrama obtenido de datos obtenidos en laboratorio, con curvas esfuerzo-deformación representativas de hormigones de 280 Kg/cm^2 (4 k.s.i.), 490 Kg/cm^2 (7 k.s.i.) y 840 Kg/cm^2 (12 k.s.i.) de resistencia característica.

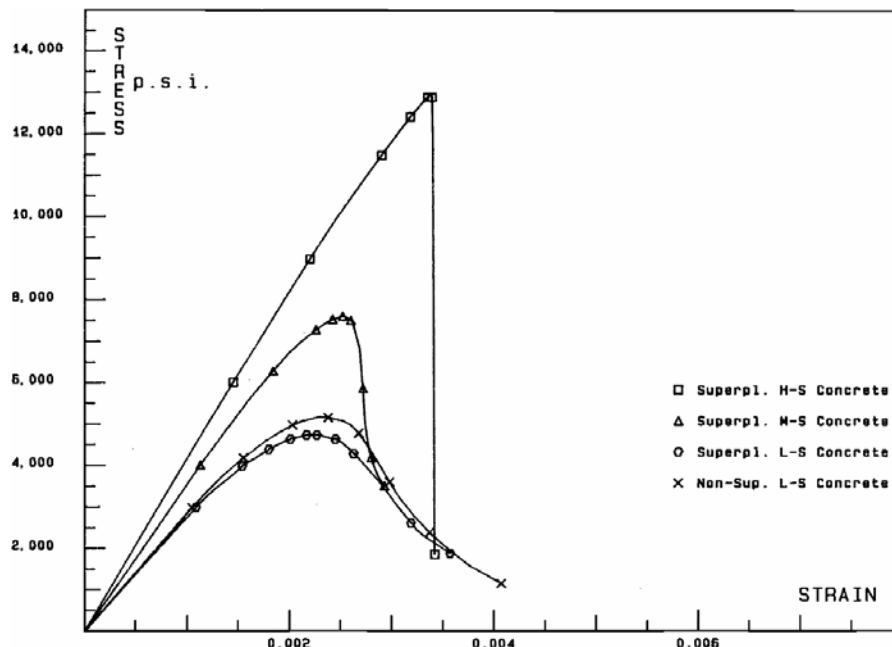


Figura 7.32: Curvas esfuerzo-deformación de hormigones de baja, mediana y alta resistencia (Información tomada de “Microcracking, Macro Air-void System and Strength of Superplastized Concrete”).

Si se observan con detenimiento las curvas logradas con hormigones de 280 Kg/cm^2 (4 k.s.i.) y de 490 Kg/cm^2 (7 k.s.i.), el máximo esfuerzo se obtiene para deformaciones

unitarias entre 0.002 y 0.0025. Se ha escogido ese rango de resistencias del concreto por ser el que corresponde al de mayor uso en el país.

Así mismo, los hormigones de baja resistencia (280 Kg/cm^2) logran deformaciones unitarias últimas superiores a 0.0035, mientras que los de mediana resistencia (490 Kg/cm^2) apenas alcanzan a deformarse hasta 0.003, como se observa en la siguiente figura.

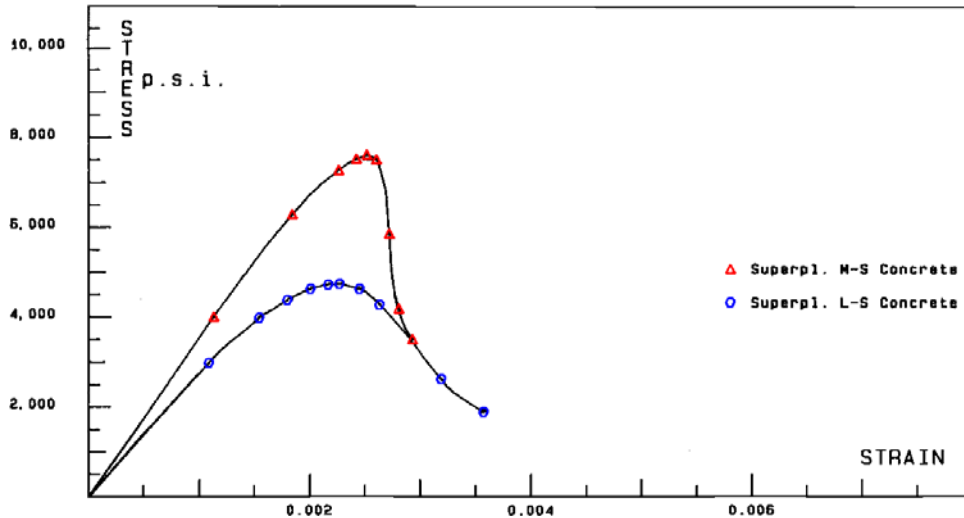


Figura 7.33: Curvas esfuerzo-deformación de hormigones de baja y mediana resistencia.

Debido a que los hormigones de baja y mediana resistencia son claramente dúctiles, pueden ser modelados matemáticamente mediante curvas que se ajustan a funciones específicas.

Así mismo, ya que el hormigón de alta resistencia (840 Kg/cm^2) tiene un comportamiento elasto-frágil, conviene modelarlo con 2 líneas rectas, como se puede observar en la siguiente figura.

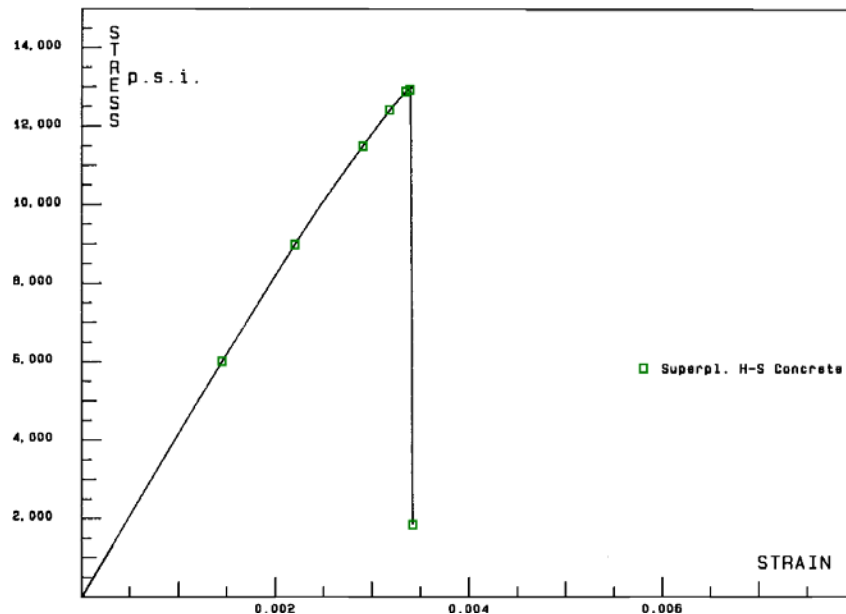


Figura 7.34: Curva esfuerzo-deformación de un hormigón de alta resistencia.

La ecuación que se suele utilizar para describir al módulo de elasticidad del hormigón en función de su resistencia en Kg/cm², de acuerdo a los códigos de diseño es:

$$E_c = 15000\sqrt{f'c}$$

Ecuación (7.20)

Sin embargo, cuando se deben incluir los hormigones de mediana y alta resistencia se logra un mejor ajuste con la siguiente ecuación (Nilson A., *Diseño de Estructuras de Concreto*), que es la que se ha utilizado en las herramientas propuestas:

$$E_c = 72500 + 10000\sqrt{f'c}$$

Ecuación (7.21)

La ecuación previa proporciona un módulo de elasticidad similar al de la ecuación de los códigos de diseño para una resistencia de 210 Kg/cm², pero define módulos de elasticidad menores para hormigones de mayor resistencia.

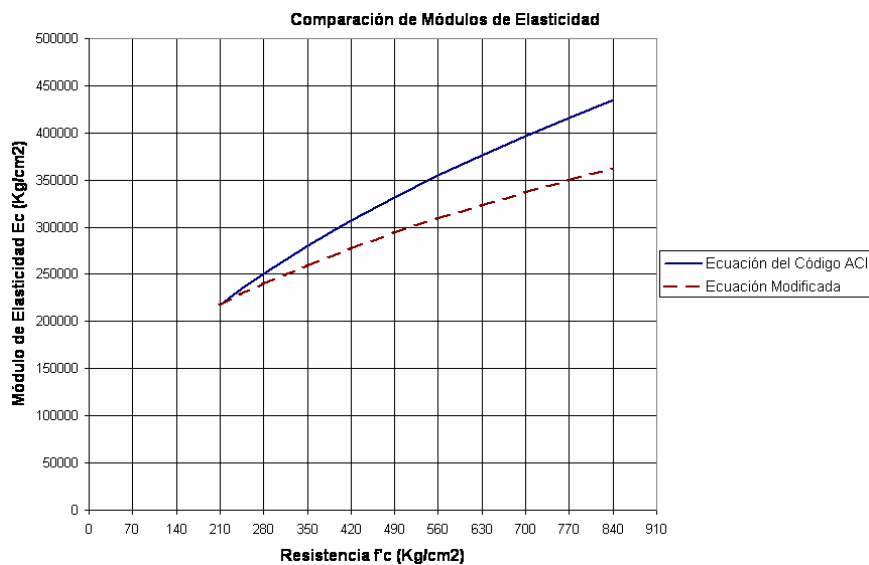


Figura 7.35: Módulos de elasticidad del hormigón de acuerdo al ACI y a A. Nilson.

En nuestro medio, debido a las características del agregado grueso empleado en la fabricación de hormigones, los valores obtenidos en laboratorio para el módulo de elasticidad sufren reducciones entre 10% y 20% con relación a la ecuación modificada.

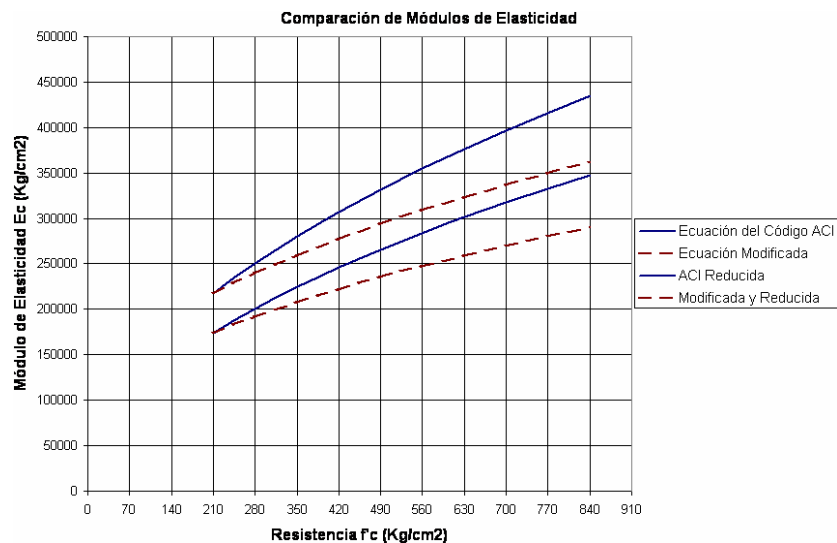


Figura 7.36: Módulos de elasticidad del hormigón reducidos para Ecuador.



Se propone la utilización de las siguientes herramientas para el modelamiento matemático de hormigones entre 210 Kg/cm^2 y 490 Kg/cm^2 :

- Curvas esfuerzo-deformación para diferentes resistencias del hormigón
- Tablas numéricas asociadas a las curvas esfuerzo-deformación
- Ecuaciones individuales para describir las curvas esfuerzo-deformación
- Ecuación integrada para describir simultáneamente todas las curvas esfuerzo-deformación

Se han incluido las siguientes propiedades del hormigón para describir adecuadamente su comportamiento:

- La pendiente inicial de las curvas se aproxima al módulo de elasticidad del hormigón.
- Las curvas tienen un rango cuasi lineal que se utiliza para simular el rango de comportamiento elástico del hormigón.
- Las curvas recogen la tendencia hacia una falla frágil de los hormigones de mayor resistencia
- Las curvas incluyen la tendencia a presentar mayor ductilidad de los hormigones de menor resistencia.
- La ordenada máxima de esfuerzo define la resistencia característica del hormigón al que hace referencia la curva.
- Las curvas han sido recortadas en una deformación unitaria máxima de 0.003, como lo especifican los códigos, para favorecer su uso en diseño.

La siguiente tabla puede ser utilizada para relacionar los esfuerzos con las deformaciones para distintas resistencias características del hormigón en el rango de resistencias bajas y medias, cuando el peso específico del hormigón es normal ($2200\text{-}2350 \text{ kg/m}^3$ en estado endurecido y seco):

Tabla 7.3: Coordenadas para las curvas esfuerzo-deformación de hormigones de diversas resistencias.

ϵ	f'_c					
	210 Kg/cm^2	240 Kg/cm^2	280 Kg/cm^2	350 Kg/cm^2	420 Kg/cm^2	490 Kg/cm^2
0,0000	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,0001	14,3	16,2	18,3	21,1	23,2	24,8
0,0002	28,3	32,1	36,3	42,0	46,3	49,6
0,0003	42,1	47,7	54,1	62,8	69,3	74,4
0,0004	55,5	63,0	71,6	83,4	92,2	99,1
0,0005	68,5	77,9	88,8	103,8	115,0	123,7
0,0006	81,2	92,5	105,6	123,9	137,6	148,3
0,0007	93,6	106,7	122,1	143,7	160,0	172,7
0,0008	105,5	120,5	138,1	163,1	182,2	197,0
0,0009	116,9	133,8	153,7	182,2	204,1	221,2
0,0010	127,9	146,5	168,7	200,8	225,7	245,1
0,0011	138,4	158,7	183,2	218,9	246,9	268,8
0,0012	148,3	170,3	197,0	236,4	267,6	292,2
0,0013	157,7	181,3	210,1	253,2	287,8	315,2
0,0014	166,5	191,5	222,4	269,2	307,3	337,7
0,0015	174,6	201,0	233,9	284,3	326,0	359,7
0,0016	182,0	209,6	244,3	298,3	343,8	380,9

0,0017	188,7	217,4	253,7	311,2	360,4	401,1
0,0018	194,5	224,1	261,9	322,6	375,7	420,3
0,0019	199,6	229,8	268,8	332,4	389,3	438,0
0,0020	203,7	234,4	274,2	340,3	401,0	453,9
0,0021	206,9	237,6	278,0	346,1	410,3	467,7
0,0022	209,0	239,6	280,0	349,5	416,8	478,8
0,0023	210,0	240,0	280,0	350,0	420,0	486,5
0,0024	209,9	238,8	277,8	347,2	419,2	490,0
0,0025	208,5	236,0	273,1	340,7	413,6	488,3
0,0026	205,8	231,2	265,7	329,9	402,3	480,1
0,0027	201,7	224,4	255,3	314,0	384,2	463,9
0,0028	196,0	215,3	241,5	292,5	357,9	437,7
0,0029	188,7	203,9	224,1	264,3	321,8	399,2
0,0030	179,7	189,9	202,5	228,5	274,0	345,2

La representación gráfica de la tabla anterior se describe en las curvas de la siguiente figura:

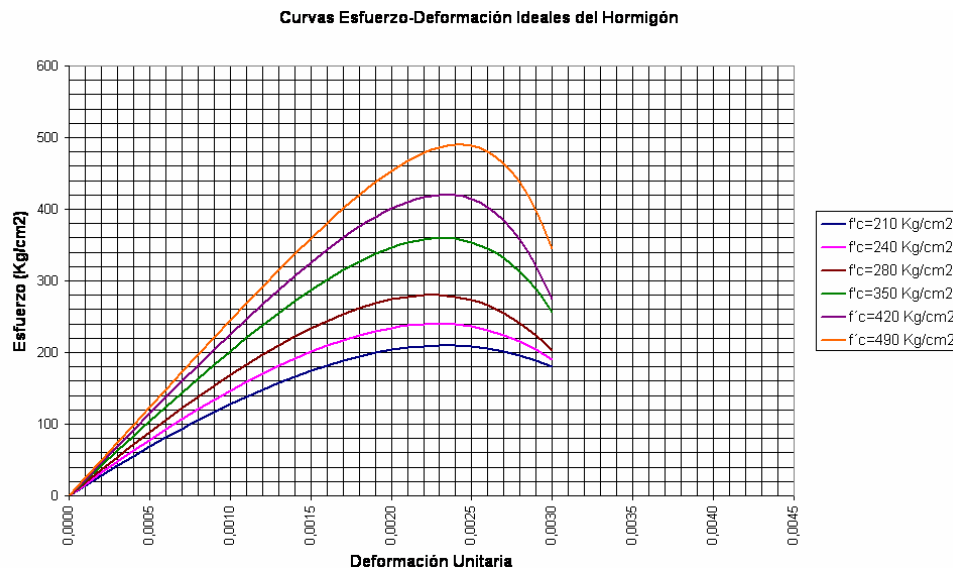


Figura 7.37: Curvas esfuerzo-deformación ideales del hormigón.

Las ecuaciones independientes de ajuste para cada resistencia característica, con las que se elaboraron la tabla y las curvas, son:

$\sigma_{210} = -62.15 \cdot (e^{650\varepsilon} - 1) + 0.85[72500 + 10000\sqrt{210}] \cdot \varepsilon$	Ecuación (7.22a)
$\sigma_{240} = -37.3 \cdot (e^{812.9\varepsilon} - 1) + 0.85[72500 + 10000\sqrt{240}] \cdot \varepsilon$	Ecuación (7.22b)
$\sigma_{280} = -19.5 \cdot (e^{1030\varepsilon} - 1) + 0.85[72500 + 10000\sqrt{280}] \cdot \varepsilon$	Ecuación (7.22c)
$\sigma_{350} = -6.4 \cdot (e^{1410\varepsilon} - 1) + 0.85[72500 + 10000\sqrt{350}] \cdot \varepsilon$	Ecuación (7.22d)
$\sigma_{420} = -2.027 \cdot (e^{1790\varepsilon} - 1) + 0.85[72500 + 10000\sqrt{420}] \cdot \varepsilon$	Ecuación (7.22e)
$\sigma_{490} = -0.6025 \cdot (e^{2170\varepsilon} - 1) + 0.85[72500 + 10000\sqrt{490}] \cdot \varepsilon$	Ecuación (7.22f)

Claramente se nota que las ecuaciones tienen un término derecho (función lineal) que modela el rango elástico de comportamiento del hormigón, y un término izquierdo (función exponencial) que modela el rango inelástico.

A continuación se presenta un diagrama combinado de las curvas de 280 Kg/cm² y 490 Kg/cm² en conjunto con las curvas obtenidas en laboratorio para resistencias similares (no exactamente iguales pero si suficientemente próximas para analizar semejanzas y diferencias).

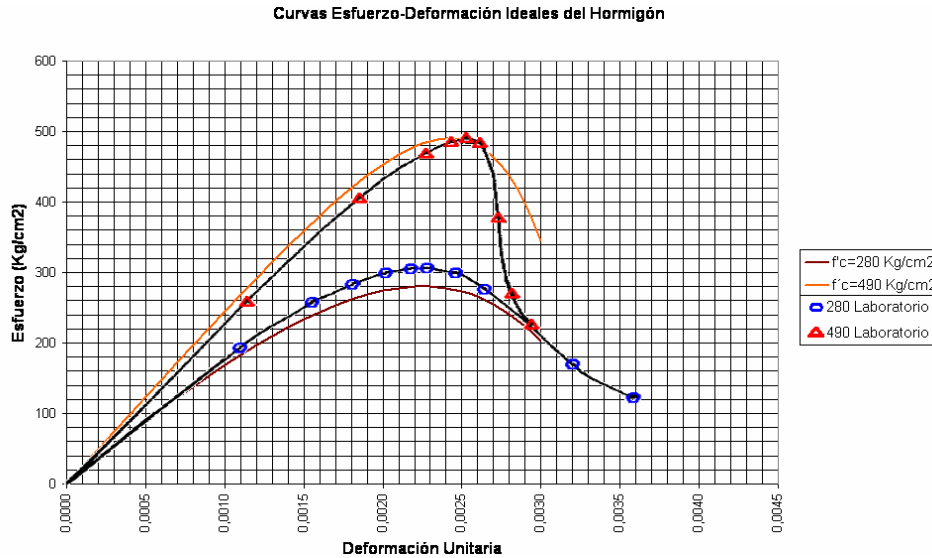


Figura 7.38: Comparación de curvas esfuerzo-deformación reales del hormigón con curvas ideales.

Las similitudes entre las curvas logradas en laboratorio y las curvas generadas mediante las funciones matemáticas propuestas son claras.

Igualmente podría emplearse la siguiente ecuación genérica única para valores de resistencia del hormigón entre 210 y 490 Kg/cm², no contemplados ni en la tabla, ni en las ecuaciones previas:

$$\sigma = -10^{\left[1.795 + \frac{-0.5(f'c-210)}{70}\right]} \cdot \left\{ e^{\left[650 + \frac{380(f'c-210)}{70}\right] \cdot \epsilon} - 1 \right\} + 0.85[72500 + 10000\sqrt{f'c}] \cdot \epsilon$$

Ecuación (7.23)

O simplificando:

$$\sigma = -10^{\left[3.295 - \frac{0.5f'c}{70}\right]} \cdot \left\{ e^{\left[-490 + \frac{380f'c}{70}\right] \cdot \epsilon} - 1 \right\} + 0.85[72500 + 10000\sqrt{f'c}] \cdot \epsilon$$

Ecuación (7.24)

Debido a que las curvas obtenidas con la última ecuación presentan ligeras diferencias en el esfuerzo máximo con relación a f'c (hasta un 4%), toda curva deberá multiplicarse por un factor único que logre que el esfuerzo máximo sea exactamente f'c.

El siguiente gráfico corresponde a las curvas evaluadas con la ecuación anterior:

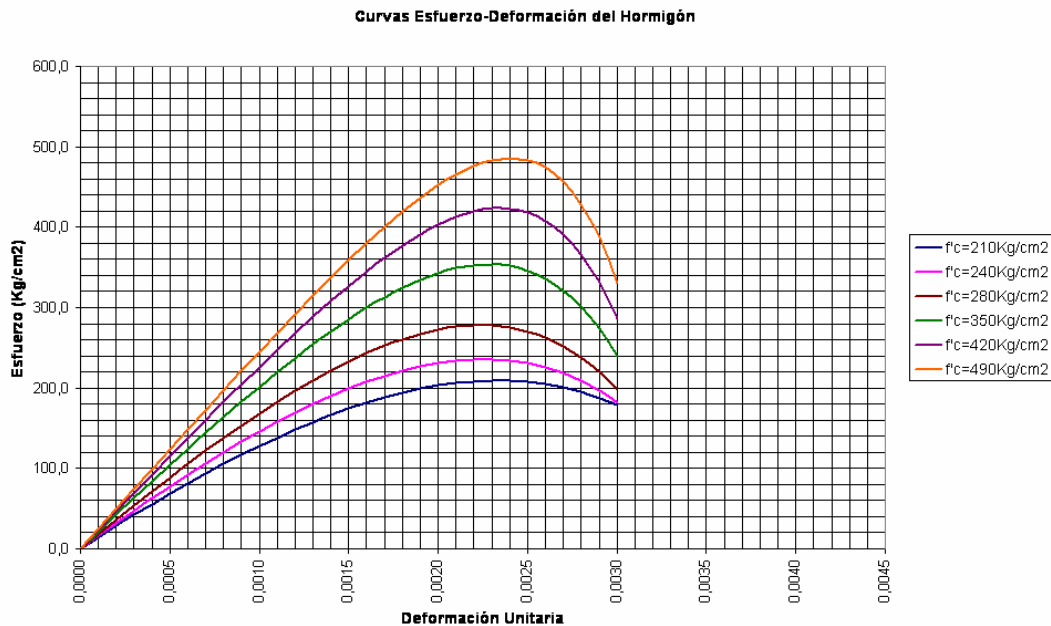


Figura 7.39: Curvas esfuerzo-deformación ideales unificadas.

Por la complejidad de descripción matemática de la ecuación, de las curvas y de la tabla, el problema de diseño de vigas de hormigón armado tiene que ser reenforcado hacia un problema iterativo de comprobación del diseño, utilizando herramientas de computación. En el presente trabajo se empleó una hoja electrónica.

Para diseñar y calcular la capacidad resistente de una sección arbitraria sometida a la flexión se aplican varios principios generales:

- La mayor deformación unitaria en el hormigón es 0.003 (especificación del ACI-2005 y del CEC-2001).
- Las deformaciones son proporcionales a la distancia respecto al eje neutro de la viga (Principio de Navier-Bernoulli).
- La fuerza de compresión en el hormigón es numéricamente igual al volumen de presiones que actúa sobre la superficie comprimida.

$$C_c = \int_A P(x, y) \cdot dA$$

- La fuerza de compresión en el hormigón debe equilibrarse con la fuerza de tracción en el acero (equilibrio de fuerzas horizontales).

$$C_c = T$$

- El momento flector nominal es el producto de la fuerza de tracción o de compresión por el brazo de palanca.

$$M_n = T \cdot z$$

- El momento flector último proviene de afectar al momento nominal por el factor de reducción de capacidad ϕ (especificación del ACI-2005 y del CEC-2001).

$$M_u = \phi \cdot M_n$$

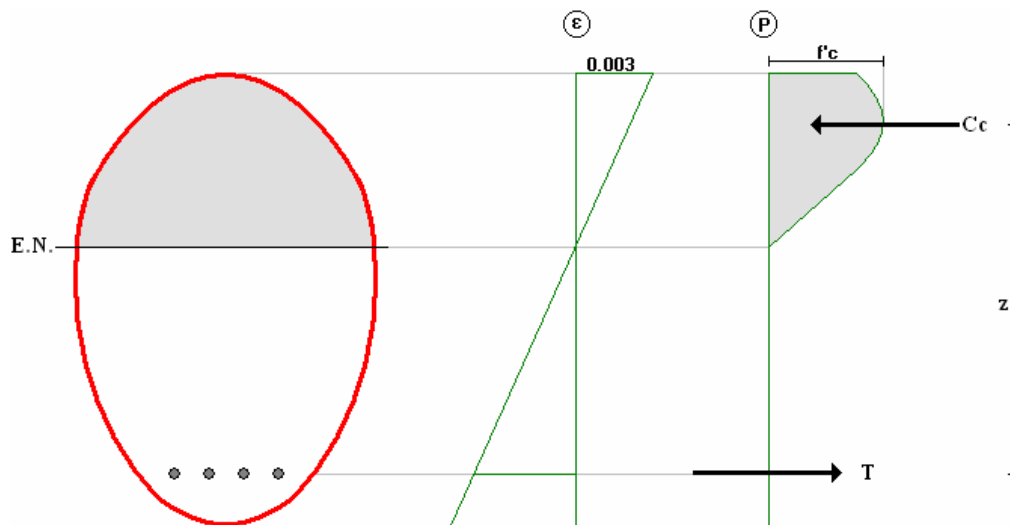


Figura 7.40: Deformaciones unitarias y esfuerzos en vigas de sección transversal genérica.

El procedimiento de diseño contempla las siguientes fases:

- Se estima la sección de acero que se requiere para resistir el momento flector actuante y se calcula la fuerza de tracción que produce esa sección de acero.
- Se estima la posición del eje neutro.
- Se calculan mediante tablas los esfuerzos asociados a cada posición de las fibras de compresión tomando como base la curva esfuerzo-deformación.
- Se calcula el volumen de presiones que es la magnitud de la fuerza de compresión mediante integración numérica.
- Se calcula el momento que produce el volumen de presiones respecto al eje neutro, mediante integración numérica.
- Se define la magnitud de la fuerza de compresión y su posición
- Se recalcula la posición del eje neutro
- En caso de existir diferencias importantes (superiores a 3%) entre la posición estimada y la posición recalculada del eje neutro se repite el proceso para la nueva posición del eje neutro.
- Una vez lograda la convergencia en cuanto a la posición del eje neutro se calcula el momento flector nominal y el momento flector último resistente.
- En caso de existir diferencias importantes (superiores al 3%) entre el momento flector resistente y el momento flector actuante, se reajusta la sección de acero requerida y se reinicia el proceso de ubicación del eje neutro y de cálculo del momento flector resistente.
- Una vez lograda la convergencia de la sección de acero se concluye el diseño mediante la determinación del armado en varillas de diámetro comercial.

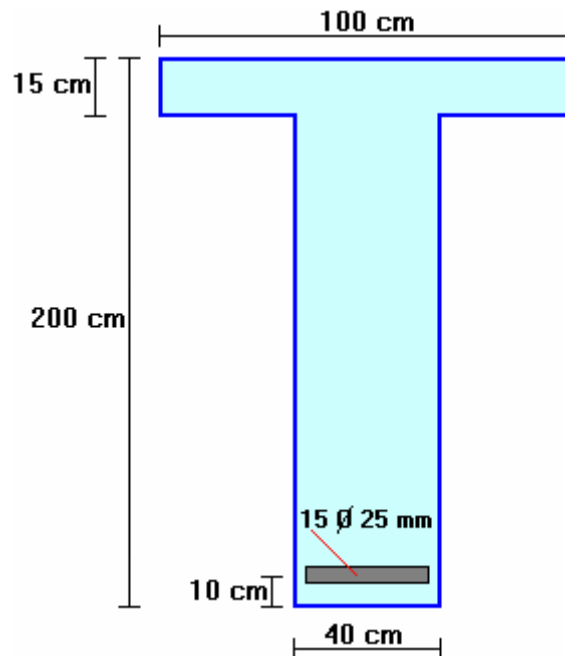
El procedimiento de verificación de la capacidad resistente incluye las siguientes fases:



- Una vez definida la sección de acero y su posición, se estima la ubicación de su eje neutro.
- Se calculan mediante tablas los esfuerzos asociados a cada posición de las fibras de compresión tomando como base la curva esfuerzo-deformación.
- Se calcula el volumen de presiones que es la magnitud de la fuerza de compresión mediante integración numérica.
- Se calcula el momento que produce el volumen de presiones respecto al eje neutro, mediante integración numérica.
- Se define la magnitud de la fuerza de compresión y su posición
- Se recalcula la posición del eje neutro
- En caso de existir diferencias importantes (superiores a 3%) entre la posición estimada y la posición recalculada del eje neutro se repite el proceso para la nueva posición del eje neutro.
- Una vez lograda la convergencia en cuanto a la posición del eje neutro se calcula el momento flector resistente.

EJEMPLO 7.12:

Verificar si la viga “T” de la figura está en capacidad de soportar un momento M_u de 500 T-m, si el hormigón tiene una resistencia característica de 240 Kg/cm^2 y el acero un esfuerzo de fluencia de 4200 Kg/cm^2 .



Solución:

La sección de acero de tracción provista por las 15 varillas de 25 mm es:

$$A_s = 73.63 \text{ cm}^2$$

La fuerza de tracción es:

$$T = A_s \cdot F_y$$

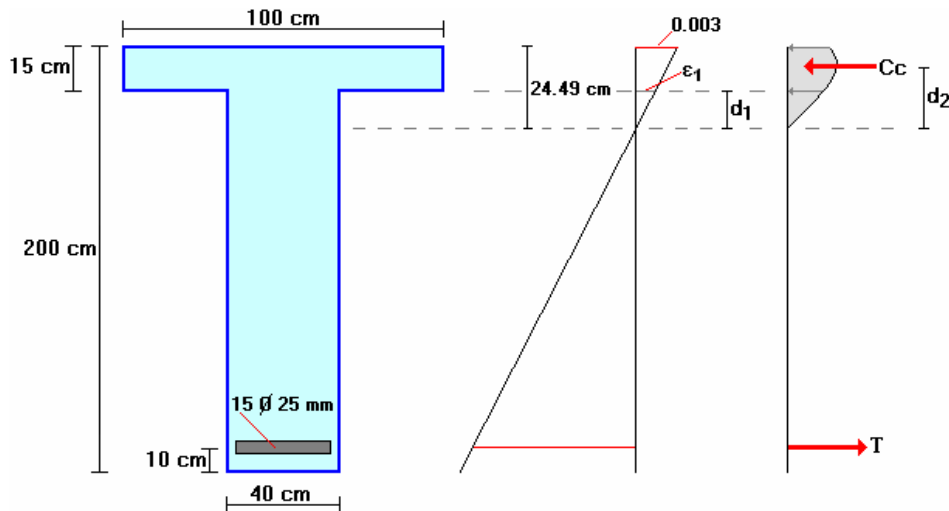
$$T = (73.63 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2)$$

$$T = 309246 \text{ Kg}$$

Aproximación Inicial:

Inicialmente se supondrá que el eje neutro está ubicado en el sitio que se estableció en el problema anterior.

$$c = 24.49 \text{ cm}$$



Debido a la discontinuidad del ancho de la viga en la base del ala, se requiere calcular la distancia desde el eje neutro hasta la base del ala:

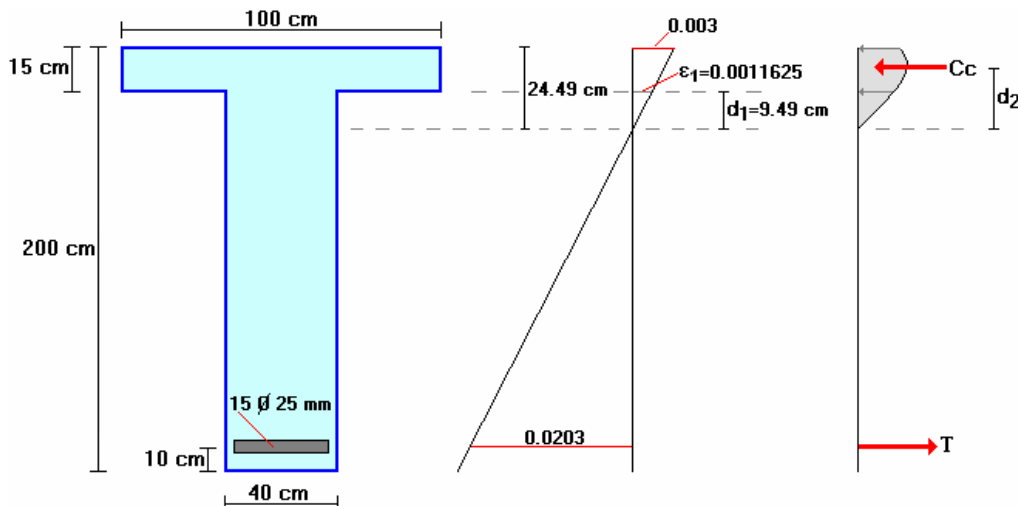
$$d_1 = 24.49 \text{ cm} - 15 \text{ cm}$$

$$d_1 = 9.49 \text{ cm}$$

La deformación unitaria en la base del ala es:

$$\epsilon_1 = \frac{9.49 \text{ cm}}{24.49 \text{ cm}} \cdot (0.003)$$

$$\epsilon_1 = 0.0011625$$





Mediante una integración numérica realizada con una hoja electrónica, se puede encontrar tanto la magnitud de la fuerza de compresión “**C_c**” como la posición del centro de gravedad “**d₂**” de esa fuerza respecto al eje neutro. Para el efecto se suman los volúmenes de presiones (fuerzas) y se suman los momentos respecto al eje neutro.

ε	Distancia al Eje Neutro (y)	σ	Area $A_i = \frac{\sigma_i + \sigma_{i-1}}{2} \cdot (y_i - y_{i-1})$	Profundidad (b)	Volumen $V_i = A_i \cdot b_i$	Centro de Gravedad	Momento
0,0000	0,0000	0,0					
0,0001	0,8163	16,2	6,61	40	264,5	0,408	108,0
0,0002	1,6327	32,1	19,71	40	788,6	1,225	965,6
0,0003	2,4490	47,7	32,57	40	1302,9	2,041	2658,9
0,0004	3,2653	63,0	45,18	40	1807,4	2,857	5163,9
0,0005	4,0817	77,9	57,51	40	2300,4	3,674	8450,6
0,0006	4,8980	92,5	69,55	40	2782,1	4,490	12491,0
0,0007	5,7143	106,7	81,31	40	3252,3	5,306	17257,1
0,0008	6,5307	120,5	92,74	40	3709,4	6,123	22710,9
0,0009	7,3470	133,8	103,80	40	4151,9	6,939	28809,1
0,0010	8,1633	146,5	114,41	40	4576,4	7,755	35490,5
0,0011	8,9797	158,7	124,57	40	4982,9	8,572	42710,9
0,0011625	9,4899	166,0	82,82	40	3312,8	9,235	30592,8
0,0011625	9,4899	166,0	0,00	100	0,0	9,490	0,0
0,0012	9,7960	170,3	51,47	100	5146,7	9,643	49629,6
0,0013	10,6123	181,3	143,51	100	14351,1	10,204	146441,4
0,0014	11,4287	191,5	152,16	100	15216,5	11,021	167692,9
0,0015	12,2450	201,0	160,21	100	16020,5	11,837	189632,5
0,0016	13,0613	209,6	167,59	100	16759,3	12,653	212058,5
0,0017	13,8777	217,4	174,29	100	17428,7	13,470	234756,1
0,0018	14,6940	224,1	180,21	100	18020,6	14,286	257438,7
0,0019	15,5103	229,8	185,27	100	18526,7	15,102	279793,1
0,0020	16,3267	234,4	189,47	100	18947,1	15,919	301609,4
0,0021	17,1430	237,6	192,65	100	19265,5	16,735	322404,4
0,0022	17,9593	239,6	194,78	100	19477,7	17,551	341856,6
0,0023	18,7757	240,0	195,76	100	19575,7	18,368	359556,2
0,0024	19,5920	238,8	195,43	100	19543,0	19,184	374910,0
0,0025	20,4083	236,0	193,80	100	19379,8	20,000	387598,3
0,0026	21,2247	231,2	190,70	100	19069,5	20,817	396961,2
0,0027	22,0410	224,4	185,96	100	18596,1	21,633	402285,8
0,0028	22,8573	215,3	179,47	100	17947,1	22,449	402897,2
0,0029	23,6737	203,9	171,10	100	17110,3	23,266	398080,8
0,0030	24,4900	189,9	160,74	100	16073,6	24,082	387081,8
Σ					359686,9	5820093,8	

De acuerdo a la tabla:

$$C_c = 359687 \text{ Kg}$$

$$d_2 = \frac{5820094 \text{ Kg} - \text{cm}}{359687 \text{ Kg}}$$

$$d_2 = 16.18 \text{ cm}$$

Si se compara la magnitud de la fuerza de compresión obtenida (359687 Kg) con la fuerza de tracción provista por el acero (309246 Kg), la fuerza de compresión es superior a la fuerza de tracción (esto ya se observó en el estudio del bloque rectangular de Whitney), por lo que la posición del eje neutro ha sido sobreestimada y debe ser reducida. Es necesario realizar un reajuste rápido para lo que la hoja electrónica resulta muy útil.



Primer Reajuste de la Posición del Eje Neutro:

Se puede disminuir la altura de posición del eje neutro en la misma proporción en que se requiere disminuir la fuerza de compresión, con lo que se obtendría:

$$\frac{T}{C_c} = \frac{309246 \text{ Kg}}{359687 \text{ Kg}}$$

$$\frac{T}{C_c} = 0.8598$$

$$c = (0.8598) \cdot (24.49 \text{ cm})$$

$$c = 21.06 \text{ cm}$$

La distancia desde el eje neutro hasta la base del ala es:

$$d_1 = 21.06 \text{ cm} - 15 \text{ cm}$$

$$d_1 = 6.06 \text{ cm}$$

La deformación unitaria en la base del ala es:

$$\varepsilon_1 = \frac{6.06 \text{ cm}}{21.06 \text{ cm}} \cdot (0.003)$$

$$\varepsilon_1 = 0.0008632$$

La tabla recalculada sería:

ε	Distancia al Eje Neutro (y)	σ	Area $A_i = \frac{\sigma_i + \sigma_{i-1}}{2} \cdot (y_i - y_{i-1})$	Profundidad (b)	Volumen $V_i = A_i \cdot b_i$	Centro de Gravedad	Momento
0,0000	0,0000	0,0					
0,0001	0,7020	20,0	7,02	40	280,8	0,351	98,6
0,0002	1,4040	39,6	20,92	40	836,8	1,053	881,1
0,0003	2,1060	58,5	34,43	40	1377,3	1,755	2417,2
0,0004	2,8080	76,8	47,49	40	1899,6	2,457	4667,3
0,0005	3,5100	94,3	60,06	40	2402,2	3,159	7588,7
0,0006	4,2120	111,0	72,06	40	2882,4	3,861	11129,0
0,0007	4,9140	126,8	83,47	40	3338,7	4,563	15234,5
0,0008	5,6160	141,7	94,24	40	3769,7	5,265	19847,7
0,0008632	6,0597	142,7	63,09	40	2523,6	5,838	14732,1
0,0008632	6,0597	143,7	0,00	40	0,0	6,060	0,0
0,0009	6,3180	155,7	38,67	40	1546,9	5,967	9230,4
0,0010	7,0200	168,7	113,86	40	4554,6	6,540	29786,2
0,0011	7,7220	180,7	122,64	40	4905,6	7,371	36159,0
0,0012	8,4240	191,7	130,71	41	5359,2	8,073	43264,9
0,0013	9,1260	201,6	138,05	100	13804,8	8,775	121137,4
0,0014	9,8280	210,4	144,61	100	14461,2	9,477	137048,8
0,0015	10,5300	218,1	150,40	100	15040,4	10,179	153095,7
0,0016	11,2320	224,7	155,42	100	15542,3	10,881	169115,5
0,0017	11,9340	230,2	159,67	100	15967,0	11,583	184945,6
0,0018	12,6360	234,4	163,07	100	16307,5	12,285	200337,1
0,0019	13,3380	237,5	165,64	100	16563,7	12,987	215112,6
0,0020	14,0400	239,4	167,39	100	16739,2	13,689	229142,8
0,0021	14,7420	240,0	168,27	100	16826,9	14,391	242156,5
0,0022	15,4440	239,4	168,27	100	16826,9	15,093	253969,0
0,0023	16,1460	237,5	167,39	100	16739,2	15,795	264395,5
0,0024	16,8480	234,3	165,60	100	16560,2	16,497	273193,3
0,0025	17,5500	229,8	162,90	100	16289,9	17,199	280170,2
0,0026	18,2520	224,0	159,28	100	15928,4	17,901	285133,9



0,0027	18,9540	216,9	154,76	100	15475,6	18,603	287892,4
0,0028	19,6560	208,4	149,28	100	14928,0	19,305	288185,6
0,0029	20,3580	198,5	142,82	100	14282,2	20,007	285743,8
0,0030	21,0600	187,3	135,42	100	13541,6	20,709	280432,6
Σ					317503,4	4346245,2	

De acuerdo a la tabla:

$$C_c = 317503 \text{ Kg}$$

$$d_2 = \frac{4346245 \text{ Kg} \cdot \text{cm}}{317503 \text{ Kg}}$$

$$d_2 = 13.69 \text{ cm}$$

Si se compara la magnitud de la fuerza de compresión obtenida (317503 Kg) con la fuerza de tracción provista por el acero (309246 Kg), la fuerza de compresión está todavía 2.7% por encima de la fuerza de tracción por lo que se requiere realizar una nueva iteración.

Segundo Reajuste de la Posición del Eje Neutro:

Se puede aumentar la altura de posición del eje neutro en la misma proporción que se requiere aumentar la fuerza de compresión, con lo que se obtendría:

$$\frac{T}{C_c} = \frac{309246 \text{ Kg}}{317503 \text{ Kg}}$$

$$\frac{T}{C_c} = 0.9740$$

$$c = (0.9740) \cdot (21.06 \text{ cm})$$

$$c = 20.51 \text{ cm}$$

La distancia desde el eje neutro hasta la base del ala es:

$$d_1 = 20.51 \text{ cm} - 15 \text{ cm}$$

$$d_1 = 5.51 \text{ cm}$$

La deformación unitaria en la base del ala es:

$$\varepsilon_1 = \frac{5.51 \text{ cm}}{20.51 \text{ cm}} \cdot (0.003)$$

$$\varepsilon_1 = 0.0008059$$

La tabla recalculada sería:

ε₁ = 0.0008059	Distancia al Eje Neutro (y)	σ	Area $A_i = \frac{\sigma_i + \sigma_{i-1}}{2} \cdot (y_i - y_{i-1})$	Profundidad (b)	Volumen $V_i = A_i \cdot b_i$	Centro de Gravedad	Momento
La tabla recalculada sería:							
ε							
0,0000	0,0000	0,0					
0,0001	0,6837	20,0	6,84	40	273,5	0,342	93,5
0,0002	1,3673	39,6	20,37	40	814,9	1,026	835,7
0,0003	2,0510	58,5	33,53	40	1341,4	1,709	2292,6
0,0004	2,7347	76,8	46,25	40	1850,0	2,393	4426,7



0,0005	3,4183	94,3	58,49	40	2339,5	3,077	7197,5
0,0006	4,1020	111,0	70,18	40	2807,1	3,760	10555,3
0,0007	4,7857	126,8	81,29	40	3251,5	4,444	14449,2
0,0008	5,4693	141,7	91,78	40	3671,3	5,128	18824,5
0,0008059	5,5097	142,7	5,74	40	229,4	5,490	1259,5
0,0008059	5,5097	143,7	0,00	40	0,0	5,510	0,0
0,0009	6,1530	155,7	96,31	40	3852,3	5,811	22386,1
0,0010	6,8367	168,7	110,89	40	4435,6	6,173	27381,9
0,0011	7,5203	179,2	118,92	40	4757,0	7,179	34147,8
0,0012	8,2040	180,2	122,85	41	5037,1	7,862	39602,1
0,0013	8,8877	198,4	129,42	100	12941,8	8,546	110598,6
0,0014	9,5713	206,5	138,41	100	13840,8	9,230	127744,0
0,0015	10,2550	213,8	143,67	100	14367,3	9,913	142425,0
0,0016	10,9387	220,2	148,36	100	14835,6	10,597	157210,0
0,0017	11,6223	225,6	152,39	100	15238,9	11,281	171902,7
0,0018	12,3060	230,2	155,81	100	15580,8	11,964	186410,8
0,0019	12,9897	233,9	158,64	100	15864,5	12,648	200651,4
0,0020	13,6733	236,7	160,87	100	16086,7	13,332	214459,5
0,0021	14,3570	238,7	162,51	100	16250,8	14,015	227757,1
0,0022	15,0407	239,8	163,57	100	16356,7	14,699	240424,8
0,0023	15,7243	240,0	164,01	100	16401,2	15,383	252290,9
0,0024	16,4080	239,4	163,87	100	16387,5	16,066	263284,1
0,0025	17,0917	238,0	163,19	100	16319,1	16,750	273342,6
0,0026	17,7753	235,7	161,93	100	16192,6	17,434	282294,5
0,0027	18,4590	232,6	160,08	100	16008,1	18,117	290020,6
0,0028	19,1427	228,7	157,69	100	15768,8	18,801	296466,0
0,0029	19,8263	224,0	154,75	100	15474,8	19,485	301518,6
0,0030	20,5100	218,5	151,26	100	15126,1	20,168	305066,2
Σ					313702,5	4227320,0	

De acuerdo a la tabla:

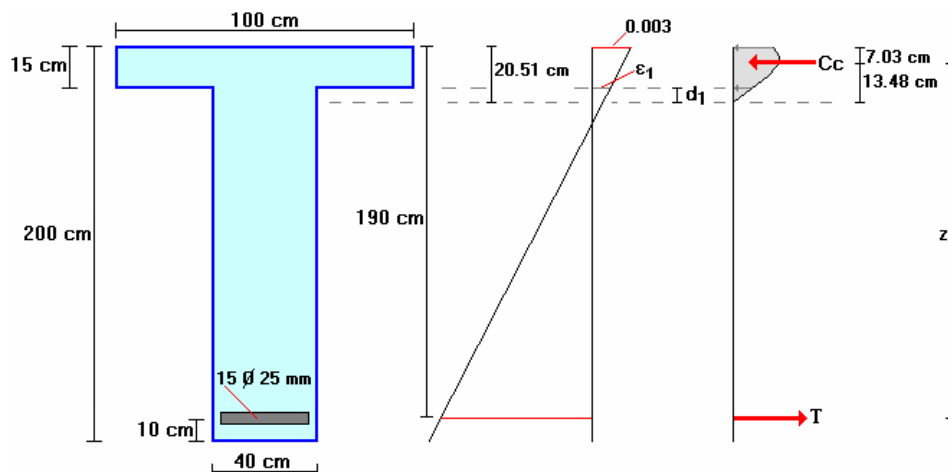
$$C_c = 313703 \text{ Kg}$$

$$d_2 = \frac{4227320 \text{ Kg} - \text{cm}}{313703 \text{ Kg}}$$

$$d_2 = 13.48 \text{ cm}$$

Si se compara la magnitud de la fuerza de compresión obtenida (313703 Kg) con la fuerza de tracción provista por el acero (309246 Kg), la fuerza de compresión está muy próxima a la fuerza de tracción (difiere un 1.4%) por lo que se suspenderá el proceso.

Cálculo del Momento Flector Resistente:





El momento flector resistente nominal es:

$$M_n = T \cdot z$$

$$T = 309246 \text{ Kg}$$

$$z = 190 \text{ cm} - 7.03 \text{ cm}$$

$$z = 182.97 \text{ cm}$$

$$M_n = (309246 \text{ Kg}) \cdot (182.97 \text{ cm})$$

$$M_n = 56582741 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_n = 565.83 \text{ T} \cdot \text{m}$$

El momento último resistente es:

$$M_u = \phi \cdot M_n$$

$$M_u = (0.90) \cdot (565.83 \text{ T} \cdot \text{m})$$

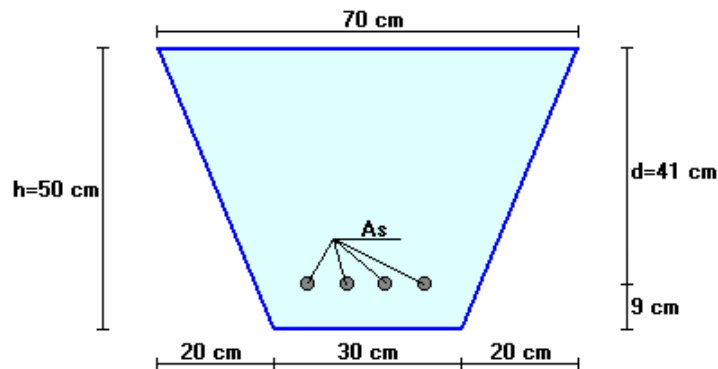
$$\mathbf{M_u = 509.25 \text{ T} \cdot \text{m}}$$

La sección transversal propuesta si es capaz de resistir un momento flector último de 500 T-m.

NOTA: El momento resistente en una viga diseñada con los criterios de ductilidad adecuados depende básicamente de la sección de acero de tracción.

EJEMPLO 7.13:

Diseñar la siguiente viga trapezoidal para resistir un momento flector último de 40 T-m, si el hormigón tiene una resistencia característica de 210 Kg/cm² y el esfuerzo de fluencia del acero es 4200 Kg/cm².



Se ha escogido una distancia de la cara extrema al centro de gravedad de las varillas traccionadas de 9 cm porque por el poco ancho en la zona inferior probablemente se requieran 2 capas de acero como refuerzo.

Solución:

Se puede realizar una estimación de la sección de acero mediante la siguiente fórmula aproximada que asume que el centro de gravedad de la fuerza de compresión está ubicado a “0.1 d” de la cara extrema comprimida:

$$A_s = \frac{M_u}{\phi \cdot (0.9d) \cdot F_y}$$



$$A_s = \frac{4000000 \text{ Kg} - \text{cm}}{(0.9) \cdot [(0.9) \cdot (41 \text{ cm})] \cdot (4200 \text{ Kg} / \text{cm}^2)}$$

$$A_s = 28.68 \text{ cm}^2$$

La fuerza de tracción es:

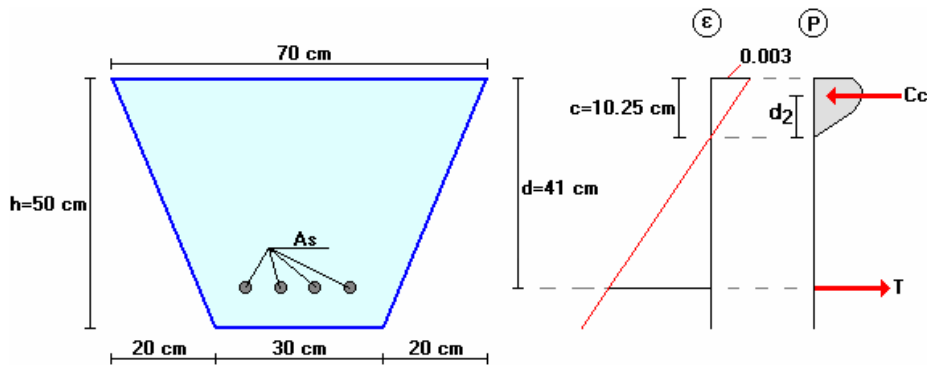
$$T = A_s \cdot F_y$$

$$T = (32.26 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg} / \text{cm}^2)$$

$$\mathbf{T = 120456 \text{ Kg}}$$

Primera Aproximación:

Inicialmente se supondrá que la zona comprimida ocupa una altura de “0.25 d” (10.25 cm), que es consistente con la fórmula de cálculo de la sección de acero, siempre que la cuantía de armado final no sea demasiado alta.



Mediante una tabla similar a la del ejemplo anterior se puede encontrar tanto la magnitud de la fuerza de compresión “Cc” como la posición del centro de gravedad “d₂” de esa fuerza respecto al eje neutro.

ε	Distancia al Eje Neutro	σ	Area	Profundidad	Volumen	Centro de Gravedad	Momento
0,0000	0,0000	0,0		61,800			
0,0001	0,3417	14,3	2,44	62,073	151,7	0,171	25,9
0,0002	0,6833	28,3	7,28	62,347	454,1	0,513	232,7
0,0003	1,0250	42,1	12,03	62,620	753,0	0,854	643,2
0,0004	1,3667	55,5	16,66	62,893	1047,8	1,196	1253,0
0,0005	1,7083	68,5	21,18	63,167	1338,1	1,538	2057,3
0,0006	2,0500	81,2	25,59	63,440	1623,2	1,879	3050,2
0,0007	2,3917	93,6	29,86	63,713	1902,5	2,221	4225,1
0,0008	2,7333	105,5	34,00	63,987	2175,3	2,563	5574,3
0,0009	3,0750	116,9	37,99	64,260	2441,1	2,904	7089,3
0,0010	3,4167	127,9	41,82	64,533	2698,9	3,246	8760,3
0,0011	3,7583	138,4	45,49	64,807	2948,1	3,588	10576,3
0,0012	4,1000	148,3	48,98	65,080	3187,7	3,929	12525,0
0,0013	4,4417	157,7	52,28	65,353	3416,8	4,271	14592,6
0,0014	4,7833	166,5	55,38	65,627	3634,5	4,613	16763,9
0,0015	5,1250	174,6	58,26	65,900	3839,6	4,954	19021,8
0,0016	5,4667	182,0	60,92	66,173	4031,0	5,296	21347,5
0,0017	5,8083	188,7	63,32	66,447	4207,5	5,638	23720,0
0,0018	6,1500	194,5	65,47	66,720	4367,9	5,979	26116,3
0,0019	6,4917	199,6	67,33	66,993	4510,6	6,321	28510,9
0,0020	6,8333	203,7	68,89	67,267	4634,3	6,663	30876,0



TEMAS DE HORMIGÓN ARMADO

Marcelo Romo Proaño, M.Sc.

Escuela Politécnica del Ejército – Ecuador

mromo@espe.edu.ec

0,0021	7,1750	206,9	70,14	67,540	4737,3	7,004	33180,7
0,0022	7,5167	209,0	71,05	67,813	4817,9	7,346	35391,2
0,0023	7,8583	210,0	71,59	68,087	4874,2	7,688	37470,5
0,0024	8,2000	209,9	71,74	68,360	4904,4	8,029	39377,9
0,0025	8,5417	208,5	71,48	68,633	4906,2	8,371	41068,9
0,0026	8,8833	205,8	70,78	68,907	4877,5	8,713	42495,0
0,0027	9,2250	201,7	69,61	69,180	4815,8	9,054	43602,9
0,0028	9,5667	196,0	67,94	69,453	4718,5	9,396	44334,6
0,0029	9,9083	188,7	65,73	69,727	4583,0	9,738	44626,6
0,0030	10,2500	179,7	62,94	70,000	4406,1	10,079	44409,9
Σ					101004,5		642920,0

De acuerdo a la tabla:

$$C_c = 101005 \text{ Kg}$$

$$d_2 = \frac{642920 \text{ Kg} - \text{cm}}{101005 \text{ Kg}}$$

$$d_2 = 6.37 \text{ cm}$$

Al comparar la fuerza de compresión obtenida (101005 Kg) con la fuerza de tracción provista por el acero (120456 Kg), la fuerza de compresión es insuficiente para equilibrar a la fuerza de tracción, por lo que la altura de la zona de compresión debe ser mayor.

$$\frac{T}{C_c} = \frac{120456 \text{ Kg}}{101005 \text{ Kg}}$$

$$\frac{T}{C_c} = 1.1926$$

$$c = (1.1926) \cdot (10.25 \text{ cm})$$

$$c = 12.22 \text{ cm}$$

La tabla recalculada con la nueva posición del eje neutro sería:

ε	Distancia al Eje Neutro	σ	Area	Profundidad	Volumen	Centro de Gravedad	Momento
0,0000	0,0000	0,0		60,224			
0,0001	0,4073	14,3	2,91	60,550	176,4	0,204	35,9
0,0002	0,8147	28,3	8,68	60,876	528,6	0,611	323,0
0,0003	1,2220	42,1	14,34	61,202	877,4	1,018	893,5
0,0004	1,6293	55,5	19,86	61,527	1222,1	1,426	1742,3
0,0005	2,0367	68,5	25,25	61,853	1562,1	1,833	2863,3
0,0006	2,4440	81,2	30,50	62,179	1896,7	2,240	4249,2
0,0007	2,8513	93,6	35,60	62,505	2225,1	2,648	5891,3
0,0008	3,2587	105,5	40,53	62,831	2546,6	3,055	7779,8
0,0009	3,6660	116,9	45,29	63,157	2860,3	3,462	9903,2
0,0010	4,0733	127,9	49,86	63,483	3165,3	3,870	12248,5
0,0011	4,4807	138,4	54,23	63,809	3460,6	4,277	14800,9
0,0012	4,8880	148,3	58,40	64,134	3745,1	4,684	17543,5
0,0013	5,2953	157,7	62,33	64,460	4017,8	5,092	20457,5
0,0014	5,7027	166,5	66,02	64,786	4277,5	5,499	23521,9
0,0015	6,1100	174,6	69,46	65,112	4522,8	5,906	26713,0
0,0016	6,5173	182,0	72,62	65,438	4752,3	6,314	30004,5
0,0017	6,9247	188,7	75,49	65,764	4964,6	6,721	33367,4
0,0018	7,3320	194,5	78,05	66,090	5158,2	7,128	36769,1
0,0019	7,7393	199,6	80,27	66,415	5331,2	7,536	40173,9
0,0020	8,1467	203,7	82,14	66,741	5481,8	7,943	43542,3
0,0021	8,5540	206,9	83,62	67,067	5608,2	8,350	46830,6



0,0022	8,9613	209,0	84,70	67,393	5708,2	8,758	49990,9
0,0023	9,3687	210,0	85,35	67,719	5779,6	9,165	52970,3
0,0024	9,7760	209,9	85,53	68,045	5820,0	9,572	55710,9
0,0025	10,1833	208,5	85,22	68,371	5826,8	9,980	58149,1
0,0026	10,5907	205,8	84,39	68,697	5797,2	10,387	60215,2
0,0027	10,9980	201,7	82,99	69,022	5728,3	10,794	61832,9
0,0028	11,4053	196,0	81,00	69,348	5616,9	11,202	62918,7
0,0029	11,8127	188,7	78,36	69,674	5459,7	11,609	63381,3
0,0030	12,2200	179,7	75,04	70,000	5252,9	12,016	63121,1
Σ					119370,3		907944,9

De acuerdo a la tabla:

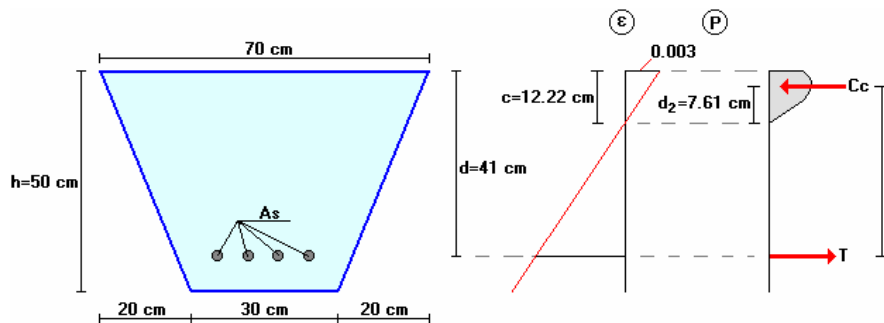
$C_c = 119370 \text{ Kg}$

$$d_2 = \frac{907945 \text{ Kg} - \text{cm}}{119370 \text{ Kg}}$$

$d_2 = 7.61 \text{ cm}$

Las fuerzas de compresión (119370 Kg) y de tracción (120456 Kg) difieren en menos del 1%, por lo que se consideran suficientemente próximas para asumir que se ha logrado la convergencia en cuanto a la posición del eje neutro, para la sección de acero especificada.

$c = 12.22 \text{ cm}$



Cálculo del Momento Flector Resistente de la Primera Aproximación:

El momento flector resistente nominal es:

$$M_n = T \cdot z$$

$$T = 120456 \text{ Kg}$$

$$z = 41 \text{ cm} - (12.22 \text{ cm} - 7.61 \text{ cm})$$

$$z = 36.39 \text{ cm}$$

$$M_n = (120456 \text{ Kg}) \cdot (36.39 \text{ cm})$$

$M_n = 4383394 \text{ Kg} - \text{cm}$

El momento último resistente es:

$$M_u = \phi \cdot M_n$$

$$M_u = (0.90) \cdot (43.83 \text{ T} - \text{m})$$

$M_u = 39.45 \text{ T} - \text{m}$

Con el armado propuesto de 28.68 cm^2 , la viga sólo puede resistir un momento flector último de 39.45 T-m, mientras que la sollicitación es de 40 T-m; sin

embargo, la diferencia entre el momento solicitante y el resistente es menor al 1.5% por lo que se puede hacer un reajuste rápido del área de acero.

Reajuste Final del Área de Acero:

Se corregirá la sección de armado en la misma proporción que se debe producir el incremento de los momentos flectores resistentes para llegar a las 50 T-m..

$$A_s = \left(\frac{40 \text{ T-m}}{39.45 \text{ T-m}} \right) \cdot (28.68 \text{ cm}^2)$$

$$A_s = 29.08 \text{ cm}^2$$

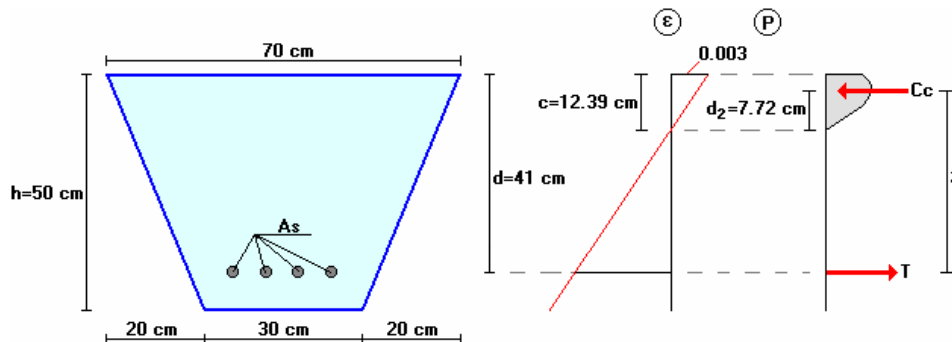
Con el mismo esquema se pueden reajustar los valores de “c” y de “d₂”.

$$c = \left(\frac{40 \text{ T-m}}{39.45 \text{ T-m}} \right) \cdot (12.22 \text{ cm})$$

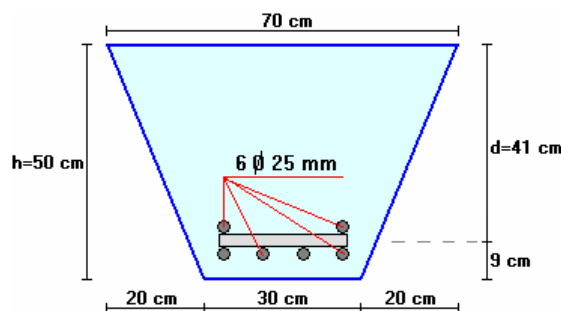
$$A_s = 12.39 \text{ cm}$$

$$d_2 = \left(\frac{40 \text{ T-m}}{39.45 \text{ T-m}} \right) \cdot (7.61 \text{ cm})$$

$$A_s = 7.72 \text{ cm}$$



La sección de acero requerida puede ser provista por 6 varillas de 25 mm de diámetro (29.45 cm²), colocadas en 2 capas.



7.8 DISEÑO A FLEXIÓN DE VIGAS CON ARMADURA DE COMPRESIÓN:

Existen dos razones fundamentales por las cuales, en una viga sometida a flexión se puede requerir un diseño en el que, a más de la armadura de tracción tradicional, se utilice armadura sometida a compresión:



- Porque existe un limitante máximo de tipo arquitectónico, constructivo o funcional que impide que la viga aumente sus dimensiones.
- Porque, por aspectos constructivos o de diseño, ya existe armadura de compresión y se desea aprovechar su existencia obligatoria para disminuir el armado de tracción.

Las especificaciones de los códigos imponen criterios de diseño que permiten que, a pesar de incrementar el armado de las vigas, se mantengan los niveles de ductilidad que son exigidos para las vigas que solamente requieren armadura de tracción.

- Cuando la viga no resiste solicitaciones sísmicas, la cuantía de armado a tracción máxima admisible se define mediante la siguiente expresión:

$$\rho_{\max} = 0.75(\rho_b + \rho') \quad \text{Ecuación (7.10)}$$

Donde:

ρ : cuantía de armado a tracción

ρ_b : cuantía balanceada a tracción cuando no existe armadura de compresión

ρ' : cuantía de armado a compresión

- Cuando la viga resiste solicitaciones sísmicas, la cuantía de armado a tracción se define mediante la siguiente expresión:

$$\rho_{\max} = 0.50(\rho_b + \rho') \quad \text{Ecuación (7.13)}$$

Para secciones rectangulares, las cuantías de armado anotadas anteriormente se calculan con las siguientes expresiones:

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d}$$

$$\rho_b = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003}$$

$$\rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d}$$

El criterio básico detrás de las expresiones que definen la cuantía máxima es el de que la presencia de la armadura de compresión hace cambiar la magnitud de la cuantía balanceada, que puede ser calculada con la siguiente expresión:

$$\rho_{b1} = \rho' + 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003}$$

La expresión anterior presupone que el momento en que el acero de tracción ha alcanzado la deformación de fluencia ($\epsilon_s = \epsilon_y = F_y / E_s$) y el hormigón ha alcanzado su máxima deformación ($\epsilon_c = 0.003$), el acero de compresión ha igualado o superado la deformación de fluencia ($\epsilon_s' \geq \epsilon_y$).

Para el caso más común, de vigas rectangulares, el problema puede representarse esquemáticamente de la siguiente manera:

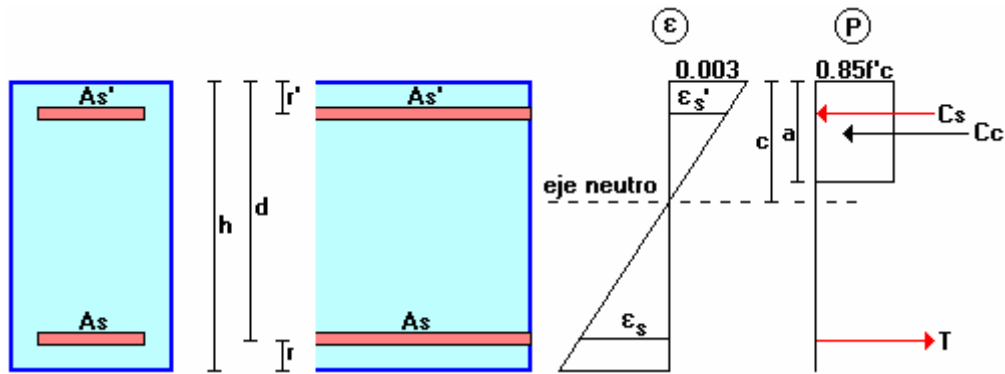


Figura 7.41: Deformaciones y esfuerzos en vigas rectangulares con armadura de tracción y de compresión.

En el gráfico anterior, además de la geometría básica de la viga, constan el diagrama de deformaciones unitarias (ϵ) y el diagrama de fuerzas internas (**P**)

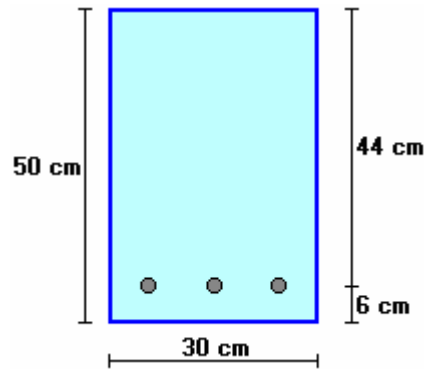
a. Diseño de Vigas que no Pueden Incrementar sus Dimensiones Exteriores:

Con bastante frecuencia existen limitantes en cuanto a las dimensiones máximas que pueden tener las vigas y, en ocasiones, al intentar diseñar a flexión tales vigas, se encuentra que es necesario un armado de tracción que supera los porcentajes de la cuantía balanceada especificados por los códigos (75% de la cuantía balanceada para elementos que no resisten sismos, y 50 % de la cuantía balanceada para elementos que resisten sismos), o sencillamente ya no existe armadura capaz de resistir el momento flector solicitante. En este caso se puede utilizar el siguiente procedimiento:

- Se calcula el momento flector que es capaz de resistir la sección de hormigón armado cuando utiliza la cuantía máxima permitida por los códigos (75% o 50% de la cuantía balanceada, según el caso).
- Se calcula la parte de momento flector solicitante que no alcanza a ser resistida por la cuantía de armado definida anteriormente, y que debe ser resistida con armadura de tracción adicional y con armadura de compresión.
- Se calcula una primera aproximación del acero adicional de tracción y el acero de compresión requeridos para resistir la parte del momento flector solicitante que no puede ser resistida por la cuantía de armado máxima definida por los códigos.
- Se calcula el momento flector real que resiste el armado propuesto.
- Iterativamente se corrige el armado de tracción y compresión hasta obtener el diseño más económico.

EJEMPLO 7.14:

Diseñar la viga rectangular de la figura que está sometida a un momento flector último $M_u = 27 \text{ T-m}$, si el hormigón tiene una resistencia a la rotura $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y el acero tiene un esfuerzo de fluencia $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$. La viga debe ser diseñada para una zona sísmica.



➤ **Verificación de la Necesidad de Armadura de Compresión:**

Si se supone que el acero de tracción se encuentra en fluencia, se pueden utilizar las siguientes expresiones para calcular la armadura requerida para resistir el momento flector solicitante:

$$k = 0.85f'c.b.d$$

$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2.M_u}{\phi.k.d}} \right]$$

Los datos son:

$$f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 44 \text{ cm}$$

$$\phi = 0.90$$

$$M_u = 27 \text{ T-m} = 2700000 \text{ Kg-cm}$$

El acero de tracción requerido es:

$$k = 0.85(210 \text{ Kg/cm}^2) \cdot (30 \text{ cm}) \cdot (44 \text{ cm})$$

$$k = 235620 \text{ Kg}$$

$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2.M_u}{\phi.k.d}} \right]$$

$$A_s = \frac{235620 \text{ Kg}}{4200 \text{ Kg/cm}^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (2700000 \text{ Kg-cm})}{(0.90) \cdot (235620 \text{ Kg}) \cdot (44 \text{ cm})}} \right]$$

$$A_s = 19.69 \text{ cm}^2$$

La cuantía de armado es:

$$\rho = \frac{A_s}{b.d} = \frac{19.69 \text{ cm}^2}{(30 \text{ cm})(44 \text{ cm})}$$

$$\rho = 0.01492$$

La cuantía balanceada de la sección es:

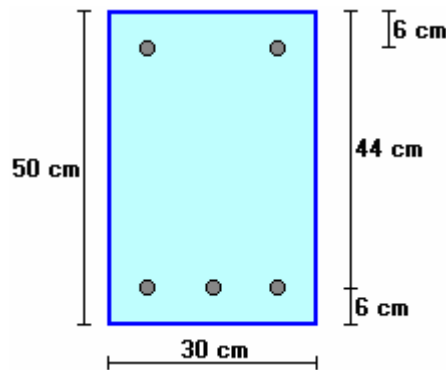
$$\rho_b = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003}$$

$$\rho_b = 0.85(0.85) \frac{210 \text{ Kg/cm}^2}{4200 \text{ Kg/cm}^2} \cdot \frac{0.003}{\frac{4200 \text{ Kg/cm}^2}{2100000 \text{ Kg/cm}^2} + 0.003} = 0.02168$$

La cuantía máxima permisible para zonas sísmicas es:

$$\rho_{\text{máx}} = 0.50 \rho_b = 0.01084$$

Dado que la cuantía de armado calculada (0.01492) supera a la cuantía máxima permisible (0.01084), se requiere de acero de compresión para poder resistir los momentos flectores solicitantes.



➤ Cálculo del Momento Flector Máximo que puede Resistirse Únicamente con Armadura de Tracción:

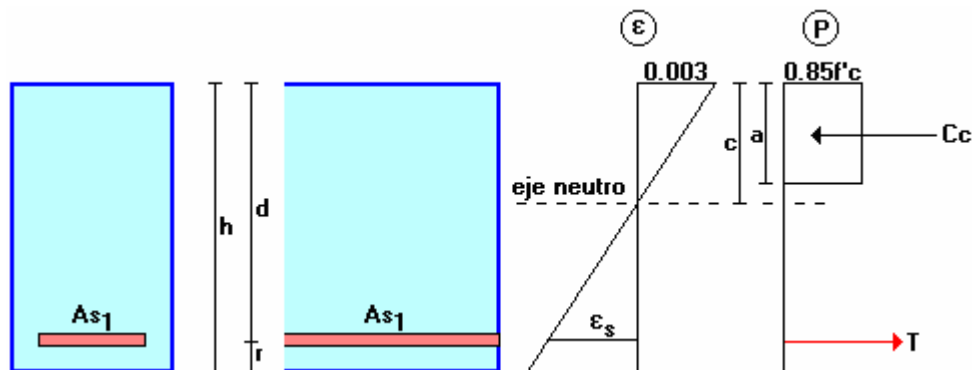
La cuantía máxima de armado sin armadura de compresión es:

$$\rho_{\text{máx}} = 0.01084$$

La cantidad de acero máxima permisible para la sección, sin armadura de compresión, es:

$$A_{s1} = \rho_{\text{máx}} \cdot b \cdot d = (0.01084) (30 \text{ cm}) (44 \text{ cm})$$

$$A_{s1} = 14.31 \text{ cm}^2$$



La altura **a** del bloque de compresión es:



$$a = \frac{A_{s1} \cdot F_y}{0.85 f'_c \cdot b}$$
$$a = \frac{(14.31 \text{ cm}^2)(4200 \text{ Kg/cm}^2)}{(0.85)(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})}$$
$$a = 11.22 \text{ cm}$$

El momento flector último resistente **Mu₁** es:

$$M_{u1} = \phi \cdot A_{s1} \cdot F_y \left(d - \frac{a}{2} \right)$$
$$M_{u1} = (0.90)(14.31 \text{ cm}^2)(4200 \text{ Kg/cm}^2) \left(44 \text{ cm} - \frac{11.22 \text{ cm}}{2} \right) = 2076584 \text{ Kg-cm}$$

$$M_{u1} = 20.77 \text{ T-m}$$

➤ **Cálculo del Momento Flector que debe ser Resistido con la Armadura de Tracción Adicional y con la Armadura de Compresión:**

El momento flector que falta por ser resistido es:

$$M_{u2} = M_u - M_{u1} = 27.00 \text{ T-m} - 20.77 \text{ T-m}$$
$$M_{u2} = 6.23 \text{ T-m}$$

Se requerirá de más acero de tracción (**As₂**) añadido al ya calculado, y de acero de compresión (**As'**) para resistir el momento flector faltante.

➤ **Cálculo de la Sección de Acero de Tracción Adicional, del Acero Total de Tracción y del Acero de Compresión:**

Se va a suponer tentativamente que la posición del eje neutro calculada para la cuantía de armado máxima únicamente con acero de tracción se mantiene luego de añadir el acero faltante de tracción y el acero de compresión (esta hipótesis es una aproximación pues, por los condicionamientos de los códigos de diseño, el eje neutro ascenderá ligeramente y el bloque de compresión del hormigón se reducirá, sin embargo se demostrará con este ejemplo que la variación de la posición del eje neutro tiene un efecto muy pequeño sobre el diseño).

Bajo esta hipótesis el momento flector faltante deberá ser resistido únicamente por el acero de tracción adicional y el acero de compresión.

Dado que el acero de tracción está en fluencia, la sección adicional aproximada de acero es:

$$A_{s2} = \frac{M_{u2}}{\phi \cdot F_y \cdot (d - r')}$$

Donde:

$$M_{u2} = 6.23 \text{ T-m} = 623000 \text{ Kg-cm}$$
$$\phi = 0.90$$
$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$
$$d = 44 \text{ cm}$$
$$r = 6 \text{ cm}$$



De donde:

$$A_{s2} = \frac{623000 \text{ Kg} - \text{cm}}{(0.90)(4200 \text{ Kg/cm}^2)(44 \text{ cm} - 6 \text{ cm})}$$

$$A_{s2} = 4.34 \text{ cm}^2$$

Por condiciones de ductilidad, el armado complementario de tracción que se acaba de calcular debe ser máximo el 50% del armado de compresión (en zonas no sísmicas sería el 75% del armado de compresión), por lo que:

$$A_{s2} \leq 0.50 A_{s'}$$

La condición más económica se produce con la igualdad:

$$A_{s2} = 0.50 A_{s'}$$

De donde:

$$A_{s'} = \frac{A_{s2}}{0.50} = \frac{4.34 \text{ cm}^2}{0.50}$$

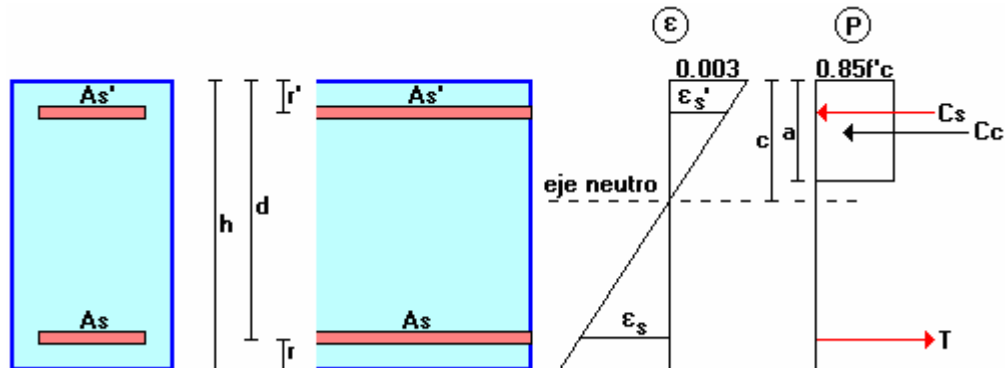
$$A_{s'} = 8.68 \text{ cm}^2$$

El acero de tracción total es:

$$A_s = A_{s1} + A_{s2} = 14.31 \text{ cm}^2 + 4.34 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 18.65 \text{ cm}^2$$

➤ **Cálculo del Momento Flector Último Resistente para el Armado Propuesto:**



$$A_s = 18.65 \text{ cm}^2$$

$$A_{s'} = 8.68 \text{ cm}^2$$

La fuerza de tracción del acero, que se encuentra en fluencia, es:

$$T = A_s \cdot F_y = (18.65 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2)$$

$$T = 78330 \text{ Kg}$$

Tentativamente se puede suponer que el acero de compresión también ha entrado en fluencia ($\epsilon_s \geq \epsilon_y$), lo que posteriormente deberá ser verificado, y corregido en caso de ser necesario. En este caso el esfuerzo en el acero de compresión es el esfuerzo de fluencia.

$$f_{s'} = F_y$$

$$f_{s'} = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$



La fuerza de compresión C_s del acero es:

$$C_s = A's \cdot f_s = (8.68 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2)$$

$$C_s = \mathbf{36456 \text{ Kg}}$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales, la fuerza de compresión en el hormigón es:

$$C_c = T - C_s = 78330 \text{ Kg} - 36456 \text{ Kg}$$

$$C_c = \mathbf{41874 \text{ Kg}}$$

La altura a del bloque de compresión es:

$$a = \frac{C_c}{0.85f'c.b} = \frac{41874 \text{ Kg}}{0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})}$$

$$a = \mathbf{7.82 \text{ cm}}$$

La posición del eje neutro queda definida como:

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{7.82 \text{ cm}}{0.85}$$

$$c = \mathbf{9.20 \text{ cm}}$$

La deformación unitaria en el acero de compresión ϵ_s puede obtenerse por semejanza de triángulos, de donde:

$$\epsilon_s' = \frac{c - r'}{c} (0.003) = \frac{9.20 \text{ cm} - 6.00 \text{ cm}}{9.20 \text{ cm}} (0.003)$$

$$\epsilon_s = \mathbf{0.001043}$$

En vista de que la deformación unitaria en el acero de compresión (0.001043) es inferior a la deformación unitaria de fluencia (0.002), la capa de compresión no ha entrado en fluencia y su esfuerzo debe ser corregido mediante la siguiente expresión [ACI 10.2.4]:

$$f'_s = E_s \cdot \epsilon_s$$

Ecuación (7.25)

La primera corrección sería:

$$f_s' = (2100000 \text{ Kg/cm}^2) (0.001043)$$

$$f_s' = \mathbf{2190 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$C_s = A's \cdot f_s = (8.68 \text{ cm}^2) (2190 \text{ Kg/cm}^2)$$

$$C_s = \mathbf{19009 \text{ Kg}}$$

$$C_c = T - C_s = 78330 \text{ Kg} - 19009 \text{ Kg}$$

$$C_c = \mathbf{59321 \text{ Kg}}$$

$$a = \frac{C_c}{0.85f'c.b} = \frac{59321 \text{ Kg}}{0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})}$$

$$a = \mathbf{11.08 \text{ cm}}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{11.08 \text{ cm}}{0.85}$$

$$c = \mathbf{13.03 \text{ cm}}$$



$$\varepsilon_s' = \frac{c - r'}{c} (0.003) = \frac{13.03 \text{ cm} - 6.00 \text{ cm}}{13.03 \text{ cm}} (0.003)$$

$$\varepsilon_s' = \mathbf{0.001619}$$

La segunda corrección sería:

$$f_s' = E_s \cdot \varepsilon_s = (2100000 \text{ Kg/cm}^2) (0.001619)$$

$$f_s' = \mathbf{3400 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$C_s = A's \cdot f_s = (8.68 \text{ cm}^2) (3400 \text{ Kg/cm}^2)$$

$$C_s = \mathbf{29508 \text{ Kg}}$$

$$C_c = T - C_s = 78330 \text{ Kg} - 29508 \text{ Kg}$$

$$C_c = \mathbf{48822 \text{ Kg}}$$

$$a = \frac{C_c}{0.85 f' c \cdot b} = \frac{48822 \text{ Kg}}{0.85 (210 \text{ Kg/cm}^2) (30 \text{ cm})}$$

$$a = \mathbf{9.12 \text{ cm}}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{9.12 \text{ cm}}{0.85}$$

$$c = \mathbf{10.73 \text{ cm}}$$

$$\varepsilon_s' = \frac{c - r'}{c} (0.003) = \frac{10.73 \text{ cm} - 6.00 \text{ cm}}{10.73 \text{ cm}} (0.003)$$

$$\varepsilon_s' = \mathbf{0.001322}$$

En vista de que la convergencia es lenta, conviene utilizar una hoja electrónica para realizar los cálculos.

Iteración	f_s' (Kg/cm ²)	C_s (Kg)	C_c (Kg)	a (cm)	c (cm)	ε_s'
1	2190	19009	59321	11,08	13,03	0,001619
2	3400	29508	48822	9,12	10,73	0,001322
3	2776	24094	54236	10,13	11,92	0,001489
4	3128	27148	51182	9,56	11,24	0,001399
5	2938	25505	52825	9,86	11,61	0,001449
6	3043	26412	51918	9,70	11,41	0,001422
7	2986	25918	52412	9,79	11,51	0,001437
8	3017	26189	52141	9,74	11,46	0,001429
9	3000	26041	52289	9,76	11,49	0,001433
10	3009	26122	52208	9,75	11,47	0,001431
11	3004	26078	52252	9,76	11,48	0,001432
12	3007	26102	52228	9,75	11,47	0,001431
13	3006	26089	52241	9,76	11,48	0,001432
14	3006	26096	52234	9,75	11,48	0,001431
15	3006	26092	52238	9,75	11,48	0,001432
16	3006	26095	52235	9,75	11,48	0,001431
17	3006	26093	52237	9,75	11,48	0,001432
18	3006	26094	52236	9,75	11,48	0,001432
19	3006	26094	52236	9,75	11,48	0,001432

Los valores de convergencia son:

$$f_s' = \mathbf{3006 \text{ Kg/cm}^2}$$



$$C_s = 26092 \text{ Kg}$$

$$C_c = 52238 \text{ Kg}$$

$$a = 9.75 \text{ cm}$$

$$c = 11.48 \text{ cm}$$

$$\epsilon_s' = 0.001432$$

El momento último resistente de la sección se puede calcular con la siguiente expresión:

$$M_u = \phi \left[C_c \left(d - \frac{a}{2} \right) + C_s (d - r') \right]$$

$$M_u = (0.90) \left[(52238 \text{ Kg}) \left(44 \text{ cm} - \frac{9.75 \text{ cm}}{2} \right) + 26092 \text{ Kg} (44 \text{ cm} - 6 \text{ cm}) \right]$$

$$M_u = 2731777 \text{ Kg-cm} = 27.3 \text{ T-m}$$

Dado que el momento flector resistente es ligeramente mayor que el momento flector solicitante (hay un exceso de 0.31777 T-m), se puede efectuar un pequeño ajuste de disminución de acero de tracción y acero de compresión:

$$\Delta M_u = 31777 \text{ Kg-cm}$$

$$\Delta A_s = \frac{\Delta M_u}{\phi \cdot F_y (d - r')}$$

$$\Delta A_s = \frac{31777 \text{ Kg-cm}}{(0.90)(4200 \text{ Kg/cm}^2)(44 \text{ cm} - 6 \text{ cm})}$$

$$\Delta A_s = 0.22 \text{ cm}^2$$

$$\Delta A_s' = \frac{\Delta A_s}{0.50}$$

$$\Delta A_s' = \frac{0.22 \text{ cm}^2}{0.50}$$

$$\Delta A_s' = 0.44 \text{ cm}^2$$

Las secciones de acero de tracción y compresión corregidas son:

$$A_s = 18.65 \text{ cm}^2 - 0.22 \text{ cm}^2$$

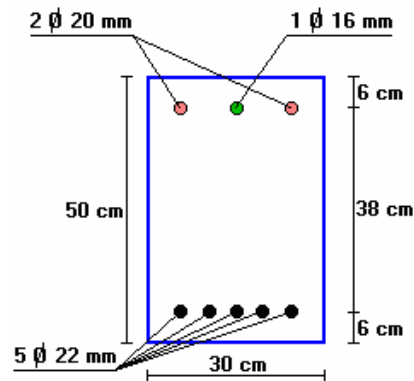
$$A_s = 18.43 \text{ cm}^2$$

$$A_s' = 8.68 \text{ cm}^2 - 0.44 \text{ cm}^2$$

$$A_s' = 8.24 \text{ cm}^2$$

Por la rapidez de la convergencia de este proceso (en la primera corrección de armadura se añadieron 4.34 cm² al acero de tracción y 8.68 cm² al acero de compresión; en esta segunda corrección se quitaron solamente 0.22 cm² del acero de tracción y 0.44 cm² del acero de compresión, lo que representa aproximadamente la veinteva parte de la primera corrección de la armadura de tracción), no es necesario repetir el cálculo detallado.

Se escogen 5 varillas de 22 mm a tracción (19.00 cm²), y 2 varillas de 20 mm + 1 varilla de 16 mm a compresión (8.29 cm²).



NOTA 1: Si se está realizando un procesamiento manual de la información, el diseño puede suspenderse tan pronto se realiza el cálculo del acero adicional de tracción y el acero de compresión, evitándose todo el proceso de **Cálculo del Momento Flector Último Resistente para el Armado Propuesto**, sin cometerse errores de trascendencia.

NOTA 2: Si el diseño se está realizando con computadora, conviene refinar la determinación del armado con un proceso similar al propuesto en el problema anterior.

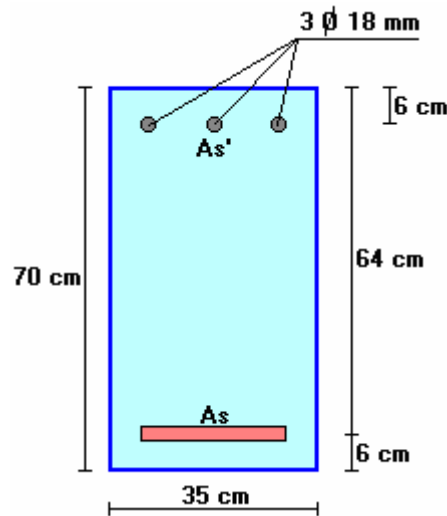
b. Diseño de Vigas que ya Disponen de Armadura de Compresión:

Se puede utilizar el siguiente procedimiento:

- Se calcula la armadura de tracción necesaria si únicamente existiera acero de tracción.
- Se calcula el momento flector real que resiste el armado propuesto.
- Iterativamente se corrige el armado de tracción hasta obtener el diseño más económico, utilizando simultáneamente criterios de resistencia y de ductilidad.

EJEMPLO 7.15:

Diseñar la viga rectangular de la figura que está sometida a un momento flector último $M_u = 46 \text{ T-m}$, si el hormigón tiene una resistencia a la rotura $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y el acero tiene un esfuerzo de fluencia $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$. Por armado de estribos la viga dispone de 3 varillas de 18 mm en la zona de compresión. La viga debe ser diseñada para una zona afectada por sismos.



➤ **Cálculo de la Armadura Requerida sin Incluir el Efecto de la Armadura de Compresión:**

Si se supone que el acero de tracción se encuentra en fluencia, y que no existe armadura de compresión, la sección transversal de la armadura de tracción se puede calcular con la siguiente expresión:

$$A_s = \frac{0.85f'_c b d}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M_u}{0.85\phi f'_c b d^2}} \right]$$

Los datos son:

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b = 35 \text{ cm}$$

$$d = 64 \text{ cm}$$

$$\phi = 0.90$$

$$M_u = 46 \text{ T-m} = 4600000 \text{ Kg-cm}$$

El acero de tracción requerido es:

$$A_s = \frac{0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(35 \text{ cm})(64 \text{ cm})}{4200 \text{ Kg/cm}^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(4600000)}{0.85(0.90)(210)(35)(64)^2}} \right]$$

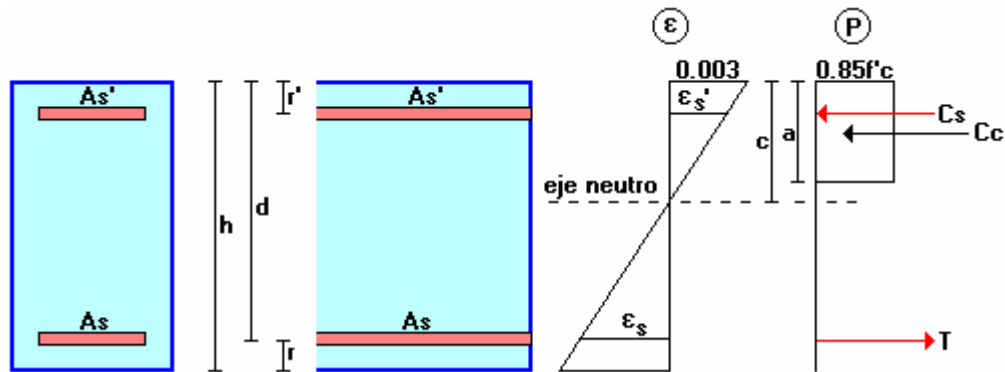
$$A_s = 21.43 \text{ cm}^2$$

La armadura de compresión es:

$$A_s' = 3 (2.54 \text{ cm}^2)$$

$$A_s' = 7.62 \text{ cm}^2$$

➤ **Cálculo del Momento Flector Último Resistente para el Armado Propuesto:**



$$A_s = 21.43 \text{ cm}^2$$

$$A_s' = 7.62 \text{ cm}^2$$

La fuerza de tracción del acero, que se encuentra en fluencia, es:

$$T = A_s \cdot F_y = (21.43 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2)$$

$$\mathbf{T = 90006 \text{ Kg}}$$

Se puede suponer que el acero de compresión también ha entrado en fluencia ($\epsilon_s \geq \epsilon_y$). En este caso el esfuerzo en el acero de compresión es el esfuerzo de fluencia.

$$f_s' = F_y$$

$$\mathbf{f_s' = 4200 \text{ Kg/cm}^2}$$

La fuerza de compresión C_s del acero es:

$$C_s = A_s' \cdot f_s = (7.62 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2)$$

$$\mathbf{C_s = 32004 \text{ Kg}}$$

La fuerza de compresión en el hormigón es:

$$C_c = T - C_s = 90006 \text{ Kg} - 32004 \text{ Kg}$$

$$\mathbf{C_c = 58002 \text{ Kg}}$$

La altura a del bloque de compresión es:

$$a = \frac{C_c}{0.85f'_c \cdot b} = \frac{58002 \text{ Kg}}{0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(35 \text{ cm})}$$

$$\mathbf{a = 9.28 \text{ cm}}$$

La posición del eje neutro queda definida como:

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{9.28 \text{ cm}}{0.85}$$

$$\mathbf{c = 10.92 \text{ cm}}$$

La deformación unitaria en el acero de compresión ϵ_s es:

$$\epsilon_s' = \frac{c - r'}{c} (0.003) = \frac{10.92 \text{ cm} - 6.00 \text{ cm}}{10.92 \text{ cm}} (0.003)$$

$$\mathbf{\epsilon_s = 0.001352}$$



En vista de que la deformación unitaria en el acero de compresión (0.001352) es inferior a la deformación unitaria de fluencia (0.002), el esfuerzo del acero de compresión se corrige con la siguiente expresión:

$$f_s' = E_s \cdot \varepsilon_s$$

La primera corrección sería:

$$f_s' = (2100000 \text{ Kg/cm}^2) (0.001352)$$

$$f_s' = \mathbf{2839 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$C_s = A's \cdot f_s = (7.62 \text{ cm}^2) (2839 \text{ Kg/cm}^2)$$

$$C_s = \mathbf{21633 \text{ Kg}}$$

$$C_c = T - C_s = 90006 \text{ Kg} - 21633 \text{ Kg}$$

$$C_c = \mathbf{68373 \text{ Kg}}$$

$$a = \frac{C_c}{0.85f'_c b} = \frac{68373 \text{ Kg}}{0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(35 \text{ cm})}$$

$$a = \mathbf{10.94 \text{ cm}}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{10.94 \text{ cm}}{0.85}$$

$$c = \mathbf{12.88 \text{ cm}}$$

$$\varepsilon_s' = \frac{c - r'}{c} (0.003) = \frac{12.88 \text{ cm} - 6.00 \text{ cm}}{12.88 \text{ cm}} (0.003)$$

$$\varepsilon_s' = \mathbf{0.001602}$$

La segunda corrección sería:

$$f_s' = E_s \cdot \varepsilon_s = (2100000 \text{ Kg/cm}^2) (0.001602) = \mathbf{3364 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$f_s' = \mathbf{3364 \text{ Kg/cm}^2}$$

$$C_s = A's \cdot f_s = (7.62 \text{ cm}^2) (3364 \text{ Kg/cm}^2) = \mathbf{25635 \text{ Kg}}$$

$$C_s = \mathbf{25635 \text{ Kg}}$$

$$C_c = T - C_s = 90006 \text{ Kg} - 25635 \text{ Kg} = \mathbf{64371 \text{ Kg}}$$

$$C_c = \mathbf{64371 \text{ Kg}}$$

$$a = \frac{C_c}{0.85f'_c b} = \frac{64371 \text{ Kg}}{0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(35 \text{ cm})}$$

$$a = \mathbf{10.30 \text{ cm}}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{10.30 \text{ cm}}{0.85}$$

$$c = \mathbf{12.12 \text{ cm}}$$

$$\varepsilon_s' = \frac{c - r'}{c} (0.003) = \frac{12.12 \text{ cm} - 6.00 \text{ cm}}{12.12 \text{ cm}} (0.003)$$

$$\varepsilon_s' = \mathbf{0.001515}$$

Se puede utilizar una hoja electrónica para preparar una tabla de cálculo de convergencia:



Iteración	fs'	Cs	Cc	a	c	ε _s '
	(Kg/cm ²)	(Kg)	(Kg)	(cm)	(cm)	
1	2839	21633	68373	10,94	12,88	0,001602
2	3364	25635	64371	10,30	12,12	0,001515
3	3182	24244	65762	10,53	12,38	0,001546
4	3248	24747	65259	10,45	12,29	0,001535
5	3224	24568	65438	10,47	12,32	0,001539
6	3233	24632	65374	10,46	12,31	0,001538
7	3229	24609	65397	10,47	12,31	0,001538
8	3231	24617	65389	10,47	12,31	0,001538
9	3230	24614	65392	10,47	12,31	0,001538
10	3230	24615	65391	10,47	12,31	0,001538

Los valores de convergencia son:

fs' = 3230 Kg/cm²

Cs = 24615 Kg

Cc = 65391 Kg

a = 10.47 cm

c = 12.31 cm

ε_s' = 0.001538

El momento último resistente de la sección se puede calcular con la siguiente expresión:

$$M_u = \phi \left[C_c \left(d - \frac{a}{2} \right) + C_s (d - r') \right]$$

$$M_u = (0.90) \left[(65391 \text{ Kg}) \left(64 \text{ cm} - \frac{10.47 \text{ cm}}{2} \right) + 24615 \text{ Kg} (64 \text{ cm} - 6 \text{ cm}) \right]$$

Mu = 4743334 Kg-cm = 47.4 T-m

En vista de que el momento flector resistente es ligeramente mayor que el momento flector solicitante (hay un exceso de 1.43334 T-m), se puede efectuar un pequeño ajuste de disminución de acero de tracción:

$\Delta M_u = 143334 \text{ Kg-cm}$

$$\Delta A_s = \frac{\Delta M_u}{\phi \cdot F_y (d - r')}$$

$$\Delta A_s = \frac{143334 \text{ Kg-cm}}{(0.90)(4200 \text{ Kg/cm}^2)(64 \text{ cm} - 6 \text{ cm})}$$

ΔAs = 0.65 cm²

Se corrige la sección de acero de tracción:

$A_s = 21.43 \text{ cm}^2 - 0.65 \text{ cm}^2$

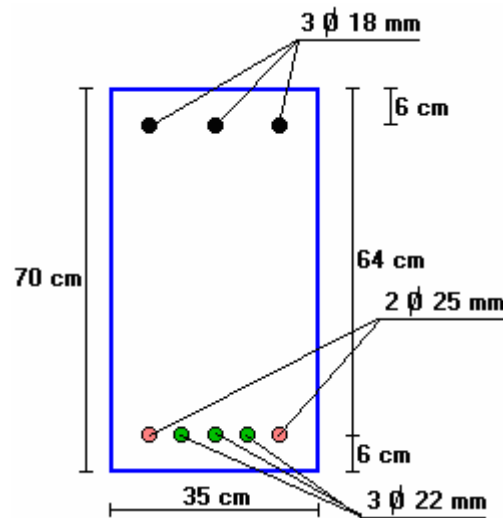
As = 20.78 cm²

As' = 7.62 cm²

Al igual que en el ejemplo anterior, no es necesario repetir el cálculo detallado.



Se escogen 2 varillas de 25 mm + 3 varillas de 22 mm a tracción (21.22 cm^2), y 3 varillas de 28 mm a compresión (7.62 cm^2) que ya existían previamente.

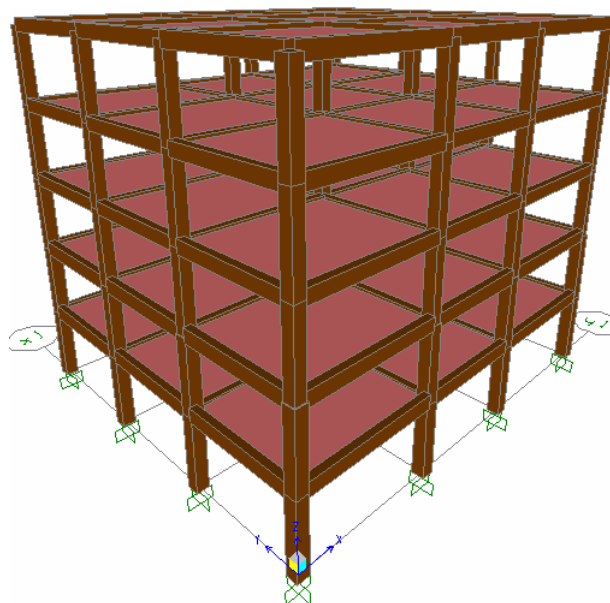


EJEMPLO 7.16:

Diseñar a flexión las vigas centrales en dirección del eje “x” de primera planta de la estructura de la figura, con 3 vanos en “x”, 3 vanos en “y” y 5 plantas. Se conoce que en la dirección “x” tiene espaciamientos de 6 m, 5 m y 6 m; en la dirección “y” presenta espaciamientos de 5 m.; y en altura tiene diferencias de nivel de 3 m de piso a piso. Las columnas de las 2 primeras plantas son de 50 cm x 50 cm, y las columnas de los 3 pisos restantes son de 45 cm x 45 cm; las vigas de las 2 primeras plantas son de 30 cm x 55 cm (b x h), y las de los 3 pisos superiores de 30 cm x 50 cm. La edificación requiere diseño sísmico, y se tiene previsto utilizar materiales estructurales con las siguientes características:

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$



La estructura tiene una losa maciza de 15 cm de espesor en todos los módulos y en todos los pisos.

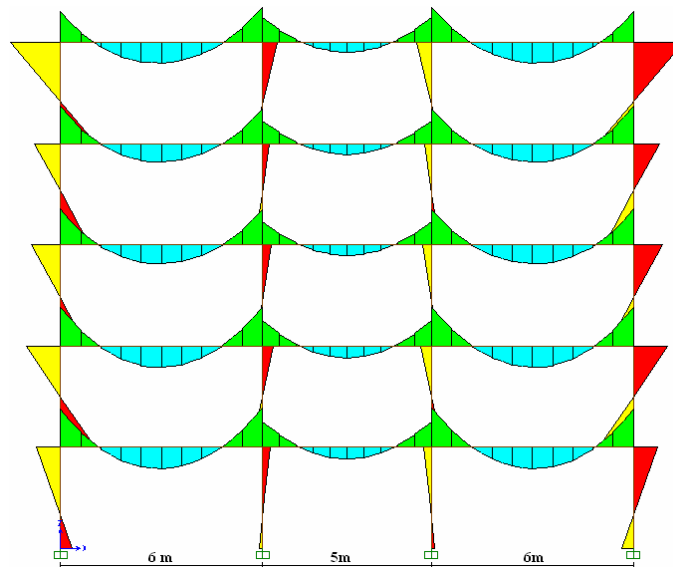
Además del peso propio, la estructura tiene una carga permanente de 250 Kg/m^2 , correspondiente a paredes, enlucidos, pisos, etc. La carga viva de diseño es de 300 Kg/m^2 .

Solución:

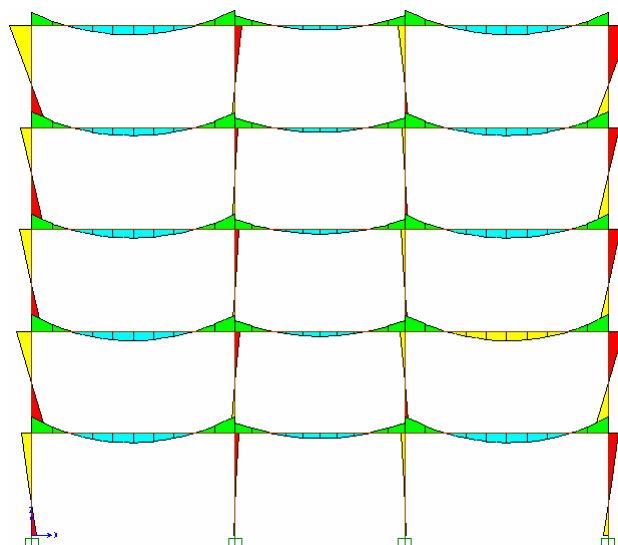
Se modela la estructura en un paquete computacional bajo condiciones sísmicas establecidas en el CEC-2001 (aceleración básica de 0.40 g). Las losas se modelan como elementos finitos cuadriláteros.

El resultado del modelamiento realizado es el siguiente:

- **Diagrama de Momentos por carga permanente de un pórtico central en “x”:**

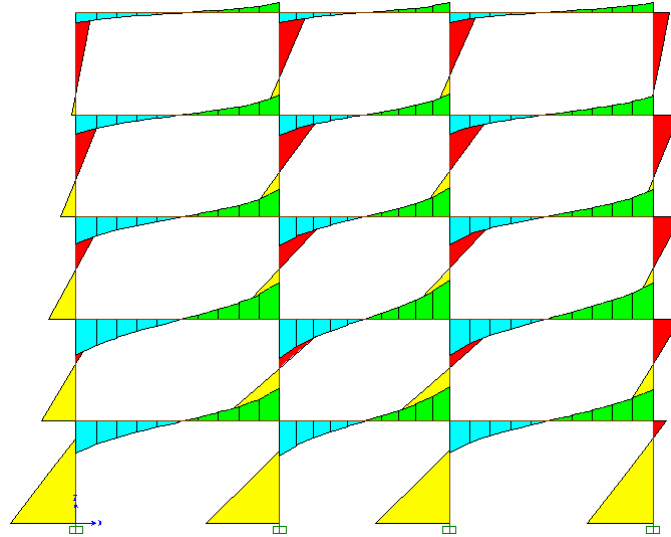


- **Diagrama de Momentos por carga viva de un pórtico central en “x”:**





- **Diagrama de Momentos por carga sísmica en “x” (escala reducida a la mitad):**



- **Momentos Flectores de Diseño:**

Se extraen los datos de momentos flectores (T-m) en la viga escogida, en los sitios de valores máximos (a la altura de los ejes de columna) se tiene:

M_D	5.65	5.84	3.80	3.80	5.84	5.65
M_L	2.36	2.44	1.55	1.55	2.44	2.36
M_E	9.42	9.49	10.20	10.20	9.49	9.42
M_D	3.20		1.77		3.20	
M_L	1.38		0.75		1.38	
M_E	9.42	9.49	10.20	10.20	9.49	9.42

Los momentos flectores de diseño, medidos en las zonas críticas, son:

M_D	4.22	4.48	2.85	2.85	4.48	4.22
M_L	1.78	1.91	1.18	1.18	1.91	1.78
M_E	8.35	8.22	8.76	8.76	8.22	8.35
M_D	3.20		1.77		3.20	
M_L	1.38		0.75		1.38	
M_E	8.35	8.22	8.76	8.76	8.22	8.35

- **Momentos Flectores Últimos de Diseño:**

Se consideran las siguientes combinaciones de carga.

$$U = 1.4 D + 1.7 L$$

$$U = 0.75 (1.4 D + 1.7 L + 1.87 E)$$

$$U = 0.9 D + 1.43 E$$

Los momentos flectores últimos bases y reversibles de diseño son:



Sección	M _D T-m	M _L T-m	M _E T-m	M _{u,1} T-m	M _{u,2} T-m	M _{u,3} T-m	Moment o Base T-m	-50% MB T-m	Momento Reversible T-m
1	4,22	1,78	8,35	9,023	18,411	-8,143	18,411	-9,206	-9,206
2	3,2	1,38		6,895	5,120		6,895		
3	4,48	1,91	8,22	9,615	18,668	-7,723	18,668	-9,334	-9,334
4	2,85	1,18	8,76	6,055	16,783	-9,962	16,783	-8,391	-9,962
5	1,77	0,75		3,791	2,815		3,791		

Mu	18.411		18.688	16.783		16.783	18.688		18.411
Mu	9.206	6.895	9.334	9.962	3.791	9.962	9.334	6.895	9.206

➤ **Secciones de Acero Requeridas:**

El formulario básico para secciones rectangulares sin armadura de compresión es:

$$k = 0.85f'c.b.d$$

$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2.M_u}{\phi.k.d}} \right]$$

Las secciones de armado son:

Sección	b cm	h cm	d cm	f'c Kg/cm ²	Fy Kg/cm ²	Moment o Base Kg-cm	k Kg	As cm ²	Momento Reversibl e Kg-cm	A's cm ²
1	30	55	49	210	4200	1841138	262395	10,89	920569	5,19
2	30	55	49	210	4200	689500	262395	3,84		
3	30	55	49	210	4200	1866780	262395	11,06	933390	5,26
4	30	55	49	210	4200	1678290	262395	9,84	996180	5,63
5	30	55	49	210	4200	379050	262395	2,08		

As	10.89		11.06	9.84		9.84	11.06		10.89
As	5.19	3.84	5.26	5.63	2.08	5.63	5.26	3.84	5.19

➤ **Armadura Mínima:**

El armado mínimo de flexión requerido para la viga de 30 cm x 55 cm es:

$$\rho_{\min} = \frac{0.79\sqrt{f'c}}{F_y}$$



$$\rho_{\min} = \frac{0.79\sqrt{210}}{4200}$$

$$\rho_{\min} = 0.002726$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{F_y}$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{4200}$$

$$\rho_{\min} = 0.003333$$

La cuantía de armado mínima requerida es:

$$\rho_{\min} = 0.003333$$

La sección de acero correspondiente es:

$$A_{s_{\min}} = \rho_{\min} \cdot b_w \cdot d$$

$$A_{s_{\min}} = 0.003333(30\text{cm}) \cdot (49\text{cm})$$

$$A_{s_{\min}} = 4.90\text{cm}^2$$

Se requiere reajustar la armadura positiva de centro de tramo, en todos los vanos, que no cumple con los criterios de armado mínimo.

El armado corregido por armadura mínima se refleja en el siguiente gráfico:

As	10.89	11.06	9.84	9.84	11.06	10.89			
As	5.19	4.90	5.26	5.63	4.90	5.63	5.26	4.90	5.19

➤ Armadura Máxima:

La cuantía balanceada para vigas rectangulares es:

$$\rho_b = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003}$$

$$\rho_b = 0.85(0.85) \frac{210}{4200} \cdot \frac{0.003}{\frac{4200}{2100000} + 0.003}$$

$$\rho_b = 0.0216$$

La cuantía de armado máxima para zona sísmica, cuando no se incluye acero de compresión, es:

$$\rho_{\max} = 0.50\rho_b$$

$$\rho_{\max} = 0.50(0.0216)$$

$$\rho_{\max} = 0.0108$$



La sección de acero correspondiente es:

$$A_{s_{\max}} = \rho_{\max} \cdot b_w \cdot d$$

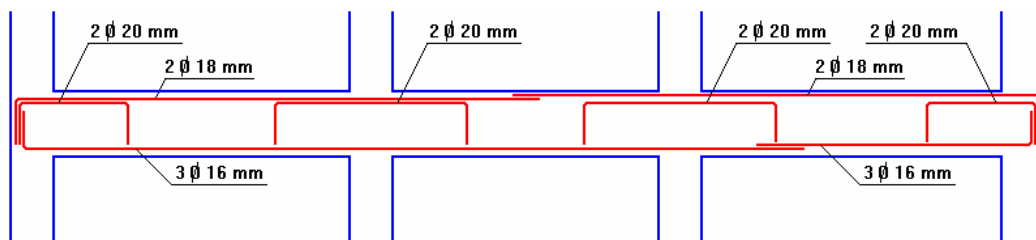
$$A_{s_{\max}} = 0.0108(30\text{cm}) \cdot (49\text{cm})$$

$$A_{s_{\min}} = 15.88\text{cm}^2$$

Debido a que todas las secciones cumplen con el criterio de no superar la armadura máxima, no se requiere ningún reajuste adicional.

➤ **Distribución de la Armadura:**

El siguiente gráfico refleja la distribución de la armadura en base a diámetros comerciales de las varillas de acero.



El traspase de las varillas superiores se ha realizado en la parte central de un vano pues para cualquier estado de carga el acero se encontrará en compresión, y el de las varillas inferiores se ha efectuado a un cuarto de la luz pues los momentos gravitacionales son mínimos y los momentos de reversión sísmica son bajos.

La armadura puede ser reajustada ligeramente para considerar el trabajo del acero de compresión, pero en el presente caso el armado comercial propuesto se mantendría.

➤ **Capacidad Resistente de las Secciones:**

Al escoger varillas comerciales para el armado de la viga se producen ligeros cambios en la capacidad resistente de las secciones.

El formulario que permite dicho cálculo es:

$$T = A_s \cdot F_y$$

$$a = \frac{T}{0.85f'_c \cdot b}$$

$$M_u = M_p = T \cdot \left(d - \frac{a}{2} \right)$$

A continuación se presenta una tabla en la que se calcula la real capacidad de cada sección en función de los momentos últimos de plastificación.

Sección	Posición	b	d	f'c	Fy	Armado Real	Área Acero	T	a	Mp
		cm	cm	Kg/cm ²	Kg/cm ²		cm ²	Kg	cm	Kg-cm
1	Superior	30	49	210	4200	2φ20mm +2φ18mm	11,37	47754	5,46	1988624
	Inferior	30	49	210	4200	3φ16mm	6,03	25326	2,90	1083877
2	Superior	30	49	210	4200	2φ18mm	5,09	21378	2,44	919257



	Inferior	30	49	210	4200	3 ϕ 16mm	6,03	25326	2,90	1083877
3	Superior	30	49	210	4200	2 ϕ 20mm +2 ϕ 18mm	11,37	47754	5,46	1988624
	Inferior	30	49	210	4200	3 ϕ 16mm	6,03	25326	2,90	1083877
4	Superior	30	49	210	4200	2 ϕ 20mm +2 ϕ 18mm	11,37	47754	5,46	1988624
	Inferior	30	49	210	4200	3 ϕ 16mm	6,03	25326	2,90	1083877
5	Superior	30	49	210	4200	2 ϕ 18mm	5,09	21378	2,44	919257
	Inferior	30	49	210	4200	3 ϕ 16mm	6,03	25326	2,90	1083877

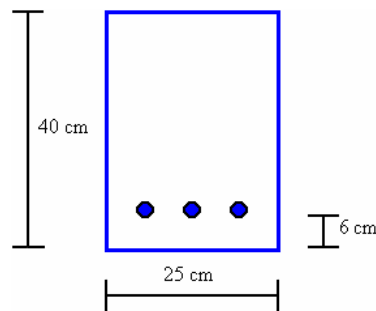
El siguiente gráfico ubica los momentos últimos de plastificación (medidos en T-m) en la estructura.

Mp	19,89	9.19	19,89	19,89	9.19	19,89	19,89	9.19	19,89
Mp	10.84	10.84	10.84	10.84	10.84	10.84	10.84	10.84	10.84

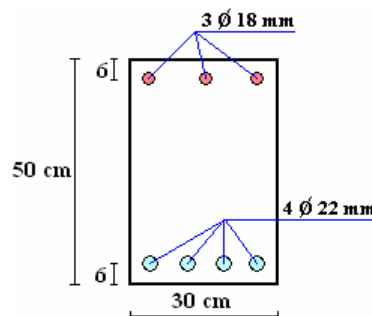
En los sectores críticos, los momentos flectores resistentes son ligeramente mayores que los momentos últimos solicitantes.

7.9 TAREAS COMPLEMENTARIAS:

- a. ¿Qué momento último resiste una viga cuyo hormigón tiene una resistencia a la compresión $f'_c = 350 \text{ Kg/cm}^2$ y cuyo acero tiene un esfuerzo de fluencia de 4200 Kg/cm^2 , si la sección rectangular tiene una base de 25 cm y una altura de 40 cm, y en la zona traccionada existen 3 varillas de 22 mm, con centro de gravedad ubicado a 6 cm. de la cara exterior?



- b. ¿Cuál es la capacidad resistente a momento flector (M_u) de la viga de la figura?





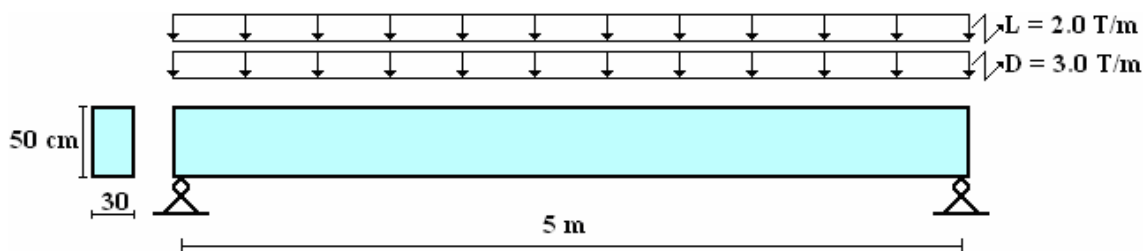
Si se conoce que:

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

- c. Diseñar una viga rectangular de 25 cm de base por 45 cm de altura, para resistir un momento flector último de 26 T-m., en zona sísmica, si el hormigón tiene un esfuerzo de rotura $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$, y el acero un esfuerzo de fluencia $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.
- d. Diseñar la viga de la figura, en la sección crítica a flexión, para que resista el siguiente estado de carga, en una zona no afectada por sismos:

$$U = 1.4D + 1.7L$$

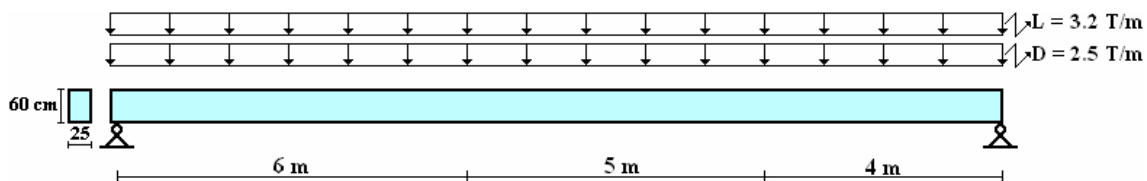


Si se conoce que:

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

- e. Diseñar a flexión por cargas gravitacionales a la viga continua de la figura, si se construirá en una zona afectada por los sismos.



Si se conoce que:

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

REFERENCIAS:

- 7.1 Winter G. y Nilson A., *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, Editorial Reverté, S.A.
- 7.2 Park R. y Pauley T., *Estructuras de Concreto Reforzado*, Editorial LIMUSA S. A.
- 7.3 Nilson A., (1999), *Diseño de Estructuras de Concreto*, Mc Graw Hill.
- 7.4 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 7.5 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.

CAPÍTULO VIII

DISEÑO A CORTANTE DE VIGAS DE HORMIGÓN ARMADO

8.1 INTRODUCCIÓN:

El comportamiento de las piezas estructurales de hormigón armado sometidas a fuerzas cortantes, es más complejo que su comportamiento bajo solicitaciones flexionantes. La resistencia a la compresión y a la tracción del hormigón simple, la orientación del refuerzo de acero con relación a las fisuras de corte, y la proximidad de cargas concentradas, el nivel dentro de la viga en el que actúan las cargas, son algunos de los factores que definen los mecanismos que se desarrollan dentro de los elementos estructurales para resistir las fuerzas cortantes. La presencia simultánea de todos estos factores determina que las fallas por cortante sean frágiles, lo que es una característica indeseable que debe ser controlada durante el proceso de diseño.

Los elementos de hormigón armado afectados por fuerzas cortantes usualmente también están sometidos a la acción de momentos flectores. Es posible que también estén presentes solicitaciones axiales y torsionales que pueden volver aún más compleja la predicción del comportamiento de las estructuras.

La teoría de cortante en vigas, desarrollada para materiales homogéneos, isotrópicos y elásticos, puede ser utilizada como punto de partida, pero debe ser modificada para tomar en consideración los restantes factores involucrados.

La fisuración en el hormigón, una vez alcanzado un determinado nivel de esfuerzos, cambia el comportamiento de los elementos estructurales. Esta incompatibilidad entre las hipótesis teóricas y el comportamiento real bajo solicitaciones de cortante ha sido superada ampliamente a través de una extensa investigación experimental.

8.2 LOS ESFUERZOS CORTANTES:

Las fuerzas cortantes transversales externas V , que actúan sobre los elementos estructurales, deben ser resistidas por esfuerzos cortantes internos τ , igualmente transversales, pero que por equilibrio también generan cortantes horizontales como se observa en la siguiente figura.

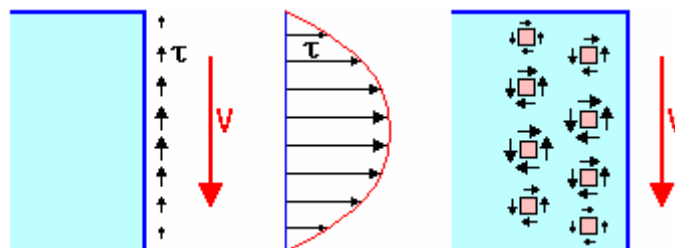


Figura 8.1: Fuerzas cortantes y esfuerzos de corte.

La Resistencia de Materiales permite definir las ecuaciones que describen la variabilidad del flujo de cortante, y de los esfuerzos cortantes internos τ , en función de

la altura a la que se miden tales esfuerzos, para materiales homogéneos, isotrópicos y elásticos.

En el caso del hormigón armado, el ACI 2008 y el Código Ecuatoriano de la Construcción 2001 se optó por manejar un esfuerzo cortante referencial o característico promedio v , lo que facilita la inclusión de los diferentes parámetros que influyen en la resistencia al cortante.

Para el caso de secciones rectangulares, secciones **T**, secciones **L**, y secciones **I**, el ACI y el CEC establecen como esfuerzo cortante característico, antes de afectarse con otros factores, al obtenido mediante la siguiente expresión:

$$v = \frac{V}{b_w \cdot d} \quad \text{Ecuación (8.1)}$$

Donde:

- v : esfuerzo cortante referencial promedio
- V : fuerza cortante
- b_w : ancho del alma resistente al cortante
- d : distancia desde el centroide del acero de refuerzo hasta la fibra extrema en compresión

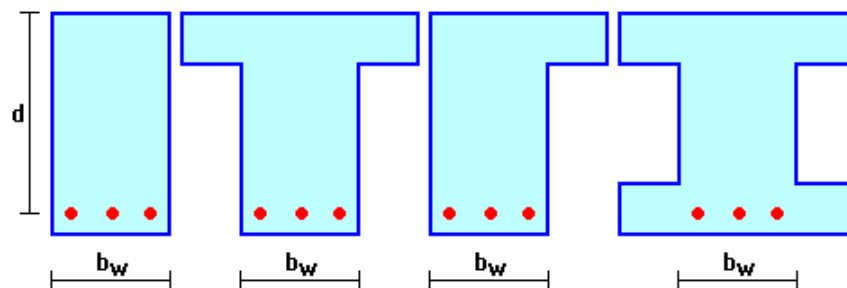


Figura 8.2: Secciones rectangular, Fuerzas cortantes y esfuerzos de corte.

En geometrías rectangulares el esfuerzo característico es el esfuerzo promedio de la sección efectiva, mientras que en secciones **T**, **L** e **I**, es el esfuerzo promedio en el alma.

8.3 LA RESISTENCIA A CORTANTE EN VIGAS DE HORMIGÓN, SIN REFUERZO EN EL ALMA:

La combinación de la flexión y el cortante sobre los elementos estructurales planos genera un estado biaxial de esfuerzos.

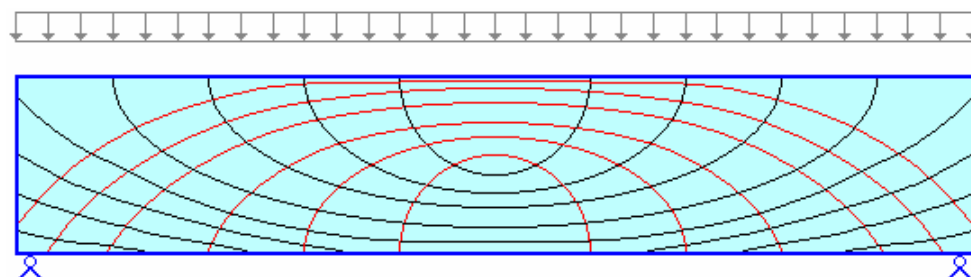


Figura 8.3: Líneas de esfuerzos principales en vigas con cargas uniformemente distribuidas.

Si se toma como referencia a la viga de la figura anterior, se produce un estado tensional con flujo de compresiones desde el un apoyo hacia el otro apoyo, a modo de arco.

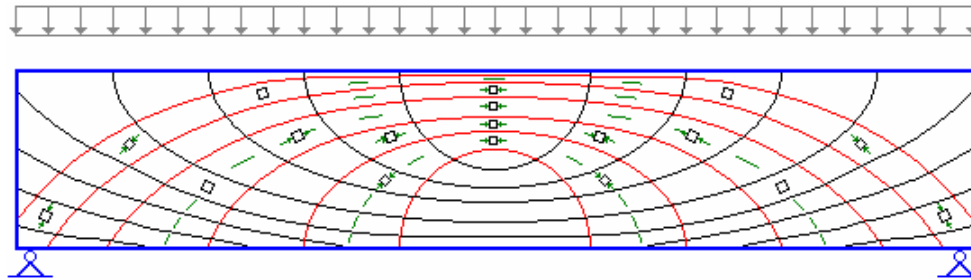


Figura 8.4: Flujo de compresiones.

En la dirección perpendicular al flujo de esfuerzos de compresión se produce un flujo de tracciones, que es crítico en el caso del hormigón.

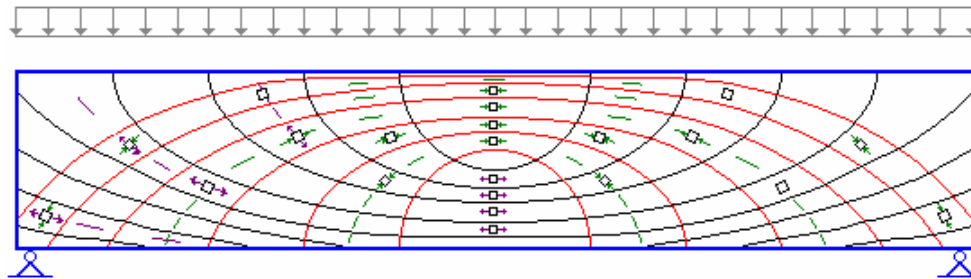


Figura 8.5: Flujo de tracciones.

En la estructura analizada, la fisuración de tracción por flexión domina en la zona central, mientras que la fisuración de tracción por cortante domina la zona cercana a los apoyos.

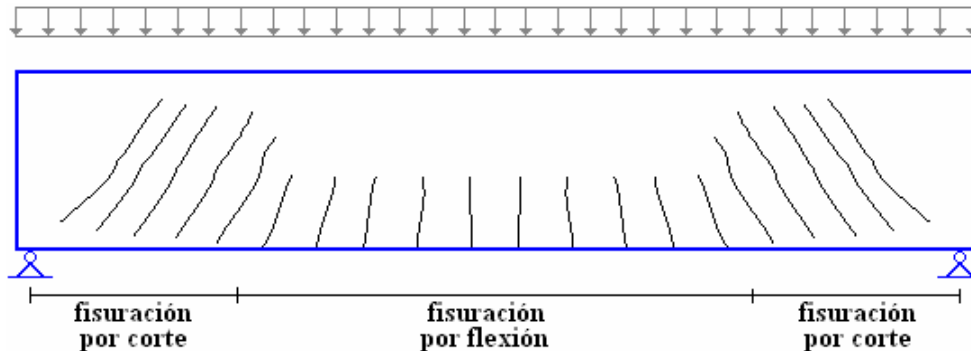


Figura 8.6: Mapa de figuraciones.

El esfuerzo mínimo resistente a corte del hormigón simple se calcula mediante la siguiente expresión básica [ACI 11.3.2], que por su forma de expresión guarda una relación directa con la resistencia a la tracción del hormigón:

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c} \quad \text{Ecuación (8.2)}$$

Donde:

f'_c : resistencia característica del hormigón a compresión en Kg/cm^2
 v_c : esfuerzo máximo resistente a cortante del hormigón en Kg/cm^2

A continuación se presenta una tabla con los valores de resistencia mínima al cortante para los hormigones más usuales en el medio.

Tabla 8.1: Resistencia al cortante de los hormigones según ACI.

$f'c$ (Kg/cm ²)	v_c (Kg/cm ²)
210	7.68
240	8.21
280	8.87
350	9.92
420	10.86
490	11.73

Para un análisis más refinado, cuando exista, además de las fuerzas cortantes, la acción de **fuerzas axiales de compresión**, el código ACI-2008 recomienda utilizar la siguiente expresión para definir la resistencia al cortante [ACI 11.3.2]:

$$v_c = 0.53 \left(1 + \frac{N_u}{140A_g} \right) \sqrt{f'c} \quad \text{Ecuación (8.2.a)}$$

Donde:

N_u : carga axial última de compresión que ocurre simultáneamente con V_u , en Kg.
 A_g : Sección transversal de hormigón en cm².

8.4 EL PAPEL DEL ACERO EN LA RESISTENCIA A CORTE DEL HORMIGÓN ARMADO:

Las fisuras de tracción por flexión se empiezan a producir en la zona inferior (zona de mayores esfuerzos de tracción) y se propagan verticalmente hacia arriba. La propagación de esas fisuras se controla por que son “cosidas” por el acero longitudinal de flexión en la zona más crítica (fibras inferiores) lo que además de limitar el ancho de las rajaduras, evita que el eje neutro se desplace excesivamente hacia arriba, de modo que una vez que las fisuras alcanzan el eje neutro, se detiene su crecimiento.

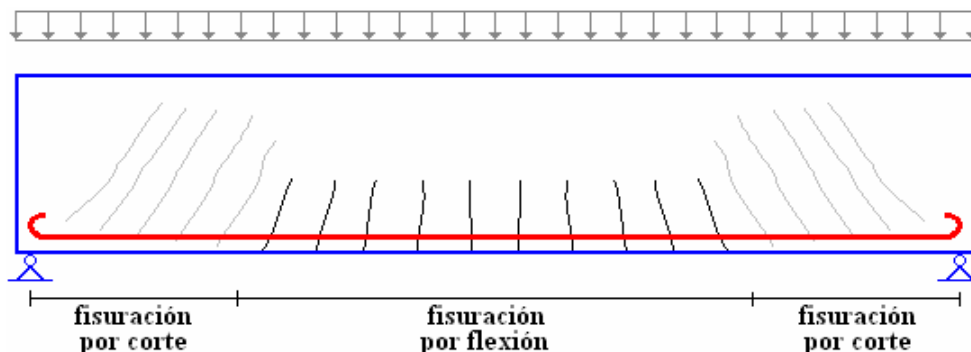


Figura 8.7: Armadura longitudinal que cose a las fisuras de flexión.

Por otra parte, las fisuras de tracción por corte inician en las fibras centrales (que tienen los mayores esfuerzos) y rápidamente se propagan hacia los dos extremos (fibras superiores e inferiores). La fisuración alcanza a afectar inclusive a la porción ubicada

encima del eje neutro de flexión por lo que se requiere de acero adicional que atraviese esas fisuras en todos los niveles y controle el crecimiento de las mismas para evitar la falla de la estructura.

El acero resistente al corte tiene generalmente la forma de estribos transversales, y ocasionalmente de varillas longitudinales dobladas a 45°.

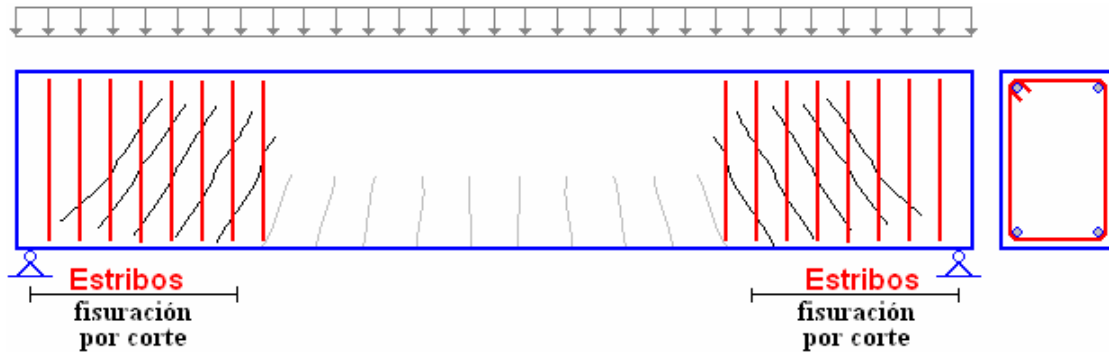


Figura 8.8: Armadura transversal que cose a las fisuras de cortante.

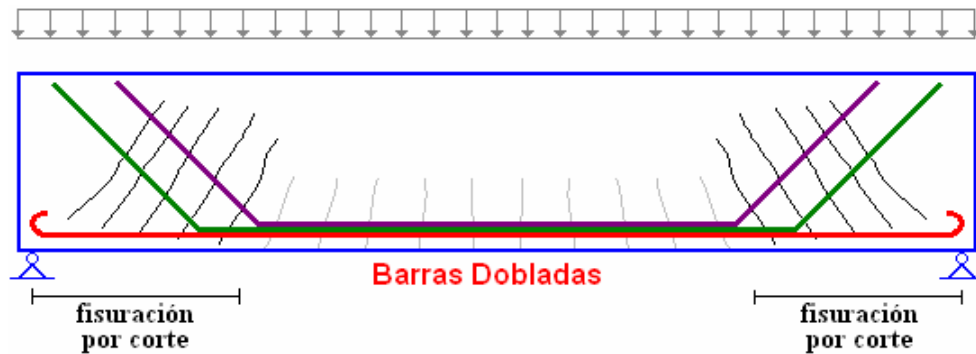


Figura 8.9: Armadura doblada diagonal que cose a las fisuras de cortante.

Mientras los estribos cruzan a las fisuras con sus 2 ramales verticales, en el caso de las barras dobladas el cruce se produce en un solo sitio, por lo que los estribos son doblemente efectivos.

La fisuración por flexión se produce en la dirección transversal (zona central de la siguiente figura), y la fisuración por cortante en la zona crítica de los apoyos se produce aproximadamente a 45° del eje longitudinal.

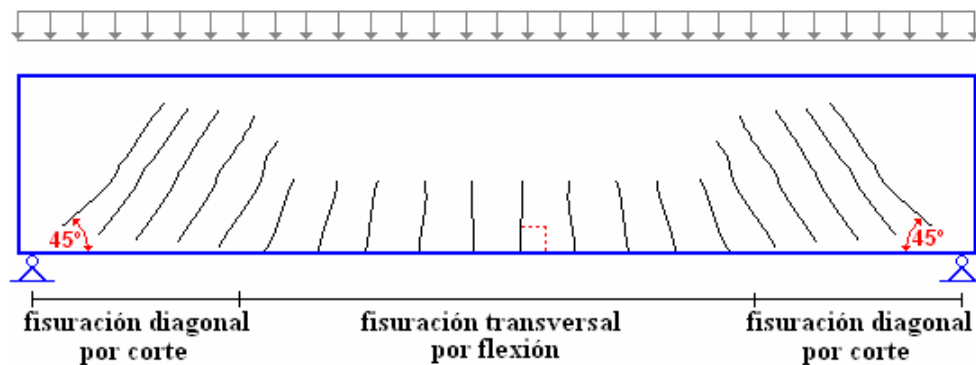


Figura 8.10: Orientación de las fisuras por flexión y por cortante.

8.5 DISEÑO A CORTANTE DE VIGAS DE HORMIGÓN ARMADO, CON REFUERZO TRANSVERSAL EN EL ALMA:

Las vigas de hormigón armado presentan 2 mecanismos para resistir a las fuerzas cortantes:

- Resistencia pura del hormigón
- Resistencia del acero transversal o diagonal

Como consecuencia, la capacidad resistente nominal viene dada por la siguiente expresión [ACI 11.1.1]:

$$V_n = V_c + V_s \quad \text{Ecuación (8.3)}$$

Donde:

- V_n : capacidad resistente nominal a corte de la viga de hormigón armado
 V_c : capacidad resistente a corte del hormigón simple
 V_s : capacidad resistente a corte del acero de refuerzo

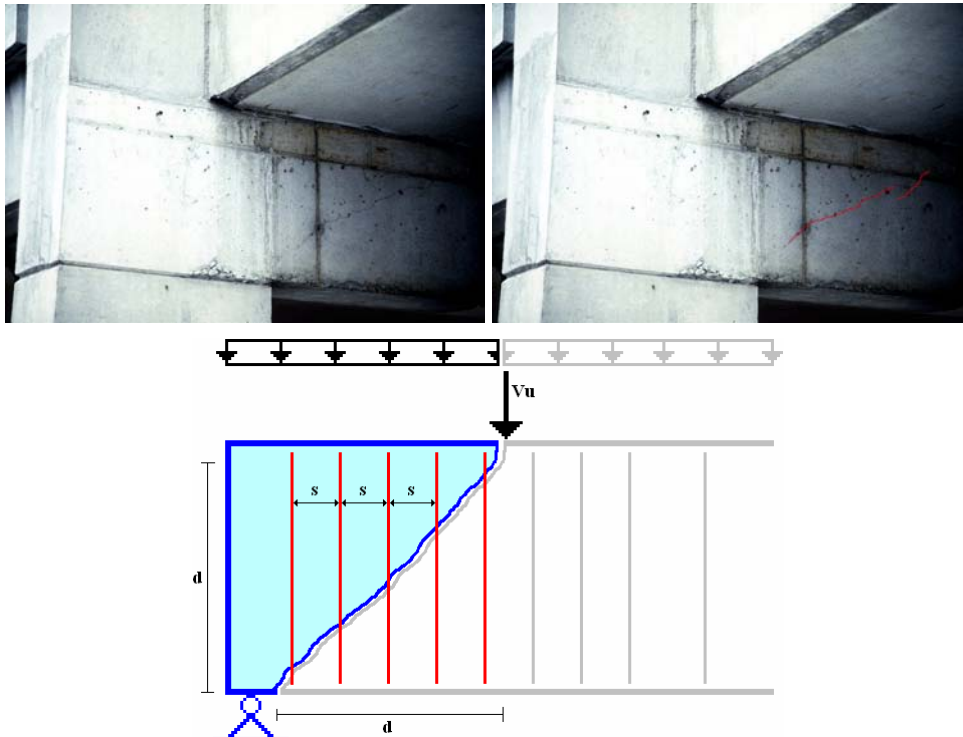


Figura 8.11: Estribos transversales que cruzan las fisuras de cortante.

En el límite, la relación entre el cortante último y la capacidad resistente nominal es [ACI 11.1.1]:

$$V_u = \phi \cdot V_n \quad \text{Ecuación (8.4)}$$

Donde:

- V_u : sollicitación última de cortante
 V_n : capacidad resistente nominal a corte de la viga de hormigón armado
 ϕ : factor de reducción de capacidad a cortante cuyo valor para el CEC 2001 y el ACI 2002 es de 0.85



La condición básica que se debe cumplir para que la capacidad resistente sea adecuada con relación a las solicitaciones es que:

$$V_u = \phi \cdot (V_c + V_s) \quad \text{Ecuación (8.5)}$$

La capacidad resistente del hormigón simple en vigas rectangulares, T, L o I [ACI 11.3.2] está definida por:

$$V_c = v_c \cdot b_w \cdot d \quad \text{Ecuación (8.6)}$$

Donde:

- V_c : capacidad resistente a corte del hormigón simple
 v_c : esfuerzo resistente del hormigón ($0.53\sqrt{f'_c}$ o $v_c = 0.53(1 + N_u / (140A_g))\sqrt{f'_c}$)
 b_w : ancho del alma resistente al cortante
 d : distancia desde el centriodo del acero de refuerzo a tracción hasta la fibra extrema en compresión

La parte del cortante que no puede ser absorbida por el hormigón debe ser resistida por la armadura transversal. Dicha fuerza, bajo la suposición de que el acero ha entrado en fluencia, es el producto del área de todos los estribos que cruzan la fisura por el esfuerzo de fluencia. La ecuación que describe a la magnitud de la fuerza absorbida por el acero transversal es:

$$V_s = n \cdot A_v \cdot F_y \quad \text{Ecuación (8.7)}$$

Donde:

- V_s : Fuerza cortante absorbida por los estribos
 n : Número de estribos que cortan a la fisura
 A_v : Sección transversal de acero de cada estribo que cruza la fisura (2 veces la sección transversal de la varilla)
 F_y : Esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo

El número de estribos que cortan a la fisura se puede calcular en base a su espaciamiento.

$$n = \frac{d}{s}$$

Donde:

- d : altura efectiva de la viga
 s : espaciamiento longitudinal de los estribos que cortan la fisura

Reemplazando la última expresión en la Ecuación (8.7) se tiene [ACI 11.4.7.2]:

$$V_s = \frac{d}{s} \cdot A_v \cdot F_y \quad \text{Ecuación (8.8)}$$

Las ecuaciones previas expresadas en términos de esfuerzos son:

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b_w \cdot d} \quad \text{Ecuación (8.9)}$$



Donde:

v_u : esfuerzo unitario de corte último

$$v_u = v_c + v_s \quad \text{Ecuación (8.10)}$$

Donde:

v_c : esfuerzo unitario resistente del hormigón simple

v_s : esfuerzo unitario equivalente del acero de refuerzo transversal

Despejando “ v_s ” se tiene:

$$v_s = v_u - v_c \quad \text{Ecuación (8.10a)}$$

Otra manera de definir “ v_s ” es:

$$v_s = \frac{V_s}{b_w \cdot d} \quad \text{Ecuación (8.11)}$$

Reemplazando el valor de “ V_s ” definido en la Ecuación (8.8):

$$v_s = \frac{\frac{d}{s} \cdot A_v \cdot F_y}{b_w \cdot d}$$

Simplificando [ACI 11.4.7.2]:

$$v_s = \frac{A_v \cdot F_y}{s \cdot b_w} \quad \text{Ecuación (8.12)}$$

Igualando la Ecuación (8.10a) con la Ecuación (8.12):

$$v_u - v_c = \frac{A_v \cdot F_y}{s \cdot b_w}$$

Despejando el espaciamiento de los estribos “ s ”:

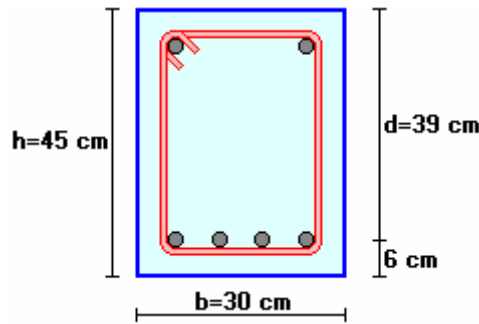
$$s = \frac{A_v \cdot F_y}{(v_u - v_c) \cdot b_w} \quad \text{Ecuación (8.13)}$$

La última fórmula permite determinar el espaciamiento al que deben colocarse los estribos para absorber un esfuerzo de corte último determinado.

Para el diseño de una viga rectangular, en **T**, en **L** o en **I**, ante solicitaciones de corte se utilizan las ecuaciones 8.2, 8.9, 8.10a y 8.13.

EJEMPLO 8.1:

Una viga de 30 cm de base por 45 cm de altura está solicitada por una fuerza cortante última V_u de 22.5 T. Si el hormigón tiene una resistencia característica de 210 Kg/cm², y el acero tiene un esfuerzo de fluencia $F_y = 4200$ Kg/cm², determinar el espaciamiento al que se deben colocar los estribos rectangulares de 10 mm. de diámetro.



Solución:

Los datos del ejemplo son:

$$V_u = 22500 \text{ Kg}$$

$$b_w = 30 \text{ cm}$$

$$d = 39 \text{ cm}$$

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_v = 2 \times (0.79 \text{ cm}^2) = 1.58 \text{ cm}^2$$

El esfuerzo cortante último es:

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b_w \cdot d} \quad \text{Ecuación (8.9)}$$

$$v_u = \frac{22500 \text{ Kg}}{(0.85) \cdot (30 \text{ cm}) \cdot (39 \text{ cm})}$$

$$v_u = 22.62 \text{ Kg/cm}^2$$

La capacidad resistente del hormigón simple es:

$$v_c = 0.53 \sqrt{f'_c} \quad \text{Ecuación (8.2)}$$

$$v_c = 0.53 \sqrt{210}$$

$$v_c = 7.68 \text{ Kg/cm}^2$$

El espaciamiento de los estribos es:

$$s = \frac{A_v \cdot F_y}{(v_u - v_c) \cdot b_w} \quad \text{Ecuación (8.13)}$$

$$s = \frac{(1.58 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2)}{(22.62 \text{ Kg/cm}^2 - 7.68 \text{ Kg/cm}^2) \cdot (30 \text{ cm})}$$

$$s = 14.81 \text{ cm}$$

Se requieren estribos cerrados de 10 mm de diámetro cada 14 cm.



8.6 ESPECIFICACIONES PARA EL DISEÑO DE VIGAS ANTE FUERZAS CORTANTES:

a. Capacidad Máxima del Acero de Cortante:

La fuerza cortante absorbida por el acero no debe superar a cuatro veces la máxima fuerza cortante básica que puede absorber el hormigón simple [ACI 11.4.7.9]; fuerzas cortantes superiores a la especificada destruyen la integridad del hormigón.

$$v_s \leq 2.12\sqrt{f'c} \quad \text{Ecuación (8.14)}$$

EJEMPLO 8.2:

En el ejemplo 8.1, verificar que el acero de refuerzo transversal cumple con la condición de máximo cortante admisible para el acero.

Solución:

Los datos del ejemplo 8.1 son:

$$v_u = 22.62 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_c = 7.68 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo cortante equivalente absorbido por el acero transversal es:

$$v_s = v_u - v_c \quad \text{Ecuación (8.10a)}$$

$$v_s = 22.62 \text{ Kg/cm}^2 - 7.68 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_s = 14.94 \text{ Kg/cm}^2$$

El máximo esfuerzo cortante equivalente que puede absorber el acero es:

$$v_s \leq 2.12\sqrt{f'c}$$

$$v_s \leq 2.12\sqrt{210}$$

$$v_s \leq 30.72 \text{ Kg/cm}^2$$

$$14.94 \text{ Kg/cm}^2 < 30.72 \text{ Kg/cm}^2 \quad \text{OK}$$

Se verifica que el esfuerzo cortante equivalente absorbido por el acero transversal no supera el máximo esfuerzo aceptable, por lo que el diseño previo es aceptable para ese criterio.

b. Sección Crítica a Cortante:

La sección crítica de diseño ante fuerzas cortantes se ubica a una distancia “d” desde la cara interna del apoyo, si se cumplen simultáneamente las siguientes 3 condiciones [ACI 11.1.3, ACI 11.1.3.1]:

- La reacción en el apoyo, en dirección del cortante aplicado, produce compresión en las zonas extremas del elemento.
- Las cargas son aplicadas en o cerca de la cara superior del elemento.

- Ninguna carga concentrada se aplica entre la cara interna del apoyo y la sección crítica descrita previamente.

En caso de que se cumplan las 3 condiciones anteriores, todas las secciones entre la sección crítica y la cara interna del apoyo se pueden diseñar para el cortante en la sección crítica.

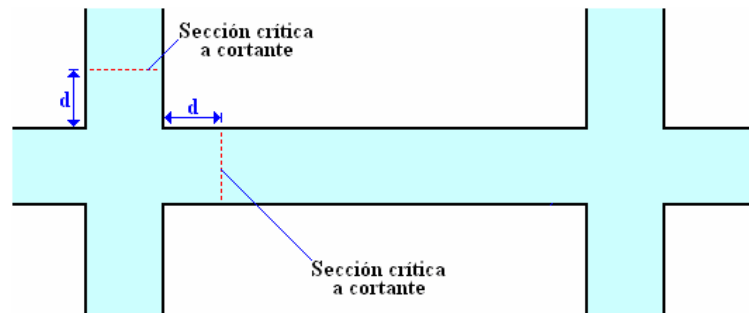


Figura 8.12: Secciones críticas a cortante cuando se cumplen las 3 condiciones.

En caso de no cumplirse alguna de las 3 condiciones, la sección crítica se ubicará en la cara interna del apoyo.

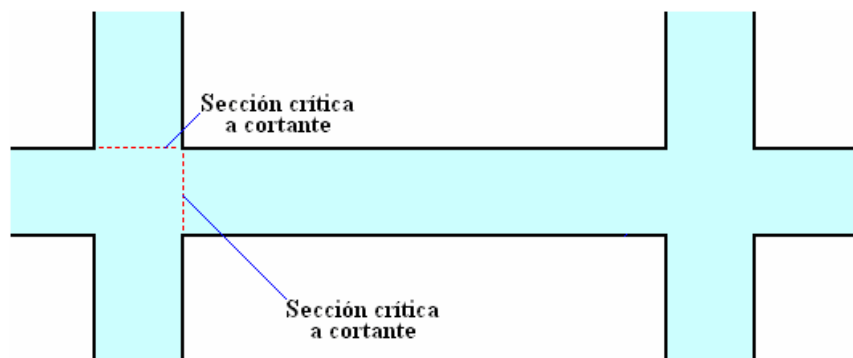


Figura 8.13: Secciones críticas a cortante cuando no se cumple alguna de las 3 condiciones.

NOTA 1: La presencia de tracciones en el apoyo (nudo de unión tensor-viga), en la dirección de las fuerzas cortantes provoca un modelo de fisuración diferente del analizado para corte.

NOTA 2: Mientras en las losas con vigas descolgadas la carga distribuida entre la cara interior del apoyo y la sección crítica de la viga se transmite directamente al apoyo (efecto diagonal), en el caso de losas colgadas de vigas esa carga distribuida forma parte del cortante que afecta a la fisura diagonal.

NOTA 3: La presencia de una carga concentrada entre la cara interna del apoyo y la sección crítica provoca que el modelo de fisuración sea diferente al analizado para corte.

c. Espaciamiento Mínimo de los Estribos:

El espaciamiento mínimo de los estribos en las vigas de hormigón armado no debe superar los siguientes valores [ACI 11.4.5.1]:

$$s \leq \frac{d}{2}$$

Ecuación (8.15)



$$s \leq 60\text{cm}$$

Ecuación (8.16)

Donde:

s: Espaciamiento de los estribos

d: Altura efectiva de la viga

NOTA: El primer criterio permite que, en cualquier lugar del elemento estructural, al menos 2 estribos crucen a cada fisura diagonal.

d. Espaciamiento de los Estribos de Confinamiento en Zonas Sísmicas:

En zonas sísmicas el espaciamiento de los estribos de confinamiento ubicados en el sector de apoyo no puede superar las siguientes expresiones [ACI 21.3.4.2]:

$$s \leq \frac{d}{4} \quad \text{Ecuación (8.17)}$$

$$s \leq 8\phi_L \quad \text{Ecuación (8.18)}$$

$$s \leq 24\phi_T \quad \text{Ecuación (8.19)}$$

$$s \leq 30\text{cm} \quad \text{Ecuación (8.20)}$$

Donde:

ϕ_L : Menor diámetro de las varillas longitudinales

ϕ_T : Diámetro de los estribos transversales

NOTA: El primer criterio permite que en las zonas críticas a cortante de la viga, al menos 4 estribos crucen a cada fisura diagonal.

La distancia desde el apoyo hasta la cual deben colocarse los estribos con este espaciamiento mínimo es de 2 veces la altura del elemento (**2h**), medidos desde la cara interna del apoyo [ACI 21.3.4.2].

El primer estribo no puede ubicarse a más de 5 cm de la cara interna del apoyo [ACI 21.3.4.2], ni a más de la mitad del espaciamiento entre estribos (s).

e. Armado Mínimo de Cortante:

Debe proporcionarse un armado transversal mínimo de cortante en toda la viga de acuerdo a la siguiente expresión [ACI 11.4.6.3]:

$$A_{v,\min} = 0.196\sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w \cdot s}{F_y} \quad \text{Ecuación (8.21)}$$

Donde:

f'_c : Resistencia del hormigón en Kg/cm²

F_y : Esfuerzo de fluencia del acero en Kg/cm²

b_w : Ancho de la viga rectangular o ancho del alma de las vigas T, L o I

s: Espaciamiento de los estribos en cm

Pero el refuerzo transversal en ningún caso podrá ser menor que [ACI 11.4.6.3]:

$$A_{v,\min} = \frac{3.5b_w \cdot s}{F_y} \quad \text{Ecuación (8.22)}$$

Para esfuerzos de fluencia de 4200 Kg/cm^2 , la Ecuación (8.21) controla el armado transversal mínimo de los hormigones de más de 320 Kg/cm^2 , mientras que la Ecuación (8.22) define el armado transversal mínimo de los hormigones de menos de 320 Kg/cm^2 .

f. Armado Mínimo para Comportamiento Dúctil:

Para asegurar que las estructuras aperticadas puedan desarrollar toda la ductilidad necesaria para reducir la magnitud de las fuerzas sísmicas, los extremos de barra de vigas y columnas, además de resistir los cortantes isostáticos últimos " V_I ", deberán resistir cortantes de plastificación " V_P " [ACI 21.3.3] iguales a:

$$V_P = \frac{M_P + M'_P}{L} \quad \text{Ecuación (8.23)}$$

Donde:

- V_P : Cortante de plastificación de los 2 extremos de barra
- M_P : Momento nominal (sin factor de reducción de capacidad) de plastificación del primer extremo de barra, empleando un esfuerzo en el acero de $1.25 F_y$
- M'_P : Momento nominal (sin factor de reducción) reversible de plastificación del segundo extremo de barra, empleando un esfuerzo en el acero de $1.25 F_y$

De modo que:

$$V_u = V_I + V_P \quad \text{Ecuación (8.24)}$$

Donde:

- V_I : Cortante isostático por cargas gravitacionales factoradas

La incorporación del cortante de plastificación permite que se puedan formar articulaciones plásticas dúctiles en los 2 extremos de barra antes de que se produzca una falla frágil por cortante.

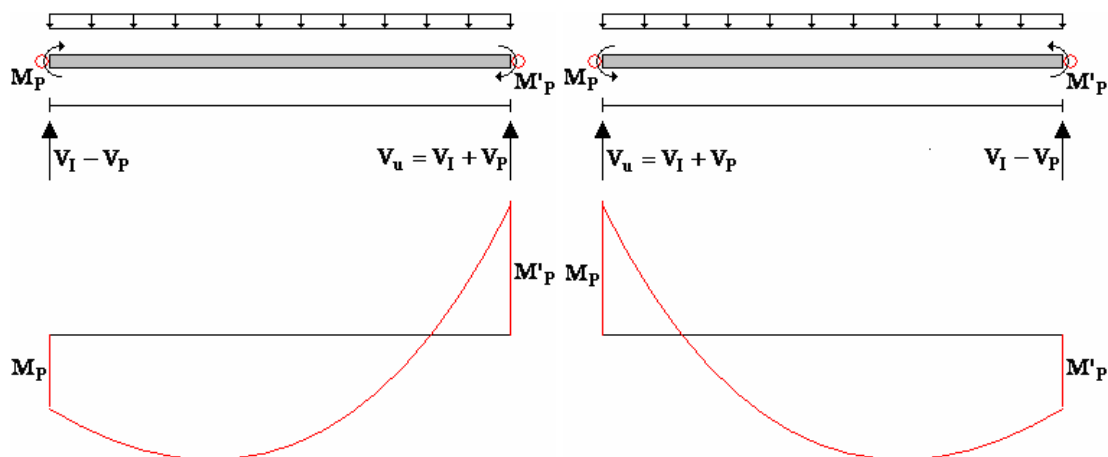


Figura 8.14: Cortantes generados en los extremos de barra cuando se desarrollan rótulas plásticas normales y reversibles en esos extremos de barra.

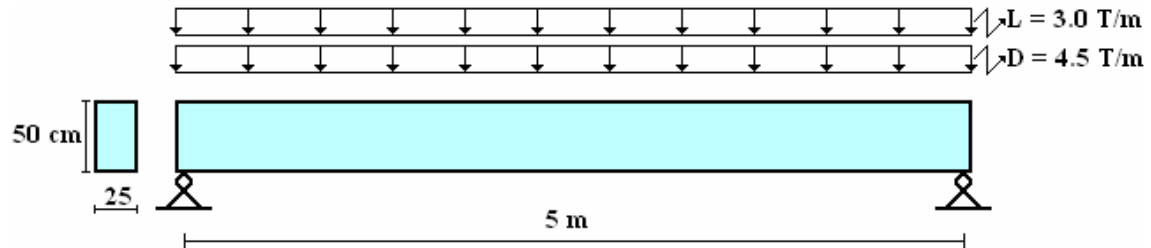
Adicionalmente, los elementos estructurales deberán ser capaces de resistir las fuerzas cortantes generadas por las combinaciones de carga mayoradas con las fuerzas sísmicas duplicadas ($2E$ en lugar de E) [ACI 21.3.3].

EJEMPLO 8.3:

Diseñar las secciones críticas de la viga de la figura, si se conoce que se construirá en zona sísmica, y que:

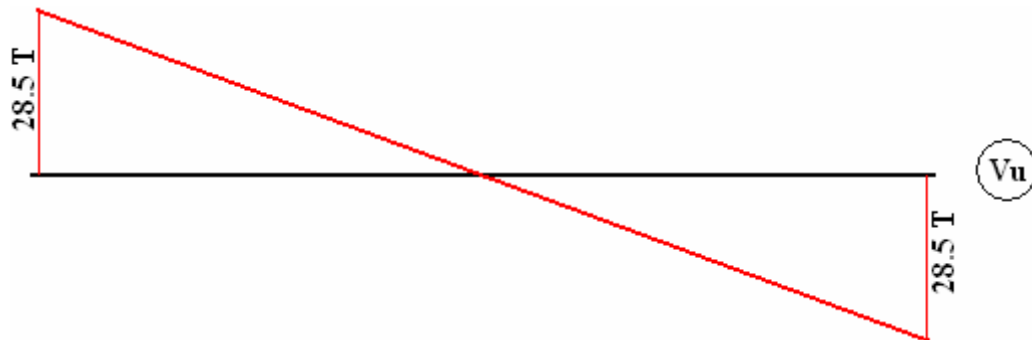
$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

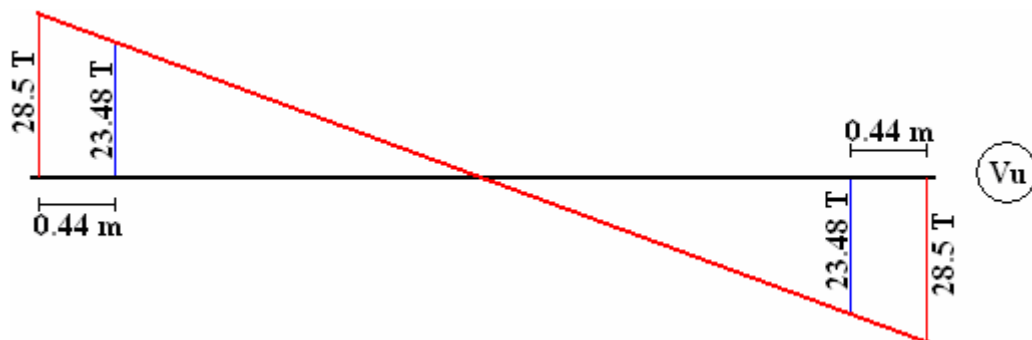


Solución:

El diagrama de cortes de la viga es:



Las secciones críticas a cortante se encuentran a 44 cm de los apoyos. Por semejanza de triángulos se pueden obtener los cortantes últimos correspondientes.



Los datos del ejemplo son:

$$V_u = 23480 \text{ Kg}$$

$$b_w = 25 \text{ cm}$$

$$d = 44 \text{ cm}$$

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$



➤ **Cálculo del armado requerido por resistencia:**

El esfuerzo cortante último es:

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b_w \cdot d} \quad \text{Ecuación (8.9)}$$

$$v_u = \frac{23480 \text{ Kg}}{(0.85) \cdot (25 \text{ cm}) \cdot (44 \text{ cm})}$$

$$v_u = 25.11 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

La capacidad resistente del hormigón simple es:

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c} \quad \text{Ecuación (8.2)}$$

$$v_c = 0.53\sqrt{210}$$

$$v_c = 7.68 \text{ Kg} / \text{cm}^2$$

Se pueden escoger estribos cuyo diámetro es de 10 mm, en cuyo caso el área de corte de cada estribo es:

$$A_v = 2 \times (0.79 \text{ cm}^2)$$

$$A_v = 1.58 \text{ cm}^2$$

El espaciamiento de los estribos es:

$$s = \frac{A_v \cdot F_y}{(v_u - v_c) \cdot b_w} \quad \text{Ecuación (8.13)}$$

$$s = \frac{(1.58 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg} / \text{cm}^2)}{(25.11 \text{ Kg} / \text{cm}^2 - 7.68 \text{ Kg} / \text{cm}^2) \cdot (25 \text{ cm})}$$

$$s = 15.2 \text{ cm}$$

➤ **Cálculo del espaciamiento mínimo:**

El espaciamiento mínimo hasta una distancia de 1 m (2h) desde el apoyo es:

$$s \leq \frac{d}{4} \quad \text{Ecuación (8.15)}$$

$$s \leq \frac{44 \text{ cm}}{4}$$

$$s \leq 11 \text{ cm}$$

$$s \leq 24\phi_T \quad \text{Ecuación (8.17)}$$

$$s \leq 24(0.8 \text{ cm})$$

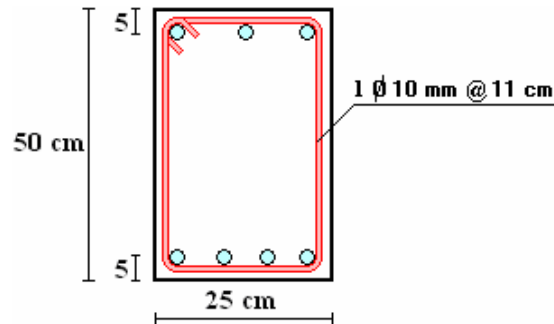
$$s \leq 19.2 \text{ cm}$$

$$s \leq 30 \text{ cm} \quad \text{Ecuación (8.18)}$$

El menor espaciamiento, de las expresiones previas, en las proximidades de los apoyos es de 11 cm ($d/4$), que al compararlo con el espaciamiento requerido por resistencia es más restrictivo por lo que:

$$s = 11 \text{ cm}$$

A continuación se presenta el armado transversal requerido en las proximidades de los apoyos:



Se requieren estribos cerrados de 10 mm de diámetro cada 11 cm hasta una distancia de 1 m de los apoyos.

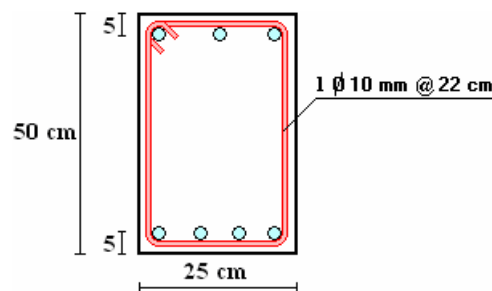
El espaciamiento mínimo para la zona central es:

$$s \leq \frac{d}{2}$$

$$s_{\text{mín}} = 22 \text{ cm}$$

Es necesario que la viga disponga de estribos cerrados de 10 mm de diámetro cada 22 cm, en el tramo central, como armado básico para cortante.

A continuación se presenta el armado transversal requerido en la zona central:



➤ Armado Mínimo de Cortante:

Los códigos establecen el siguiente requisito mínimo:

$$A_{v,\text{mín}} = 0.196 \sqrt{f'_c} \cdot \frac{b_w \cdot s}{F_y} \quad \text{Ecuación (8.22)}$$

Despejando “s” se tiene:

$$s_{\text{mín}} = \frac{A_v \cdot F_y}{0.196 \sqrt{f'_c} \cdot b_w} \quad \text{Ecuación (8.22a)}$$

En el presente caso el área efectiva de cortante “ A_v ” es 1.58 cm^2 , por lo que:



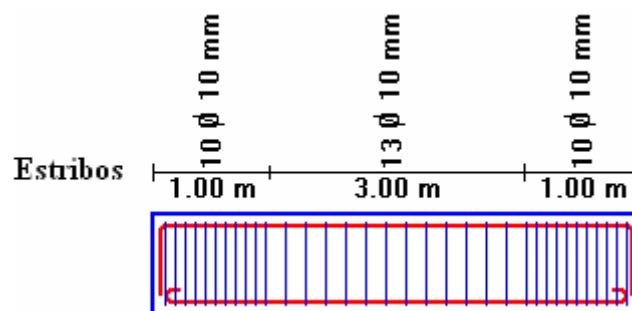
$$s_{\min} = \frac{(1.58 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg / cm}^2)}{0.196 \sqrt{210} \cdot (25 \text{ cm})}$$

$$s_{\min} = 93.5 \text{ cm}$$

En vista de que tanto el espaciamiento de 11 cm en zona de apoyo y el de 22 cm en zona central son más restrictivos que el que se acaba de calcular, se requieren estribos cerrados de 10 mm de diámetro cada 11 cm en la proximidad de los apoyos y cada 22 cm en la zona central.

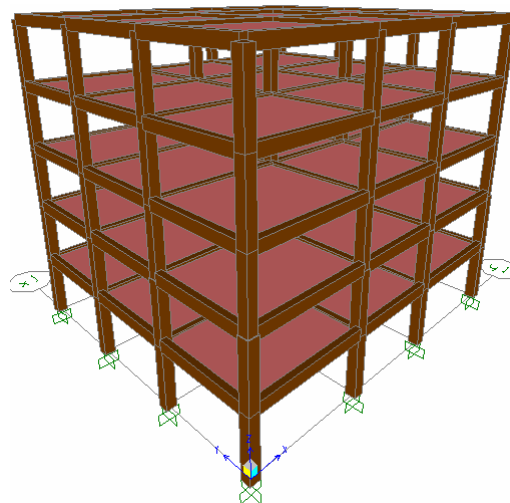
No se requiere armado transversal para comportamiento dúctil de los nudos por no existir momentos de continuidad en los extremos de barra.

La distribución de los estribos transversales es la siguiente:



EJEMPLO 8.4:

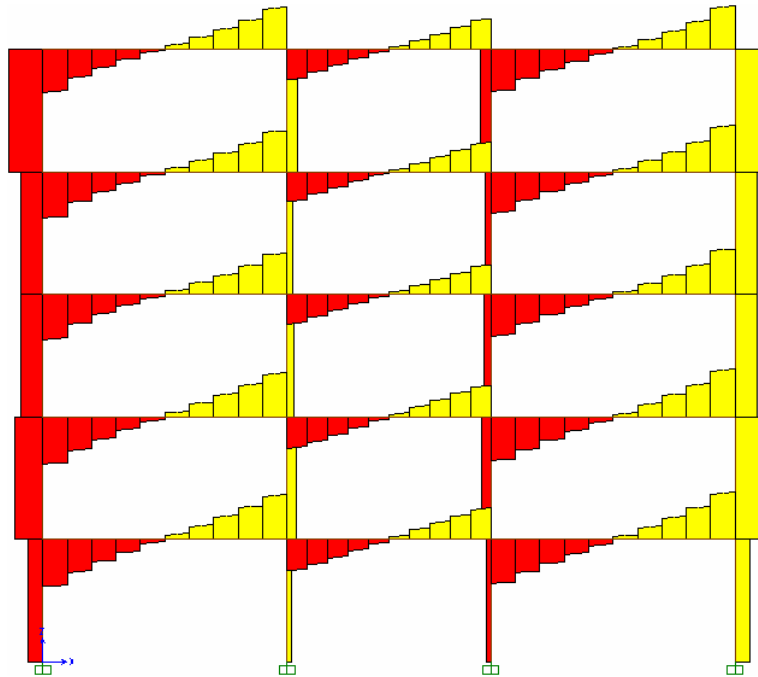
Diseñar a cortante las vigas centrales en dirección del eje “x” de primera planta de la estructura de la figura, cuyos datos básicos y diseño a flexión se detallan en el Ejemplo 6.16.



Solución:

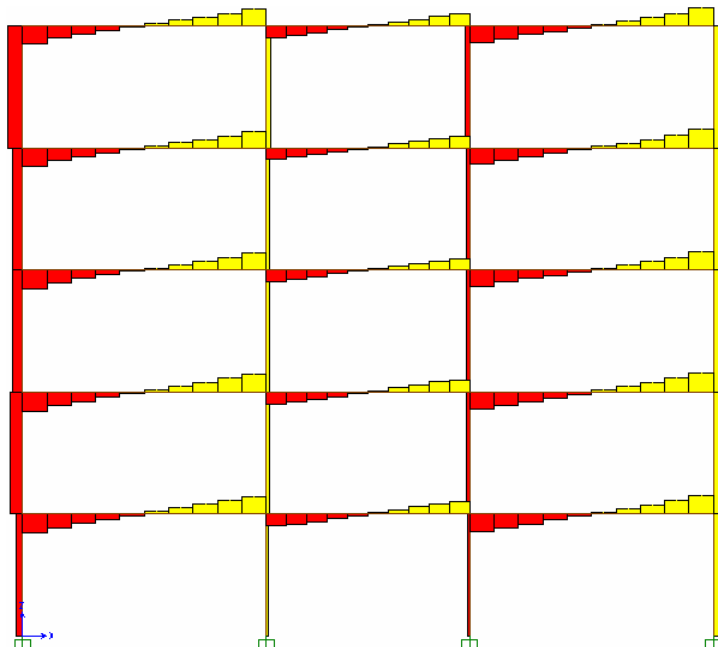
Los diagramas de corte del procesamiento de la estructura son los siguientes:

➤ **Diagrama de Corte por carga permanente de un pórtico central en “x”:**



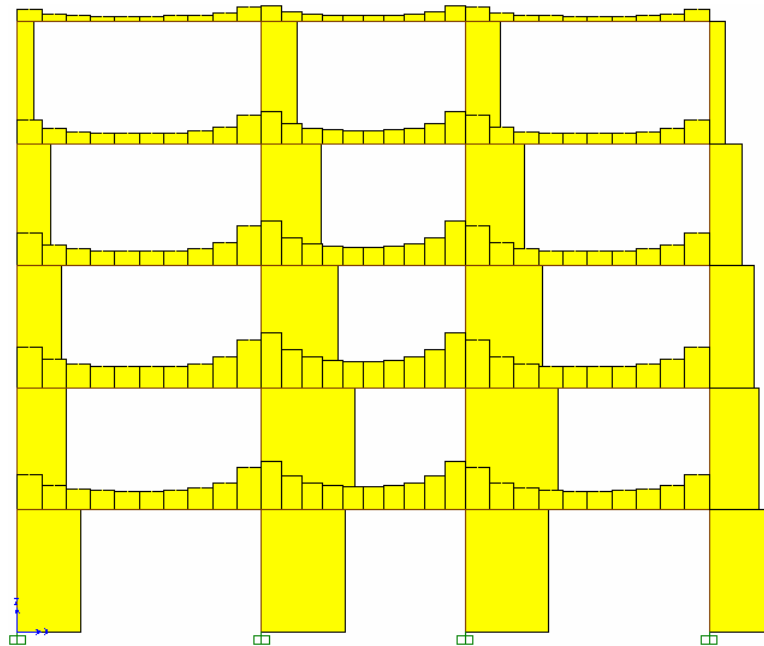
NOTA: El diagrama de corte escalonado en las vigas, en lugar del tradicional diagrama continuo lineal, obedece a la discretización de las losas mediante elementos finitos.

➤ **Diagrama de Corte por carga viva de un pórtico central en “x”:**





➤ **Diagrama de Corte por carga sísmica en “x” (escala reducida):**



➤ **Fuerzas Cortantes de Diseño:**

Es importante observar en las vigas, las fuerzas cortantes escalonadas para todos los estados de carga, que son el resultado de la discretización de las losas, lo que en los modelos planos no se revela.

Se extraen los datos de fuerzas cortantes (en T) en la viga escogida, en los sitios de valores máximos (a la altura de los ejes) se tiene:

V_D	5.78 T	5.45	3.85	3.85	5.45	5.78
V_L	2.34 T	2.19	1.49	1.49	2.19	2.34
V_E	4.35 T	5.16	5.95	5.95	5.16	4.35
V_D						
V_L						
V_E	4.35 T	5.16	5.95	5.95	5.16	4.35

Los cortantes medidos en la zona crítica de diseño (a una distancia “d” de la cara interna de la columna) son:

V_D	4.03 T	4.05	2.97	2.97	4.05	4.03
V_L	1.68 T	1.69	1.23	1.23	1.69	1.68
V_E	3.06 T	3.32	4.13	4.13	3.32	3.06
V_D						
V_L						
V_E	3.06 T	3.32	4.13	4.13	3.32	3.06

➤ **Cortantes Últimos de Diseño:**

Se consideran las siguientes combinaciones de carga.



$$U = 1.4 D + 1.7 L$$

$$U = 0.75 (1.4 D + 1.7 L + 1.87 E)$$

Los cortantes últimos son:

Sección	v_D	v_L	v_E	$v_{u,1}$	$v_{u,2}$	Cortante de Diseño
1	4.03	1.68	3.06	8.582	10.665	10.665
3	4.05	1.69	3.32	8.628	11.064	11.064
4	2.97	1.23	4.13	6.311	10.479	10.479

V_U	10.665 T	11.064	10.479	10.479	11.064	10.665

➤ **Armadura Transversal Requerida por Resistencia:**

Si se escogen estribos con diámetro de 10 mm, la sección de corte de cada estribo es:

$$A_v = 2 \times (0.79 \text{ cm}^2)$$

$$A_v = 1.58 \text{ cm}^2$$

El formulario para calcular el espaciamiento de los estribos en secciones rectangulares es:

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b_w \cdot d} \quad \text{Ecuación (8.9)}$$

$$v_c = 0.53 \sqrt{f'_c} \quad \text{Ecuación (8.2)}$$

$$s = \frac{A_v \cdot F_y}{(v_u - v_c) \cdot b_w} \quad \text{Ecuación (8.13)}$$

Los espaciamientos de armadura transversal requeridos exclusivamente por resistencia son:

Sección	b	h	d	f'_c	F_y	A_v	Cortante de Diseño	v_u	v_c	Espaciamiento
	cm	cm	cm	Kg/cm ²	Kg/cm ²	cm ²	Kg	Kg/cm ²	Kg/cm ²	cm
1	30	55	49	210	4200	1.58	10665	8.54	7.68	258.7
3	30	55	49	210	4200	1.58	11064	8.85	7.68	188.4
4	30	55	49	210	4200	1.58	10479	8.39	7.68	313.3



➤ **Espaciamiento Mínimo:**

El espaciamiento mínimo a lo largo de toda la viga es de 24 cm ($d/2$).

Hasta una distancia de 1.10 m (2h) desde el apoyo el espaciamiento mínimo es:

$$s \leq \frac{d}{4}$$

$$s \leq \frac{49\text{cm}}{4}$$

$$s \leq 12\text{cm}$$

$$s \leq 8\phi_L$$

$$s \leq 8(1.6\text{cm})$$

$$s \leq 12.8\text{cm}$$

$$s \leq 24\phi_T$$

$$s \leq 24(0.8\text{cm})$$

$$s \leq 19.2\text{cm}$$

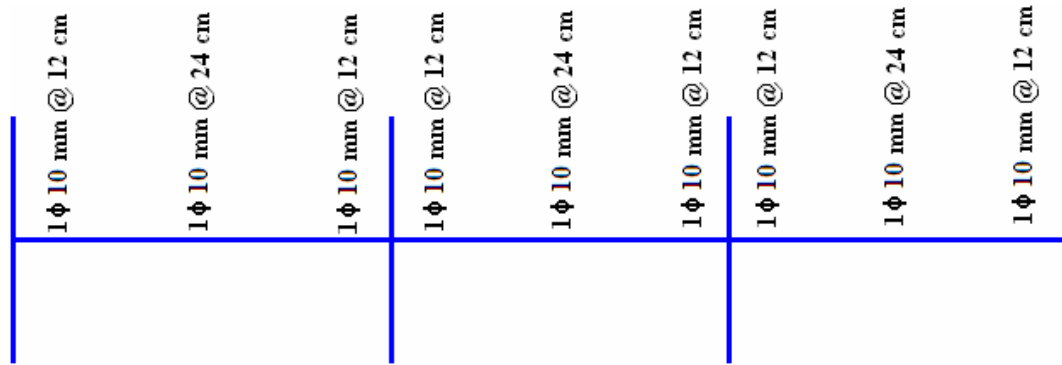
$$s \leq 30\text{cm}$$

El menor espaciamiento es de 12 cm, que es más restrictivo que el requerido por resistencia, por lo que:

$$s = 12\text{cm}$$

Se requieren estribos cerrados de 10 mm de diámetro cada 12 cm hasta una distancia de 1.10 m desde el apoyo.

El armado transversal corregido por armadura mínima transversal se refleja en el siguiente gráfico:



➤ **Armado Mínimo de Cortante:**

Se utiliza la siguiente expresión:

$$s_{\min} = \frac{A_v \cdot F_y}{0.196 \sqrt{f'_c} \cdot b_w} \quad \text{Ecuación (8.22a)}$$

El área efectiva de cortante “ A_v ” es 1.58 cm^2 , por lo que:

$$s_{\min} = \frac{(1.58 \text{ cm}^2) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2)}{0.196 \sqrt{210} \cdot (30 \text{ cm})}$$

$$s_{\min} = 77.9 \text{ cm}$$

El espaciamiento de 12 cm es más restrictivo que el que se acaba de calcular, por lo que se requieren estribos cerrados de 10 mm de diámetro cada 12 cm en las zonas próximas a los apoyos, y de 10 mm cada 24 cm en las zonas centrales.

➤ **Armado para Comportamiento Dúctil:**

Los momentos de plastificación de los extremos de barra, considerando un esfuerzo de fluencia del acero de 5250 Kg/cm^2 ($1.25 \times 4200 = 5250$) sin factor de reducción de capacidad ($\phi = 1$) son:

K3		$f_x = 13 \cdot (D3 - J3/2)$									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Sección	Posición	b	d	f_c	F_y	Armado Real	Area Acero	T	a	Mp
2								cm ²	Kg	cm	Kg-cm
3	1	Superior	30	49	210	5250	2φ20mm+2φ18mm	11,37	59692,5	6,82	2721240
4		Inferior	30	49	210	5250	3φ16mm	6,03	31657,5	3,62	1493926
5	2	Superior	30	49	210	5250	2φ18mm	5,09	26722,5	3,06	1268581
6		Inferior	30	49	210	5250	3φ16mm	6,03	31657,5	3,62	1493926
7	3	Superior	30	49	210	5250	2φ20mm+2φ18mm	11,37	59692,5	6,82	2721240
8		Inferior	30	49	210	5250	3φ16mm	6,03	31657,5	3,62	1493926
9	4	Superior	30	49	210	5250	2φ20mm+2φ18mm	11,37	59692,5	6,82	2721240
10		Inferior	30	49	210	5250	3φ16mm	6,03	31657,5	3,62	1493926
11	5	Superior	30	49	210	5250	2φ18mm	5,09	26722,5	3,06	1268581
12		Inferior	30	49	210	5250	3φ16mm	6,03	31657,5	3,62	1493926
13											
14											
15											
16											
17											
18											
19											



M _p	27.21 T-m	27.21	27.21	27.21	27.21	27.21
M _p	14.94 T-m	14.94	14.94	14.94	14.94	14.94

A la altura de la zona crítica de cortante en las vigas (a una distancia “d” de la cara interna de la columna correspondiente), los cortantes parciales sin mayorar por cargas gravitacionales (V_D , V_L), y los cortantes totales mayorados gravitacionales (V_T) asociados a la combinación de cargas crítica de sismo [$T = (0.75 \times 1.4) D + (0.75 \times 1.87) L$], excluido el efecto sísmico, son:

Sección	V_D	V_L	Cortante Gravitacional Mayorado - v_T
1	4,03	1,68	6,59
3	4,05	1,69	6,62
4	2,97	1,23	4,84

V_D	4.03 T	4.05	2.97	2.97	4.05	4.03
V_L	1.68 T	1.69	1.23	1.23	1.69	1.68
V_T	6.59 T	6.62	4.84	4.84	6.62	6.59

Asumiendo una carga uniformemente distribuida que actúa sobre la viga, los cortantes isostáticos por cargas gravitacionales V_I son iguales en los 2 extremos de barra:

Viga	V_a T	V_b T	V_I T
1	6.59	6.62	7.88
2	4.84	4.84	5.34
3	6.62	6.59	7.88

Los cortantes por plastificación son:

Viga	Longitud Entre Articulaciones Plásticas m	M _p T-m	M' _p T-m	V _p T-m
1	5.50	27.21	14.94	7.66
	5.50	27.21	14.94	7.66
2	4.50	27.21	14.94	9.37
	4.50	27.21	14.94	9.37
3	5.50	27.21	14.94	7.66
	5.50	27.21	14.94	7.66

Los cortantes de diseño son:



Viga	V_I T	V_P T	$V_U = V_I + V_P$ T
1	7.88	7.66	15.54
	7.88	7.66	15.54
2	5.34	9.37	14.71
	5.34	9.37	14.71
3	7.88	7.66	15.54
	7.88	7.66	15.54

El espaciamiento requerido para la armadura transversal es:

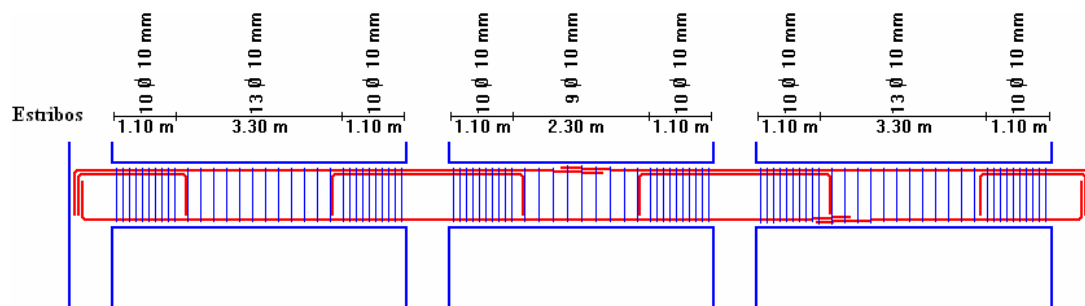
$$s = \frac{A_v \cdot F_y}{(v_u - v_c) \cdot b_w}$$

Sección	b	h	d	f'c	Fy	Av	Cortante de Diseño	vu	vc	Espaciamiento
	cm	cm	cm	Kg/cm ²	Kg/cm ²	cm ²	Kg	Kg/cm ²	Kg/cm ²	cm
1	30	55	49	210	4200	1.58	15540	12.44	7.68	46.5
3	30	55	49	210	4200	1.58	15540	12.44	7.68	46.5
4	30	55	49	210	4200	1.58	14710	11.77	7.68	54.1

El armado calculado previamente (espaciamiento mínimo hasta una distancia “2h”) es suficiente para asegurar el comportamiento dúctil del pórtico, por lo que no se requiere ninguna modificación.

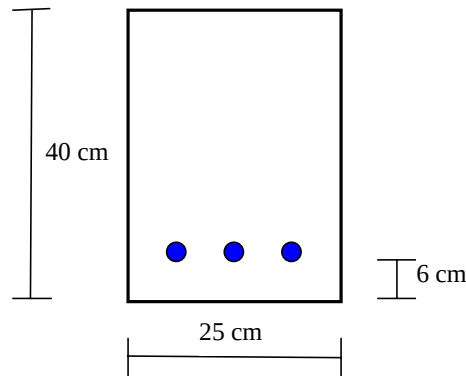
➤ Distribución de la Armadura:

El siguiente gráfico presenta la distribución de la armadura transversal.

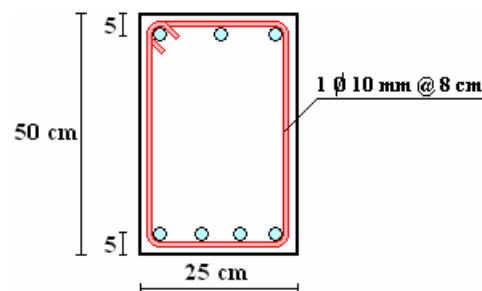


8.7 TAREAS COMPLEMENTARIAS:

- La viga de la figura tiene hormigón de 210 Kg/cm² y acero de 4200 Kg/cm². Si el cortante último de diseño es de 16 T, encontrar el espaciamiento de los estribos de 10 mm de diámetro.



- b. ¿Cuál es la capacidad resistente a cortante (V_u) de la viga de la figura, si tiene estribos de 10 mm cada 8 cm?

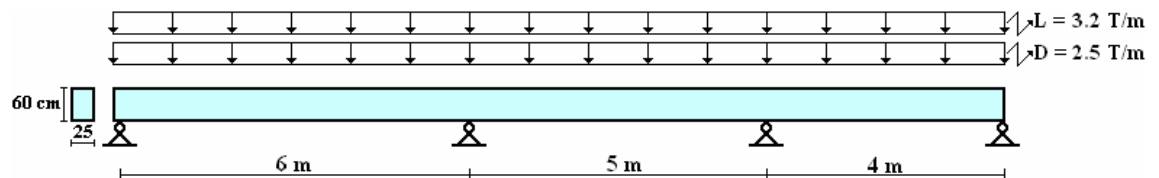


Si se conoce que:

$$f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

- c. Diseñar a cortante por cargas gravitacionales a la viga continua de la figura, si se construirá en una zona afectada por los sismos.



Si se conoce que:

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

REFERENCIAS:

- 8.1 Winter G. y Nilson A., *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, Editorial Reverté, S.A.
- 8.2 Park R. y Pauley T., *Estructuras de Concreto Reforzado*, Editorial LIMUSA S. A.
- 8.3 Nilson A., (1999), *Diseño de Estructuras de Concreto*, Mc Graw Hill.
- 8.4 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 8.5 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.

CAPÍTULO IX

DISEÑO DE LOSAS DE HORMIGÓN ARMADO

9.1 INTRODUCCIÓN:

Las losas son elementos estructurales bidimensionales, en los que la tercera dimensión es pequeña comparada con las otras dos dimensiones básicas. Las cargas que actúan sobre las losas son esencialmente perpendiculares al plano principal de las mismas, por lo que su comportamiento está dominado por la flexión.



Figura 9.1: Losas de hormigón armado sobre pórticos metálicos.

9.2 TIPOS DE LOSAS:

9.2.1 Clasificación de las Losas por el Tipo de Apoyos:

Las losas pueden estar soportadas perimetral e interiormente por vigas monolíticas de mayor peralte, por vigas de otros materiales independientes o integradas a la losa; o soportadas por muros de hormigón, muros de mampostería o muros de otro material, en cuyo caso se las llama **Losas Sustentadas sobre Vigas** o **Losas Sustentadas sobre Muros**, respectivamente.

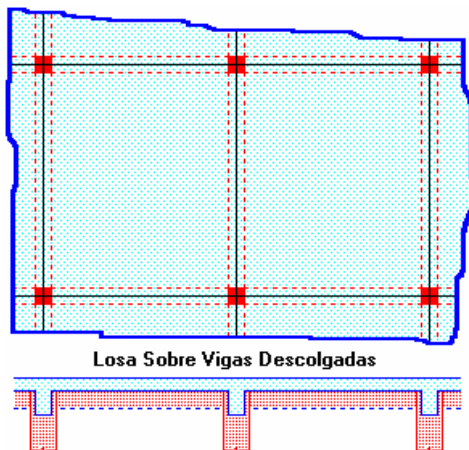


Figura 9.2: Losas sobre vigas descolgadas.

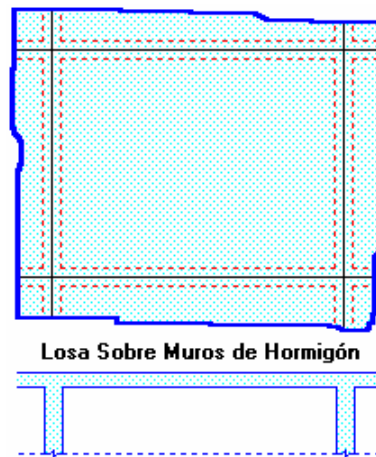


Figura 9.3: Losas sobre muros.

Las losas pueden sustentarse directamente sobre las columnas, llamándose en este caso **Losas Planas**, que en su forma tradicional no son adecuadas para zonas de alto riesgo sísmico como las existentes en nuestro país, pues no disponen de capacidad resistente suficiente para incursionar dentro del rango inelástico de comportamiento de los materiales, con lo que se limita considerablemente su ductilidad. La integración losa-columna es poco confiable, pero pueden utilizarse **capiteles** y **ábacos** para superar parcialmente ese problema, y para mejorar la resistencia de las losas al punzonamiento.

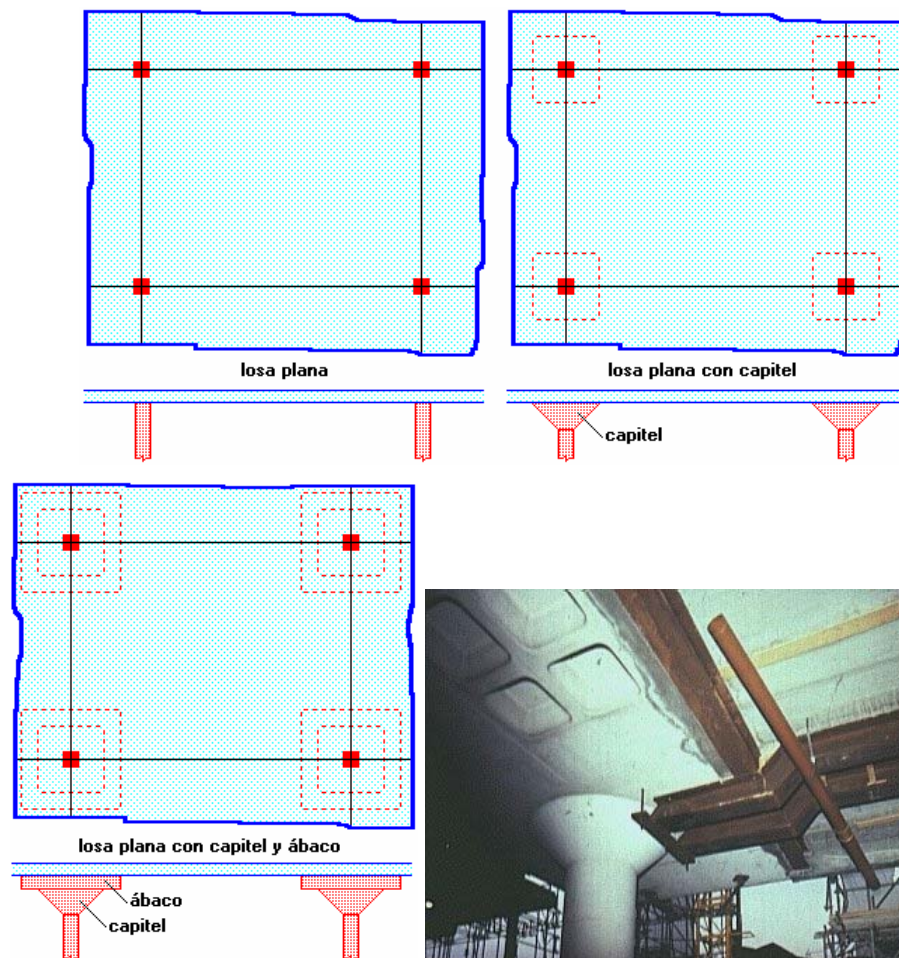


Figura 9.4: Modelos de losas planas.

Las losas planas pueden mejorar considerablemente su comportamiento ante los sismos, mediante la incorporación **de vigas embebidas** o **vigas banda**, con ductilidades apropiadas, en cuyo caso se llaman **Losas con Vigas Embebidas**, que pueden ser útiles para edificios de hasta 4 pisos, con luces y cargas pequeñas y medianas.

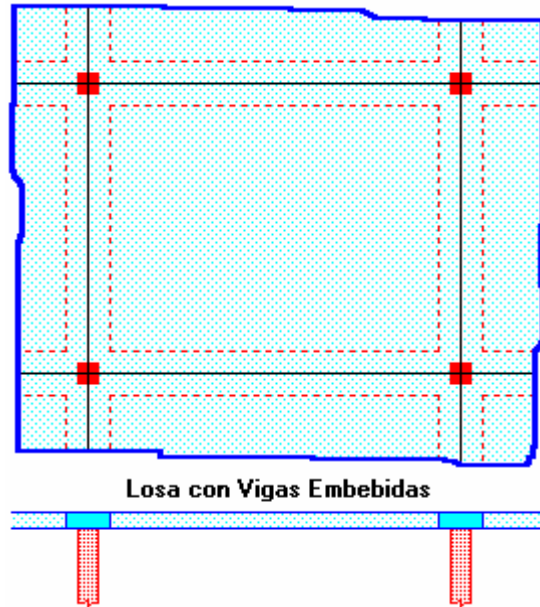


Figura 9.5: Losas con vigas embebidas.

Desde el punto de vista del diseño, las losas con vigas embebidas tienen un comportamiento diferente a las losas con vigas descolgadas.

9.2.2 Clasificación de las Losas por la Dirección de Trabajo:

Si la geometría de la losa y el tipo de apoyo determinan que las magnitudes de los esfuerzos en dos direcciones ortogonales sean comparables, se denominan **Losas Bidireccionales**. Si los esfuerzos en una dirección son preponderantes sobre los esfuerzos en la dirección ortogonal, se llaman **Losas Unidireccionales**.

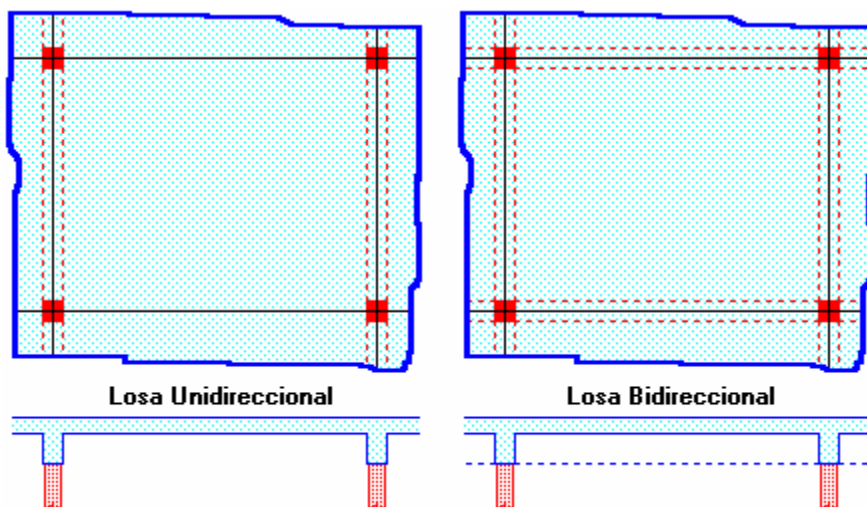


Figura 9.6: Losas unidireccionales y bidireccionales.



Figura 9.7: Losa unidireccional.

9.2.3 Clasificación de las Losas por la Distribución Interior del Hormigón:

Cuando el hormigón ocupa todo el espesor de la losa se la llama **Losa Maciza**, y cuando parte del volumen de la losa es ocupado por materiales más livianos o espacios vacíos se la llama **Losa Alivianada**, **Losa Aligerada** o **Losa Nervada**.

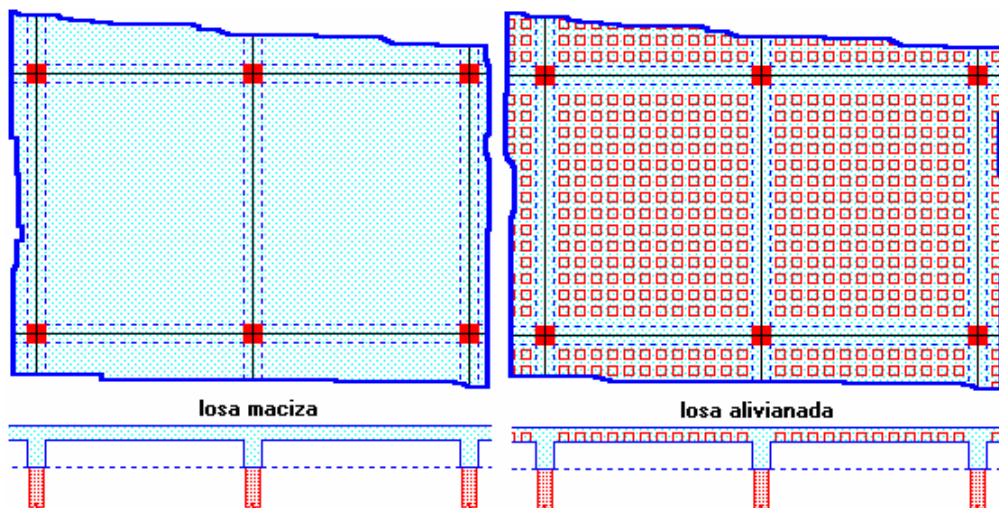


Figura 9.8: Losas macizas y alivianadas.



Figura 9.9: Losa alivianada.

Las losas alivianadas son las más populares en nuestro país por lo que, a pesar de que los códigos de diseño prácticamente no las toman en consideración, en este documento se realizará un análisis detallado de las especificaciones que les son aplicables.

Los alivianamientos generalmente se pueden conseguir mediante mampuestos aligerados de hormigón (son los de mayor uso en nuestro medio), cerámica aligerada, formaleta plásticas recuperables o formaleta de madera.

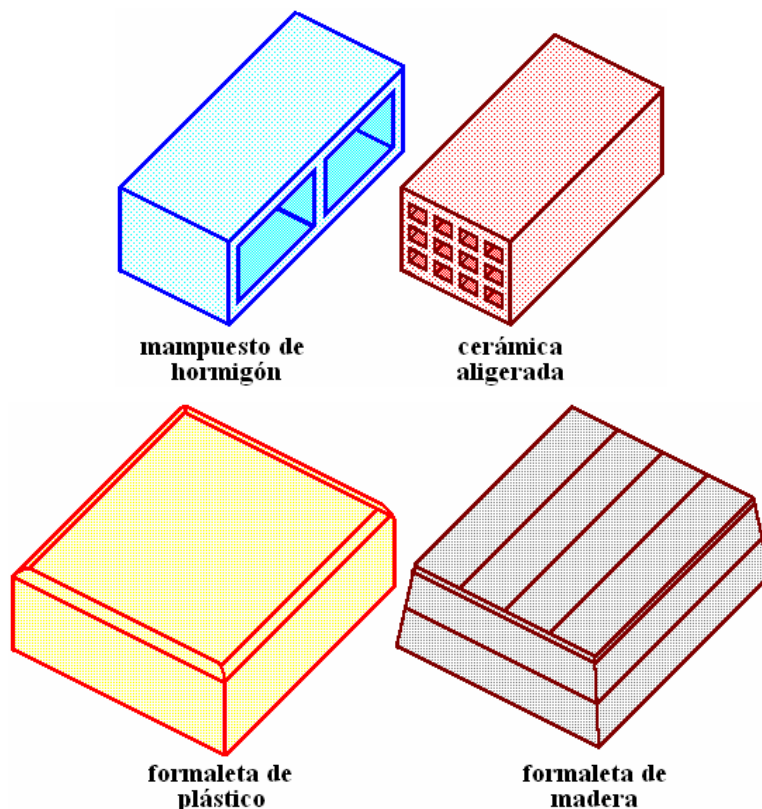


Figura 9.10: Alivianamientos para losas.

Las dimensiones estándar y los pesos de los bloques aligerados de hormigón disponibles en el mercado son:

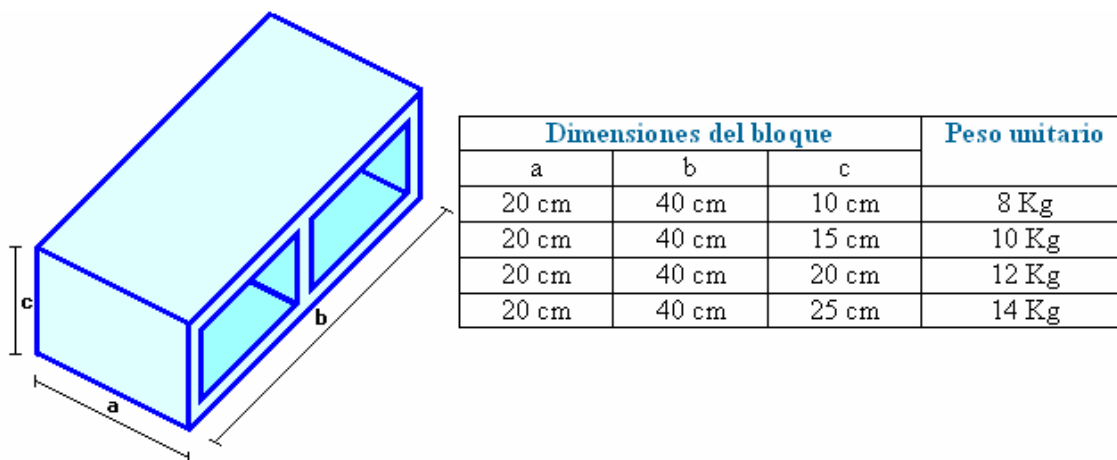


Figura 9.11: Geometría y pesos comerciales de los bloques aligerados para losas alivianadas.

Se ha empezado a emplear el Poliestireno Expandido (EPS – Expanded Polystyrene), como material para la elaboración de las bovedillas de alivianamiento, debido a que alrededor del 98% del volumen del material está constituido por aire, lo que lo vuelve sumamente liviano.



Figura 9.12: Poliestireno expandido en la construcción de losas alivianadas.

El nuevo material tiene un recubrimiento exterior epóxico que impide la absorción del agua de amasado del hormigón, por lo que no altera las propiedades del material estructural. El EPS recubierto es resistente al tráfico de personal en obra.

Además de las características descritas previamente, el EPS es un excelente aislante acústico y térmico por lo que también puede ser utilizado con esos fines.

El limitante básico para el uso masivo del EPS, en nuestro medio, es que en el país todavía no se ha industrializado el producto por lo que es necesario importarlo.

9.3 COMPORTAMIENTO DE LAS LOSAS:

a. Losas Unidireccionales:

Las **Losas Unidireccionales** se comportan básicamente como vigas anchas, que se suelen diseñar tomando como referencia una franja de ancho unitario (un metro de ancho). Existen consideraciones adicionales que serán estudiadas en su momento.

Cuando las losas rectangulares se apoyan en dos extremos opuestos, y carecen de apoyo en los otros dos bordes restantes, trabajan y se diseñan como losas unidireccionales.

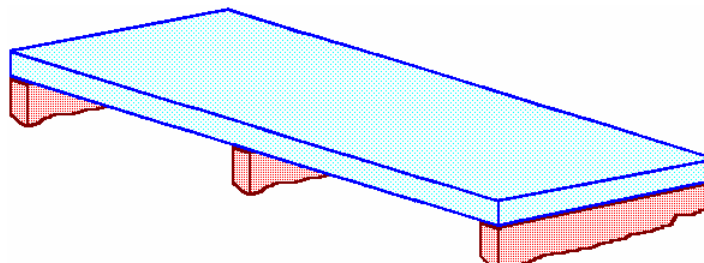


Figura 9.13: Losa unidireccional apoyada sobre muros.

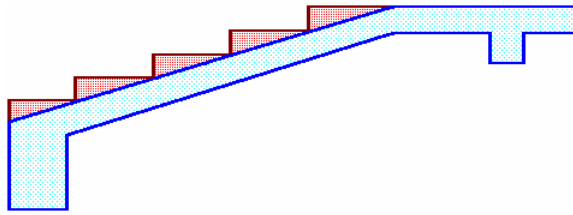


Figura 9.14: Losas unidireccionales apoyadas sobre vigas.

Cuando la losa rectangular se apoya en sus cuatro lados (sobre vigas o sobre muros), y la relación **largo / ancho** es mayor o igual a 2, la losa trabaja fundamentalmente en la dirección más corta, y se la suele diseñar unidireccionalmente, aunque se debe proveer un mínimo de armado en la dirección ortogonal (dirección larga), particularmente en la zona cercana a los apoyos, donde siempre se desarrollan momentos flectores negativos importantes (tracción en las fibras superiores). Los momentos positivos en la dirección larga son generalmente pequeños, pero también deben ser tomados en consideración.

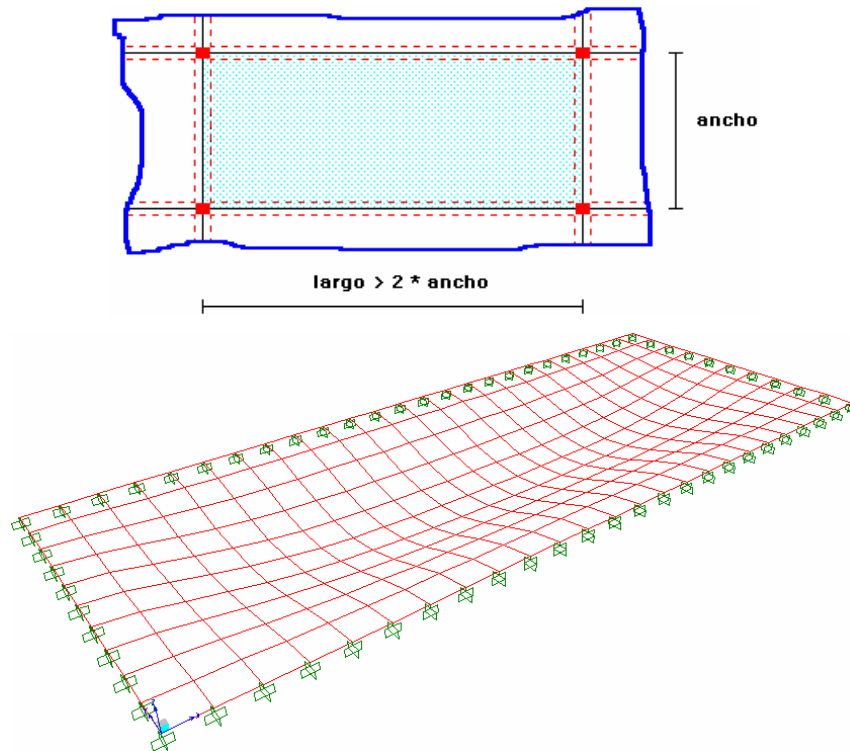


Figura 9.15: Losa unidireccional apoyada sobre cuatro vigas.

Las curvaturas en la deformada anterior son una mediada apropiada de la magnitud de los momentos flectores en cada dirección (a mayor curvatura, mayor momento flector).

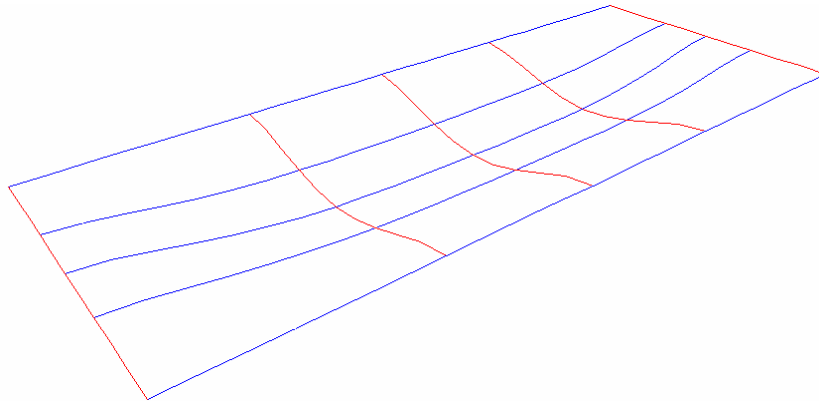


Figura 9.16: Deformada de una losa unidireccional apoyada sobre cuatro vigas.

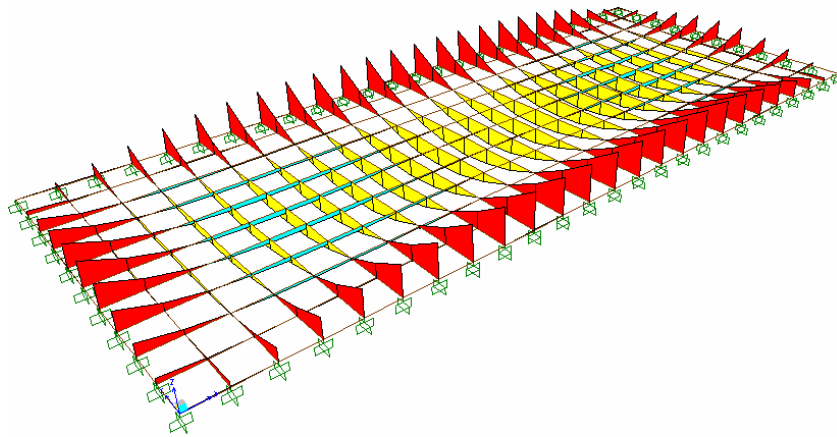


Figura 9.17: Momentos flectores principales de una losa unidireccional apoyada sobre cuatro vigas.

b. Losas Bidireccionales:

Cuando las losas se sustentan en dos direcciones ortogonales, se desarrollan esfuerzos y deformaciones en ambas direcciones, recibiendo el nombre de **Losas Bidireccionales**.



Figura 9.18: Losa bidireccional apoyada sobre cuatro vigas descolgadas.



La ecuación general que describe el comportamiento de las losas bidireccionales macizas, de espesor constante, es conocida como la **Ecuación de Lagrange o Ecuación de Placas**, que se presenta a continuación:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad \text{Ecuación (9.1)}$$

Donde:

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)} \quad \text{Ecuación (9.2)}$$

- w : ordenada de la elástica de deformación de la placa en un punto de coordenadas (x, y)
- D : rigidez a la flexión de la placa, análoga al producto E . I en vigas
- E : módulo de elasticidad del hormigón
- h : espesor de la placa
- μ : coeficiente de Poisson del hormigón (su valor está comprendido entre 0.15 y 0.20)

La ecuación de Lagrange utiliza como fundamento la **Ley de Deformación Plana de Kirchhoff** que establece que **una placa plana delgada, sometida a cargas perpendiculares a su plano principal, se deformará de modo que todos los puntos materiales que pertenecen a una recta normal a la superficie sin deformarse permanecerán dentro de la correspondiente recta normal a la superficie deformada** (la versión análoga para vigas diría que **las secciones transversales planas antes de la deformación permanecen planas después de la deformación**).

Las solicitaciones unitarias internas que se desarrollan en las placas quedan definidas por las siguientes expresiones:

$$m_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad \text{Ecuación (9.3)}$$

$$m_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad \text{Ecuación (9.4)}$$

$$m_{xy} = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \text{Ecuación (9.5)}$$

$$v_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad \text{Ecuación (9.6)}$$

$$v_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad \text{Ecuación (9.7)}$$

Donde:

- m_x : momento flector alrededor del eje x, por unidad de ancho de losa
- m_y : momento flector alrededor del eje y, por unidad de ancho de losa

m_{xy} : momento torsor, por unidad de ancho de losa

v_x : esfuerzo cortante en la dirección x , por unidad de ancho de losa

v_y : esfuerzo cortante en la dirección y , por unidad de ancho de losa

Es importante notar que las deformaciones producidas por flexión en una de las direcciones generan esfuerzos flexionantes en la dirección perpendicular debido al efecto de Poisson (deformación en la dirección perpendicular).

A continuación se presenta la deformada transversal que produciría un momento flector positivo (tracción en la fibra inferior) que actúa sobre una franja de losa de una unidad de ancho.

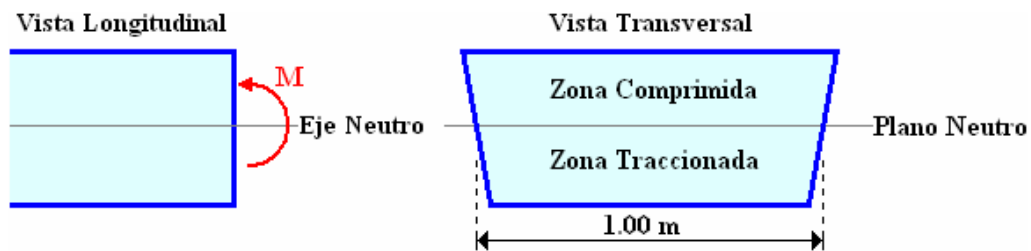


Figura 9.19: Deformada transversal referencial de una franja de losa bajo flexión unidireccional.

En la zona comprimida se produciría un crecimiento de la sección transversal, proporcional a la magnitud del esfuerzo de compresión (proporcional a la distancia desde el Plano Neutro).

La deformada transversal previa es aceptable para el caso de vigas, pero no sería admisible en losas porque se perdería la continuidad del material con las franjas contiguas de losa que tratarían de deformarse de modo similar, llegando a traslaparse o a separarse de la franja analizada. Para volver compatible las deformaciones se requeriría la presencia de un sistema de solicitaciones que compense las deformaciones transversales; tal sistema de solicitaciones, en una primera instancia está constituido por momentos flectores perpendiculares a los que generaron la deformación analizada, que producen la misma deformación del longitudinal pero en sentido opuesto.

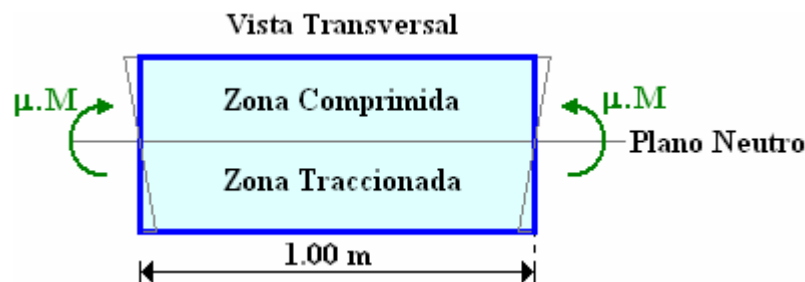


Figura 9.20: Deformada transversal referencial de una franja de losa con condiciones de compatibilidad de deformaciones con las franjas contiguas.

También debe tomarse en consideración que simultáneamente a la flexión en las dos direcciones, aparecen momentos torsionantes que actúan sobre la losa.

Las dos primeras ecuaciones son análogas a la **Ecuación General de la Flexión en Vigas**, pero se incluye la deformación provocada por los momentos flexionantes transversales.

Las solicitaciones de diseño para las losas bidireccionales dependen de las cargas y las condiciones de apoyo. Existen tablas de diseño de losas para las cargas y las condiciones de apoyo (o de carencia de apoyo) más frecuentes (empotramiento o continuidad total; apoyo fijo con posibilidad de rotación; borde libre o voladizo), y en casos de geometrías y cargas excepcionales se pueden utilizar los métodos de las **Diferencias Finitas** o de los **Elementos Finitos**.

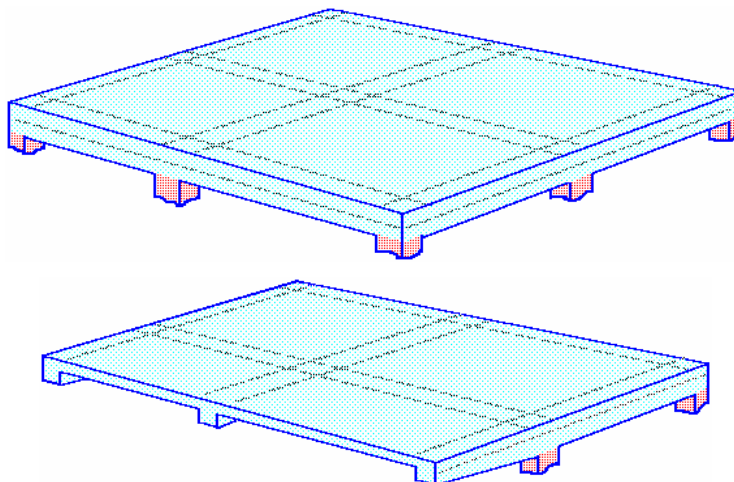


Figura 9.21: Condiciones de apoyo variadas en losas.

9.4 ESPECIFICACIONES PARA LOSAS EN LOS CÓDIGOS DE DISEÑO:

a. Deflexiones Máximas en Losas:

El Código Ecuatoriano de la Construcción [CEC 9.5.3] y el ACI [ACI 9.5.3] definen deflexiones máximas calculadas para losas macizas y nervadas que varían desde **L/180** hasta **L/480**, dependiendo del uso de la losa.

Tabla 9.1: Máximas deflexiones permisibles calculadas en losas.

Tipo de miembro	Deflexión que se ha de considerar	Límite de la deflexión
Techos planos que no soportan ni están ligados a elementos no estructurales que es posible sean dañados por grandes deflexiones	Deflexión inmediata debido a carga viva	L/180
Pisos que no soportan ni están ligados a elementos no estructurales que es posible sean dañados por grandes deflexiones	Deflexión inmediata debido a carga viva	L/360
Construcción de techo o piso que soporta o que está ligada (integrada) a elementos no estructurales que sean dañados	Aquella parte de la deflexión total que ocurre después de fijar elementos no estructurales (la suma de la deflexión a largo	L/480



por grandes deflexiones	plazo debido a las cargas sostenidas y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional)	L/240
Construcción de techo o piso que soporta o que está ligada a elementos no estructurales no dañados por grandes deflexiones		

Donde:

L : luz de la viga o la losa en una dirección

El Código Ecuatoriano de la Construcción y el ACI también especifican un peralte mínimo de las losas armadas en una sola dirección [ACI 9.5.2.1] para limitar las deflexiones a valores razonables, cuando no se calculan deflexiones. La siguiente tabla puede ser usada también para losas bidireccionales sobre vigas de mayor peralte cuya relación **lado largo / lado corto** sea mayor que 2 (trabajan fundamentalmente en la dirección corta), arrojando resultados conservadores.

Tabla 9.2: Altura mínima de vigas o losas en una dirección cuando no se calculan deflexiones.

Miembros	Altura mínima h			
	Libremente apoyados	Con un extremo Continuo	Ambos extremos continuos	En voladizo
Losas macizas en una dirección	L/20	L /24	L /28	L /10
Vigas o losas nervadas en una dirección	L /16	L /18.5	L /21	L /8

Donde:

L : luz de la viga o la losa en una dirección

Igualmente, el CEC y el ACI especifican un peralte mínimo de las losas armadas en dos direcciones [ACI 9.5.3.2] para controlar las deflexiones.

Tabla 9.3: Altura mínima de losas sin vigas interiores cuando no se calculan deflexiones.

Fy Kg/cm ²	Sin ábacos			Con ábacos		
	Paneles exteriores		Paneles interiores	Paneles exteriores		Paneles interiores
	Sin vigas de borde	Con vigas de borde		Sin vigas de borde	Con vigas de borde	
2800	L _n /33	L _n /36	L _n /36	L _n /36	L _n /40	L _n /40
4200	L _n /30	L _n /33	L _n /33	L _n /33	L _n /36	L _n /36
5200	L _n /28	L _n /31	L _n /31	L _n /31	L _n /34	L _n /34

Donde:

L_n : claro libre en la dirección corta en losas con vigas perimetrales descolgadas, y claro libre en la dirección larga en losas sin vigas o con vigas embebidas

Para el caso de losas rectangulares apoyadas sobre vigas de mayor peralte, cuya relación **lado largo / lado corto** sea menor que 2, el cálculo de las deflexiones se realiza con dos ecuaciones propuestas por los códigos.

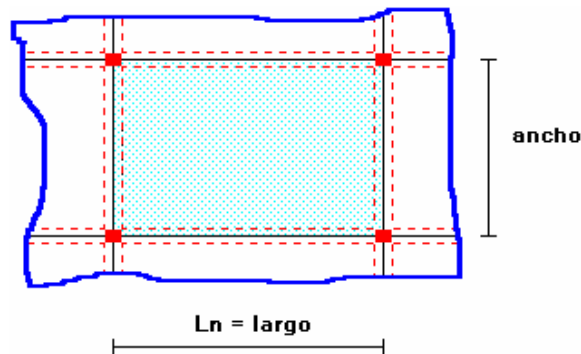


Figura 9.22: Dimensiones base de una viga rectangular.

Cuando se tienen losas con vigas en los cuatro bordes, y valores de α_m menores a 2, se aplica la siguiente ecuación básica para establecer una altura mínima genérica de la losa [ACI 9.5.3.3]:

$$h_{\min} = \frac{L_n (800 + 0.0712 F_y)}{36000 + 5000 \beta (\alpha_m - 0.2)} \quad \text{Ecuación (9.8)}$$

Donde:

h : peralte o espesor de la losa maciza o altura de inercia equivalente en la losa nervada

L_n : claro libre en la dirección larga del panel, medido de cara a cara de las columnas en losas sin vigas, y de cara a cara de las vigas en losas sustentadas sobre vigas

F_y : esfuerzo de fluencia del acero en Kg/cm^2

α_m : promedio de los valores de α para las cuatro vigas en los bordes del panel, donde α = razón entre $E \cdot I$ de la sección de la viga y $E \cdot I$ del ancho de la losa limitada lateralmente por las líneas de centro de los paneles adyacentes a cada lado de la viga (donde las hubiera)

β : relación de forma del panel = panel largo libre / panel corto libre

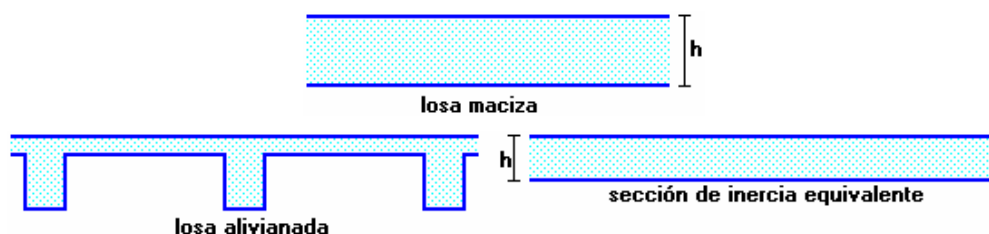


Figura 9.23: Peralte de losas macizas y peralte equivalente de losas nervadas.

Pero " $h_{\min}$ ", para esta primera condición, deberá ser al menos 12.5 cm.



Para valores de α_m mayores que 2, la altura de la losa maciza o la altura equivalente de la losa nervada debe ser al menos [ACI 9.5.3.3]:

$$h_{\min} = \frac{L_n(800 + 0.0712F_y)}{36000 + 9000\beta} \quad \text{Ecuación (9.9)}$$

Pero “ $h_{\min}$ ”, para esta segunda condición, deberá ser al menos 9 cm.

Comparando las 2 ecuaciones, se deduce que los códigos castigan a las losas en las que las vigas no tienen una rigidez comparativamente importante pues el sistema viga-losa tendrá deflexiones más grandes. El castigo se traduce en un mayor peralte mínimo.

Para zonas sísmicas, no se recomiendan concepciones estructurales viga-losa cuyo valor de α_m sea menor a 0.2, por la falta de aporte a la ductilidad de los elementos horizontales en el nudo, que es uno de los componentes claves del factor de reducción de la fuerza sísmica “R”.

El ACI [ACI 9.5.3.2] también establece que la altura de las losas macizas o la altura equivalente de las losas nervadas que no poseen vigas perimetrales no debe ser menor que los siguientes valores:

Tabla 9.4: Espesores mínimos base en losas sin vigas perimetrales.

Tipo de Losa	Espesor mínimo
Losas sin vigas o ábacos	12.5 cm
Losas sin vigas pero con ábacos que cubran al menos un sexto de la luz centro a centro y se proyecten por debajo de la losa al menos $h/4$	10 cm

b. Armadura Mínima:

Armadura Mínima en Losas Macizas:

- En losas de espesor constante (losas macizas), cuando se utilice acero con esfuerzo de fluencia $F_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$ o $F_y = 3500 \text{ Kg/cm}^2$, la cuantía de armado mínimo para resistir la retracción de fraguado y los cambios de temperatura será [ACI 7.12.2.1]:

$$\rho_{\min} = 0.0020 \quad \text{Ecuación (9.10)}$$

Esta armadura debe colocarse en dos direcciones ortogonales y las separaciones serán a los sumo 5 veces el espesor de la losa, pero no menor de 45 cm [ACI 7.12.2.2].

- En losas de espesor constante, cuando se utilice acero de refuerzo con $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$, la cuantía mínima para resistir cambios de temperatura y retracción de fraguado será [ACI 7.12.2.1]:

$$\rho_{\min} = 0.0018 \quad \text{Ecuación (9.11)}$$

Los espaciamientos máximos serán similares al punto anterior.



- En losas en que se utilice acero cuyo esfuerzo de fluencia supere los 4200 Kg/cm². la cuantía mínima para resistir cambios de temperatura y retracción de fraguado será [ACI 7.12.2.1]:

$$\rho_{\min} = \frac{0.0018 \times 4200}{F_y} \quad \text{Ecuación (9.12)}$$

Donde:

F_y: esfuerzo de fluencia en Kg/cm²

Los espaciamientos máximos serán similares a los 2 puntos anteriores.

- En losas macizas la cuantía mínima de flexión no debe ser menor que la requerida para resistir retracción de fraguado y cambios de temperatura [ACI 13.3.1].

El espaciamiento de las varillas de flexión en las secciones críticas no puede superar el doble del espesor de la losa [ACI 13.3.2].

Armadura Mínima en Losas Nervadas:

- En losas nervadas, la cuantía mínima de flexión, exclusivamente para los nervios, $\rho_{\min}$ se debe calcular mediante las siguientes expresiones [ACI 10.5.1], utilizadas en el diseño de vigas:

$$\rho_{\min} = \frac{0.79\sqrt{f'c}}{F_y} \quad \text{Ecuación (9.13)}$$

$$\rho_{\min} = \frac{14}{F_y} \quad \text{Ecuación (9.14)}$$

Donde:

f'c: resistencia característica del hormigón en Kg/cm²

El armado previamente descrito se calcula tomando como ancho de la franja de hormigón el ancho de los nervios.

- En la loseta de compresión de las losas nervadas debe proveerse de acero de refuerzo para resistir la retracción de fraguado y los cambios de temperatura, de un modo similar a las losas macizas de espesor constante [ACI 13.3.1].

La diferencia entre las especificaciones para losas nervadas y para losas macizas se produce por que los nervios de las losas nervadas se comportan fundamentalmente como una malla espacial de vigas, y la loseta de compresión se comporta como una combinación de placa y membrana (losa maciza).

Por otro lado, el armado en losas macizas se coloca en las 2 direcciones para el mismo volumen de hormigón, y en losas nervadas se coloca exclusivamente en la dirección de los nervios, lo que duplica la cantidad de acero en losas macizas. Sin embargo cumpliendo las disposiciones previas, para aceros de 4200 Kg/cm², el armado mínimo de los nervios es aproximadamente el doble del de las losas



macizas ($14/4200 \approx 2 \times 0.0018$), con lo que la cuantía volumétrica mínima de acero es similar en ambos tipos de losas.

c. Armadura Máxima:

Con el objeto de asegurar una ductilidad mínima, no se podrá proporcionar más armadura a una losa que el 75% de la cuantía balanceada [ACI98 10.3.3, CEC 10.3.3] cuando no resisten sismo (losas con vigas descolgadas):

$$\rho_{\text{máx}} = 0.75\rho_b \quad \text{Ecuación (9.15)}$$

Cuando las losas resisten sismo (losas con vigas embebidas y losas planas) no se debe proporcionar armadura de flexión que supere el 50% de la cuantía balanceada.

$$\rho_{\text{máx}} = 0.50\rho_b \quad \text{Ecuación (9.16)}$$

La cuantía balanceada para secciones rectangulares está definida por [ACI 10.3.2]:

$$\rho_b = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003} \quad \text{Ecuación (9.17)}$$

Donde:

- ρ_b : cuantía balanceada
- f'_c : resistencia característica a la rotura del hormigón en Kg/cm^2
- F_y : esfuerzo de fluencia del acero de refuerzo en Kg/cm^2
- E_s : módulo de elasticidad del acero en Kg/cm^2

d. Recubrimiento Mínimo:

- El acero de refuerzo de barras menores a 36 mm de diámetro en losas fundidas in situ [ACI 7.7.1] debe tener un recubrimiento mínimo de 2.0 cm.
- El acero de refuerzo en losas prefabricadas [ACI 7.7.2] debe tener un recubrimiento mínimo de 2.0 cm.

e. Resistencia al Cortante:

En las secciones de las losas en que no exista refuerzo por cortante consistente en vigas o viguetas con estribos, el hormigón deberá soportar la totalidad de las solicitaciones de corte.

Las losas deberán diseñarse para resistir 2 modelos de falla por cortante:

- **Falla tipo viga** [ACI 11.11.1.1], en una dirección, que se produce a una distancia “d” de la cara interior de las vigas de apoyo, cuando no existen cargas concentradas importantes más próximas.

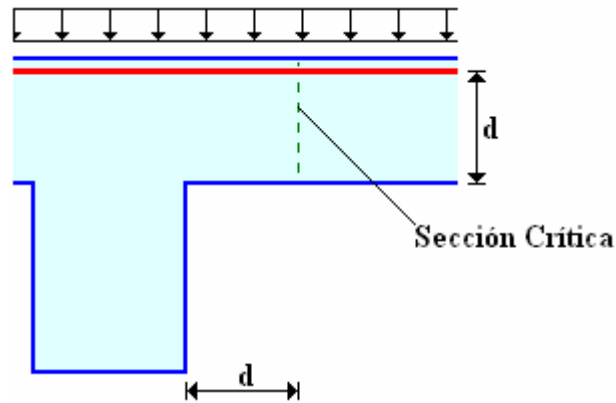


Figura 9.24: Sección crítica a cortante tipo viga en losas.

Si existen cargas concentradas cercanas a la viga, la sección de crítica de diseño se ubicará en la posición de la carga más próxima al apoyo.

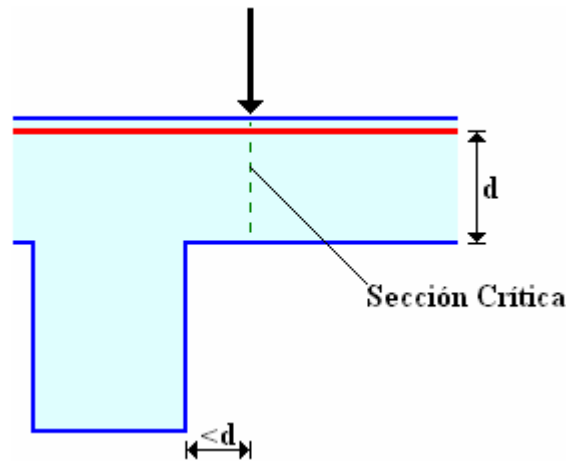


Figura 9.25: Sección crítica a cortante si existen cargas concentradas próximas a la viga de apoyo.

El esfuerzo cortante que puede resistir el hormigón en la falla tipo viga [ACI 11.3.2] es:

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c} \quad \text{Ecuación (9.18)}$$

Donde:

f'_c : resistencia característica a la rotura del hormigón en Kg/cm²

- **Falla por punzonamiento** [ACI 11.11.1.2], en 2 direcciones, que se produce a una distancia “ $d/2$ ” del perímetro de las columnas de soporte, cuando no existan cargas concentradas más próximas.

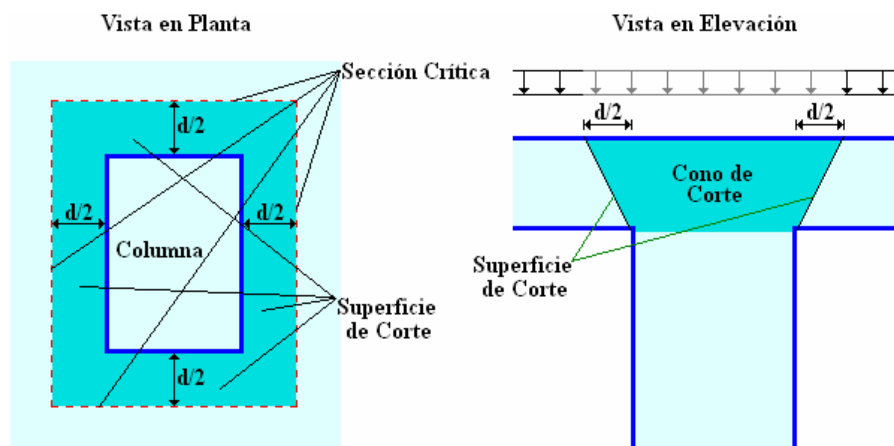


Figura 9.26: Sección crítica a falla de cortante por punzonamiento.

Si existen cargas concentradas muy próximas a las columnas de soporte, la sección de falla deberá coincidir con la carga concentrada más cercana.

Cuando existan cargas concentradas intermedias que actúen sobre las losas, deberán diseñarse las últimas para resistir punzonamiento en 2 direcciones de manera análoga a la zona de columnas, pero la sección crítica se ubicará perimetralmente a una distancia “ $d/2$ ” del área sobre la que actúa la carga concentrada.

De acuerdo al código ACI [ACI 11.11.2.1], el esfuerzo cortante que puede resistir el hormigón bajo el modelo de punzonamiento es el menor de:

$$v_c = 1.06\sqrt{f'_c} \quad \text{Ecuación (9.19)}$$

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c} \left(1 + \frac{2}{\beta} \right) \quad \text{Ecuación (9.20)}$$

$$v_c = 0.27\sqrt{f'_c} \left(\frac{\alpha_s \cdot d}{b_o} + 2 \right) \quad \text{Ecuación (9.21)}$$

Donde:

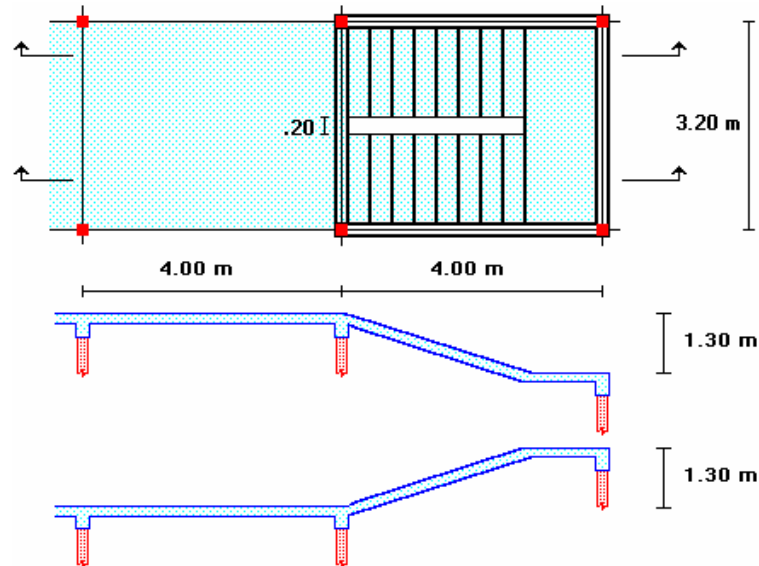
- β : relación del lado largo al lado corto de la columna
- α_s : parámetro que vale 40 para columnas interiores, 30 para columnas de borde y 20 para columnas esquineras
- d : altura efectiva de la losa (distancia desde el centro de gravedad del acero de tracción hasta la cara comprimida extrema.
- b_o : perímetro de la sección crítica de cortante de la losa o zapata

f. Aberturas en Losas:

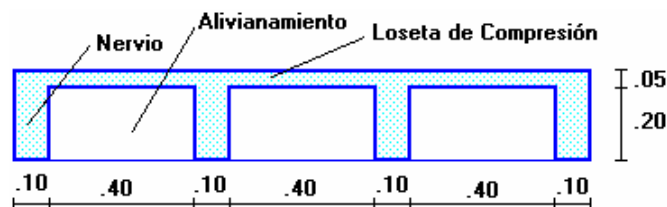
Se admiten aberturas en losas si se demuestra mediante análisis que la resistencia proporcionada es apropiada [ACI 13.4.1]. No se requerirá de análisis especial por la presencia de una abertura en la zona central siempre que se mantenga la cantidad total de refuerzo requerido en el tablero sin la abertura [ACI 13.4.2]. El refuerzo eliminado por la presencia de la abertura deberá colocárselo alrededor de la abertura, armando nervios o vigas embebidas de borde.

EJEMPLO 9.1:

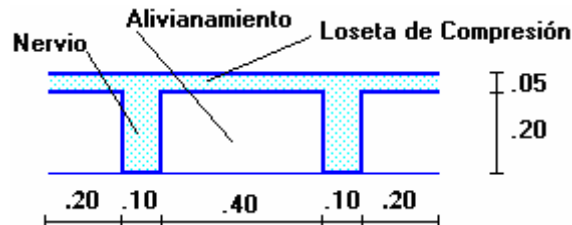
Diseñar la siguiente escalera construida con hormigón de resistencia característica $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y acero con esfuerzo de fluencia $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$:



Se utilizará tentativamente una losa alivianada armada en una dirección, con un espesor de 25 cm, con loseta de compresión de 5 cm de espesor, con nervios de 10 cm de ancho cada 50 cm. Los nervios de distribución transversales se colocarán cada metro de distancia.



Cuando la losa tiene un ancho superior a 2.50 m (en el presente caso solamente tiene 1.60 m), solamente debería tomarse para el diseño una franja que tenga 1 m. de ancho (2 nervios y la loseta de compresión correspondiente, para el diseño propuesto).



- Control de Deflexión:**

$$h_{\min} = L_n / 18.5 = (400 \text{ cm} - 30 \text{ cm}) / 18.5 = 20 \text{ cm}$$

$$h = 25 \text{ cm} > h_{\min} \quad (\text{O.K.})$$



- **Determinación de las Cargas de Diseño:**

Se calculará el peso de 1 m lineal de la losa de escalera y la sobrecarga que sobre esa sección actúa.

$$\text{Peso loseta de compresión} = 1.60 \times 1.00 \times 0.05 \times 2400 = 192 \text{ Kg/m}$$

(1 m de largo x 1.60 m de ancho)

$$\text{Peso nervios longitudinales} = 4 \times 0.10 \times 0.20 \times 2400 = 192 \text{ Kg/m}$$

(peso de los 4 nervios de 10 cm. de espesor)

$$\text{Peso de nervios transversales} = 0.10 \times 0.20 \times 1.60 \times 2400 = 77 \text{ Kg/m}$$

(1 nervio por cada metro)

$$\text{Alivianamientos} = 15 \text{ bloques} \times 12 \text{ Kg/bloque} = 180 \text{ Kg/m}$$

(3 alivianamientos de 5 bloques cada uno)

$$\text{Peso Propio} = 641 \text{ Kg/m}$$

Se calculan los componentes de la sobrecarga permanente, y la carga permanente total:

$$\text{Peso relleno gradas} = 1.60 \times 1.00 \times 0.09 \times 2000 = 288 \text{ Kg/m}$$

(Las gradas tienen 30 cm de huella horizontal y 18 cm de contrahuella vertical, lo que equivale a 9 cm. de altura promedio de relleno)

$$\text{Enlucido y masillado} = 1.60 \times 1.00 \times 0.04 \times 2200 = 141 \text{ Kg/m}$$

(2 cm. de enlucido y 2 cm. de masillado)

$$\text{Recubrimiento de piso} = 1.60 \times 1.00 \times 0.02 \times 2200 = 71 \text{ Kg/m}$$

(cerámica de 1.2 cm. de espesor en huella y contrahuella, equivalente a 2 cm en huella)

$$\text{Pasamanos} = 50 \text{ Kg/m}$$

$$\text{Carga Permanente} = 1191 \text{ Kg/m}$$

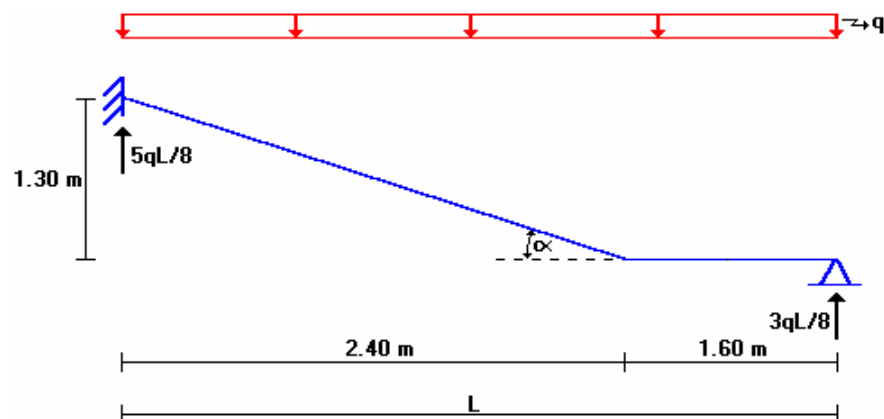
$$\text{Carga Viva} = 1.60 \times 500 = 800 \text{ Kg/m}$$

(por ser zona de concentración se usan 500 Kg/m²)

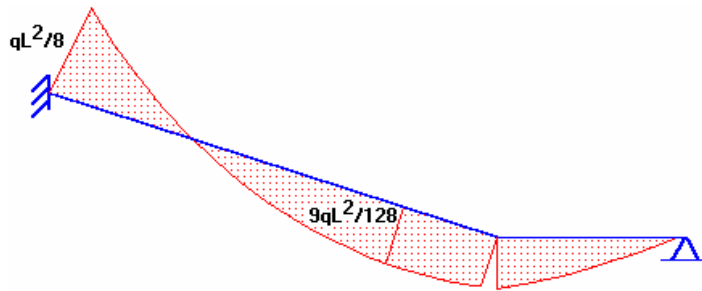
Carga Ultima de Diseño

$$U = 1.4 D + 1.7 L = 1.4 (1191) + 1.7 (800) = 3027 \text{ Kg/m}$$

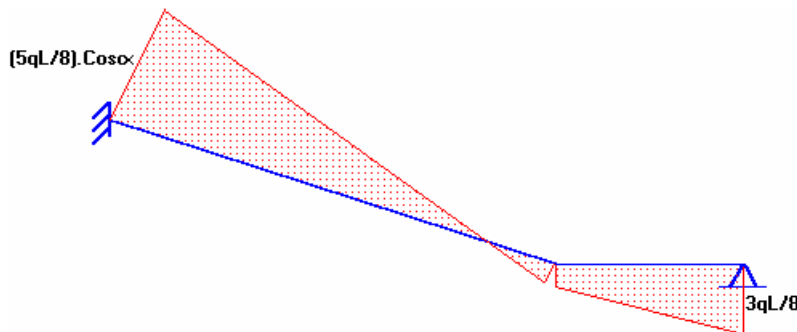
- **Modelo Estructural de la Escalera y Reacciones de Apoyo:**



- **Diagrama de Momentos Flectores:**



- **Diagrama de Fuerzas Cortantes:**



- **Determinación de Momentos Flectores Ultimos de Diseño:**

El momento flector negativo se calcula en la cara de la viga de soporte, que tiene 30 cm de base (a 15 cm del eje):

$$Mu(-) = \frac{q.L^2}{8} - \frac{5}{8}(q.L)x + q \frac{x^2}{2}$$

$$Mu(-) = \frac{(3027)(4)^2}{8} - \frac{5}{8}(3027)(4)(0.15) + (3027) \frac{(0.15)^2}{2}$$

$$Mu(-) = 4953 \text{ Kg-m} = 495300 \text{ Kg-cm}$$

El momento flector positivo se calcula en el tramo:

$$Mu(+) = \frac{9}{128} q.L^2$$

$$Mu(+) = \frac{9}{128} (3027)(4)^2$$

$$Mu(+) = 3405 \text{ Kg-m} = 340500 \text{ Kg-cm}$$

- **Determinación de la Armadura Longitudinal Negativa (hierro superior):**

$$Mu(-) = 495300 \text{ Kg-cm}$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\phi = 0.9 \text{ (flexión)}$$

$$b = 40 \text{ cm (cuatro nervios unidos)}$$

$$d = 25 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$$



Para calcular la sección de acero requerida en una pieza rectangular sometida a flexión se puede utilizar la siguiente expresión, que resume en una sola aquellas ecuaciones utilizadas en el diseño de vigas:

$$A_s = \frac{0.85f'c.b.d}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M_u}{0.85\phi.f'c.b.d^2}} \right]$$

Deberá verificarse posteriormente que no se haya sobrepasado de la fracción de cuantía de armado balanceada especificada en los códigos (75% cuando no resiste sismo y 50% cuando resiste sismo), pues la expresión detallada anteriormente presupone que el acero de refuerzo entra en fluencia. Además deberá controlarse que la cuantía de armado supere a la cuantía mínima.

Se calcula la sección de acero para los cuatro nervios, aplicando la expresión antes señalada:

$$A_s = \frac{0.85(210)(40)(22)}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(495300)}{0.85(0.9)(210)(40)(22)^2}} \right]$$

$$A_s = 6.53 \text{ cm}^2 \text{ para los cuatro nervios} = 1.63 \text{ cm}^2 \text{ por cada nervio}$$

$$A_s = 1 \phi 16 \text{ mm por cada nervio}$$

- Determinación de la cuantía real de armado:**

$$\rho = \frac{A_s}{b.d} = \frac{4(2.01 \text{ cm}^2)}{(40 \text{ cm})(22 \text{ cm})} = 0.00914$$

- Verificación de la armadura máxima permisible:**

$$\rho_b = 0.85\beta_1 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003}$$

$$\rho_b = (0.85)(0.85) \frac{210 \text{ Kg/cm}^2}{4200 \text{ Kg/cm}^2} \cdot \frac{0.003}{\frac{4200 \text{ Kg/cm}^2}{2100000 \text{ Kg/cm}^2} + 0.003} = 0.0217$$

$$\rho_{\text{máx}} = 0.75 \rho_b = 0.75 (0.0217) = 0.0163$$

$$\rho < \rho_{\text{máx}} \quad (\text{O.K.})$$

- Verificación de la armadura mínima requerida:**

$$\rho_{\text{mín}} = \frac{14}{F_y} = \frac{14}{4200} = 0.00333 \quad (\text{los nervios de las losas nervadas son}$$

tratados como vigas)

$$\rho > \rho_{\text{mín}} \quad (\text{O.K.})$$

- Determinación de la Armadura Longitudinal Positiva (hierro inferior):**

$$M_u = 340500 \text{ Kgr-cm}$$



$b = 160 \text{ cm}$ (ancho en la loseta de compresión)

$$A_s = \frac{0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(160 \text{ cm})(22 \text{ cm})}{4200 \text{ Kg/cm}^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(340500)}{0.85(0.9)(210)(160)(22)^2}} \right]$$

$A_s = 4.15 \text{ cm}^2$ para los cuatro nervios

$A_s = 1.04 \text{ cm}^2$ por cada nervio (1 ϕ 12 mm por cada nervio)

- Determinación de la Cuantía de Armado:**

$$\rho = \frac{A_s}{b.d} = \frac{4(1.13 \text{ cm}^2)}{(40 \text{ cm})(22 \text{ cm})} = 0.00514$$

La cuantía de armado está comprendida entre los valores mínimos y máximos permitidos.

- Verificación del Dimensionamiento bajo Cargas de Corte:**

La resistencia del hormigón simple al cortante es:

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c}$$

$$v_c = 7.68 \text{ Kg/cm}^2$$

Se calcula el cortante solicitante:

$$\text{Tg}(\alpha) = 1.30 / 2.40$$

$$\alpha = 28.44^\circ$$

$$V_u = \{ (3027 \cdot 4) (5/8) - 3027 \cdot (0.15 + 0.22) \} \cdot \cos(28.44^\circ)$$

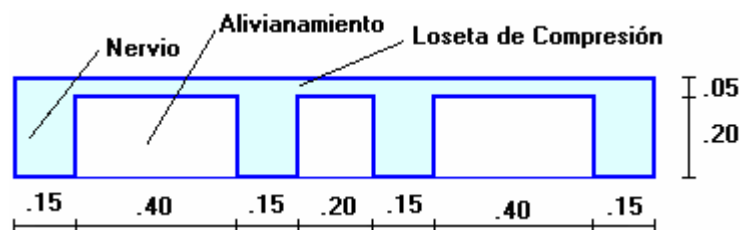
$$V_u = 5669 \text{ Kg para los cuatro nervios}$$

$$v_u = \frac{V_u}{\phi.b.d} = \frac{5669}{(0.85)(40)(22)}$$

$$v_u = 7.58 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_u < v_c \quad \text{(La sección escogida es apropiada)}$$

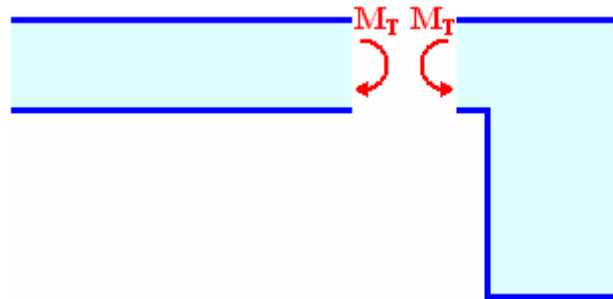
En caso de que el cortante solicitante hubiera excedido al cortante solicitante ($v_u > v_c$), sería necesario incrementar el ancho de los nervios para mejorar la capacidad resistente, con la consiguiente disminución de los alivianamientos, como se observa en el siguiente gráfico.



El incremento de carga solicitante es superado ampliamente por el incremento en capacidad resistente.

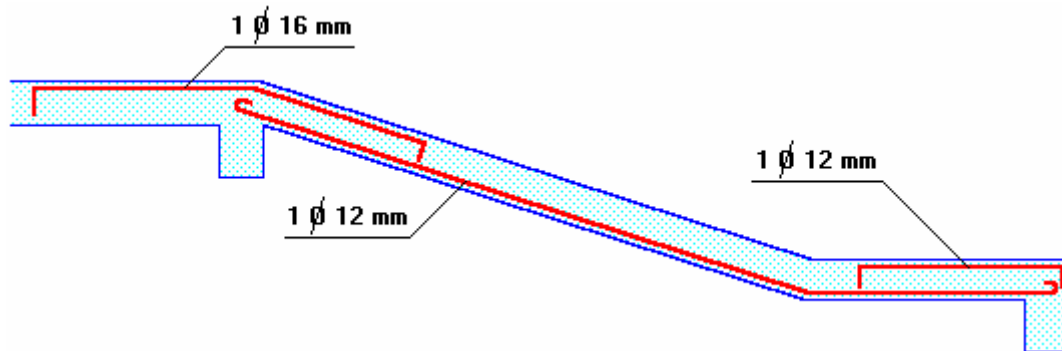
A pesar de que el análisis estructural no lo revela, pues el modelo estructural empleado es simplificado, siempre existirá un pequeño momento flector negativo en la unión de la

losa con la viga extrema, debido a la rigidez torsional de la viga de apoyo, que provoca algún nivel de restricción a la rotación libre.

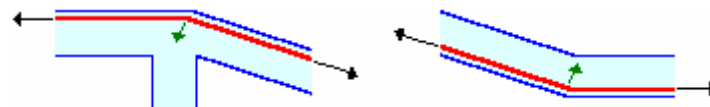


Es necesario, por consiguiente, proveer de un armado mínimo negativo a la losa para soportar tal sollicitación (1 ϕ 12 mm @ nervio).

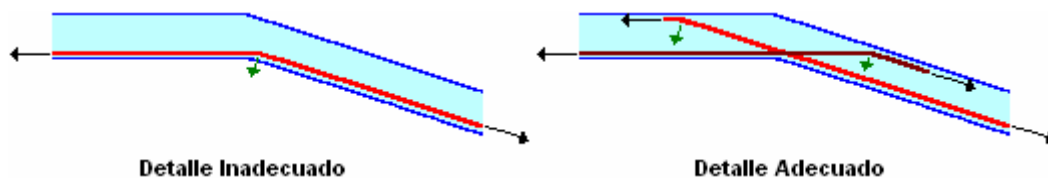
A continuación se presenta un detalle del armado de los nervios:



Es importante notar el detalle del hierro positivo y del hierro negativo de tracción en los quiebres de pendiente de la escalera, pues cuando esa armadura entra en tensión, como se observa en la siguiente figura, el doblez de la armadura ejerce presión en dirección a la parte interna del hormigón, lo que proporciona estabilidad.



Cuando la presión del hierro a tracción se ejerce en dirección al recubrimiento del hormigón (sentido opuesto al anterior) se debe cambiar el detalle de armado para evitar que se desprenda el hormigón de recubrimiento pues ello conduciría a una falla del hormigón armado. Para el efecto se divide la armadura en dos ramales que se traslapan.



- Armadura de Temperatura y Retracción de fraguado:**

Para absorber los esfuerzos generados en el hormigón de la loseta de compresión, por concepto de cambios de temperatura y retracción de fraguado, y permitir un control eficiente de la fisuración, se puede utilizar una malla



electrosoldada con esfuerzo de fluencia $F_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$, requiriéndose la siguiente armadura mínima en las dos direcciones:

$$\rho_{\min} = 0.0020$$

$$A_{s\min} = \rho_{\min} \cdot b \cdot d$$

$$A_{s\min} = (0.0020) (100 \text{ cm}) (2.5 \text{ cm})$$

$$A_{s\min} = 0.50 \text{ cm}^2 \text{ por metro de ancho}$$

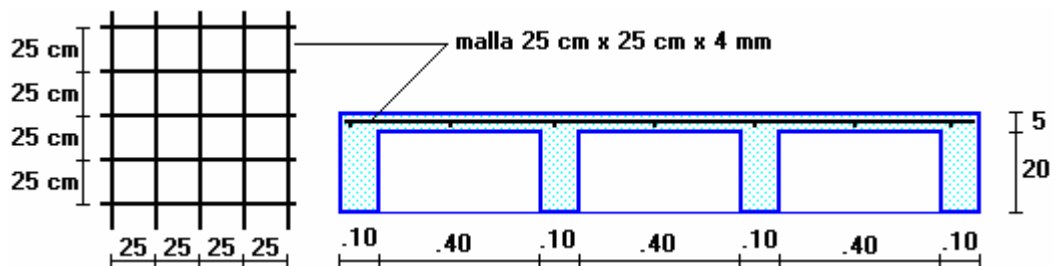
El valor de 2.5 cm de la altura efectiva de la loseta de compresión corresponde a colocar la malla electrosoldada a media altura de la loseta. El máximo espaciamiento entre alambres de la malla electrosoldada es 5 veces el espesor de la loseta o 45 cm, el que sea menor:

$$e_{\max} = 5 (5 \text{ cm}) = 25 \text{ cm}$$

$$e_{\max} \leq 45 \text{ cm}$$

$$e_{\max} = 25 \text{ cm}$$

Se puede escoger una malla con alambres de 4 mm de diámetro espaciados cada 25 cm que, como se mencionó previamente, debe colocarse a media altura en la loseta de compresión.



9.5 DISEÑO DE LOSAS MACIZAS Y NERVADAS RECTANGULARES SUSTENTADAS PERIMETRALMENTE EN VIGAS DESCOLGADAS:

Existen tablas para el diseño de losas, desarrolladas por diferentes autores, que facilitan el análisis y el diseño de las losas de geometrías y estados de carga más comunes, basadas en la mayor parte de los casos en la **Teoría de Placas**.

Se han preparado, para esta publicación, **tablas para el diseño de losas sustentadas perimetralmente en vigas de mayor peralte que las losas** (de este modo se asegura que las deflexiones en las vigas no tengan gran influencia sobre el comportamiento de las losas), sometidas a cargas uniformemente distribuidas. El tipo de sustentación está definido por las condiciones de borde de las losas.

Para el modelamiento de las losas macizas se ha utilizado el **Método de los Elementos Finitos** basado en la Teoría de Placas, el mismo que se recomienda para analizar losas macizas de geometrías, estados de carga o condiciones de borde especiales, que no aparezcan en las tablas. Otra alternativa de análisis podría ser el uso del **Método de las Diferencias Finitas**.

Para modelar las losas nervadas se ha empleado el **Análisis Matricial de Estructuras** tradicional, para estructuras conformadas por barras rectas espaciales bajo la hipótesis de que el efecto de flexión es dominante sobre las deformaciones de cortante y torsión.

Las tablas para losas nervadas constituyen una novedad importante con respecto a otras publicaciones similares. Las deformaciones y los momentos flectores que se obtienen en el modelo de losas nervadas son generalmente mayores que los valores obtenidos en losas macizas, debido a que los momentos torsores en las placas se transforman en momentos flectores en los nervios.

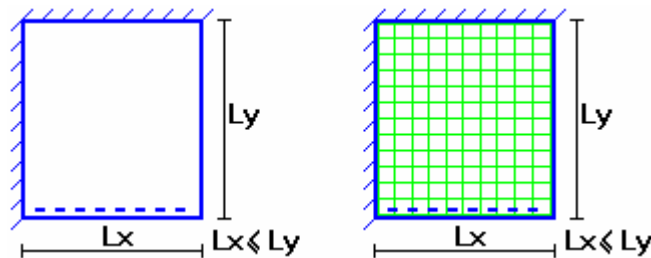


Figura 9.27: Representación gráfica de losas macizas y losas nervadas.

En las tablas publicadas a continuación se presentan tres tipos genéricos de condiciones de borde:

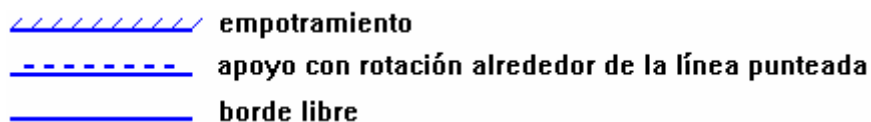


Figura 9.28: Simbología para las condiciones de apoyo de los bordes de losa.

- El **empotramiento** se emplea para modelar la **continuidad** de la losa en el borde seleccionado, usualmente proporcionada por otra losa contigua de dimensiones comparables, proporcionada por un muro extremo integrado a la losa como los que se tienen en los subsuelos de las edificaciones, o proporcionada por una viga de borde de gran rigidez torsional (de gran sección y dimensiones transversales).



Figura 9.29: Viga descolgada intermedia en losa modulares que representan continuidad.

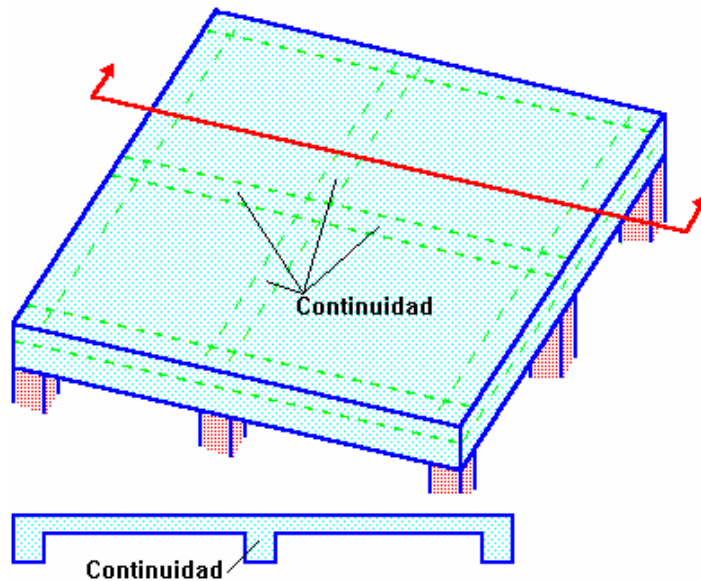


Figura 9.30: Continuidad en un borde de la losa.

- El **apoyo con rotación alrededor de un eje** se utiliza para modelar la presencia de una viga de borde de dimensiones normales (de peralte mayor al de la losa, pero no una viga de gran peralte ni una viga de gran sección transversal) sin losa contigua, o para modelar la presencia de un muro no integrado a la losa (usualmente muros de otro material).



Figura 9.31: Viga descolgada extrema que representa apoyo.

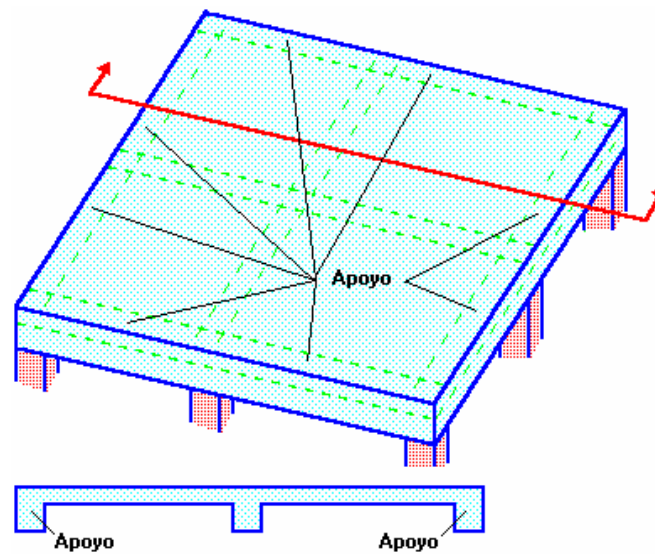


Figura 9.32: Apoyo extremo.

- El **borde libre** modela la inexistencia de una viga de borde de mayor peralte que la losa, la inexistencia de una losa contigua, y la inexistencia de un muro de hormigón integrado a la losa, que provean apoyo y continuidad.



Figura 9.33: Extremo libre que representa borde libre.

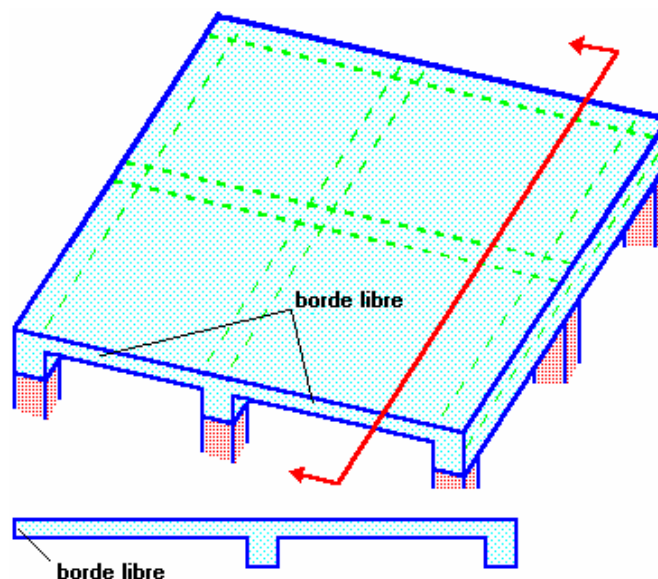


Figura 9.34: Borde libre.

Los 18 modelos diferentes de losas macizas rectangulares y los 3 modelos de losas macizas triangulares que aparecen en las tablas de esta publicación, son:

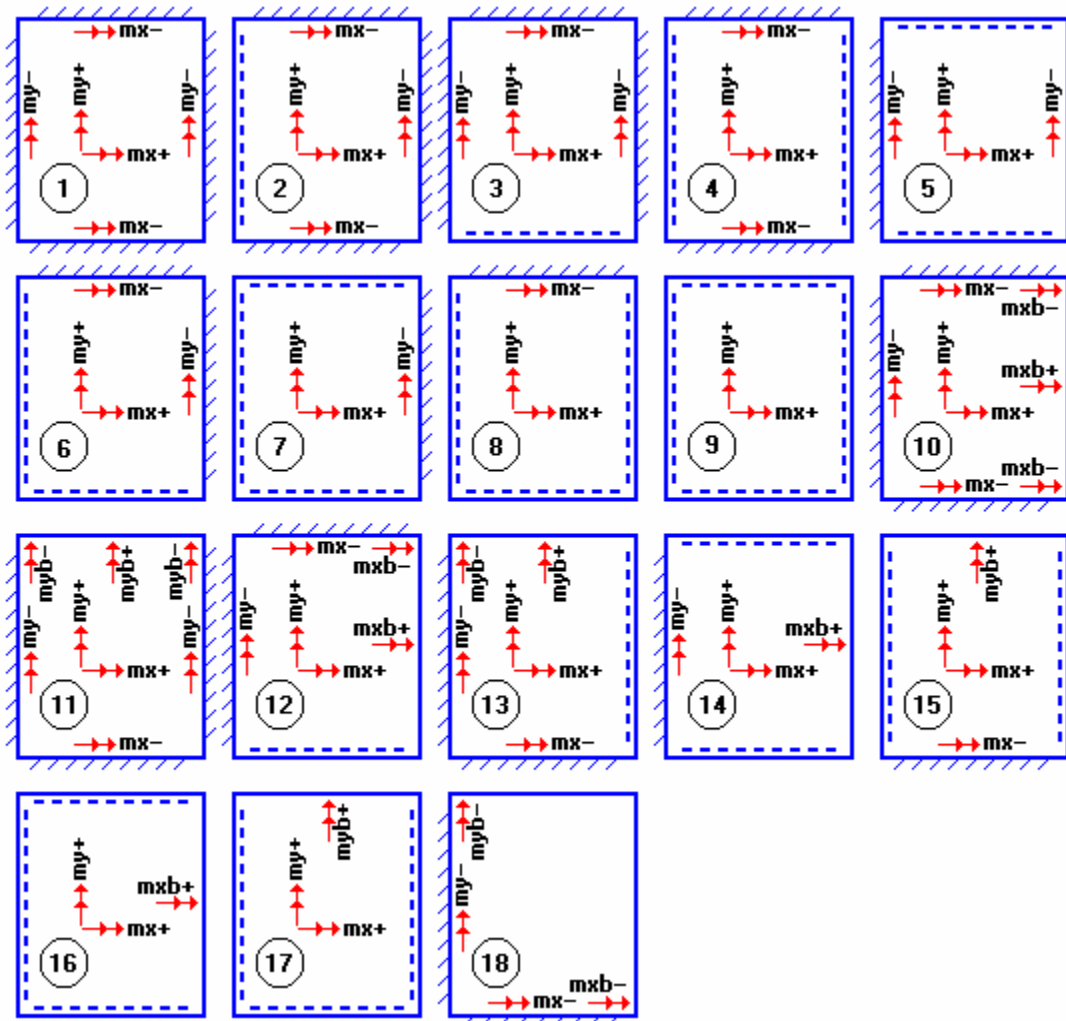


Figura 9.35: Modelos genéricos de losas macizas rectangulares descritos por sus condiciones de borde.

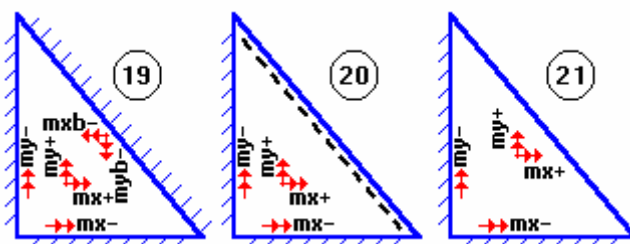


Figura 9.36: Modelos genéricos de losas macizas triangulares descritos por sus condiciones de borde.

Es importante notar que, dependiendo de las diferentes condiciones de borde, es posible que algunos modelos de losas carezcan de determinados tipos de momentos flectores (fundamentalmente los momentos flectores negativos de apoyo cuando es posible la rotación alrededor de la línea de apoyo, y momentos flectores positivos o negativos en los bordes libres de las losas).

En otros casos, es necesario definir dos momentos flectores del mismo tipo para describir su variabilidad a lo largo de la losa (dos momentos flectores positivos y dos momentos flectores negativos en los bordes sustentados, en losas con un borde en voladizo).

Los 18 modelos diferentes de losas nervadas que aparecen en las tablas de esta publicación, son:

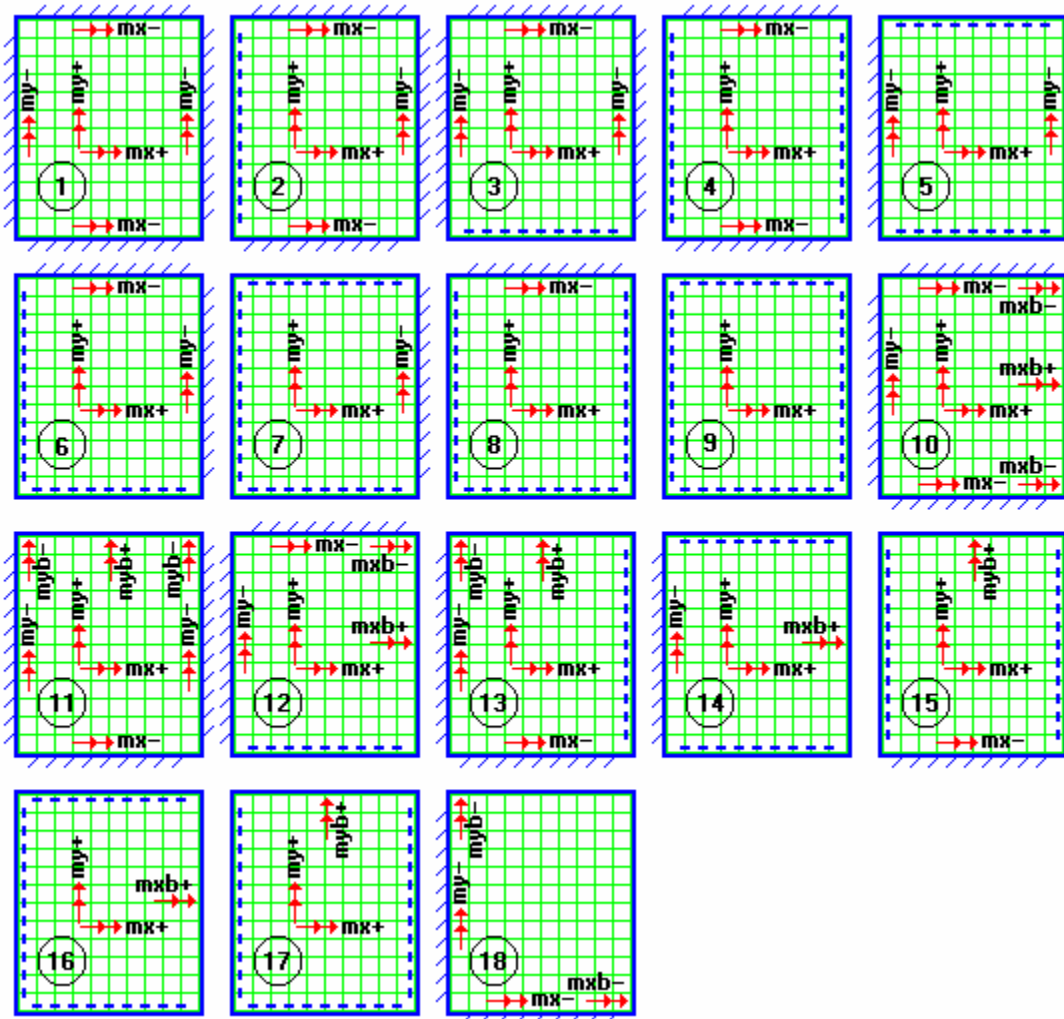


Figura 9.37: Modelos genéricos de losas nervadas rectangulares descritos por sus condiciones de borde.

Mediante los coeficientes adimensionales de las tablas (δ , m), se pueden calcular la deflexión máxima de la losa (Δ), y los momentos flectores positivos y negativos máximos (M) en las dos direcciones, por unidad de ancho de la losa.

Si se toma el tercer modelo de losa nervada, con una relación **lado corto / lado largo** de 0.70, la estructura idealizada sería:

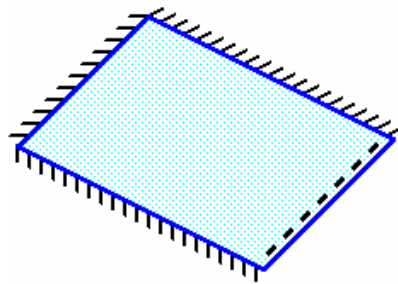


Figura 9.38: Modelo de una losa maciza rectangular con continuidad en los 2 lados largos y en el un lado corto, y con apoyo en el otro lado corto.

La elástica de deformación producida por una carga uniformemente distribuida que actúe sobre toda la superficie de la losa anterior tendría la siguiente geometría:

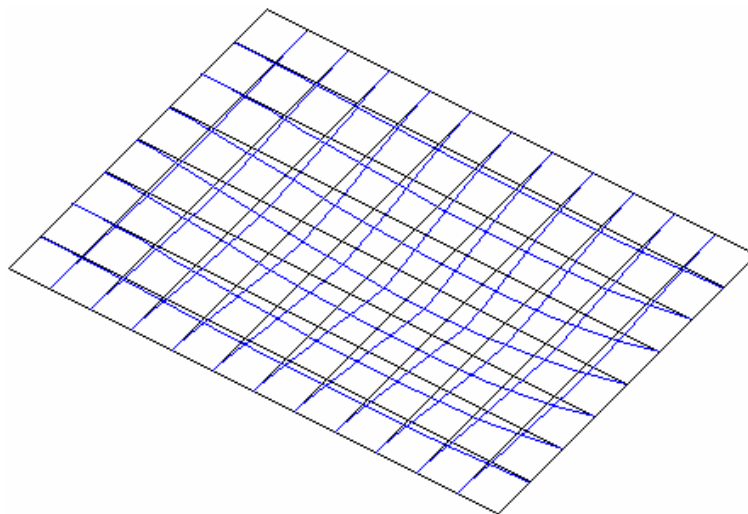


Figura 9.39: Elástica de deformación de la losa maciza rectangular, bajo carga uniformemente distribuida.

Por su parte, la distribución cualitativa de los momentos flectores, en las 2 direcciones principales de la losa del ejemplo anterior, para el estado de cargas antes mencionado sería similar a la siguiente:

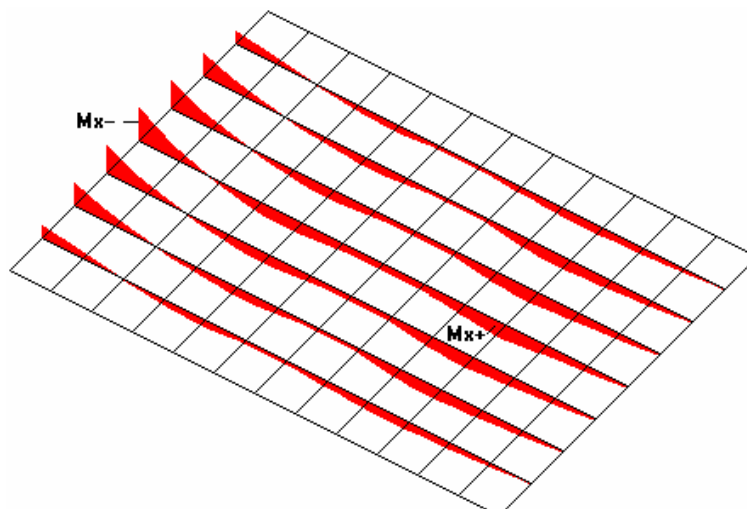


Figura 9.40: Diagrama de momentos flectores de la losa maciza rectangular, en la dirección larga.

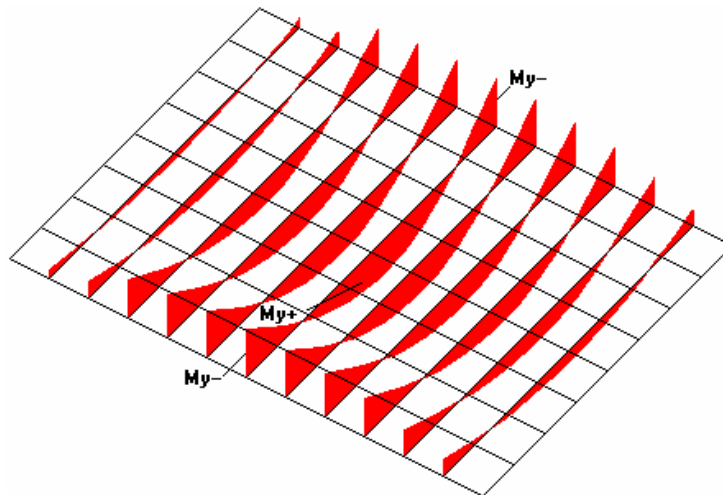


Figura 9.41: Diagrama de momentos flectores de la losa maciza rectangular, en la dirección corta.

Debe observarse que, mientras la geometría (no la magnitud) del diagrama de momentos flectores en la dirección corta es muy similar al diagrama de momentos en vigas, la geometría del diagrama de momentos flectores en la dirección larga tiende a alargarse y a disminuir en su magnitud en la zona central de momentos flectores positivos. Las ordenadas de los diagramas de momentos en losas son generalmente menores a las existentes en vigas con el mismo estado de cargas, debido a la distribución de las cargas en dos direcciones.

Para relaciones **lado corto / lado largo** inferiores a 0.70 hay una tendencia clara a la aparición de 2 momentos flectores máximos positivos en la dirección larga, uno cercano a cada borde. Los momentos flectores positivos son pequeños en la zona central. Este último hecho debe ser tomado con mucho cuidado pues al utilizar cargas uniformemente distribuidas que actúen sólo en ciertos sectores de la superficie de las losas, estos momentos flectores máximos positivos se desplazan de las zonas cercanas a los bordes hacia las zonas centrales, por lo que es necesario trabajar con una envolvente de momentos flectores. Para el ejemplo anterior, la envolvente de momentos flectores en la dirección larga sería similar a la siguiente:

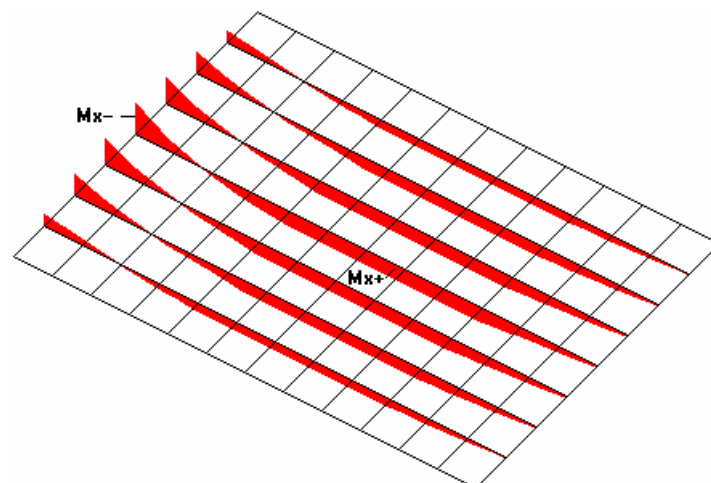


Figura 9.42: Diagrama de momentos flectores uniformizado de la losa maciza rectangular, en la dirección larga.

Si bien es cierto que los momentos flectores que se producen en las zonas esquineras son menores que los momentos flectores en las zonas alejadas de las esquinas, es recomendable que su armado (léase su capacidad resistente) sea similar a aquel calculado para las zonas alejadas de las esquinas, debido a la presencia de momentos torsores y deformación torsionante en las esquinas.

Los momentos torsores en la losa son generalmente de un orden de magnitud inferior a los momentos flectores, por lo que usualmente no requieren de diseño especial, siempre que se emplee la recomendación anterior. En el caso de las losas nervadas, adicionalmente a la recomendación de armado esquinero, debe cuidarse de que el ancho de los nervios cerca a las esquinas sea al menos la quinta parte de la dimensión correspondiente de los alivianamientos, para que tengan una rigidez torsional apropiada.

A continuación se presenta la distribución cualitativa de los diagramas de momentos torsores de los nervios de la losa utilizada como ejemplo, independizando las barras orientadas en la dirección y , de las barras orientadas en la dirección x :

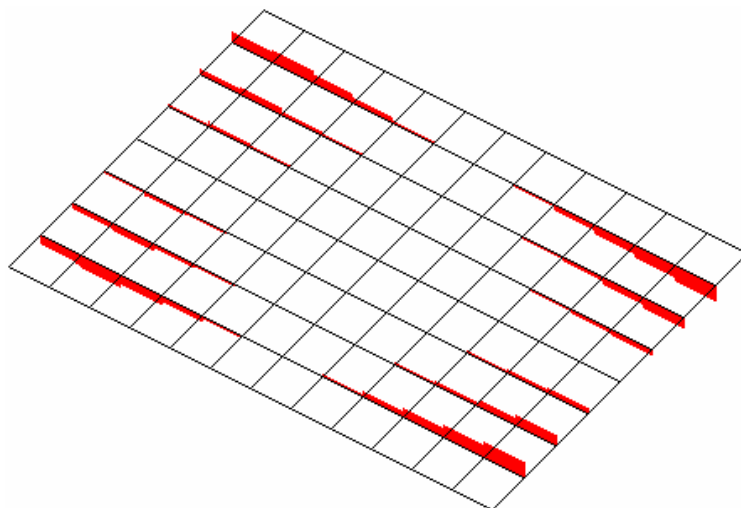


Figura 9.43: Diagrama de momentos torsores de la losa maciza rectangular, en la dirección larga.

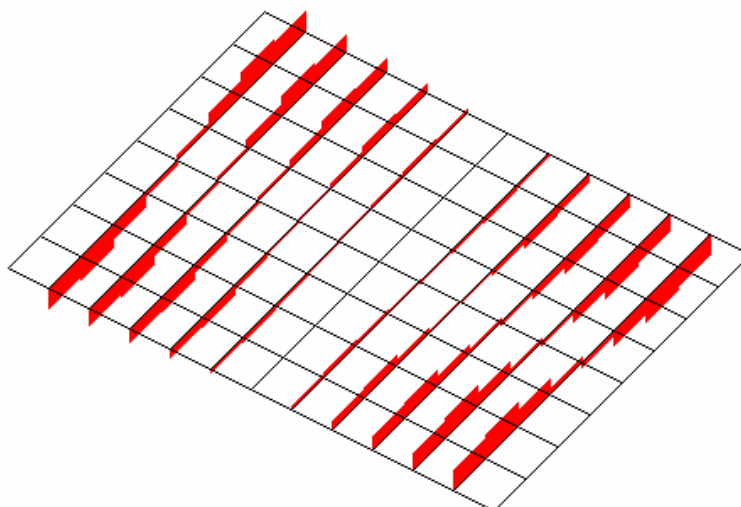


Figura 9.44: Diagrama de momentos torsores de la losa maciza rectangular, en la dirección corta.

Si en lugar de utilizar el tercer modelo para losas nervadas, se empleara el tercer modelo para losas macizas, la geometría del perfil de momentos flectores alrededor del eje **x** sería:

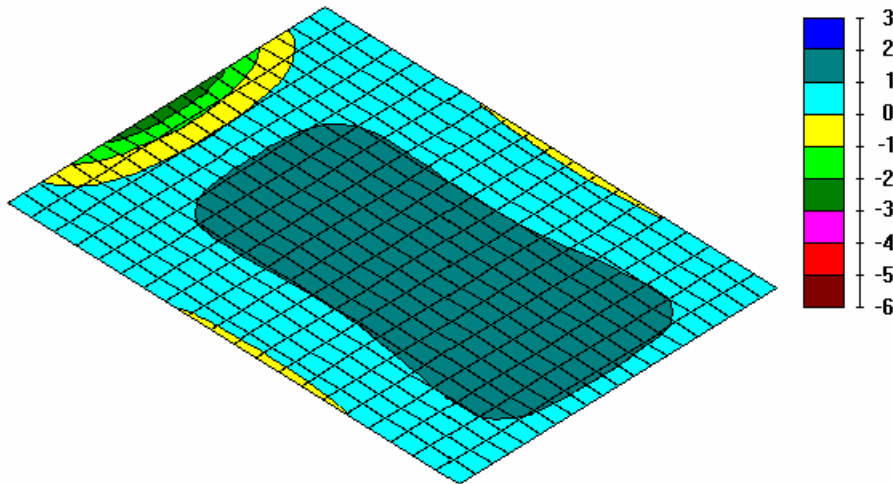


Figura 9.45: Perfil de momentos flectores en la dirección larga.

La geometría del perfil de momentos flectores alrededor del eje **y** sería:

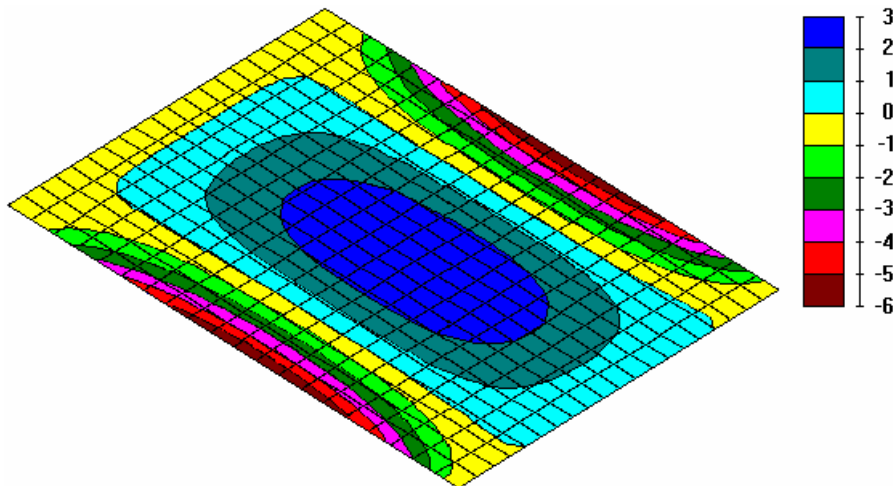


Figura 9.46: Perfil de momentos flectores en la dirección corta.

Si se toma el décimo modelo de losa nervada (tiene un borde libre y los otros tres bordes empotrados), con una relación **lado corto / lado largo** de 0.80, la estructura idealizada sería:

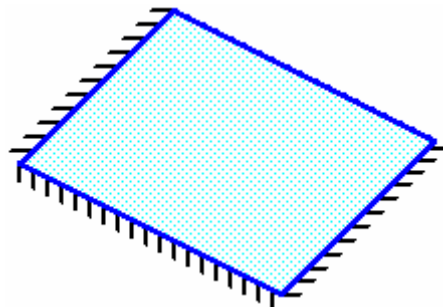


Figura 9.47: Modelo de losa maciza rectangular con continuidad en los 2 lados cortos y en el un lado corto, y con borde libre en el otro lado largo.

La distribución cualitativa de los momentos flectores, en las 2 direcciones principales de la losa del ejemplo, para una carga uniformemente distribuida sobre toda la superficie sería similar a la siguiente:

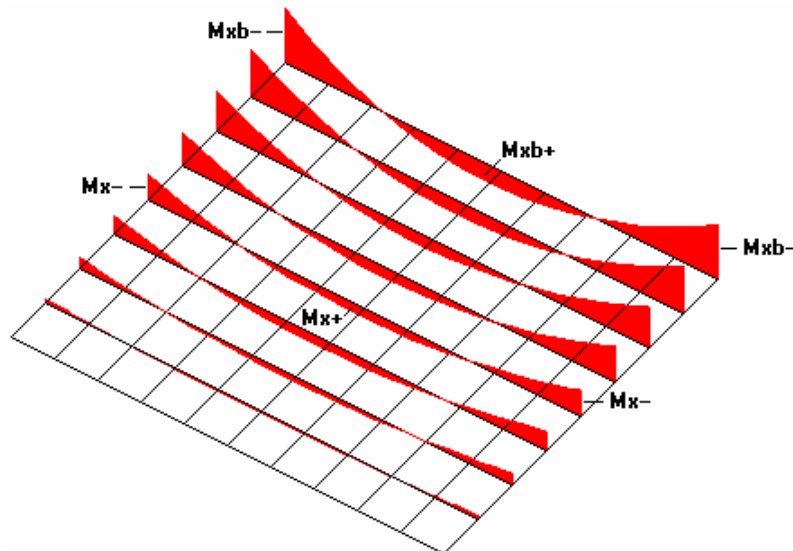


Figura 9.48: Diagrama de momentos flectores de la losa maciza rectangular, en la dirección larga.

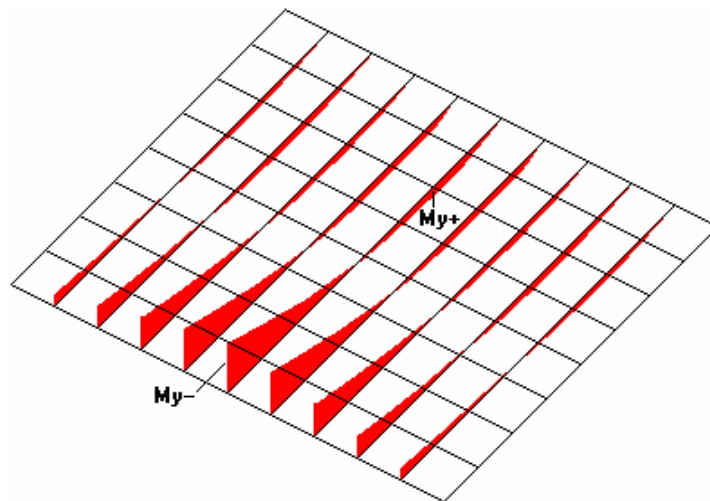


Figura 9.49: Diagrama de momentos flectores de la losa maciza rectangular, en la dirección corta.

Debe observarse que los momentos flectores entre bordes sustentados a la altura del borde libre son mucho más altos que los momentos flectores correspondientes en la zona central, lo que debe reflejarse en las tablas de diseño.

Tabla 9.5.a: Coeficientes para el diseño de losas macizas rectangulares sustentadas perimetralmente, sometidas a cargas distribuidas uniformes ($\mu = 0.20$).

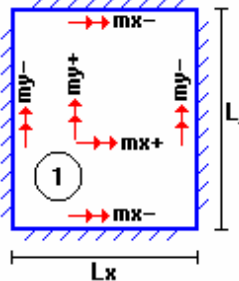
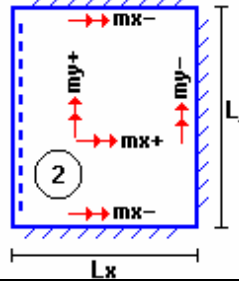
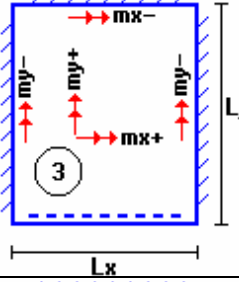
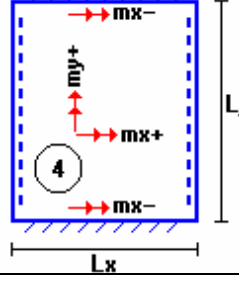
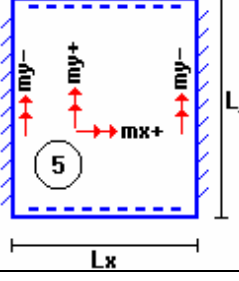
Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	147	178	211	244	273	293
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	186	239	304	379	460	536
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	186	213	241	266	286	298
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x-} m_{x+}	222	301	410	557	748	976
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x+}	222	243	264	281	294	301

Tabla 9.5.b: Coeficientes para el diseño de losas macizas rectangulares sustentadas perimetralmente, sometidas a cargas distribuidas uniformes ($\mu = 0.20$).

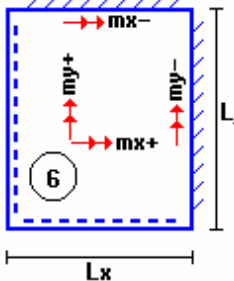
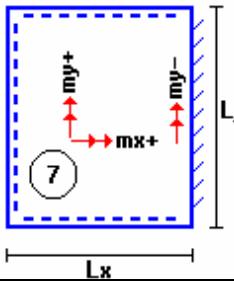
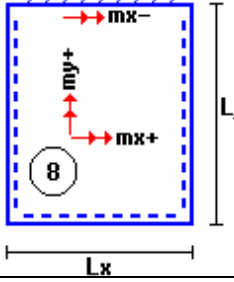
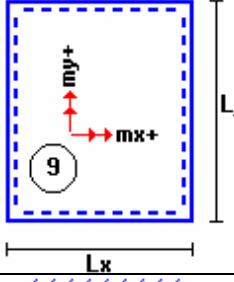
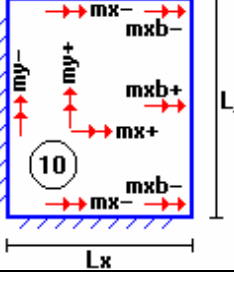
Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	254 691 306 691 306	309 791 367 731 306	371 897 435 764 306	438 1010 508 786 306	504 1100 579 797 306	561 1180 641 797 306
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x+}	329 836 391 318	380 920 446 318	433 1000 504 318	487 1090 562 318	538 1160 617 318	581 1210 661 318
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x-} m_{x+}	329 318 836 391	424 400 923 414	546 502 1010 430	698 628 1090 433	879 774 1160 433	1079 932 1200 433
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x+}	468 443 443	571 528 449	694 629 449	838 744 449	999 871 449	1167 1000 449
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{xb-} m_{x+} m_{xb+}	324 562 143 696 909 330 434	487 692 170 805 1120 377 524	757 872 202 936 1390 429 635	1216 1130 237 1090 1750 483 767	2018 1500 269 1260 2230 531 910	3421 2060 281 1450 2810 531 1030

Tabla 9.5.c: Coeficientes para el diseño de losas macizas rectangulares sustentadas perimetralmente, sometidas a cargas distribuidas uniformes ($\mu = 0.20$).

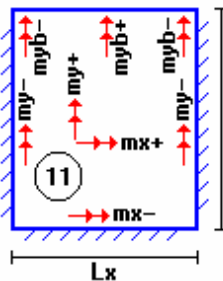
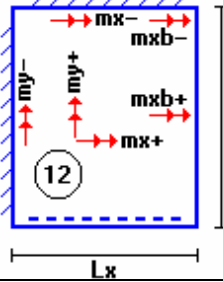
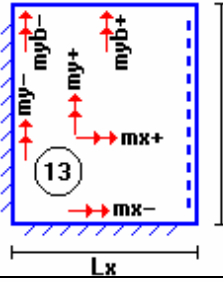
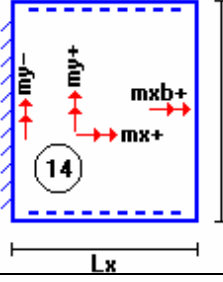
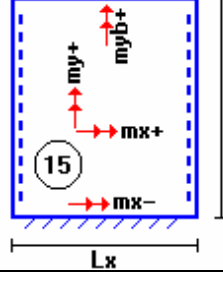
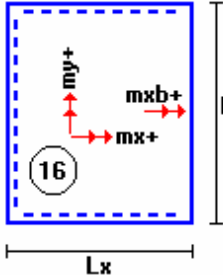
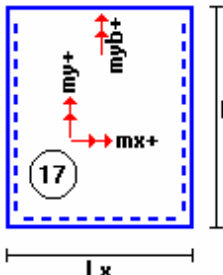
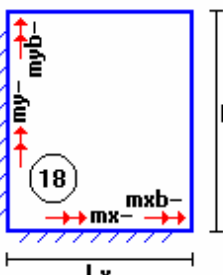
Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	324	325	325	325	325	325
			696	734	769	798	820	832
			909	911	911	911	911	911
			330	353	374	393	408	417
			434	439	440	440	440	440
			562	563	563	563	563	563
			143	147	149	150	151	151
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{xb-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{xb+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{xb-} m_{x+} m_{xb+}	617	895	1325	2002	3070	4725
			795	973	1210	1540	1980	2570
			196	227	260	292	309	295
			898	1010	1150	1290	1430	1570
			1310	1560	1890	2280	2740	3250
			459	508	556	596	612	612
			661	769	889	1010	1110	1140
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	617	640	657	667	672	672
			898	968	1040	1110	1160	1210
			1310	1330	1350	1360	1370	1370
			459	504	549	593	635	669
			661	689	711	725	732	734
			795	799	802	802	802	802
			196	204	210	214	216	217
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{xb+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x+} m_{xb+}	1196	1639	2270	3170	4440	6188
			1170	1410	1700	2070	2530	3090
			269	298	324	337	337	337
			605	640	661	661	661	661
			949	1050	1140	1210	1220	1220
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	1196	1303	1404	1492	1561	1607
			605	692	785	884	985	1080
			949	1040	1120	1190	1250	1290
			1170	1200	1220	1230	1230	1230
			269	290	310	323	332	336



Tabla 9.5.d: Coeficientes para el diseño de losas macizas rectangulares sustentadas perimetralmente, sometidas a cargas distribuidas uniformes ($\mu = 0.20$).

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x+} m_{xb+}	1372 343 821 1090	1970 408 932 1270	2911 491 1060 1480	4448 592 1200 1720	7076 713 1370 2000	11840 855 1530 2300
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{yb+} m_{x+}	1372 821 1090 343	1439 884 1150 352	1501 950 1200 358	1553 1020 1240 362	1594 1080 1280 365	1620 1150 1300 366
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{x-} m_{xb-}	4697 1440 2970 1440 2970	5733 1680 3310 1500 3240	6973 1990 3670 1570 3520	8415 2380 4050 1640 3780	10010 2860 4420 1700 4000	11620 3430 4760 1740 4150

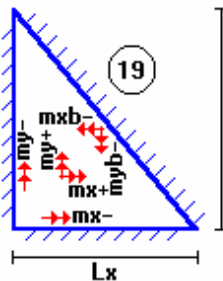
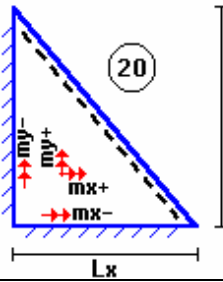
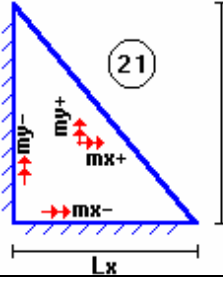


Simbología:

- δ : valor adimensional para determinar la deflexión máxima en la losa
- Δ : deflexión máxima en la losa
- L_x : longitud más corta de la losa rectangular
- L_y : longitud más larga de la losa rectangular
- E : módulo de elasticidad del hormigón
- h : espesor de la losa maciza
- q : carga uniformemente distribuida por unidad de superficie de losa
- m_{y-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo alrededor del eje y
- m_{yb-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje y
- m_{y+} : valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de tramo alrededor del eje y
- m_{yb+} : valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje y
- m_{x-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo alrededor del eje x
- m_{xb-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje x
- m_{x+} : valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de tramo alrededor del eje x
- m_{xb+} : valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje x
- M_{y-} : momento flector negativo máximo alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
- M_{yb-} : momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
- M_{y+} : momento flector positivo máximo alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
- M_{yb+} : momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
- M_{x-} : momento flector negativo máximo alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
- M_{xb-} : momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
- M_{x+} : momento flector positivo máximo alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
- M_{xb+} : momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje x , por metro de ancho de losa



Tabla 9.6.a: Coeficientes para el diseño de losas macizas triangulares sustentadas perimetralmente, sometidas a cargas distribuidas uniformes ($\mu = 0.20$).

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{xb-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{x-} m_{xb-} m_{x+}	24	29	36	45	58	74
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	37	45	56	71	90	116
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	254	311	385	480	668	911



Simbología:

- δ : valor adimensional para determinar la deflexión máxima en la losa
 Δ : deflexión máxima en la losa
 L_x : longitud más corta de la losa rectangular
 L_y : longitud más larga de la losa rectangular
 E : módulo de elasticidad del hormigón
 h : espesor de la losa maciza
 q : carga uniformemente distribuida por unidad de superficie de losa
 m_{y-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo alrededor del eje y
 m_{yb-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo de borde diagonal alrededor del eje y
 m_{y+} : valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de tramo alrededor del eje y
 m_{x-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo alrededor del eje x
 m_{xb-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo de borde diagonal alrededor del eje x
 m_{x+} : valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de tramo alrededor del eje x
 M_{y-} : momento flector negativo máximo alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
 M_{yb-} : momento flector negativo máximo de borde diagonal alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
 M_{y+} : momento flector positivo máximo alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
 M_{x-} : momento flector negativo máximo alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
 M_{xb-} : momento flector negativo máximo de borde diagonal alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
 M_{x+} : momento flector positivo máximo alrededor del eje x , por metro de ancho de losa

Tabla 9.7.a: Coeficientes para el diseño de losas nervadas rectangulares sustentadas perimetralmente, sometidas a cargas distribuidas uniformes.

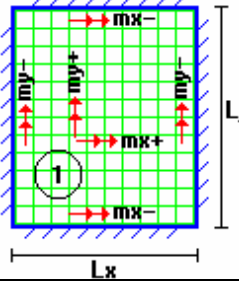
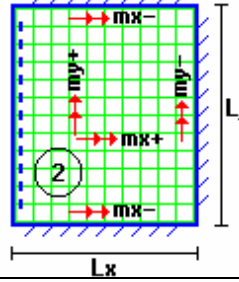
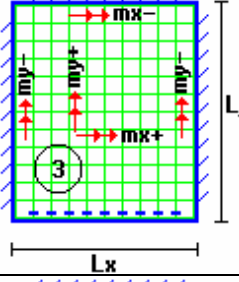
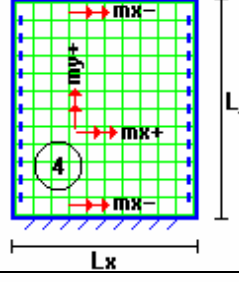
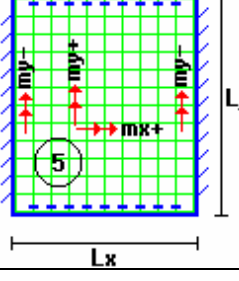
Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	200	241	281	315	336	339
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	265	347	443	545	635	691
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	265	297	322	339	345	339
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x-} m_{x+}	323	456	644	894	1191	1479
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x+}	323	340	351	354	348	335

Tabla 9.7.b: Coeficientes para el diseño de losas nervadas rectangulares sustentadas perimetralmente, sometidas a cargas distribuidas uniformes.

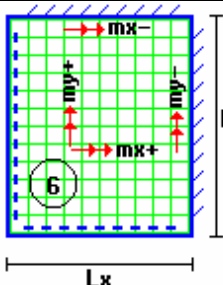
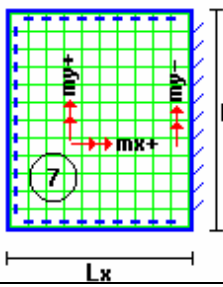
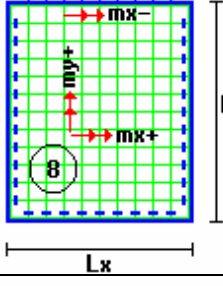
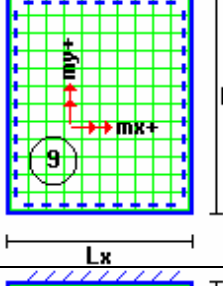
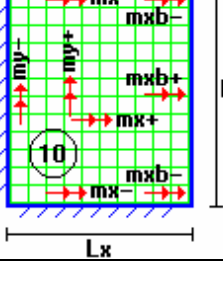
Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ	406	489	572	644	693	712
		m_{y-}	839	980	1120	1240	1323	1353
		m_{y+}	428	525	621	704	761	782
		m_{x-}	839	857	852	827	793	764
		m_{x+}	428	409	369	310	271	238
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ	569	630	681	715	729	718
		m_{y-}	1118	1220	1303	1360	1382	1364
		m_{y+}	616	687	746	785	802	790
		m_{x+}	433	375	311	269	252	238
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ	569	754	979	1230	1469	1644
		m_{y+}	433	587	775	984	1183	1329
		m_{x-}	1118	1225	1304	1334	1308	1246
		m_{x+}	616	654	659	615	527	434
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ	969	1170	1371	1550	1684	1749
		m_{y+}	765	932	1101	1250	1361	1416
		m_{x+}	765	737	665	547	439	397
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{xb-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{xb+} \cdot L_x^2$	δ	355	567	944	1637	2935	5348
		m_{y-}	542	664	834	1084	1494	2205
		m_{y+}	113	128	125	86	14	7
		m_{x-}	698	800	925	1086	1298	1552
		m_{xb-}	898	1132	1452	1886	2456	3131
		m_{x+}	344	384	432	490	563	639
		m_{xb+}	471	596	766	993	1278	1575

Tabla 9.7.c: Coeficientes para el diseño de losas nervadas rectangulares sustentadas perimetralmente, sometidas a cargas distribuidas uniformes.

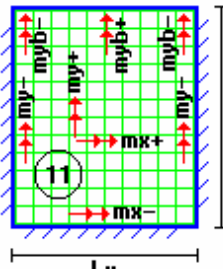
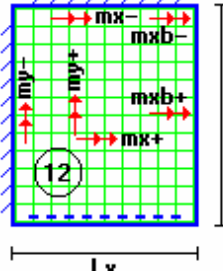
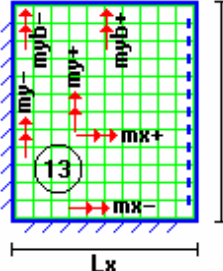
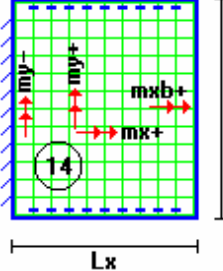
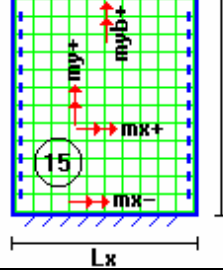
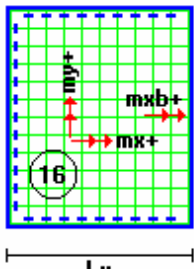
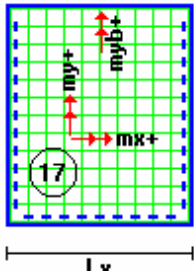
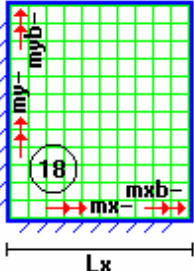
Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
 11	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	355	337	327	326	326	326
			698	746	791	829	853	856
			898	877	859	858	857	856
			344	374	403	428	442	445
			471	457	446	445	445	445
			542	543	542	538	532	522
			113	122	124	125	127	127
 12	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{xb-} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{xb+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+} m_{xb-} m_{xb+}	789	1230	1768	3216	5298	8520
			768	943	1196	1584	2201	3133
			126	113	87	42	7	4
			914	1039	1194	1388	1607	1799
			1390	1721	2145	2668	3254	3760
			484	538	603	681	758	800
			807	1000	1241	1527	1816	1977
 13	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	789	758	718	679	674	672
			914	990	1074	1159	1233	1278
			1390	1369	1335	1296	1287	1285
			484	536	593	651	701	733
			807	793	771	744	739	737
			768	775	780	780	775	764
			126	151	165	176	174	179
 14	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{xb-} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+} m_{xb-}	1937	2866	4277	6355	9192	12510
			1191	1486	1912	2522	3343	4292
			88	52	16	0	0	0
			698	770	998	907	916	8187
			1406	1665	1941	2183	2284	2093
 15	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	1937	1941	1895	1800	1676	1620
			698	776	870	983	1108	1225
			1406	1430	1426	1394	1341	1309
			1191	1189	1196	1208	1214	1208
			88	138	196	239	267	262

Tabla 9.7.d: Coeficientes para el diseño de losas nervadas rectangulares sustentadas perimetralmente, sometidas a cargas distribuidas uniformes.

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
 16	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x+} m_{xb+}	2005	3182	5274	9241	17450	36620
 17	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{yb+} m_{x+}	2005	1908	1795	1678	1654	1651
 18	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta \cdot L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{x-} m_{xb-}	11330	13660	15920	17770	18820	18680

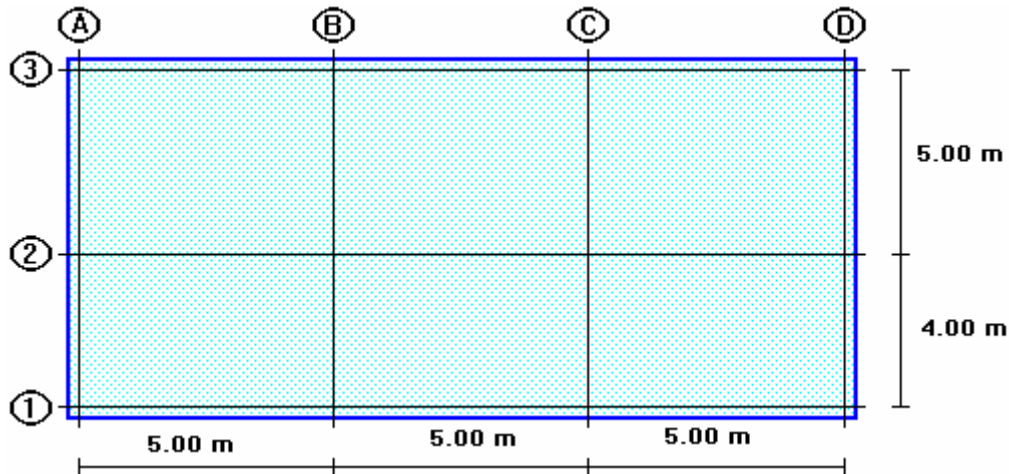


Simbología:

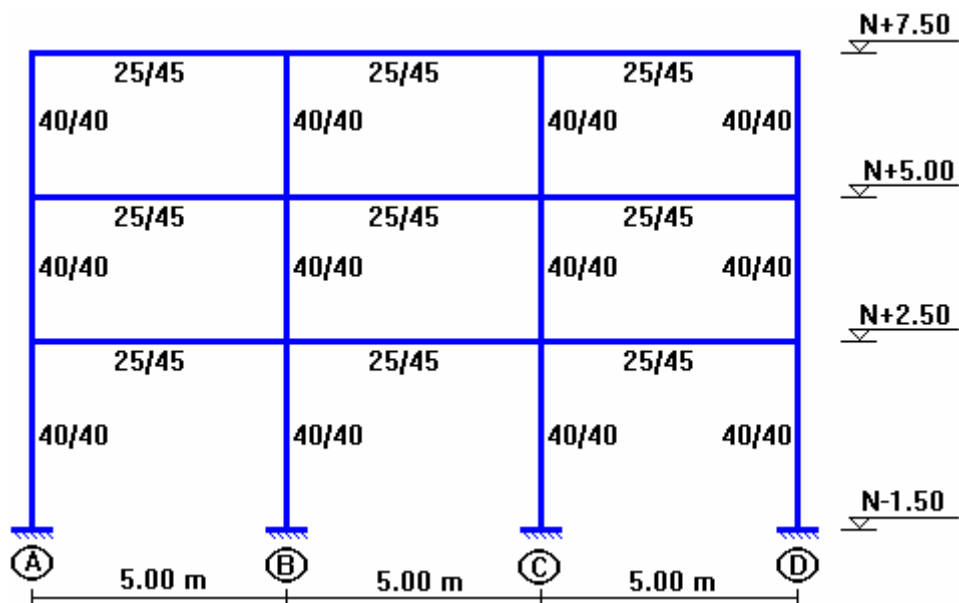
- δ : valor adimensional para determinar la deflexión máxima en la losa
 k : división entre la distancia entre nervios y el ancho de los nervios (b / b_0)
 Δ : deflexión máxima en la losa
 L_x : longitud más corta de la losa rectangular
 L_y : longitud más larga de la losa rectangular
 E : módulo de elasticidad del hormigón
 h : espesor de la losa maciza equivalente en inercia a la losa nervada
 q : carga uniformemente distribuida por unidad de superficie de losa
 m_{y-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo alrededor del eje y
 m_{yb-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje y
 m_{y+} : valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de tramo alrededor del eje y
 m_{yb+} : valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje y
 m_{x-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo alrededor del eje x
 m_{xb-} : valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje x
 m_{x+} : valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de tramo alrededor del eje x
 m_{xb+} : valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje x
 M_{y-} : momento flector negativo máximo alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
 M_{yb-} : momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
 M_{y+} : momento flector positivo máximo alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
 M_{yb+} : momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
 M_{x-} : momento flector negativo máximo alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
 M_{xb-} : momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
 M_{x+} : momento flector positivo máximo alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
 M_{xb+} : momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje x , por metro de ancho de losa

EJEMPLO 9.2:

Diseñar las losas del edificio, cuya planta tipo se presenta a continuación, el mismo que será utilizado para oficinas. El hormigón empleado en la estructura tiene una resistencia $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$, y el esfuerzo de fluencia del acero es $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$. El módulo de escaleras es independiente del bloque que se desea diseñar en este ejemplo.



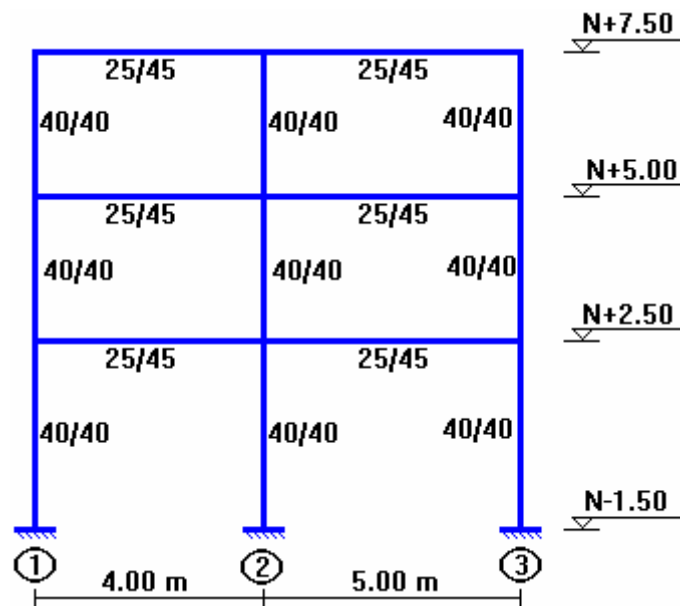
Los pórticos 1, 2 y 3 del edificio, vistos en elevación, tienen la siguiente geometría:



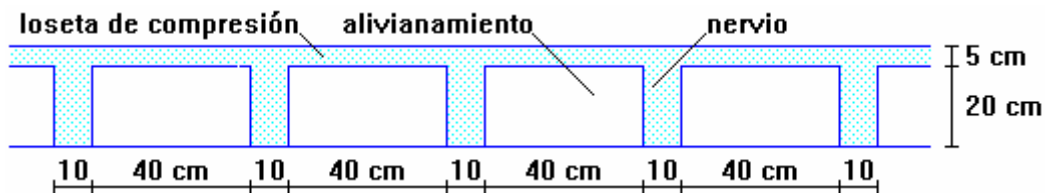
Las losas de los niveles +2.50 y +5.00 están sometidas a una carga viva de 250 Kg/m^2 .

La losa del nivel +7.50 se considera inaccesible, por lo que está sometida a una carga viva menor de 150 Kg/m^2 .

Los pórticos A, B, C y D del edificio, vistos en elevación, tienen la siguiente geometría:

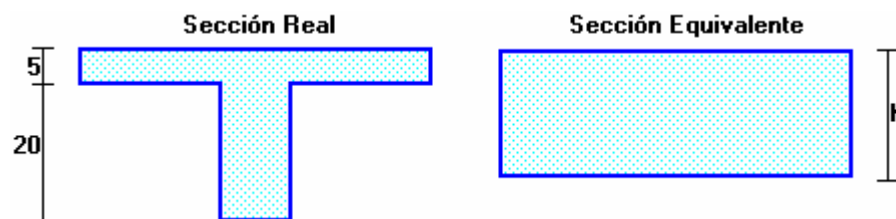


Se selecciona un espesor tentativo de losa de 25 cm, para las tres plantas, con loseta de compresión de 5 cm., nervios de 10 cm de espesor y alivianamientos de bloque de hormigón de 40 cm x 40 cm, de 20 cm de altura (2 bloques de 40 x 20 x 20 por cada alivianamiento), lo que es tradicional en nuestro medio.



- Control de Deflexiones:**

El peralte equivalente de la losa nervada se calcula determinando la altura de una losa maciza que tenga la misma inercia que la losa nervada propuesta.



Se calcula el área de la viga **T** (1 nervio de la losa):

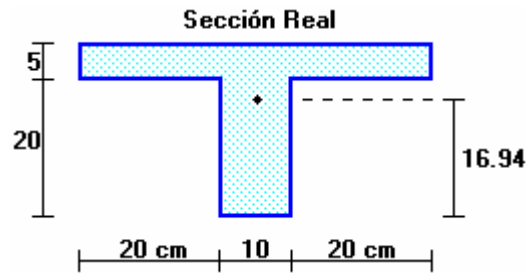
$$A = (5 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}) + (20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}) = 450 \text{ cm}^2$$

Se calcula el momento que produce la viga **T** con respecto a su base:

$$M = [(5 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}) \times 22.5 \text{ cm}] + [(20 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}) \times 10 \text{ cm}] = 7625 \text{ cm}^3$$

Se calcula la posición del centro de gravedad de la viga **T** con relación a la base del alma:

$$y_G = \frac{M}{A} = \frac{7625 \text{ cm}^3}{450 \text{ cm}^2} = 16.94 \text{ cm}$$



Se calcula la inercia de la viga T con relación a su centro de gravedad:

$$I = \frac{(50)(5)^3}{12} + [(50)(5)](22.5 - 16.94)^2 + \frac{(10)(20)^3}{12} + [(10)(20)](16.94 - 10)^2$$

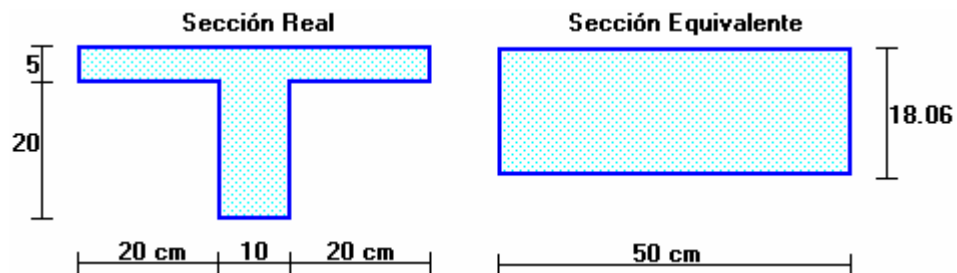
$$I = 520.8333 + 7728.4 + 6666.6667 + 9632.72$$

$$I = 24548.62 \text{ cm}^4$$

La inercia de la viga de altura constante deber ser la misma que la inercia de la viga T:

$$\frac{50h^3}{12} = 24548.62 \text{ cm}^4$$

$$h_{\text{equivalente}} = 18.06 \text{ cm}$$



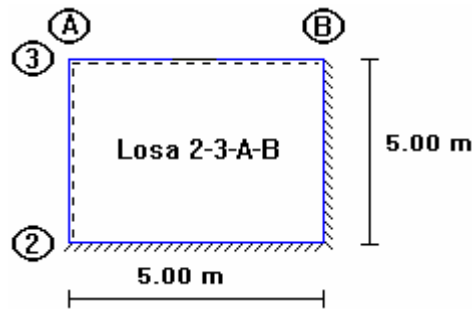
La ecuación básica, que define el peralte mínimo equivalente de la losa nervada, si α_m es menor que 2 y mayor que 0.2 es:

$$h_{\min} = \frac{L_n(800 + 0.0712F_y)}{36000 + 5000\beta(\alpha_m - 0.2)}$$

La ecuación cuando α_m es mayor que 2:

$$h_{\min} = \frac{L_n(800 + 0.0712F_y)}{36000 + 9000\beta}$$

Se toma el panel **2-3-A-B**, que es crítico para las deformaciones por tener las mayores luces (5 metros en las dos direcciones):

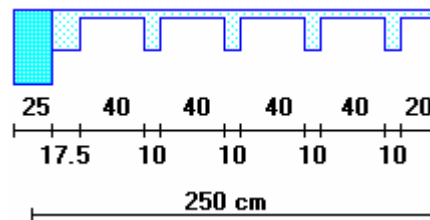


$$L_n = 500 \text{ cm} - 25 \text{ cm} = 475 \text{ cm}$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

Se calculan los valores α para los cuatro bordes de la losa:

⇒ **Ejes A y 3:**



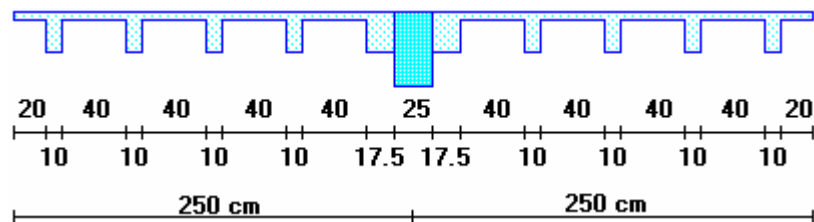
$$I_{\text{viga}} = (25) (40)^3 / 12 = 133333 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{losa}} = (250 - 12.5) (18.06)^3 / 12 = 116583 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{E_{\text{viga}} \cdot I_{\text{viga}}}{E_{\text{losa}} \cdot I_{\text{losa}}} = \frac{I_{\text{viga}}}{I_{\text{losa}}}$$

$$\alpha_A = \alpha_3 = 133333 / 116583 = 1.144$$

⇒ **Eje B:**

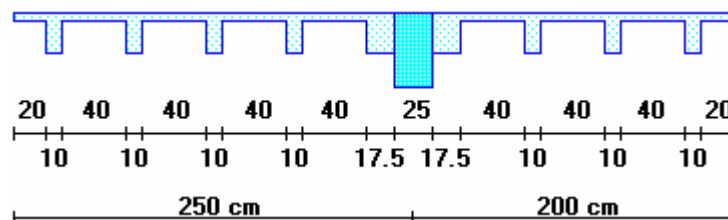


$$I_{\text{viga}} = (25) (40)^3 / 12 = 133333 \text{ cm}^4$$

$$I_{\text{losa}} = (500 - 25) (18.06)^3 / 12 = 233166 \text{ cm}^4$$

$$\alpha_B = 133333 / 233166 = 0.572$$

⇒ **Eje 2:**





$$I_{\text{viga}} = (25) (40)^3 / 12 = 133333 \text{ cm}^4$$
$$I_{\text{losa}} = (450 - 25) (18.06)^3 / 12 = 208622 \text{ cm}^4$$
$$\alpha_2 = 133333 / 208622 = 0.639$$

Se calcula el valor de α_m :

$$\alpha_m = (\alpha_A + \alpha_B + \alpha_2 + \alpha_3) / 4$$
$$\alpha_m = (1.144 + 0.572 + 0.639 + 1.144) / 4 = 0.875$$

Por que el valor obtenido de α_m está comprendido entre 0.2 y 2, se debe utilizar la siguiente ecuación:

$$h_{\min} = \frac{L_n (800 + 0.0712 F_y)}{36000 + 5000 \beta (\alpha_m - 0.2)}$$

Se calcula el coeficiente β :

$$\beta = 475 / 475 = 1.00$$

Se calcula el valor de $h_{\min}$:

$$h_{\min} = \frac{(475) [800 + 0.0712 (4200)]}{36000 + 5000 \beta (\alpha_m - 0.2)}$$

$$h_{\min} = 13.24 \text{ cm}$$

Por otro lado el peralte mínimo de la losa también es:

$$h_{\min} \geq 12.00 \text{ cm}$$
$$13.24 \text{ cm} \geq 12.00 \text{ cm} \Rightarrow h_{\min} = 13.24 \text{ cm}$$

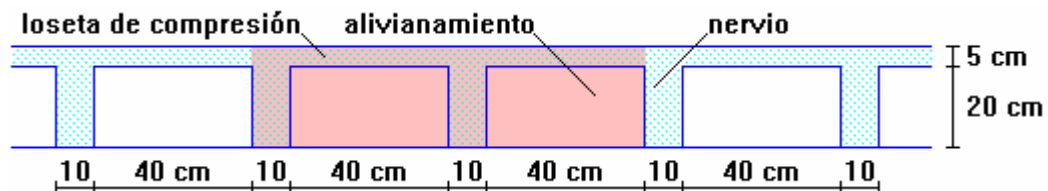
Se verifica que la altura equivalente de la losa nervada propuesta supere la altura mínima fijada por el código:

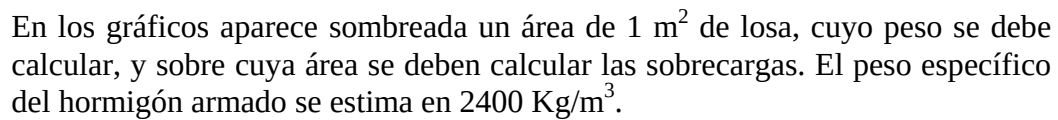
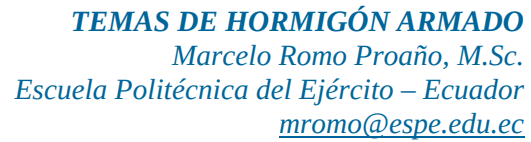
$$h_{\text{equivalente}} = 18.06 \text{ cm} > 13.24 \text{ cm} \quad (\text{OK})$$

Nota: También pudo calcularse el peralte requerido para la losa a partir de los valores de “ δ ” provistos en las Tablas para Diseño de Losas Nervadas y la tabla de Máximas Deflexiones Permisibles Calculadas en Losas.

- **Determinación de las Cargas de Diseño en Losas Niveles +2.50 y +5.00:**

La geometría básica de las losas alivianadas es la siguiente:





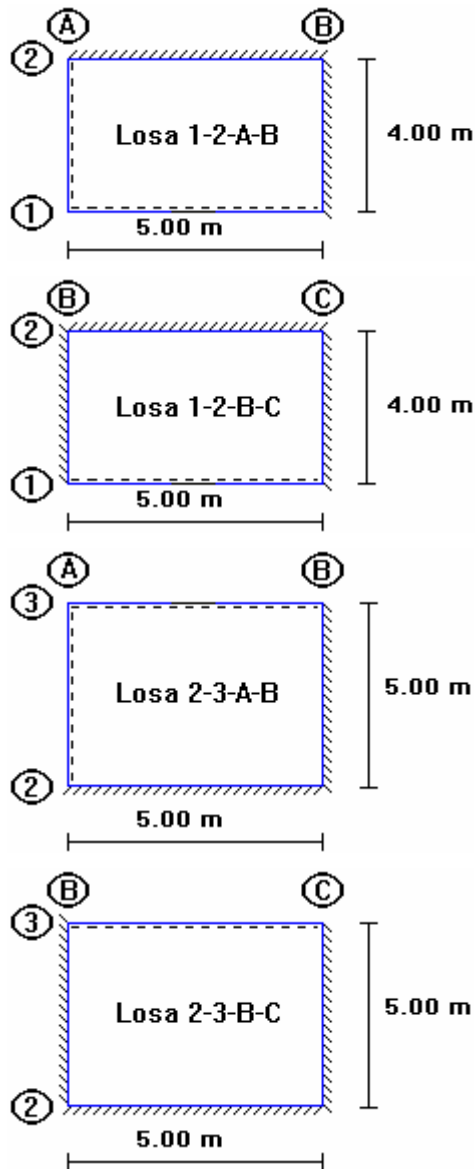
Peso Propio de la losa $= 408 \text{ Kg/m}^2$

Carga Permanente = 740 Kg/m^2

$$U = 1.4 D + 1.7 L = 1.4 (740) + 1.7 (250) = 1461 \text{ Kg/m}^2$$

$$U = 1.4 D + 1.7 L = 1.4 (540) + 1.7 (150) = 1011 \text{ Kg/m}^2$$

- Modelos Estructurales de Losas para el Diseño a Flexión**



Los coeficientes para diseño de la losa **1-2-A-B** se obtienen del modelo **6** de las tablas para losas nervadas, considerando que la dirección más corta está en el sentido **y**, lo que significa que se deben intercambiar los valores tabulados de m_x y m_y .

Los coeficientes para diseño de la losa **1-2-B-C** se obtienen del modelo **2** de las tablas para losas nervadas, considerando que la dirección más corta está en el sentido **y**, lo que significa que se deben intercambiar los valores tabulados de m_x y m_y .

Los coeficientes para diseño de la losa **2-3-A-B** se obtienen del modelo **6** de las tablas para losas nervadas.

Los coeficientes para diseño de la losa **2-3-B-C** se obtienen del modelo **2** de las tablas para losas nervadas, considerando un intercambio entre los ejes **x**, **y** de la tabla, por la posición de los ejes en la losa.



- **Determinación de Momentos Flectores de Diseño y Cálculo de la Armadura Requerida**

TABLAS PARA EL DISEÑO DE LOSAS NIVELES +2.50, +5.00

$$q = 1461 \text{ Kg/m}^2$$

$$M = 0.0001 \text{ m} \cdot q \cdot L_x^2$$

Losa	Losa Tipo	Lx	Ly	Lx/Ly	my (-)	my (+)	mx (-)	mx (+)	Muy(-) Kg-m/m	Muy(+) Kg-m/m	Mux(-) Kg-m/m	Mux(+) Kg-m/m
1-2-A-B	6	4	5	0.80	852	369	1120	621	1992	863	2618	1452
1-2-B-C	2	4	5	0.80	819	359	899	473	1914	839	2102	1106
2-3-A-B	6	5	5	1.00	839	428	839	428	3064	1563	3064	1563
2-3-B-C	2	5	5	1.00	718	354	597	269	2622	1293	2181	983

Los coeficientes “mx” y “my” han sido reorientados para ajustarse a la alineación real de las losas.

Losa	M (Kg-m/m)	b (cm)	d (cm)	f'c (Kg/cm2)	Fy (Kg/cm2)	As (cm2/m)
1-2-A-B	Muy(-)	1992	20	22	210	4200
	Muy(+)	863	100	22	210	4200
	Mux(-)	2618	20	22	210	4200
	Mux(+)	1452	100	22	210	4200
1-2-B-C	Muy(-)	1914	20	22	210	4200
	Muy(+)	839	100	22	210	4200
	Mux(-)	2102	20	22	210	4200
	Mux(+)	1106	100	22	210	4200
2-3-A-B	Muy(-)	3064	20	22	210	4200
	Muy(+)	1563	100	22	210	4200
	Mux(-)	3064	20	22	210	4200
	Mux(+)	1563	100	22	210	4200
2-3-B-C	Muy(-)	2622	20	22	210	4200
	Muy(+)	1293	100	22	210	4200
	Mux(-)	2181	20	22	210	4200
	Mux(+)	983	100	22	210	4200

La armadura para momento flector positiva se calculó con un ancho de compresión de 100 cm, correspondiente a la loseta de compresión, y la armadura para momento flector negativo utilizó un ancho efectivo de 20 cm, pues la zona comprimida corresponde a los nervios.

TABLAS PARA EL DISEÑO DE LOSA NIVEL +7.50

$$q = 1011 \text{ Kg/m}^2$$

$$M = 0.0001 \text{ m} \cdot q \cdot L_x^2$$

Losa	Losa Tipo	Lx	Ly	Lx/Ly	my (-)	my (+)	mx (-)	mx (+)	Muy(-) Kg-m/m	Muy(+) Kg-m/m	Mux(-) Kg-m/m	Mux(+) Kg-m/m
1-2-A-B	6	4	5	0.80	852	369	1120	621	1378	597	1812	1005
1-2-B-C	2	4	5	0.80	819	359	899	473	1325	581	1454	765
2-3-A-B	6	5	5	1.00	839	428	839	428	2121	1082	2121	1082
2-3-B-C	2	5	5	1.00	718	354	597	269	1815	895	1509	680



TEMAS DE HORMIGÓN ARMADO

Marcelo Romo Proaño, M.Sc.

Escuela Politécnica del Ejército – Ecuador

mromo@espe.edu.ec

Losa	M (Kg-m/m)		b (cm)	d (cm)	f'c (Kg/cm2)	Fy (Kg/cm2)	As (cm2/m)	
1-2-A-B	Muy(-)	1378	20	22	210	4200	Asy(-)	1,74
	Muy(+)	597	100	22	210	4200	Asy(+)	0,72
	Mux(-)	1812	20	22	210	4200	Asx(-)	2,32
	Mux(+)	1005	100	22	210	4200	As(+)	1,22
1-2-B-C	Muy(-)	1325	20	22	210	4200	Asy(-)	1,67
	Muy(+)	581	100	22	210	4200	Asy(+)	0,70
	Mux(-)	1454	20	22	210	4200	Asx(-)	1,84
	Mux(+)	765	100	22	210	4200	As(+)	0,92
2-3-A-B	Muy(-)	2121	20	22	210	4200	Asy(-)	2,75
	Muy(+)	1082	100	22	210	4200	Asy(+)	1,31
	Mux(-)	2121	20	22	210	4200	Asx(-)	2,75
	Mux(+)	1082	100	22	210	4200	As(+)	1,31
2-3-B-C	Muy(-)	1815	20	22	210	4200	Asy(-)	2,33
	Muy(+)	895	100	22	210	4200	Asy(+)	1,08
	Mux(-)	1509	20	22	210	4200	Asx(-)	1,91
	Mux(+)	680	100	22	210	4200	As(+)	0,82

Los ejes x - y de las tablas de diseño de losas sustentadas perimetralmente, no deben coincidir necesariamente con los ejes x - y del proyecto, pues de acuerdo a las convenciones empleadas, la dirección x en las tablas es la de menor dimensión de la losa.

La armadura mínima requerida en losas alivianadas es:

$$\rho_{\min} = \frac{14}{F_y}$$

$$\rho_{\min} = 0.00333$$

$$A_{s_{\min}} = 0.00333 (20 \times 22) = 1.47 \text{ cm}^2/\text{m}$$

A continuación se presentan las tablas de armado modificadas tomando en consideración la armadura mínima requerida (*1.47 cm² por metro y *0.74 cm² por nervio).

ARMADURA REQUERIDA EN LOSAS NIVELES +2.50, +5.00

Losa	Asy(-) cm ² /m	Asy(+) cm ² /m	Asx(-) cm ² /m	Asx(+) cm ² /m	Asy(-) cm ² /nervio	Asy(+) cm ² /nervio	Asx(-) cm ² /nervio	Asx(+) cm ² /nervio
1-2-A-B	2.57	*1.47	3.47	1.76	1.29= 1 φ 14 mm	*0.74= 1 φ 10 mm	1.74= 1 φ 16 mm	0.88= 1 φ 12 mm
1-2-B-C	2.46	*1.47	2.73	*1.47	1.23= 1 φ 14 mm	*0.74= 1 φ 10 mm	1.37= 1 φ 14 mm	*0.74= 1 φ 10 mm
2-3-A-B	4.14	1.90	4.14	1.90	2.07= 1 φ 18 mm	0.95= 1 φ 12 mm	2.07= 1 φ 18 mm	0.95= 1 φ 12 mm
2-3-B-C	3.48	1.57	2.84	*1.47	1.74= 1 φ 16 mm	0.79= 1 φ 10 mm	1.42= 1 φ 14 mm	*0.74= 1 φ 10 mm

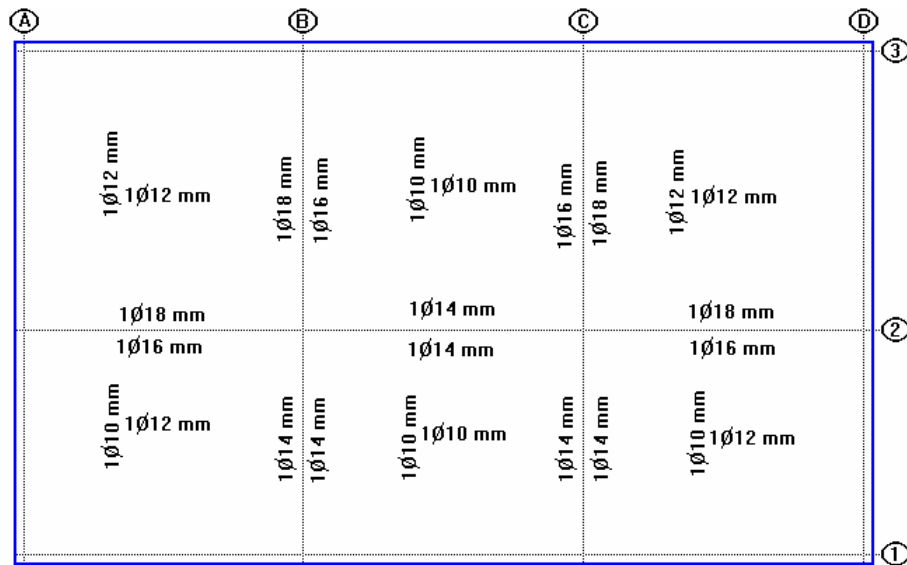
Debido a que en cada metro de ancho de losa existen 2 nervios completos, el armado de cada nervio es la mitad del armado requerido en el metro de ancho de losa.



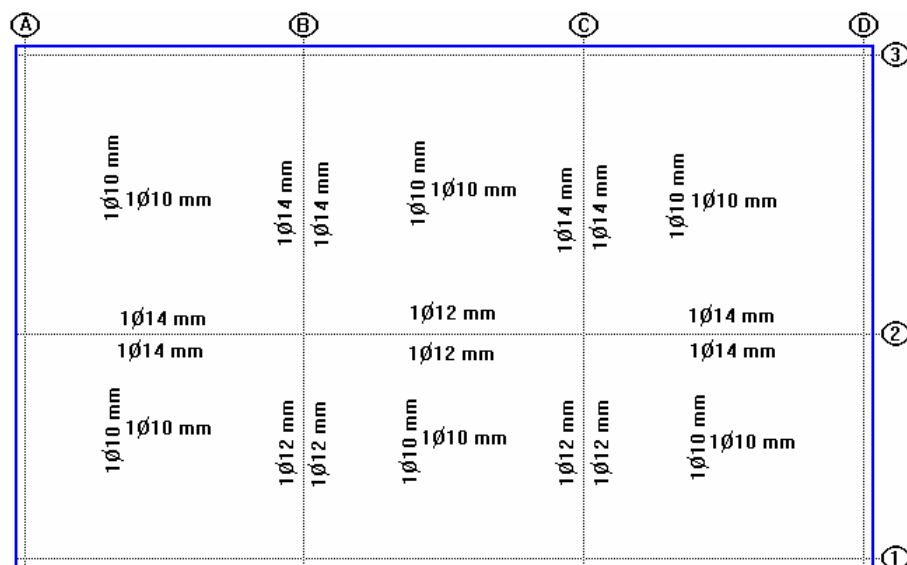
ARMADURA REQUERIDA EN LOSA NIVEL +7.50

Losa	Asy(-) cm ² /m	Asy(+) cm ² /m	Asx(-) cm ² /m	Asx(+) cm ² /m	Asy(-) cm ² /nervio	Asy(+) cm ² /nervio	Asx(-) cm ² /nervio	Asx(+) cm ² /nervio
1-2-A-B	1.74	*1.47	2.32	*1.47	0.87= 1 ϕ 12 mm	*0.74= 1 ϕ 10 mm	1.16= 1 ϕ 14 mm	*0.74= 1 ϕ 10 mm
1-2-B-C	1.67	*1.47	1.84	*1.47	0.84= 1 ϕ 12 mm	*0.74= 1 ϕ 10 mm	0.92= 1 ϕ 12 mm	*0.74= 1 ϕ 10 mm
2-3-A-B	2.75	*1.47	2.75	*1.47	1.38= 1 ϕ 14 mm	*0.74= 1 ϕ 10 mm	1.38= 1 ϕ 14 mm	*0.74= 1 ϕ 10 mm
2-3-B-C	2.33	*1.47	1.91	*1.47	1.17= 1 ϕ 14 mm	*0.74= 1 ϕ 10 mm	0.96= 1 ϕ 12 mm	*0.74= 1 ϕ 10 mm

Resumiendo gráficamente la tabla de requerimientos de acero en cada nervio de las losas de los niveles +2.50 y +5.00, se tiene:



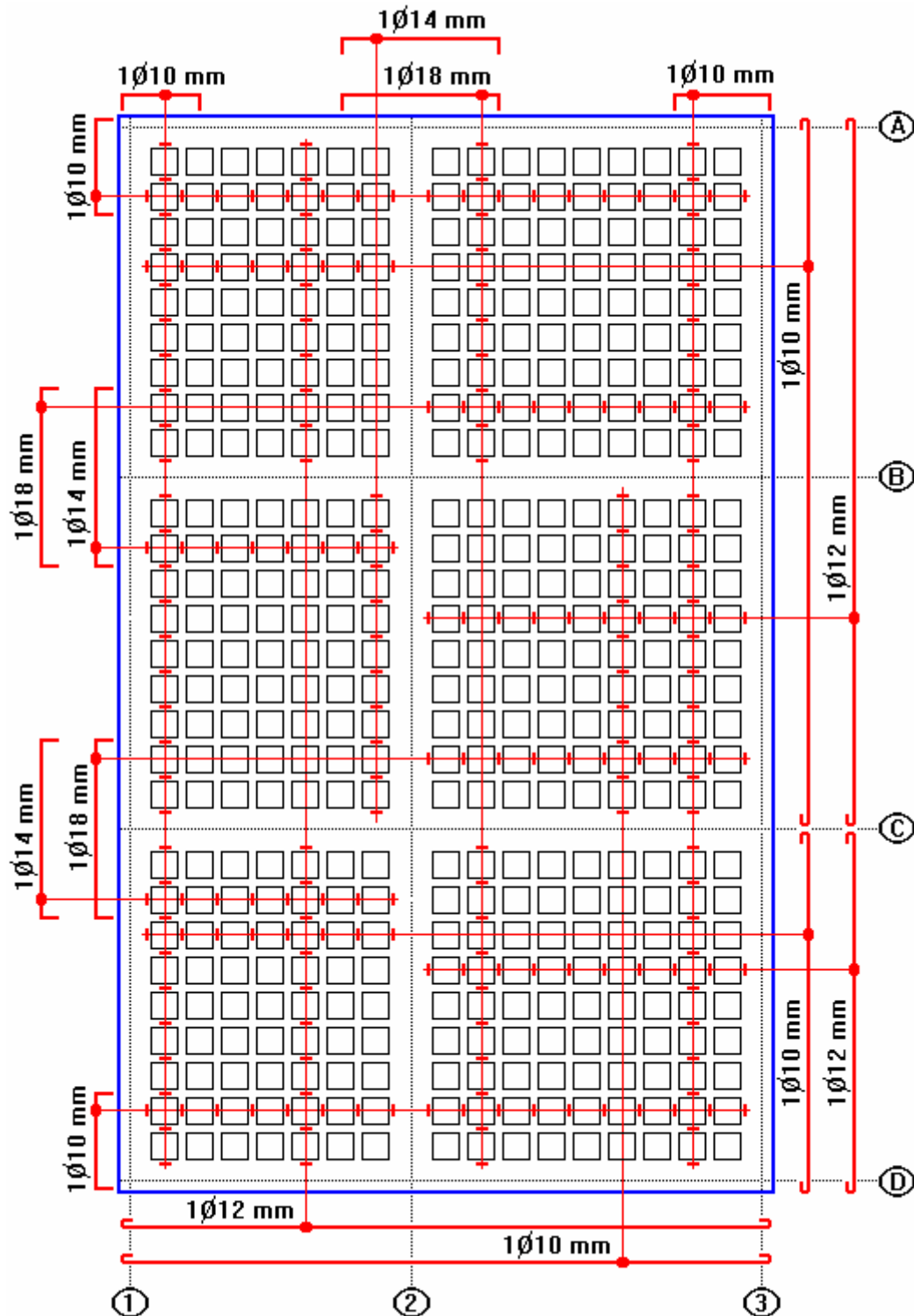
De igual manera, resumiendo gráficamente la tabla de requerimientos de acero en cada nervio de la losa del nivel +7.50, se tiene:





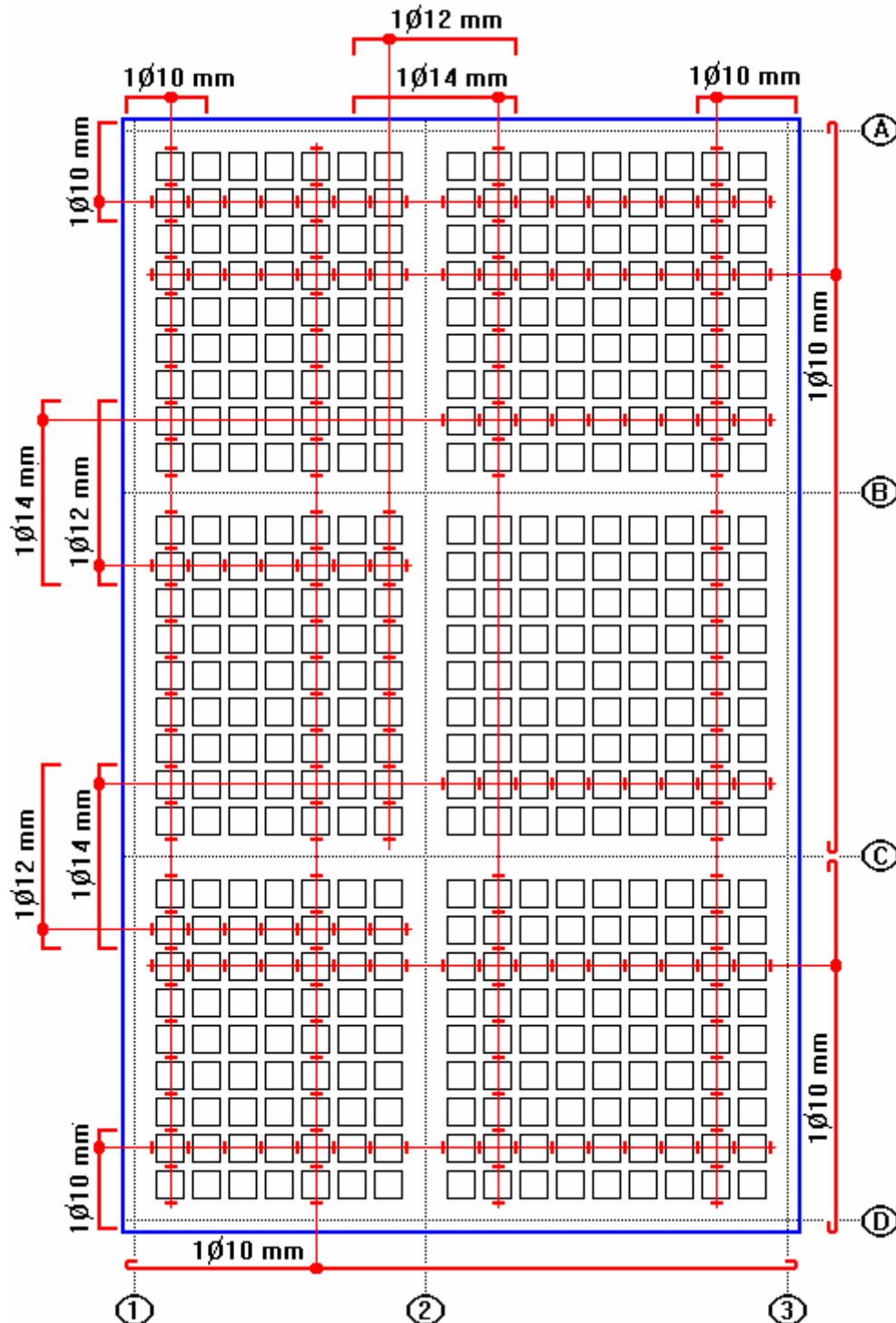
A continuación se presenta un armado tipo de las losas del edificio, que se ajusta a las tablas anteriores. En aquellas zonas en que colindan 2 losas se ha escogido el armado de mayor área.

ARMADURA EN LOSAS NIVELES +2.50, +5.00



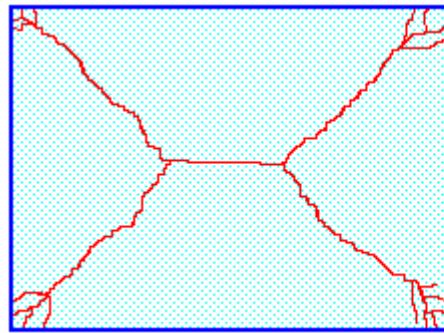
Adicionalmente se ha colocado una armadura mínima negativa ($1 \phi 10$ mm) en las zonas próximas a cada viga de borde, para que sea consistente con los momentos de torsión que absorben dichas vigas, y que no pueden ser calculados en el modelo simplificado.

ARMADURA EN LOSA NIVEL +7.50

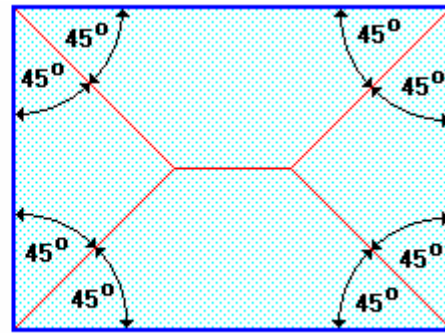


- Verificación de la Resistencia a Cortante:**

De acuerdo con la experimentación en que se basa la **Teoría de las Líneas de Rotura**, cuando una losa rectangular, sustentada en todo su perímetro sobre vigas de mayor peralte y sometida a una carga uniformemente distribuida que actúa en toda su superficie, se encuentra al borde del colapso, se fisura conformando triángulos y trapecios.

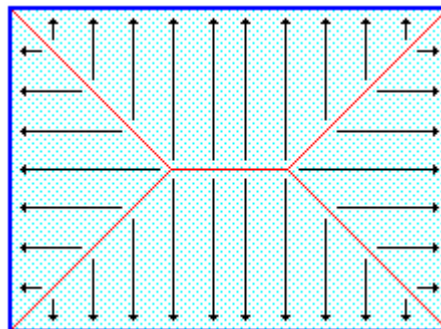


Modelo Real de Fisuración



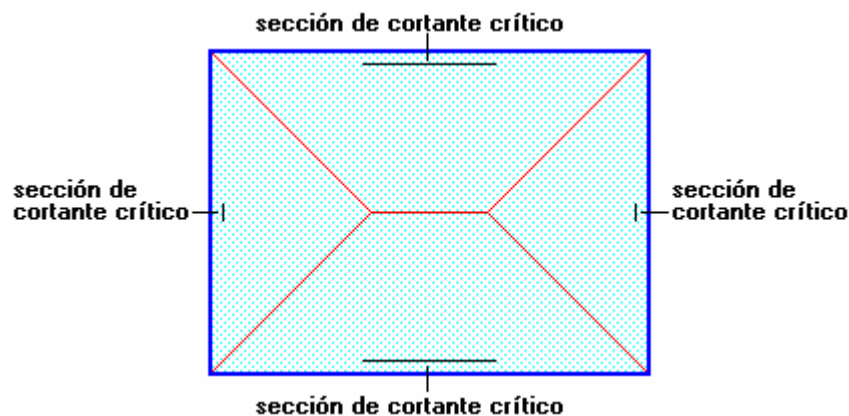
Modelo Idealizado de Fisuración

Bajo este estado límite, las fuerzas cortantes que generan las cargas que actúan en los triángulos y trapecios se transmiten directamente a las vigas en las que se sustentan los respectivos triángulos y trapecios.



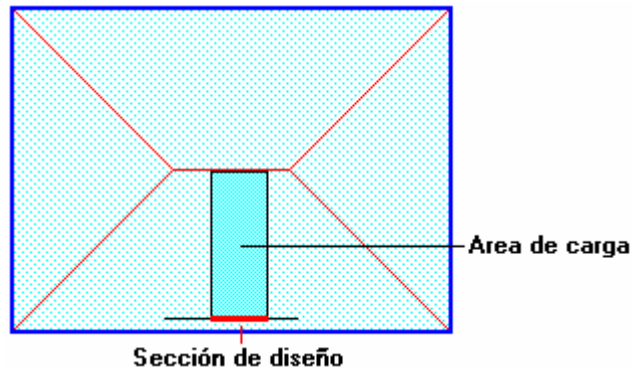
Las losas deben estar en capacidad de resistir las fuerzas cortantes generadas por este tipo de comportamiento.

Las secciones críticas de las losas, para el diseño a cortante, se ubican en los sectores de ordenada máxima de los triángulos y trapecios, proximos a las vigas de apoyo.





Las cargas que solicitan las secciones de cortante crítico son aquellas que actúan sobre zonas ortogonales limitadas por la línea de cortante crítico y la línea de fisuración intermedia de la losa.

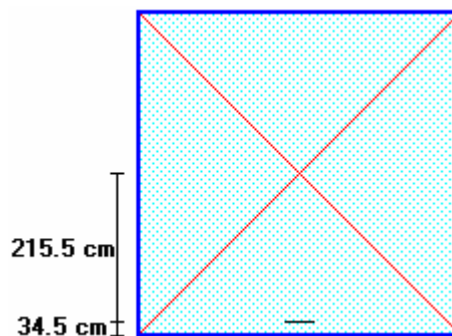


Verificación a Cortante de las Losas de 5.00 m x 5.00 m de los Niveles +2.50 y +5.00:

Se toma la sección de diseño con ancho unitario (un metro de ancho). La carga última superficial es:

$$q_u = 1461 \text{ Kg/m}^2$$

La sección crítica de diseño está ubicada a 22 cm de la cara de la viga (25 cm de altura menos 3 cm de recubrimiento al centroide del acero); la cara de la viga está ubicada a 12.5 cm del eje de la viga (ancho de viga de 25 cm), por lo que la sección de diseño se ubica a 34.5 cm del eje de la viga.



La fuerza cortante que actúa sobre un metro de ancho de la zona crítica a cortante es:

$$V_u = 1.00 \text{ m} \times 2.155 \text{ m} \times 1475 \text{ Kg/m}^2$$

$$V_u = 3179 \text{ Kg}$$

En un metro de losa se dispone de dos nervios de 10 cm de ancho (ancho total = 20 cm), por lo que el esfuerzo cortante último es:

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b \cdot d}$$

$$v_u = \frac{3179 \text{ Kg}}{(0.85)(20 \text{ cm})(22 \text{ cm})}$$

$$v_u = 8.50 \text{ Kg/cm}^2$$

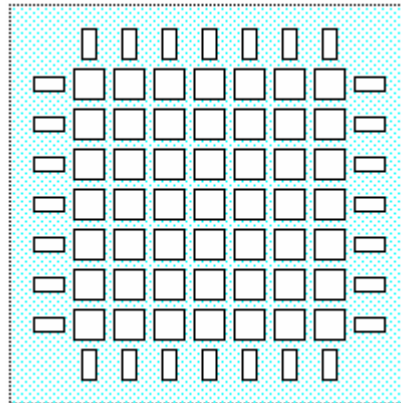


El esfuerzo cortante que puede soportar el hormigón es:

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c} = 0.53\sqrt{210}$$

$$v_c = 7.68 \text{ Kg/cm}^2$$

La sección transversal no es suficiente para resistir las fuerzas cortantes ($v_u > v_c$). Como solución se puede incrementar el ancho de los nervios en la fila perimetral de alivianamientos, colocando un solo bloque de 20 cm x 40 cm x 20 cm en cada alivianamiento, y rellenándolo con papel de fundas de cemento para evitar que el hormigón se introduzca durante la fundición.

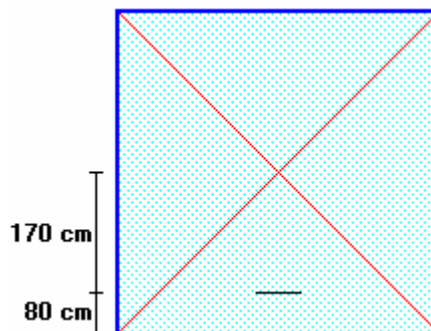


El ancho efectivo de los nervios se incrementa de 20 cm a 60 cm con lo que la capacidad resistente se triplica. El incremento de peso es mínimo, y el impacto de ese incremento de peso, y del cambio focalizado de dimensiones de los nervios se calcula con la siguiente expresión:

$$v_u = \frac{3179 \text{ Kg} + 1.4(0.40\text{m})(0.40\text{m})(0.20\text{m})(2400\text{Kg/m}^3)}{0.85(60\text{cm})(22\text{cm})} = \frac{3287}{0.85(60)(22)}$$

$$v_u = 2.93 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{O.K.})$$

Una vez ampliado el ancho de los nervios en la fila perimetral de alivianamientos, una segunda zona crítica a cortante se produce a 80 cm del eje de las vigas (170 cm del centro de la losa), donde los nervios siguen manteniendo los 10 cm de ancho (20 cm de ancho por metro).



La fuerza cortante que actúa sobre un metro de ancho de la segunda zona crítica a cortante es:

$$V_u = 1.00 \text{ m} \times 1.70 \text{ m} \times 1475 \text{ Kg/m}^2$$

$$V_u = 2508 \text{ Kg}$$



El esfuerzo cortante último es:

$$v_u = \frac{2508 \text{ Kg}}{0.85(20 \text{ cm})(22 \text{ cm})}$$

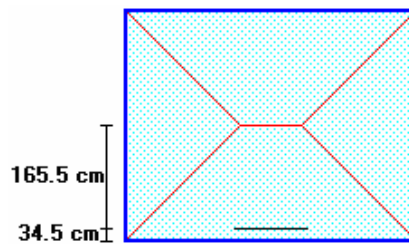
$$v_u = 6.71 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_u < v_c$$

(O.K.)

El esfuerzo cortante último es inferior a la capacidad resistente del hormigón por lo que no se requiere de ningún cambio adicional en las dimensiones de los alivianamientos.

Verificación a Cortante de las Losas de 4.00 m x 5.00 m de los Niveles +2.50 y +5.00:



La fuerza cortante que actúa sobre un metro de ancho de la zona crítica a cortante es:

$$V_u = 1.00 \text{ m} \times 1.655 \text{ m} \times 1475 \text{ Kg/m}^2$$

$$V_u = 2441 \text{ Kg}$$

El esfuerzo cortante último es:

$$v_u = \frac{2441 \text{ Kg}}{0.85(20 \text{ cm})(22 \text{ cm})}$$

$$v_u = 6.53 \text{ Kg/cm}^2$$

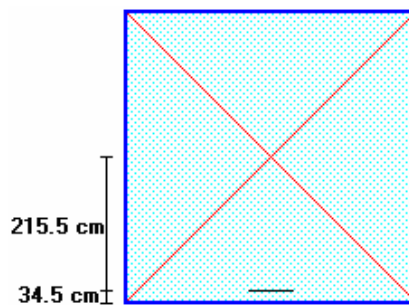
$$v_u < v_c$$

(O.K.)

El esfuerzo cortante último es inferior a la capacidad resistente del hormigón por lo que no se requiere ningún cambio en las dimensiones de los alivianamientos.

Verificación a Cortante de las Losas de 5.00 m x 5.00 m del Nivel +7.50:

$$q_u = 1011 \text{ Kg/m}^2$$



La fuerza cortante para un metro de ancho es:

$$V_u = 1.00 \text{ m} \times 2.155 \text{ m} \times 1011 \text{ Kg/m}^2$$



$$V_u = 2179 \text{ Kg}$$

El esfuerzo cortante es:

$$v_u = \frac{2179 \text{ Kg}}{0.85(20 \text{ cm})(22 \text{ cm})}$$

$$v_u = 5.83 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_u < v_c \quad (\text{O.K.})$$

El esfuerzo cortante último es inferior a la capacidad resistente del hormigón por lo que no se requiere ningún cambio en las dimensiones de los alivianamientos.

La losa de 4.00 m x 5.00 m del nivel +7.00 tampoco requiere ningún cambio.

- **Armadura de Temperatura y Retracción de Fraguado:**

Para absorber los esfuerzos generados en el hormigón de la loseta de compresión, por concepto de cambios de temperatura y retracción de fraguado, y permitir un control eficiente de la fisuración, se puede utilizar una malla electrosoldada con esfuerzo de fluencia $F_y = 2800 \text{ Kg/cm}^2$, requiriéndose la siguiente armadura mínima en las dos direcciones:

$$\rho_{\min} = 0.0020$$

$$A_{s\min} = \rho_{\min} \cdot b \cdot d$$

$$A_{s\min} = (0.0020) (100 \text{ cm}) (2.5 \text{ cm})$$

$$A_{s\min} = 0.50 \text{ cm}^2 \text{ por metro de ancho}$$

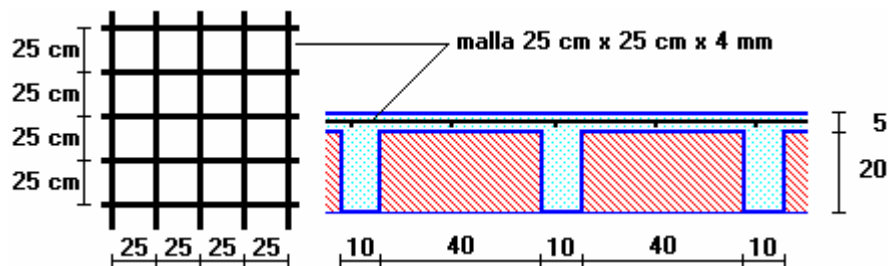
El máximo espaciamiento entre alambres de la malla electrosoldada es 5 veces el espesor de la loseta o 45 cm, el que sea menor:

$$e_{\max} = 5 (5 \text{ cm}) = 25 \text{ cm}$$

$$e_{\max} \leq 45 \text{ cm}$$

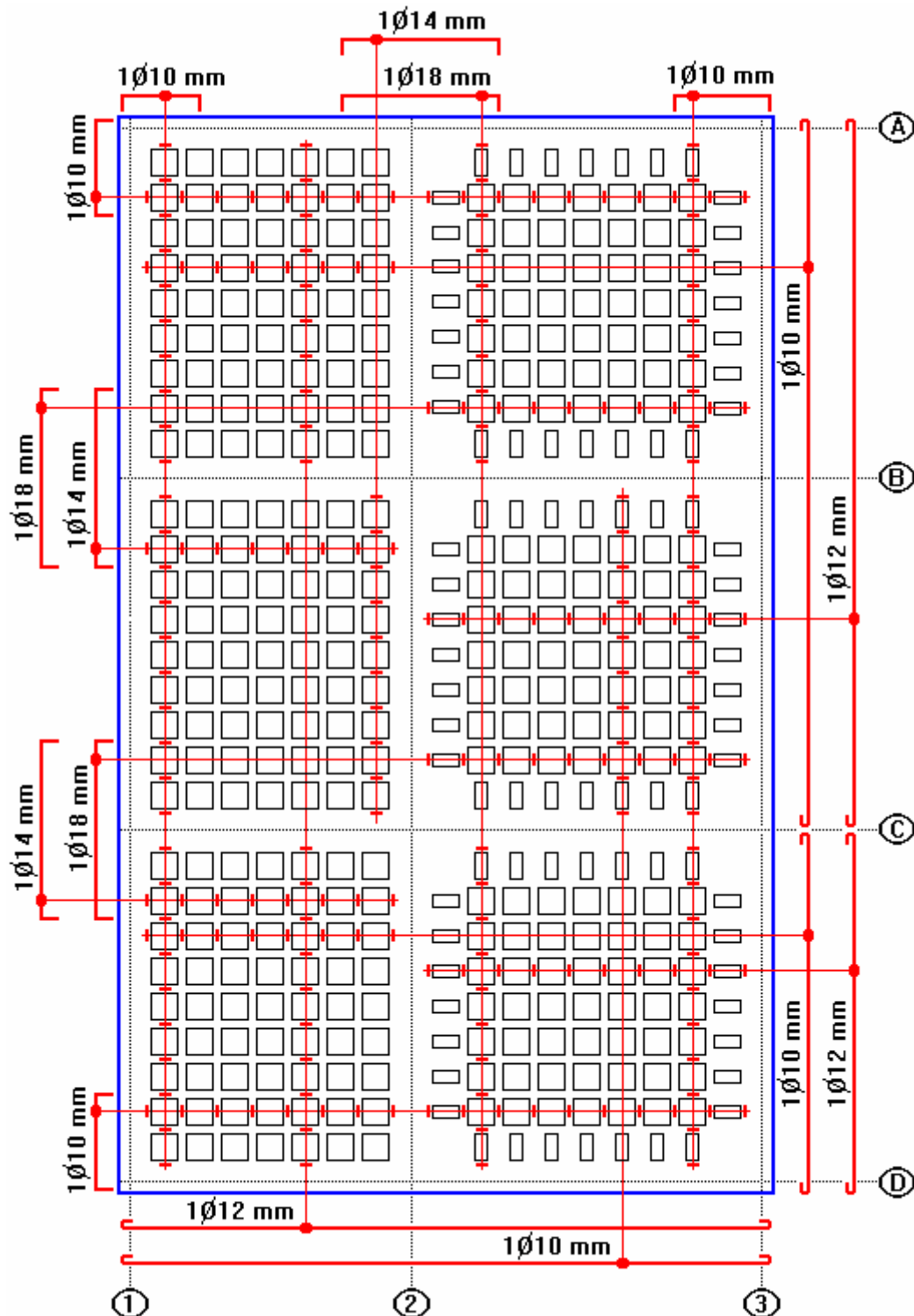
$$e_{\max} = 25 \text{ cm}$$

Se puede escoger una malla con alambres de 4 mm de diámetro espaciados cada 25 cm, que debe colocarse a media altura en la loseta de compresión.



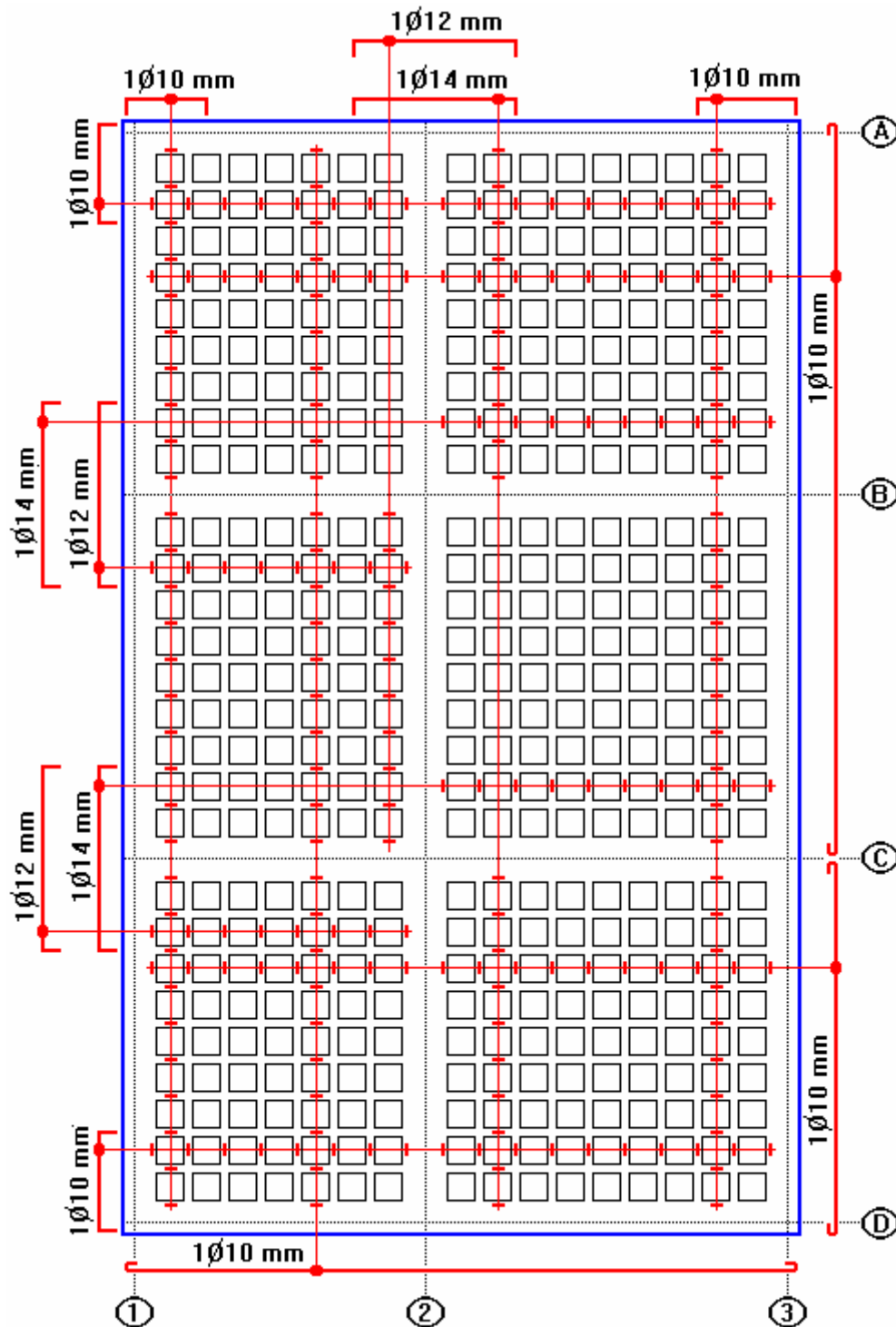


ARMADURA Y DISTRIBUCION DE ALIVIANAMIENTOS EN LOSAS
NIVELES +2.50, +5.00





**ARMADURA Y DISTRIBUCION DE ALIVIANAMIENTOS EN LOSA NIVEL
+7.50**



9.6 DISEÑO DE LOSAS MACIZAS Y NERVADAS RECTANGULARES CON VIGAS EMBEBIDAS PERIMETRALES:

9.6.1 Introducción:

Con gran frecuencia en nuestro medio, por aspectos arquitectónicos o por aspectos funcionales se encuentra la necesidad de que el peralte de las vigas en las que se deberían soportar las losas sea limitado. Ante estos requerimientos, en algunos casos se utilizan vigas embebidas en las losas, y en otras ocasiones se recurre a vigas de poco peralte.

Para el análisis de las losas con este tipo de vigas se suele emplear el Método del Pórtico Equivalente, que conviene contrastarlo con métodos más exactos como el empleo de mallas espaciales y elementos finitos de flexión que manejan la mayor parte de los programas computacionales modernos.

El comportamiento de las losas sobre vigas descolgadas de suficiente peralte ha sido estudiado extensamente, y se han desarrollado tablas y metodologías de diseño bastante confiables. Sin embargo, en el caso de las losas con vigas embebidas y de poco peralte, ese estudio ha sido muy escaso, y muchas incertidumbres subsisten.

En términos generales, cuando las losas tienen vigas con suficiente inercia comparada con la de las losas (vigas descolgadas), se apoyan en las vigas; pero cuando las vigas tienen poca inercia (vigas embebidas o de poco peralte), se produce un trabajo integrado de las losas y las vigas bajo condiciones especiales.

9.6.2 Los Modelos Analizados en este Estudio:

El modulado de las losas con las que se trabajó en este estudio fue de 3m x 6m, 4m x 6m, 5m x 6m y 6m x 6m, como se muestra en las siguientes figuras. Es decir que se cubrió un rango de relaciones largo/ancho desde 1 hasta 2.

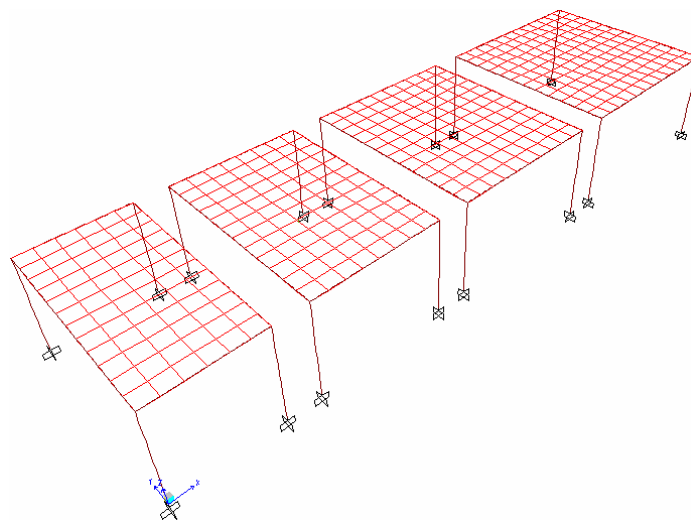


Figura 9.50: Geometría base de los modelos de losas aisladas con vigas descolgadas y con vigas embebidas.

Se escogió como límite de la relación largo/ancho de la losa el valor de 2, pues en losas sobre vigas descolgadas a partir de ese valor se considera que la losa trabaja en la

dirección corta. En el caso de las losa con vigas embebidas, la losa tiende a trabajar en la dirección larga, y en ciertos casos inclusive en la dirección diagonal.

Se estudiaron losas nervadas en base a una malla espacial de nervios, y losas macizas con elementos finitos cuadriláteros de flexión. El modulado de los nervios y de los elementos finitos fue similar (50cm x 50cm).

Se utilizó un modelo de geometría base de un claro en cada dirección, y un modelo integrado de 3 claros en cada dirección para cada relación largo/ancho. Entre los 2 tipos de modelos estructurales se cubren todas las condiciones de borde con vigas perimetrales para losas rectangulares.

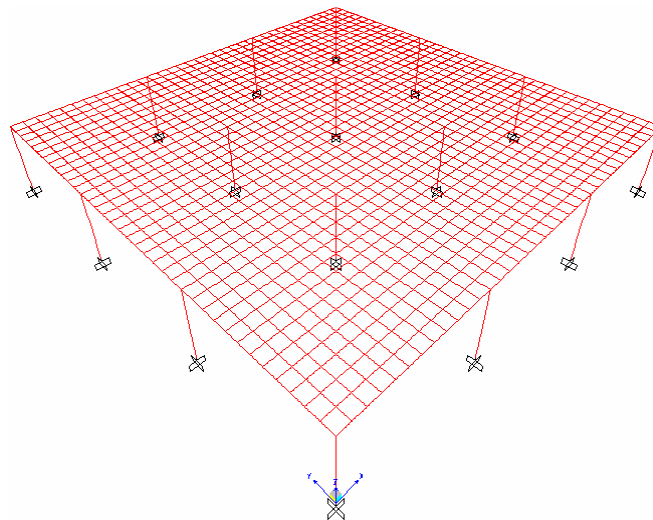


Figura 9.51: Geometría integrada de los modelos de losas con vigas descolgadas y con vigas embebidas en módulos de 6m x 6m.

Además se generaron modelos con vigas descolgadas en una dirección y con vigas embebidas en la dirección perpendicular, para representar condiciones mixtas de apoyo de las losas.

9.6.3 Las Deformaciones en las Vigas y las Losas:

Uno de los indicadores principales del comportamiento de las estructuras constituye la deformación. En el presente caso se desarrollaron 40 modelos para analizar el comportamiento de la deformación de las losas tanto con vigas embebidas o de poco peralte, como con vigas descolgadas de peralte adecuado. Las losas fueron analizadas tanto en el caso de ser macizas como en el caso de ser nervadas.

En general, para la misma sobrecarga y el mismo tipo de viga perimetral, las losas nervadas presentaron una deformación ligeramente mayor (entre 5% y 20%) que las losas macizas de inercia equivalente, debido a la manera diferente de trabajar ambas losas, aunque el modelo de deformaciones fue muy similar.

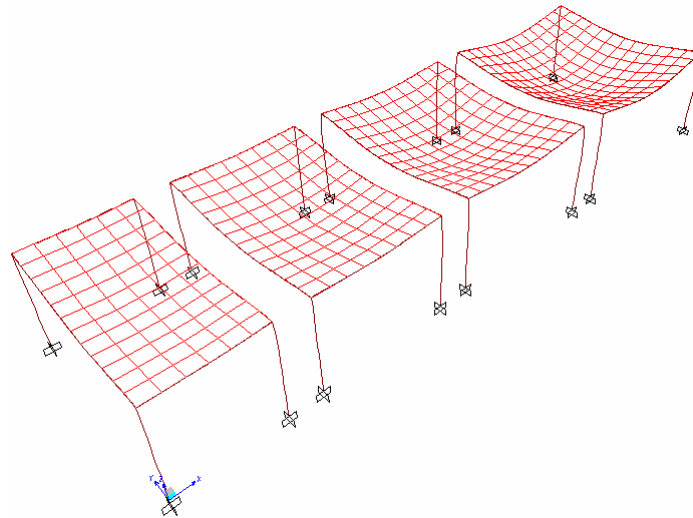


Figura 9.52: Elásticas de deformación de losas nervadas con vigas descolgadas.

Las losas macizas se comportan de acuerdo a la Ecuación General de la Flexión de Placas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

$$D = \frac{E \cdot h^3}{12(1 - \mu^2)}$$

Las losas nervadas, por su parte, están gobernadas por la Ecuación General de la Flexión de las barras:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - \frac{M(x)}{E(x) \cdot I(x)}$$

La ecuación de la flexión en barras también puede ser expresada en función de las cargas distribuidas “**q**”.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = - \frac{q(x)}{E(x) \cdot I(x)}$$

Claramente se nota la analogía que existe entre la ecuación de flexión en barras y la ecuación de flexión en placas.

El comportamiento bidireccional de las losas macizas provoca mecanismos de deformación adicionales a los de la elástica de flexión en barras, como las distorsiones angulares de torsión, que alivian ligeramente las deformaciones por flexión.

Las deformaciones totales en las losas con vigas embebidas, bajo cargas gravitacionales, son mayores que en las losas con vigas descolgadas por la carencia de una adecuada inercia

Para el modulado de 6m x 6m, de las figuras previas, se obtuvo un 40% más de deformación en las losas con vigas embebidas respecto a los sistemas de losas con vigas descolgadas, para las dimensiones de viga utilizadas (25 cm x 50 cm para las vigas

descolgadas, y 50 cm x 25 cm para las vigas banda), pero este valor debe ser tomado exclusivamente como cualitativo.

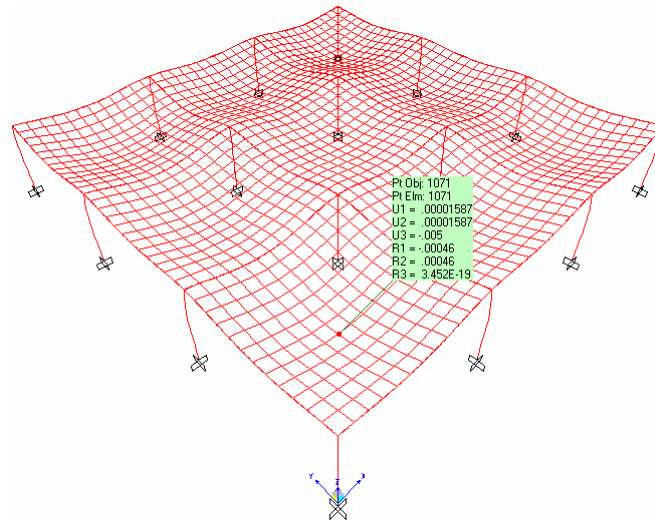


Figura 9.53: Elástica de deformación de losas con modulado 6m x 6m y vigas descolgadas en las 2 direcciones.

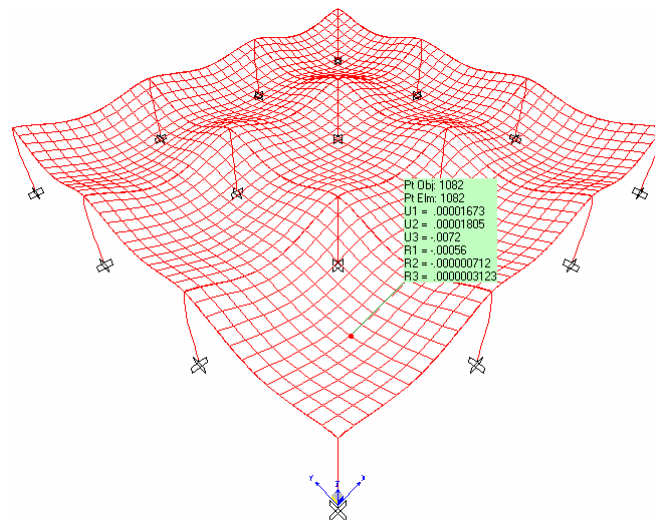


Figura 9.54: Elástica de deformación de losas con modulado 6m x 6m y vigas embebidas en las 2 direcciones.

Debido a que en el ejemplo anterior las luces en las 2 direcciones son iguales, la máxima deformación con apoyos mixtos (vigas descolgadas en una dirección y vigas embebidas en la otra dirección) fue aproximadamente el promedio de las deformaciones con cada tipo de apoyo.

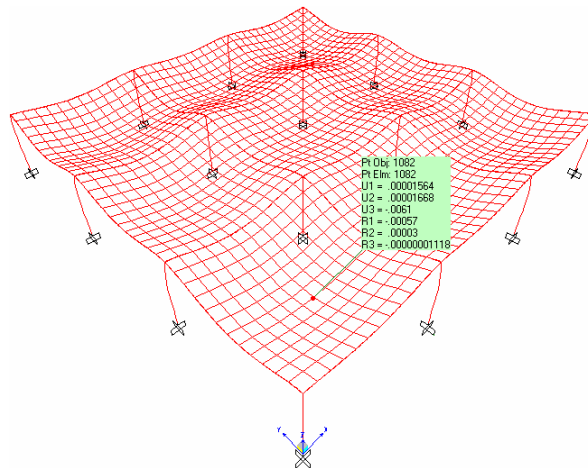


Figura 9.55: Elástica de deformación de losas con modulado 6m x 6m, vigas embebidas en una dirección y vigas descolgadas en la otra dirección.

Esta relación se distorsiona progresivamente cuando la estructura se aproxima a la relación largo/ancho de 2, en que la losa tiende a trabajar en una sola dirección (en la dirección larga, en que se ubican los apoyos de más inercia), como se observa en la siguiente figura.

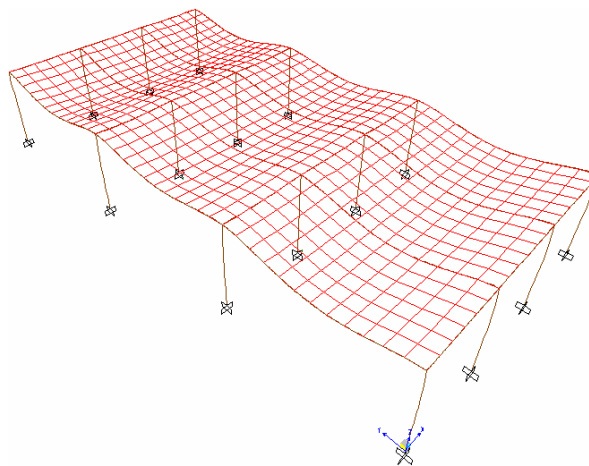


Figura 9.56: Elástica de deformación de losas con modulado 3m x 6m, vigas embebidas en una dirección y vigas descolgadas en la otra dirección.

El gráfico anterior es muy representativo de que a pesar de que la luz larga sea el doble de la luz corta, bajo cargas gravitacionales la losa trata de trabajar en la dirección larga por la gran diferencia de inercias entre las vigas descolgadas (presentes cada 6 m) y las vigas embebidas (presentes cada 3 m). Bajo esa misma distribución en planta, una losa continua con vigas descolgadas en las dos direcciones trabajaría en la dirección corta.

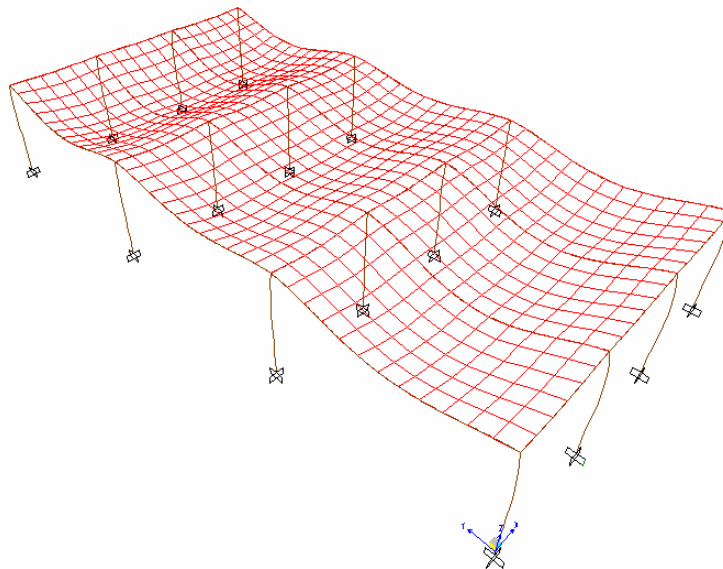


Figura 9.57: Elástica de deformación de losas con modulado 3m x 6m y vigas descolgadas en las dos direcciones.

Otro aspecto importante de mencionar es que mientras las deformaciones en las vigas embebidas son comparables a las deformaciones en las losas, las deformaciones en las vigas descolgadas son bastante menores que las deformaciones en las losas.

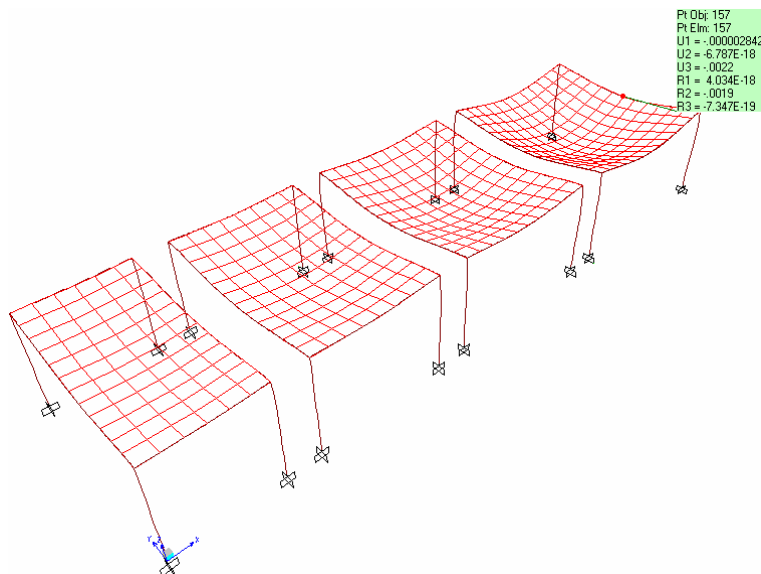


Figura 9.58: Deformaciones en vigas descolgadas de sistemas de losas aisladas.

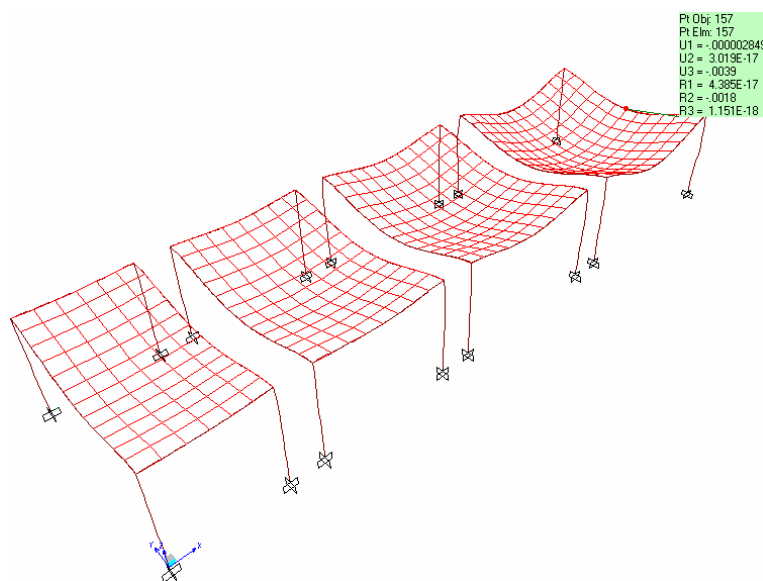


Figura 9.59: Deformaciones en vigas embebidas de sistemas de losas aisladas.

A continuación se presentan 3 tablas que describen las deflexiones máximas en las losas, bajo cargas gravitacionales, con diferente modulado y diferentes condiciones de continuidad, dentro de una estructura con 3 claros en cada dirección, y una estructura con un solo claro en cada dirección. Los valores de esas deformaciones son referenciales, y se utilizan exclusivamente con fines comparativos.

Tabla 9.8.a: Deflexiones máximas por peso propio en losas con vigas descolgadas.

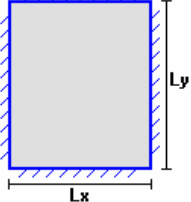
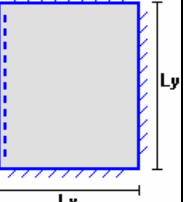
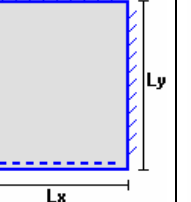
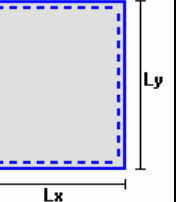
Tipo de Losa	Lx (m)	Ly (m)	Deflexiones Máximas (m)			
			Losa Central	Losa Lateral	Losa Esquinera	Losa Aislada
						
Maciza	3.00	6.00	-0.0015	-0.0014	-0.0018	-0.0019
Maciza	4.00	6.00	-0.0019	-0.0020	-0.0026	-0.0029
Maciza	5.00	6.00	-0.0024	-0.0030	-0.0037	-0.0044
Maciza	6.00	6.00	-0.0033	-0.0045	-0.0053	-0.0063
Nervada	3.00	6.00	-0.0019	-0.0018	-0.0023	-0.0024
Nervada	4.00	6.00	-0.0024	-0.0026	-0.0034	-0.0040
Nervada	5.00	6.00	-0.0030	-0.0038	-0.0048	-0.0062
Nervada	6.00	6.00	-0.0047	-0.0064	-0.0076	-0.0090

Tabla 9.8.b: Deflexiones máximas por peso propio en losas con vigas embebidas.

Tipo de Losa	Lx (m)	Ly (m)	Deflexiones Máximas (m)			
			Losa Central	Losa Lateral	Losa Esquinera	Losa Aislada
Maciza	3.00	6.00	-0.0026	-0.0025	-0.0031	-0.0032
Maciza	4.00	6.00	-0.0031	-0.0032	-0.0039	-0.0043
Maciza	5.00	6.00	-0.0038	-0.0044	-0.0053	-0.0060
Maciza	6.00	6.00	-0.0052	-0.0065	-0.0074	-0.0085
Nervada	3.00	6.00	-0.0037	-0.0035	-0.0041	-0.0041
Nervada	4.00	6.00	-0.0042	-0.0042	-0.0052	-0.0057
Nervada	5.00	6.00	-0.0051	-0.0058	-0.0069	-0.0080
Nervada	6.00	6.00	-0.0082	-0.0095	-0.0108	-0.0114

Tabla 9.8.c: Deflexiones máximas por peso propio en losas con vigas descolgadas en la dirección de la menor luz y vigas embebidas en la otra dirección.

Tipo de Losa	Lx (m)	Ly (m)	Deflexiones Máximas (m)			
			Losa Central	Losa Lateral	Losa Esquinera	Losa Aislada
Maciza	3.00	6.00	-0.0026	-0.0024	-0.0030	-0.0031
Maciza	4.00	6.00	-0.0028	-0.0029	-0.0038	-0.0042
Maciza	5.00	6.00	-0.0033	-0.0037	-0.0048	-0.0056
Maciza	6.00	6.00	-0.0041	-0.0051	-0.0062	-0.0074
Nervada	3.00	6.00	-0.0035	-0.0032	-0.0040	-0.0041
Nervada	4.00	6.00	-0.0038	-0.0038	-0.0049	-0.0055
Nervada	5.00	6.00	-0.0042	-0.0047	-0.0062	-0.0075
Nervada	6.00	6.00	-0.0068	-0.0078	-0.0096	-0.0101

En el siguiente modulado se identifican los diferentes tipos de losas de acuerdo a su ubicación en el entramado.

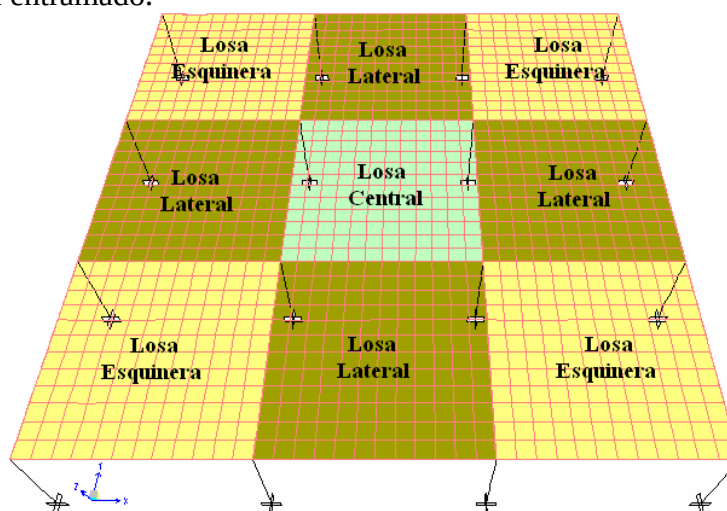


Figura 9.60: Tipos de losas de acuerdo a su ubicación en el entramado.

A continuación se representan gráficamente las deflexiones expuestas en las tablas previas, para visualizar su comportamiento. Para la normalización de las curvas se ha tomado como referencia a las deformaciones de las losas base cuando la relación Largo/Ancho es de 2 ($\Delta_{2,00}$).

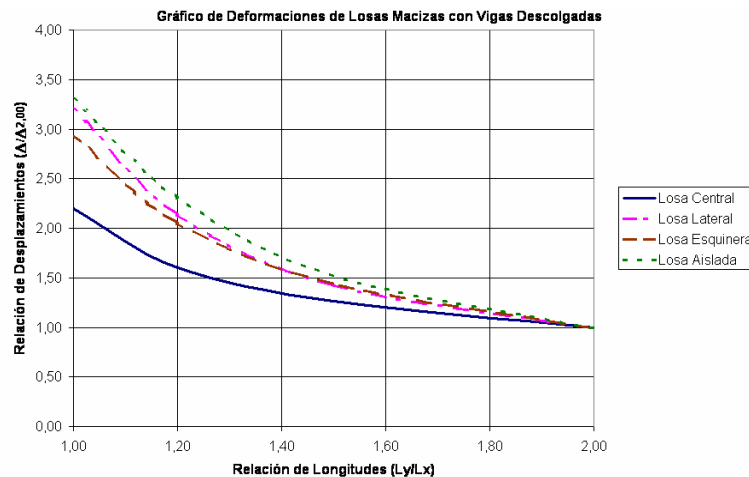


Figura 9.61: Diagrama comparativo de deformaciones de losas macizas con vigas descolgadas, para diferentes relaciones largo/ancho, y diferentes ubicaciones de la losa en el entramado.

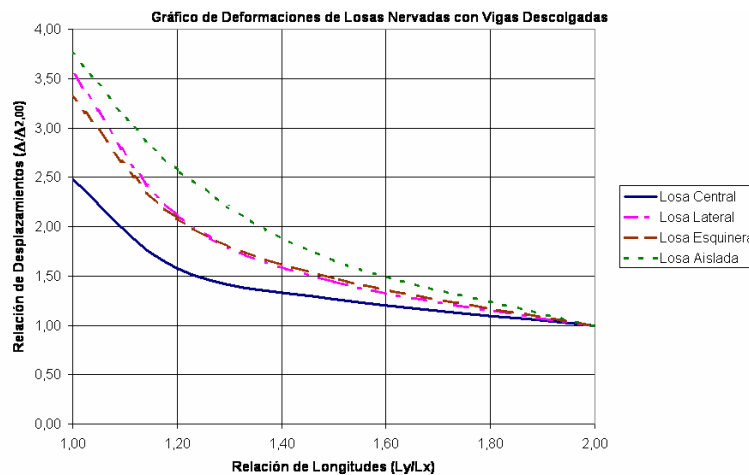


Figura 9.62: Diagrama comparativo de deformaciones de losas nervadas con vigas descolgadas, para diferentes relaciones largo/ancho, y diferentes ubicaciones de la losa en el entramado.

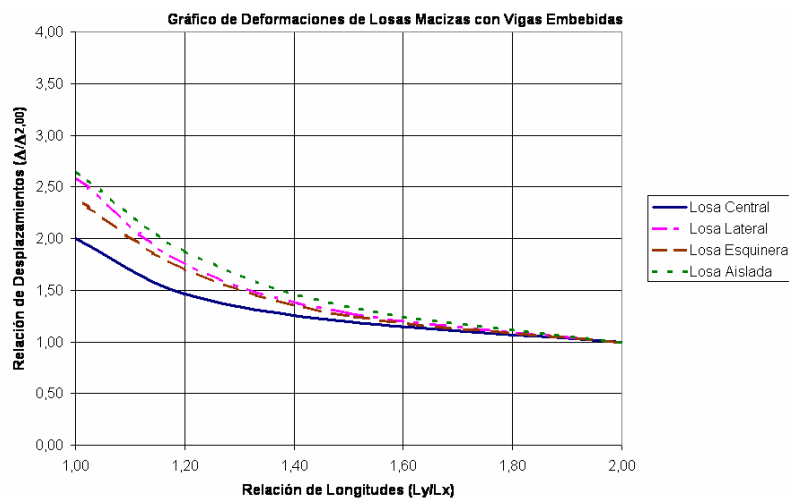


Figura 9.63: Diagrama comparativo de deformaciones de losas macizas con vigas embebidas, para diferentes relaciones lado mayor / lado menor y diferentes ubicaciones en el entramado.

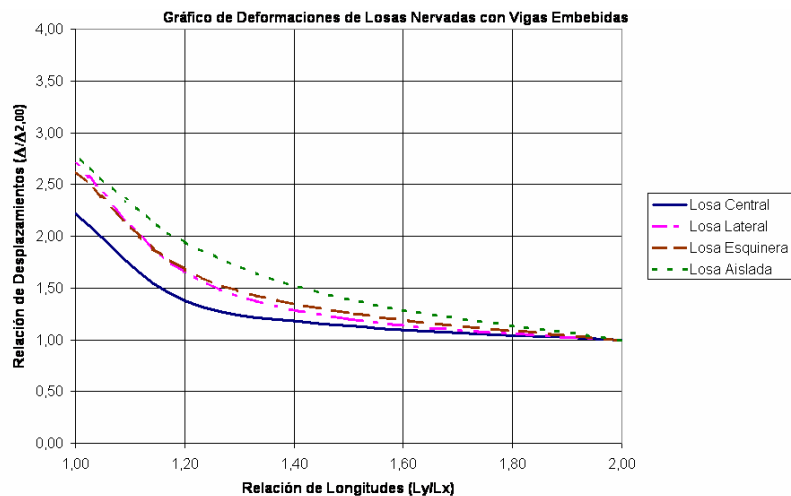


Figura 9.64: Diagrama comparativo de deformaciones de losas nervadas con vigas embebidas, para diferentes relaciones largo/ancho, y diferentes ubicaciones de la losa en el entramado.

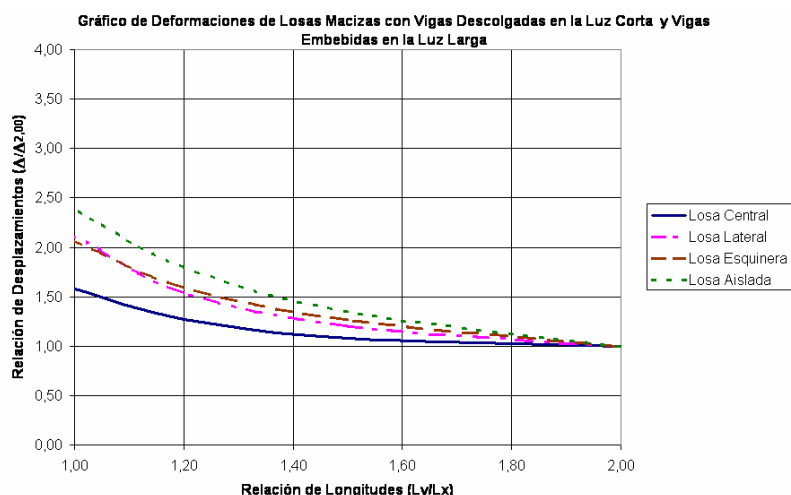


Figura 9.65: Diagrama comparativo de deformaciones de losas macizas con vigas descolgadas en la dirección de la longitud corta y vigas embebidas en la dirección larga, para diferentes relaciones largo/ancho, y diferentes ubicaciones de la losa en el entramado.

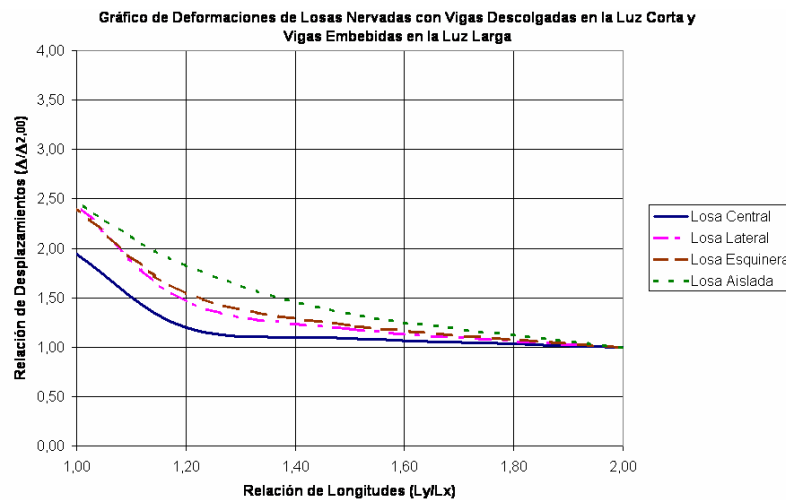


Figura 9.66: Diagrama comparativo de deformaciones de losas nervadas con vigas descolgadas en la dirección de la longitud corta y vigas embebidas en la dirección larga, para diferentes relaciones largo/ancho, y diferentes ubicaciones de la losa en el entramado.

En términos generales se puede observar que las losas centrales, en modulados uniformes, bajo cargas gravitacionales tienen menores deflexiones tanto en losas con vigas descolgadas como en losas con vigas embebidas. Además, las losas centrales incrementan en menor proporción su deformación conforme van disminuyendo las relaciones Lado Largo / Lado Corto en los módulos.

En el otro extremo, las losas aisladas, tanto con vigas descolgadas como con vigas embebidas, son las que presentan mayores niveles de deformación. Además el incremento de deformaciones es mucho mayor conforme disminuyen las relaciones Lado Largo / Lado Corto.

Las losas laterales y las losas esquineras tienen un comportamiento similar desde el punto de vista de deformaciones máximas, y en conjunto se ubican en un punto intermedio entre las losas centrales y las losas aisladas.

Las tablas revelan que las losas nervadas consistentemente se deforman más que las losas macizas, y los gráficos por su parte detectan que el crecimiento de las deformaciones es mayor para losas nervadas que para losas con vigas embebidas, cuando disminuyen las relaciones Lado Largo / Lado Corto, desde losas rectangulares hasta losas cuadradas.

A continuación se presentan algunos gráficos que permiten comparar cualitativamente las deformaciones en losas con vigas descolgadas y losas con vigas embebidas.

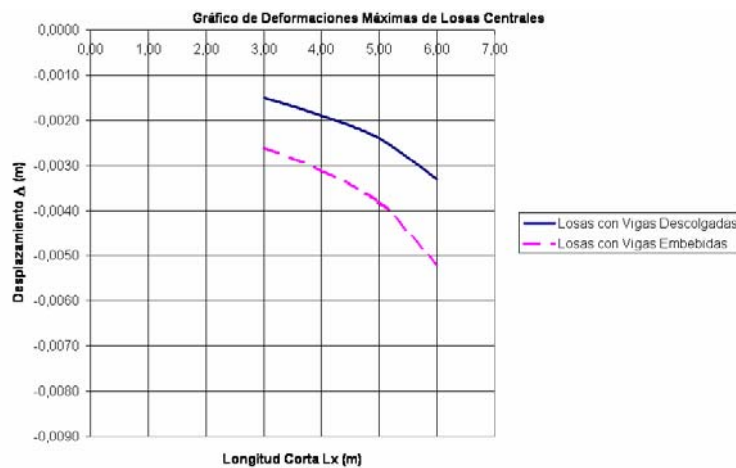


Figura 9.67: Diagrama comparativo de deformaciones máximas en losas centrales.

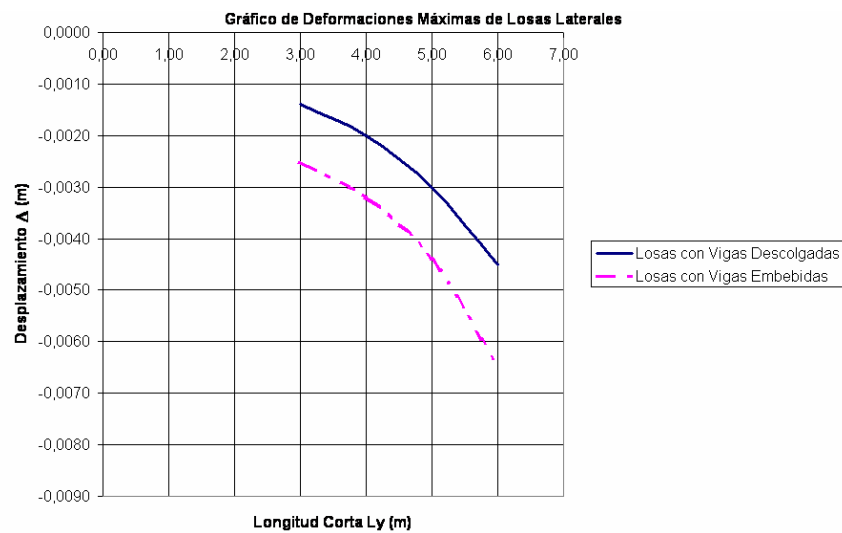


Figura 9.68: Diagrama comparativo de deformaciones máximas en losas laterales.



Figura 9.69: Diagrama comparativo de deformaciones máximas en losas esquineras.

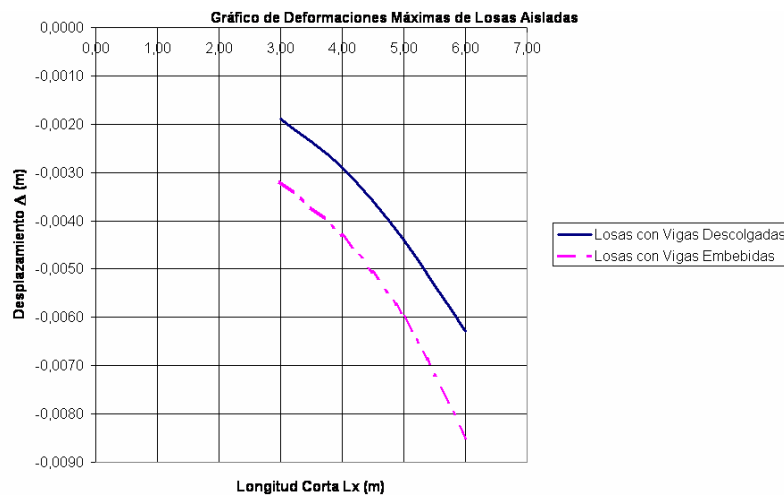


Figura 9.70: Diagrama comparativo de deformaciones máximas en losas aisladas.

A continuación se presentan elásticas de deformación de las estructuras analizadas bajo cargas sísmicas, con distintos modulados (6m x 6m y 3m x 6m).

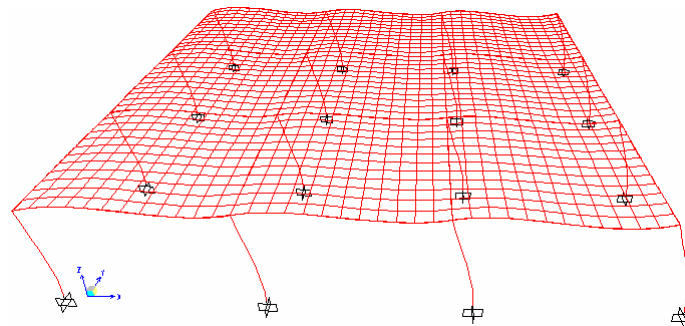


Figura 9.71: Elástica de deformación de losas con vigas embebidas de modulado 6m x 6m, bajo cargas sísmicas.

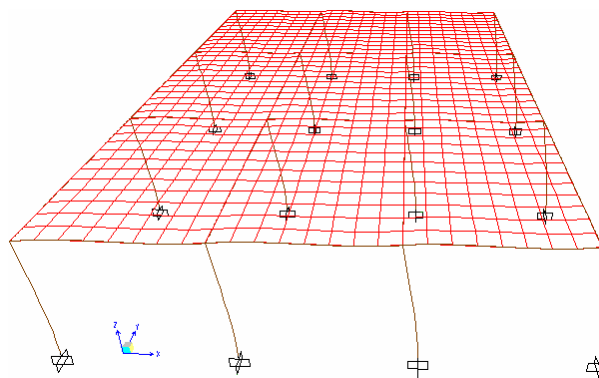


Figura 9.72: Elástica de deformación de losas con vigas embebidas de modulado 3m x 6m, bajo cargas sísmicas.

Las geometrías de las elásticas de deformación bajo cargas sísmicas son similares a las que se producen cuando las losas se apoyan en vigas descolgadas, pero la magnitud de los desplazamientos es mayor para vigas embebidas por la menor rigidez de las mismas.

9.6.4 Las Solicitaciones en las Vigas y las Losas:

Si bien las deformaciones brindan información importante sobre el comportamiento de las losas con vigas embebidas en su borde, son las solicitaciones (particularmente los momentos flectores) los mejores indicadores de la manera cómo trabajan las losas con vigas embebidas o de peralte reducido.

A continuación se presentan los gráficos descriptivos de los momentos flectores en losas cuadradas con vigas descolgadas y losas cuadradas con vigas embebidas, bajo cargas gravitacionales.

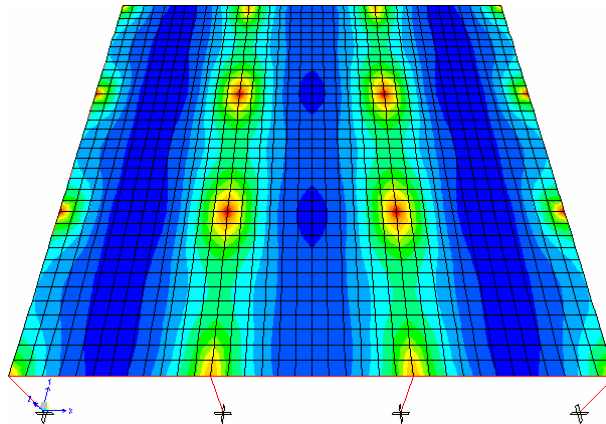


Figura 9.73: Momentos flectores en la dirección x de losas con modulado 6m x 6m y vigas embebidas.

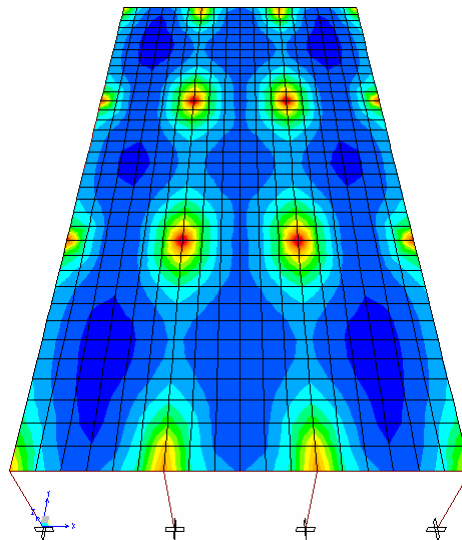


Figura 9.74: Momentos flectores en la dirección x de losas con modulado de 3m x 6m y vigas embebidas.

Para cargas gravitacionales, los perfiles de momentos flectores (los diagramas de momentos flectores dibujados sobre la superficie de la estructura) en losas con vigas embebidas son totalmente diferentes a los de las losas con vigas descolgadas. Realizando un análisis descriptivo del comportamiento de las losas sobre vigas embebidas se podría decir que existe una gran concentración de momentos flectores negativos (tracciones en la fibra superior) encima de las columnas, pero los mayores momentos flectores positivos (tracciones en la fibra inferior) no se presentan necesariamente en la franja de columnas, sino que aparecen también en la franja central,

dependiendo de la relación Largo/Ancho. En el caso de losas con relaciones largo/ancho grande, este hecho es más patente; mientras que para losas cuadradas los momentos flectores positivos en la franja central son similares y a veces menores a los de la franja de columnas.

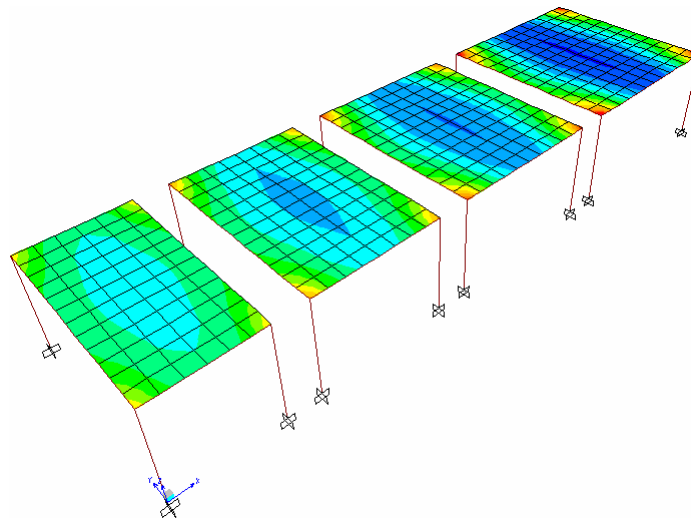


Figura 9.75: Momentos flectores en la dirección x de losas con vigas embebidas, sin continuidad en los 4 bordes.

El caso crítico de momentos flectores positivos máximos en la franja central se presenta en losas de un solo vano en ambas direcciones (losas aisladas). Los momentos flectores positivos importantes en franja central de todos los tipos de losa contradicen los resultados del uso del método del pórtico equivalente, que es el que usualmente se emplea en el diseño de losas con vigas embebidas.

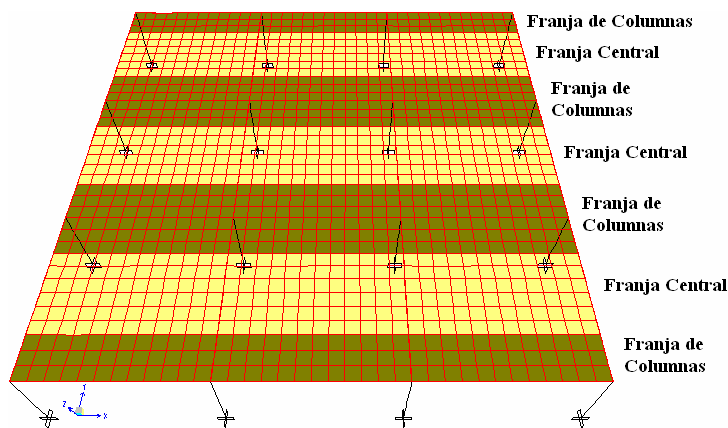


Figura 9.76: Franja de columnas y franja central en losas con modulado de 6m x 6m.

A continuación se presentan 8 tablas que describen los momentos flectores máximos (positivos y negativos) en las losas macizas, en las dos direcciones ortogonales. Los momentos máximos se determinaron sobre el eje de columnas y sobre el eje de centro de luz. También los valores de esos momentos flectores son referenciales, y se utilizan con fines comparativos.



Tabla 9.9.a: Momentos flectores máximos en dirección x (m_y) por peso propio en losas con vigas descolgadas, en eje de columnas.

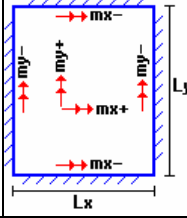
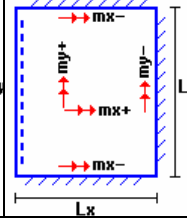
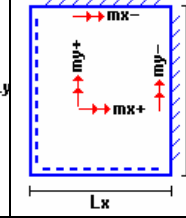
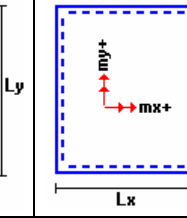
Tipo de Losa	Lx (m)	Ly (m)	Momentos Flectores Máximos por Metro de Ancho (T-m)							
			Losa Central		Losa Lateral		Losa Esquinera		Losa Aislada	
										
			m+	m-	m+	m-	m+	m-	m+	m-
Maciza	3.00	6.00	0,0304	-1,5102	0,1510	-1,5087	0,1501	-1,5184	0,1679	-0,7145
Maciza	4.00	6.00	0,1981	-2,3364	0,3827	-2,3250	0,3829	-2,3498	0,3530	-1,1645
Maciza	5.00	6.00	0,4453	-3,2941	0,7023	-3,3007	0,7029	-3,2852	0,5983	-1,7352
Maciza	6.00	6.00	0,7589	-4,4193	1,0962	-4,3834	1,0944	-4,3772	0,9001	-2,4579

Tabla 9.9.b: Momentos flectores máximos en dirección x (m_y) por peso propio en losas con vigas descolgadas, en eje central.

Tipo de Losa	L_x (m)	L_y (m)	Momentos Flectores Máximos por Metro de Ancho (T-m)							
			Losa Central		Losa Lateral		Losa Esquinera		Losa Aislada	
			m+	m-	m+	m-	m+	m-	m+	m-
Maciza	3.00	6.00	0,4288	-0,3239	0,6185	-0,3240	0,6561	-0,2568	0,8387	-0,0825
Maciza	4.00	6.00	0,5625	-0,6892	0,8202	-0,6908	0,9238	-0,6428	1,2039	-0,1967
Maciza	5.00	6.00	0,7639	-1,1196	1,1320	-1,1232	1,2107	-1,0943	1,5437	-0,3268
Maciza	6.00	6.00	1,0411	-1,6499	1,4617	-1,6565	1,5264	-1,6129	1,8670	-0,4572

Tabla 9.9.c: Momentos flectores máximos en dirección y (m_x) por peso propio en losas con vigas descolgadas, en eje de columnas.

Tipo de Losa	L_x (m)	L_y (m)	Momentos Flectores Máximos por Metro de Ancho (T-m)							
			Losa Central		Losa Lateral		Losa Esquinera		Losa Aislada	
			m+	m-	m+	m-	m+	m-	m+	m-
Maciza	3.00	6.00	0,7180	-2,5133	0,6859	-2,5224	0,8464	-2,5067	0,6425	-1,5015
Maciza	4.00	6.00	0,7784	-3,1314	0,7425	-3,1558	0,9657	-3,1540	0,7536	-1,8377
Maciza	5.00	6.00	0,7639	-3,7001	0,7627	-3,7756	1,0458	-3,7764	0,8388	-2,1305
Maciza	6.00	6.00	0,7591	-4,4193	0,7588	-4,4007	1,0928	-4,4088	0,9022	-2,4587

Tabla 9.9.d: Momentos flectores máximos en dirección y (m_x) por peso propio en losas con vigas descolgadas, en eje central.

Tipo de Losa	L_x (m)	L_y (m)	Momentos Flectores Máximos por Metro de Ancho (T-m)							
			Losa Central		Losa Lateral		Losa Esquinera		Losa Aislada	
			m+	m-	m+	m-	m+	m-	m+	m-
Maciza	3.00	6.00	0,8055	-1,5499	0,7376	-1,4011	0,8669	-1,3976	0,8481	-0,4990
Maciza	4.00	6.00	0,9279	-1,6859	0,9162	-1,5733	1,0969	-1,5824	1,1668	-0,5350
Maciza	5.00	6.00	0,9976	-1,6979	1,0584	-1,6451	1,3173	-1,6314	1,5134	-0,5140
Maciza	6.00	6.00	1,0419	-1,6499	1,1685	-0,8352	1,5257	-1,6053	1,8668	-0,4604



Tabla 9.9.e: Momentos flectores máximos en dirección x (my) por peso propio en losas con vigas embebidas, en eje de columnas.

Tipo de Losa	Lx (m)	Ly (m)	Momentos Flectores Máximos por Metro de Ancho (T-m)							
			Losa Central		Losa Lateral		Losa Esquinera		Losa Aislada	
			m+	m-	m+	m-	m+	m-	m+	m-
Maciza	3.00	6.00	0,3414	-2,8662	0,4753	-2,8819	0,4748	-2,8812	0,3993	-1,5805
Maciza	4.00	6.00	0,7324	-4,3352	0,9471	-4,3599	0,9315	-4,3570	0,8334	-2,5984
Maciza	5.00	6.00	1,1771	-5,9832	1,4945	-6,0136	1,4770	-6,0126	1,3587	-3,9600
Maciza	6.00	6.00	1,6713	-7,8475	2,1042	-7,8219	2,0868	-7,8297	1,9691	-5,6514

Tabla 9.9.f: Momentos Flectores Máximos en Dirección x (my) por Peso Propio en Losas con Vigas Embebidas, en Eje Central.

Tipo de Losa	Lx (m)	Ly (m)	Momentos Flectores Máximos por Metro de Ancho (T-m)							
			Losa Central		Losa Lateral		Losa Esquinera		Losa Aislada	
			m+	m-	m+	m-	m+	m-	m+	m-
Maciza	3.00	6.00	0,4071	0,0000	0,5497	0,0000	0,5917	0,0000	0,7286	0,0000
Maciza	4.00	6.00	0,5069	-0,1165	0,8015	-0,1170	0,8629	0,0000	1,1153	0,0000
Maciza	5.00	6.00	0,7691	-0,5364	1,1907	-0,5380	1,2476	-0,4459	1,5743	0,0000
Maciza	6.00	6.00	1,2053	-1,1677	1,7699	-1,1705	1,7493	-1,0280	2,1074	-0,1006

Tabla 9.9.g: Momentos flectores máximos en dirección y (mx) por peso propio en losas con vigas embebidas, en eje de columnas.

Tipo de Losa	Lx (m)	Ly (m)	Momentos Flectores Máximos por Metro de Ancho (T-m)							
			Losa Central		Losa Lateral		Losa Esquinera		Losa Aislada	
			m+	m-	m+	m-	m+	m-	m+	m-
Maciza	3.00	6.00	1,3667	-4,2616	1,3660	-4,2548	1,5750	-4,2760	1,4190	-3,4796
Maciza	4.00	6.00	1,4747	-5,3689	1,4748	-5,3724	1,7746	-5,3571	1,6379	-4,2394
Maciza	5.00	6.00	1,5751	-6,5520	1,5740	-6,5807	1,9513	-6,5755	1,8224	-4,9540
Maciza	6.00	6.00	1,6704	-7,8475	1,6714	-7,7805	2,1035	-7,8297	1,9690	-5,6497

Tabla 9.9.h: Momentos flectores máximos en dirección y (mx) por peso propio en losas con vigas embebidas, en eje central.

Tipo de Losa	Lx (m)	Ly (m)	Momentos Flectores Máximos por Metro de Ancho (T-m)							
			Losa Central		Losa Lateral		Losa Esquinera		Losa Aislada	
			m+	m-	m+	m-	m+	m-	m+	m-
Maciza	3.00	6.00	1,3966	-2,0967	1,2991	-1,8865	1,4819	-1,8839	1,4574	-0,6861
Maciza	4.00	6.00	1,4033	-2,0181	1,3461	-1,6721	1,6083	-1,6715	1,6909	-0,4909
Maciza	5.00	6.00	1,3142	-1,5311	1,3362	-1,3707	1,6877	-1,3670	1,9060	-0,2902
Maciza	6.00	6.00	1,2073	-1,1704	1,3057	-1,0662	1,7486	-1,0280	2,1073	-0,1052

A continuación se presentan varios diagramas que extraen información representativa de las tablas previas, y permiten detectar ciertas propiedades de las solicitaciones por flexión en las losas con vigas embebidas o de peralte limitado, cuando se analizan las losas en la dirección corta.

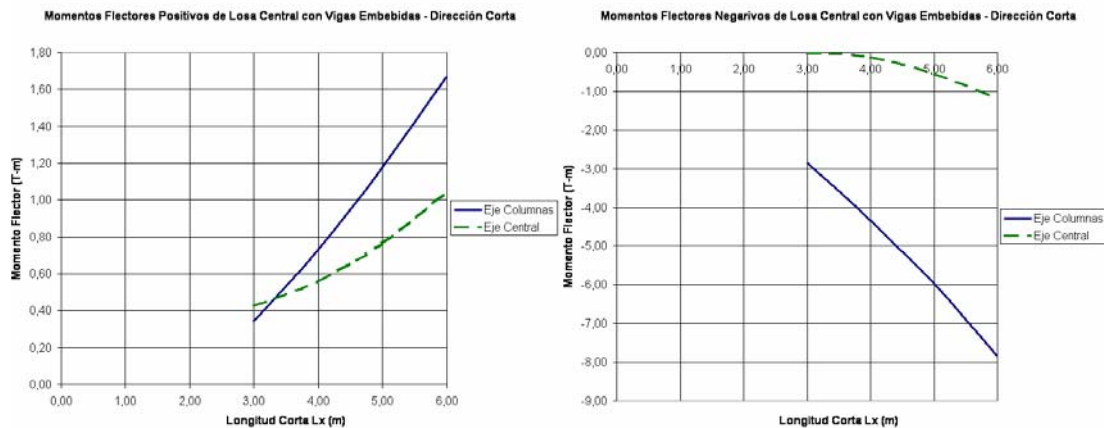


Figura 9.77: Variación de los momentos flectores positivos y negativos en la dirección corta, en losas centrales con vigas embebidas.

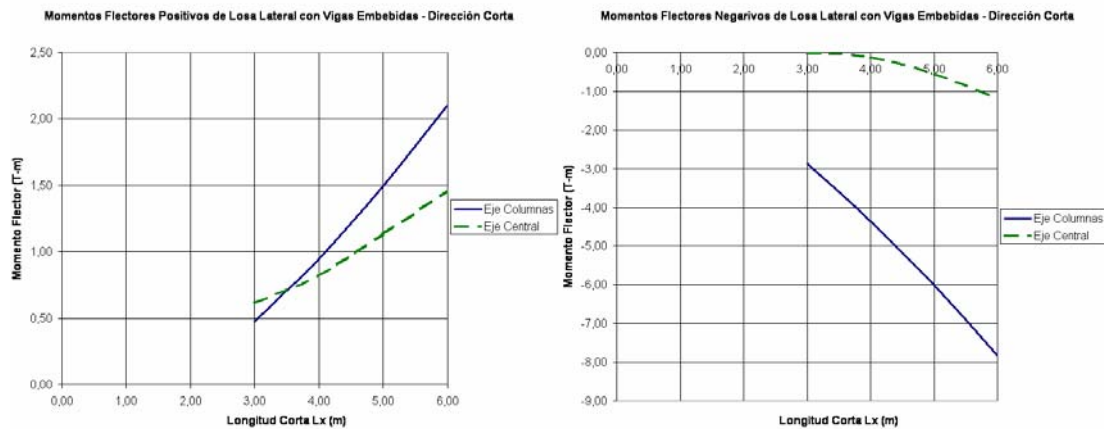


Figura 9.78: Variación de los momentos flectores positivos y negativos en la dirección corta, en losas laterales con vigas embebidas.

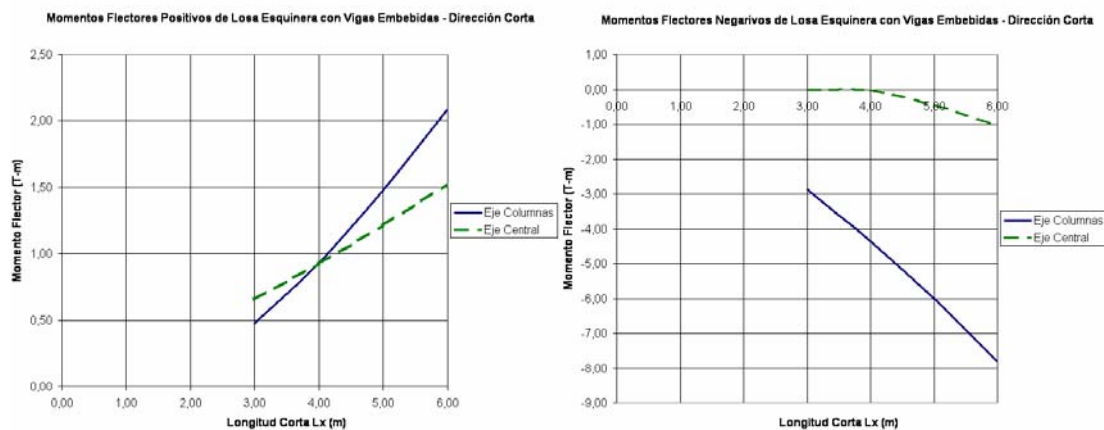


Figura 9.79: Variación de los momentos flectores positivos y negativos en la dirección corta, en losas esquineras con vigas embebidas.

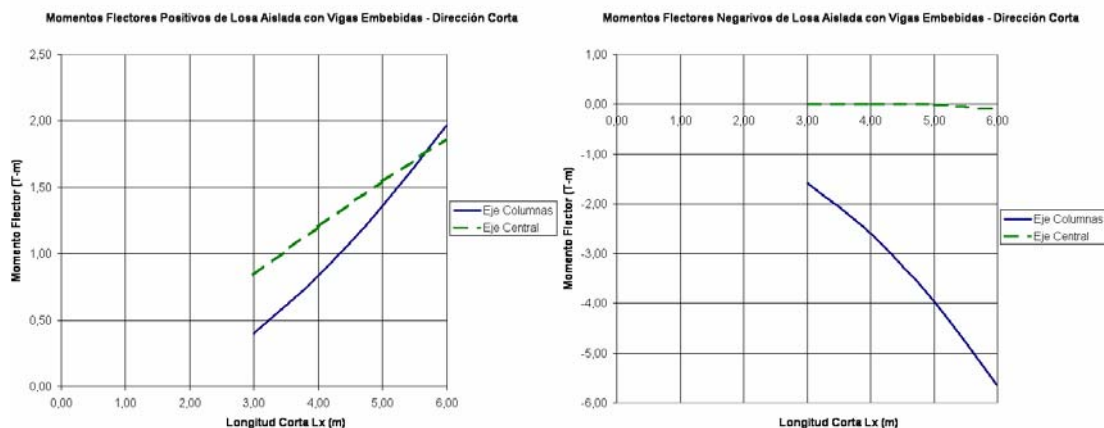


Figura 9.80: Variación de los momentos flectores positivos y negativos en la dirección corta, en losas aisladas con vigas embebidas.

Los gráficos izquierdos describen la variación de los momentos flectores positivos en la dirección corta de losas con vigas embebidas, mientras los gráficos derechos de cada figura describen la variación de los momentos flectores negativos también en la dirección corta, para cada condición de continuidad de borde.

En cuanto a los momentos flectores positivos en la dirección corta, absolutamente en todos los tipos de condiciones de borde de las losas existen relaciones largo/ancho en las que los momentos en la franja central superan a los momentos en la franja de columnas, siendo el caso más crítico el de las losas aisladas. La proporción en que se distribuyen esos momentos flectores está muy lejos de ser constante, lo que revela que los resultados del uso del pórtico equivalente son cuestionables.

Con relación a los momentos flectores negativos existe un dominio absoluto de la absorción de momentos en la franja de columnas con respecto a la franja central, y nuevamente la proporción en que se distribuyen esos momentos en la losa es completamente variable.

A continuación se presentan los diagramas que describen la variación de momentos flectores en las losas con vigas embebidas o de peralte limitado, cuando se analizan las losas en la dirección larga.

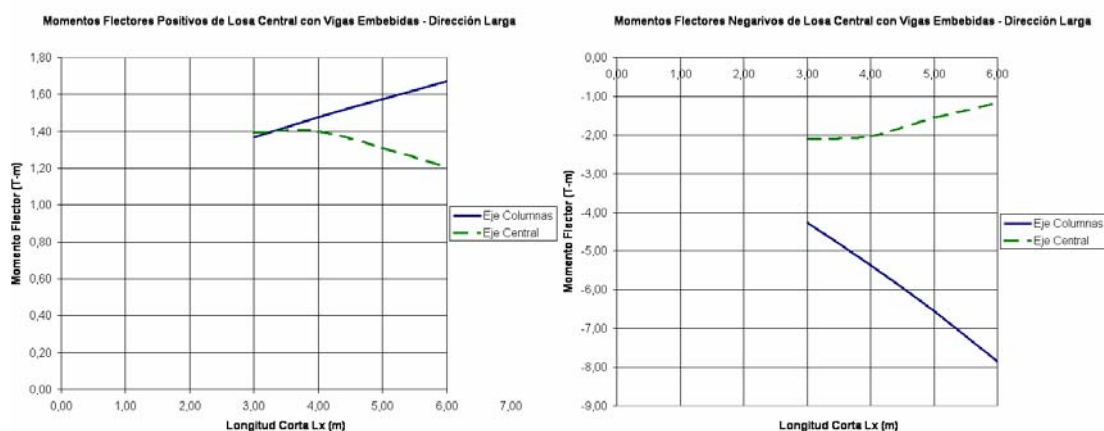


Figura 9.81: Variación de los momentos flectores positivos y negativos en la dirección larga, en losas centrales con vigas embebidas.

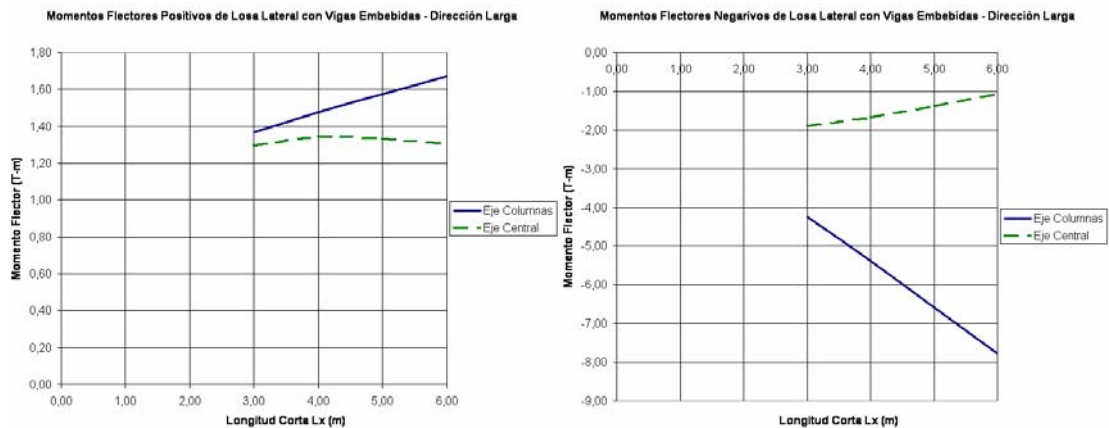


Figura 9.82: Variación de los momentos flectores positivos y negativos en la dirección larga, en losas laterales con vigas embebidas.

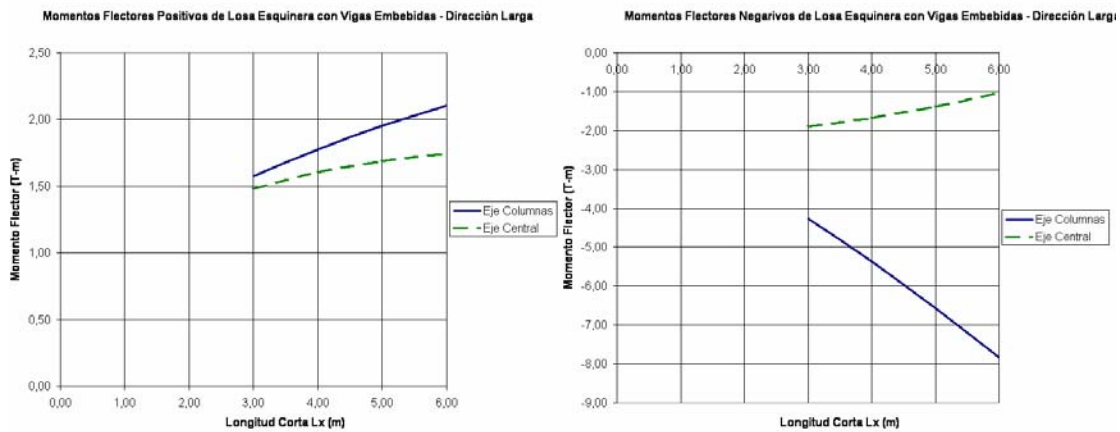


Figura 9.83: Variación de los momentos flectores positivos y negativos en la dirección larga, en losas esquineras con vigas embebidas.

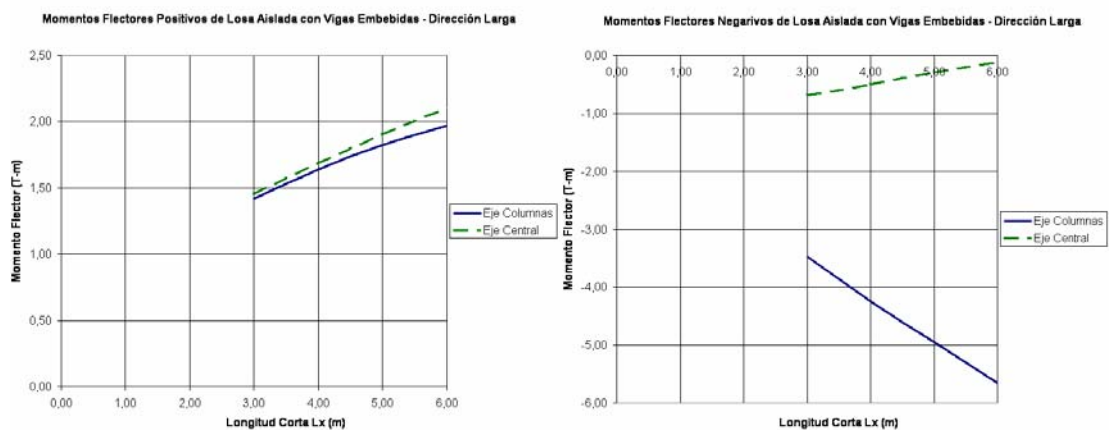


Figura 9.84: Variación de los momentos flectores positivos y negativos en la dirección larga, en losas aisladas con vigas embebidas.

Los gráficos izquierdos describen la variación de los momentos flectores positivos en la dirección larga de losas con vigas embebidas, mientras los gráficos derechos de cada figura describen la variación de los momentos flectores negativos también en la dirección larga, para cada condición de continuidad de borde.

En cuanto a los momentos flectores positivos en la dirección larga, aunque las losas aisladas se observa una relativa proporcionalidad en la distribución para la franja de columnas y para la franja central, para los otros tipos de condiciones de borde el comportamiento es extremadamente variable, llegándose a extremos en que mientras el un momento flector sube, el otro baja. Nuevamente se detecta que el pórtico equivalente no refleja la verdadera distribución de momentos.

Con relación a los momentos flectores negativos existe un relativo comportamiento homogéneo de las losas con todo tipo de condición de borde, pero mientras los momentos flectores crecen en la franja de columnas, los momentos flectores disminuyen en la franja central, lo que nuevamente se aleja de los modelos manejados con el Método del Pórtico Equivalente.

A continuación se presentan los diagramas de momentos flectores en los pórticos y en las losas, cuando actúan las cargas sísmicas.

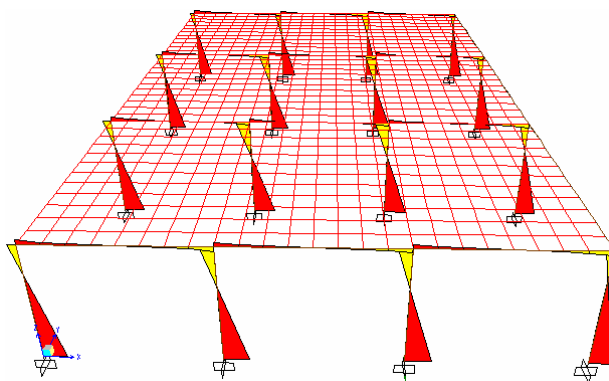


Figura 9.85: Diagramas de momentos en pórticos de losas con vigas embebidas con modulado.

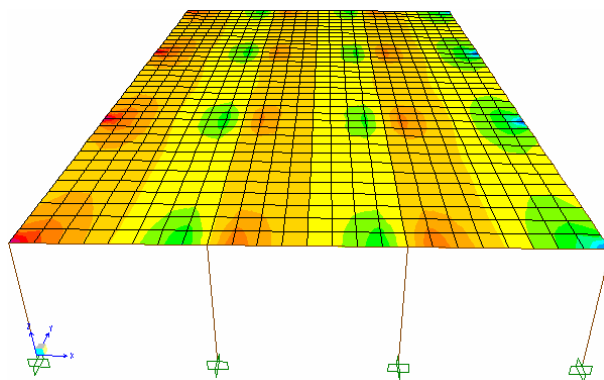


Figura 9.86: Perfiles de momentos flectores en dirección x en losas con vigas embebidas con modulado de 4m x 6m.

Las cargas sísmicas son absorbidas por los elementos estructurales de la franja de columnas (columnas, vigas embebidas y losa). En la franja central el efecto sísmico es mínimo. Este hecho revela la necesidad de diseñar con mayor cuidado la losa pues las articulaciones plásticas de los pórticos se extenderán inevitablemente a las losas. De igual manera se deberá prestar especial atención a la capacidad resistente a cortante en la losa cercana a las columnas.



9.6.5 Conclusiones y Recomendaciones:

El comportamiento de las losas con vigas embebidas y de poco peralte es diferente al de las losas con vigas descolgadas, debido a la limitada rigidez de las vigas que proporcionan muy poco apoyo a las losas.

La metodología del pórtico equivalente no es la más adecuada para modelar a las losas con vigas embebidas, pues conducen a modelar momentos flectores negativos de apoyo insuficientes sobre las columnas, momentos flectores positivos insuficientes en los tramos de franja central, y momentos flectores sobrevalorados en el resto de la estructura.

Cuando las losas disponen de vigas embebidas se produce un trabajo integrado de losas y vigas.

Bajo cargas sísmicas, prácticamente la totalidad del efecto se concentra en la franja de columnas.

Se requiere realizar un análisis detallado de las losas con vigas embebidas, sea mediante elementos finitos o mediante mallas de nervios para detectar el verdadero comportamiento de las losas.

REFERENCIAS:

- 9.1 Winter G. y Nilson A., *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, Editorial Reverté, S.A.
- 9.2 Jiménez P., García A. y Morán F., *Hormigón Armado*, Mateu Cromo, Artes Gráficas, S. A.
- 9.3 Park R. y Gamble W., *Losas de Concreto Reforzado*, Editorial LIMUSA S. A.
- 9.4 Park R. y Pauley T., *Estructuras de Concreto Reforzado*, Editorial LIMUSA S. A.
- 9.5 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 9.6 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.
- 9.7 Romo M., (2007), *Comportamiento de Losas con Vigas Embebidas y con Vigas de Poco Peralte*, XIX Jornadas Nacionales de Estructuras, Universidad del Chimborazo.



CAPÍTULO X

INTRODUCCIÓN AL DISEÑO DE CIMENTACIONES DE HORMIGÓN ARMADO

10.1 INTRODUCCIÓN:

La cimentación es la parte de la estructura que permite la transmisión de las cargas que actúan, hacia el suelo o hacia la roca subyacente.

Cuando los suelos reciben las cargas de la estructura, se comprimen en mayor o en menor grado, y producen asentamientos de los diferentes elementos de la cimentación y por consiguiente de toda la estructura. Durante el diseño se deben controlar tanto los asentamientos absolutos como los asentamientos diferenciales.

10.2 EL SUELO DE CIMENTACIÓN:

El suelo constituye el material de ingeniería más heterogéneo y más impredecible en su comportamiento, es por ello que los coeficientes de seguridad que suelen utilizarse son al menos de 3 con relación a la resistencia. La presencia de diferentes tipos de suelos y de distintos tipos de estructuras da lugar a la existencia de distintos tipos de cimentaciones.

10.3 TIPOS DE CIMENTACIONES:

Dependiendo de la ubicación y de las características de los estratos resistentes de suelos, las cimentaciones se clasifican en cimentaciones superficiales y cimentaciones profundas.

Entre las cimentaciones superficiales destacan los plintos aislados, las zapatas corridas, las zapatas combinadas, las vigas de cimentación y las losas de cimentación.

Entre las cimentaciones profundas se suelen utilizar los pilotes prefabricados hincados, los pilotes fundidos in situ y los caissons.

a. Plintos Aislados:

Se los utiliza como soporte de una sola columna, o de varias columnas cercanas en cuyo caso sirve de elemento integrador. Pueden utilizar una zapata de hormigón armado, o un macizo de hormigón simple o de hormigón ciclópeo.

Las zapatas de hormigón armado deberían tener al menos 40 cm de peralte en edificaciones de varios pisos, para asegurar una mínima rigidez a la flexión. Se pueden admitir espesores inferiores en el caso de estructuras livianas no superiores a dos pisos como viviendas unifamiliares con entramados de luces pequeñas, como pasos cubiertos, etc.

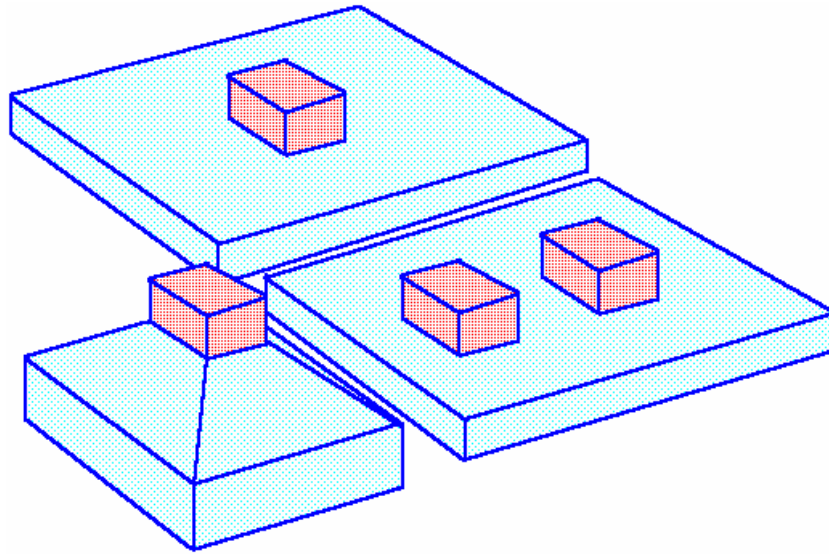


Figura 10.1: Plintos aislados de peralte constante o variable, que se utilizan como apoyo de columnas aisladas o columnas vecinas.

b. Zapatas Corridas:

Se las utilizan para cimentar muros o elementos longitudinales continuos de distintos materiales como hormigón o mampostería.

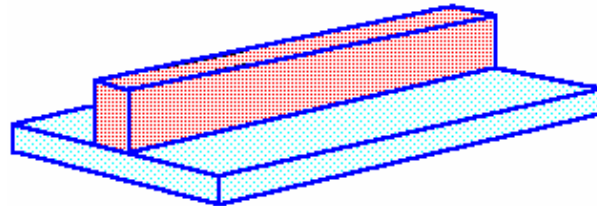


Figura 10.2: Zapata corrida para cimentar un muro.

c. Zapatas Combinadas:

Se las suele emplear para integrar el funcionamiento de una zapata inestable o ineficiente por sí sola, con otra zapata estable o eficiente, mediante una viga de rigidez.

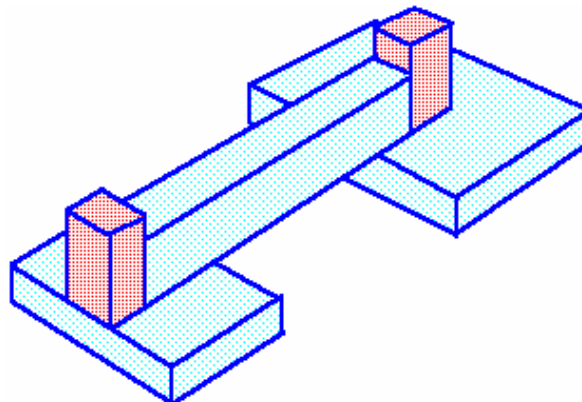


Figura 10.3: Zapata combinada para cimentar 2 columnas separadas, que incluye una viga de rigidez.

d. Vigas de Cimentación:

Se las emplea en suelos poco resistentes, para integrar linealmente la cimentación de varias columnas. Cuando se integran las columnas superficialmente mediante vigas de cimentación en dos direcciones, se forma una malla de cimentación.

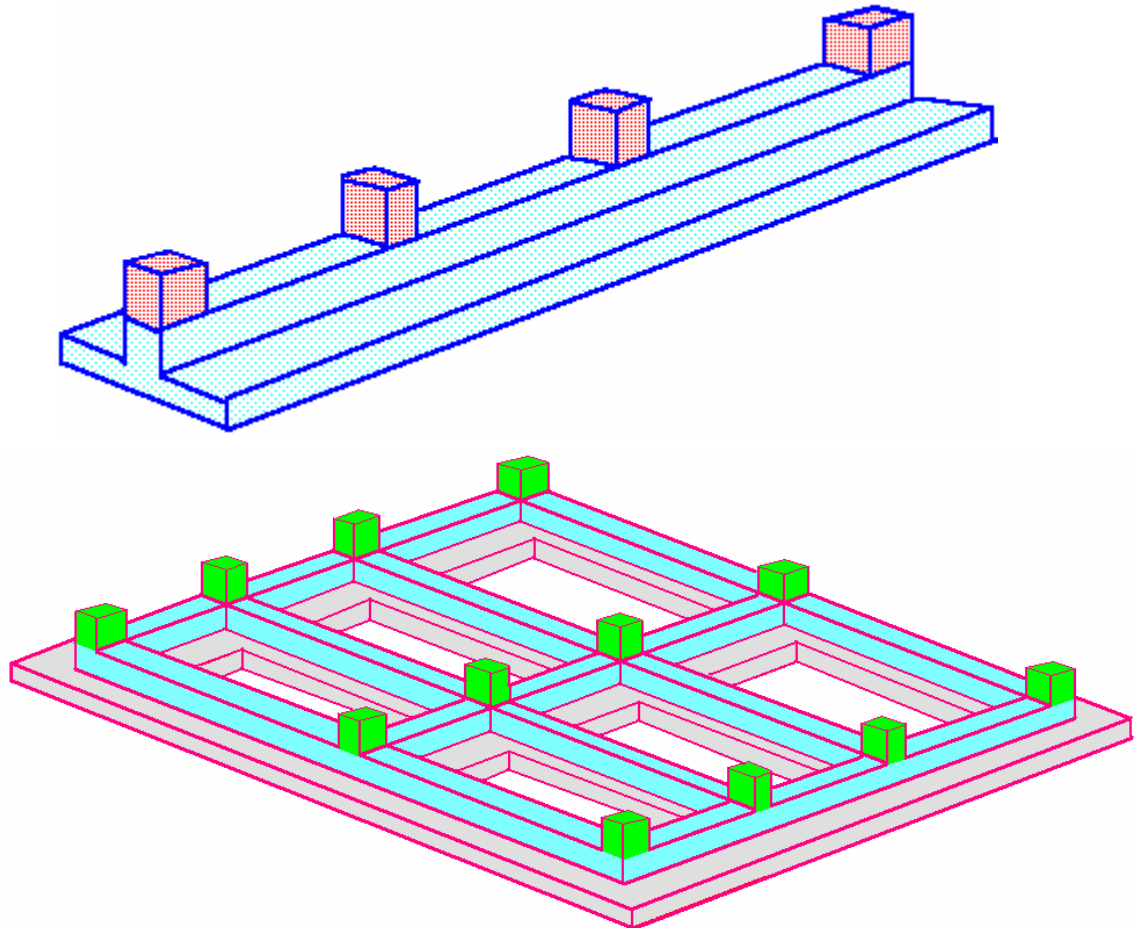


Figura 10.4: Viga de cimentación y malla de cimentación que integran la transmisión de cargas de uno o varios ejes de columnas.

e. Losas de Cimentación:

Se emplean en suelos poco resistentes, para integrar superficialmente la cimentación de varias columnas. Cuando al diseñar la cimentación mediante plintos aislados, la superficie de cimentación supera el 25% del área total, es recomendable utilizar vigas de cimentación o losas de cimentación.

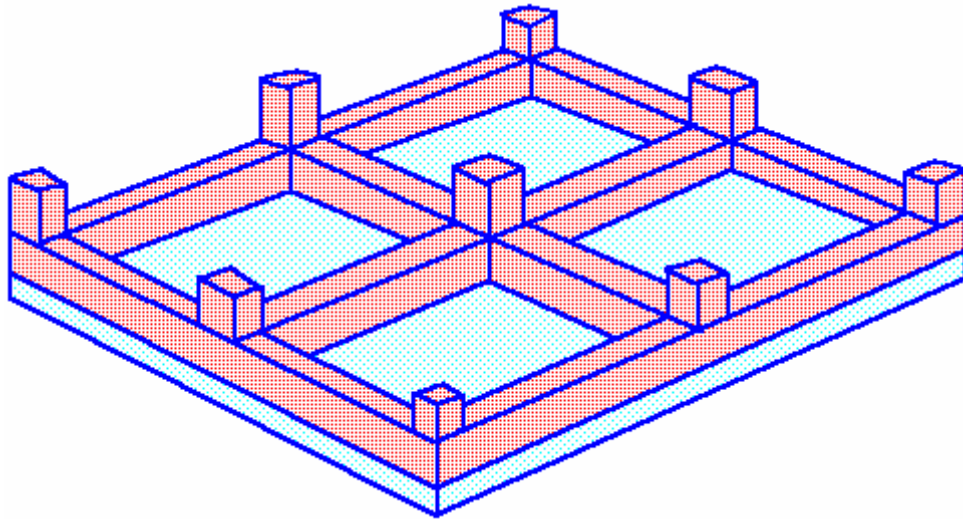


Figura 10.5: Losa de cimentación que integra la transmisión de cargas de varios ejes de columnas, en 2 direcciones ortogonales.

f. Pilotes:

Se los emplea cuando los estratos resistentes de suelo son muy profundos. Los pilotes pueden ser hincados (clavados en el suelo) o barrenados (pilotes metálicos huecos hincados en el suelo, que luego se convierten en encofrado del verdadero pilote; luego se excava el suelo y roca dentro del pilote metálico, y se funde internamente el pilote de hormigón armado). El hincado o el barrenado y fundido de pilotes permite que se alcancen los estratos resistentes.

Los pilotes suelen acoplarse, en su parte superior, a zapatas, vigas o losas de cimentación. Se utilizan varios pilotes para sustentar a cada unidad de cimentación.

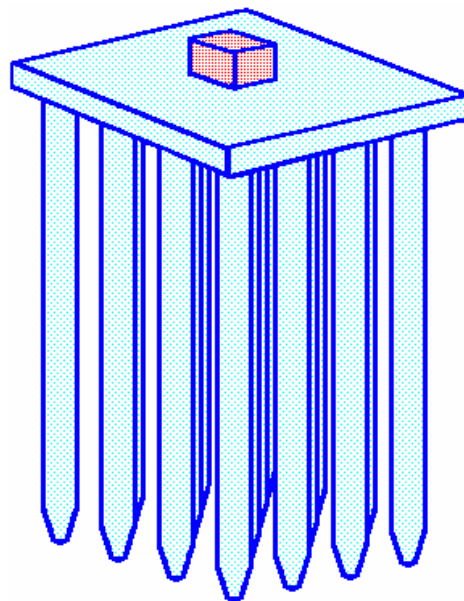


Figura 10.6: Malla de pilotes hincados que transmiten las cargas a estratos profundos del suelo, integrados a través de un cabezal.

Mientras los pilotes hincados desarrollan su resistencia vertical mediante reacciones en la punta, y fuerzas de fricción a lo largo del pilote, los pilotes barrenados solamente desarrollan resistencia en la punta.

g. Caissons:

Son una variedad de pilotes que se emplean cuando los estratos resistentes de suelo son medianamente o poco profundos y pueden excavarlos pozos mediante procedimientos manuales o mecánicos, los mismos que son rellenos con hormigón simple u hormigón armado. Se comportan como columnas enterradas.

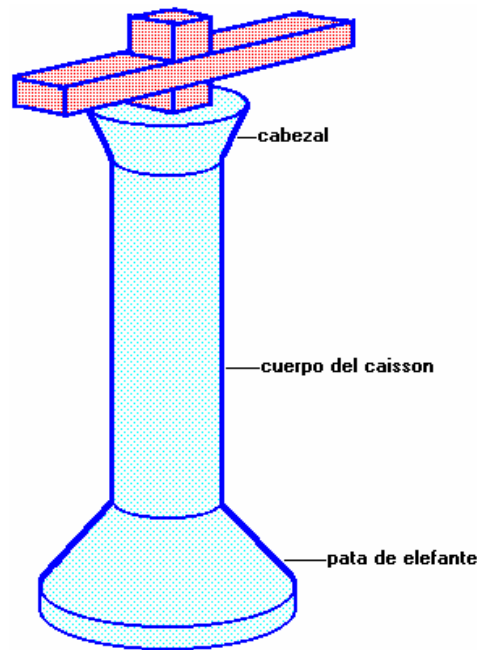


Figura 10.7: Caisson que transmite las cargas a estratos profundos del suelo.

10.4 CRITERIOS PARA EL DISEÑO DE PLINTOS:

Los esfuerzos en el suelo no deben sobrepasar los esfuerzos admisibles bajo condiciones de carga sin factores de mayoración [ACI 15.2.2].

Cuando las combinaciones de carga incluyan el efecto de solicitaciones eventuales como sismos y viento, los esfuerzos admisibles pueden incrementarse en un 33.3%.

Los asentamientos de las estructuras deberán calcularse incluyendo el efecto en el tiempo de suelos compresibles o consolidables como arcillas y suelos orgánicos.

El recubrimiento mínimo para el hierro, cuando el hormigón es fundido en obra en contacto con el terreno y queda permanentemente expuesto a él, es de 7 cm [CEC 7.7].

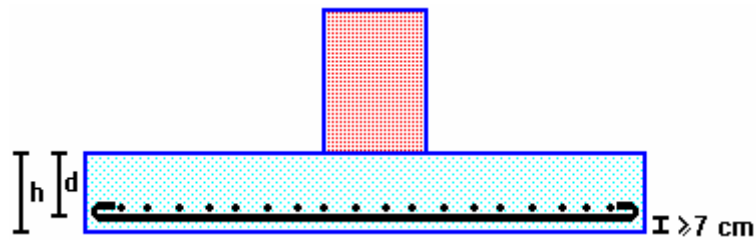


Figura 10.8: Recubrimiento mínimo del acero en cimentaciones.

Los plintos deberán diseñarse para resistir fuerzas cortantes tipo viga en cada dirección independientemente, tomando como sección crítica a una distancia **d** desde la cara de las columnas o elementos verticales [ACI 11.12].

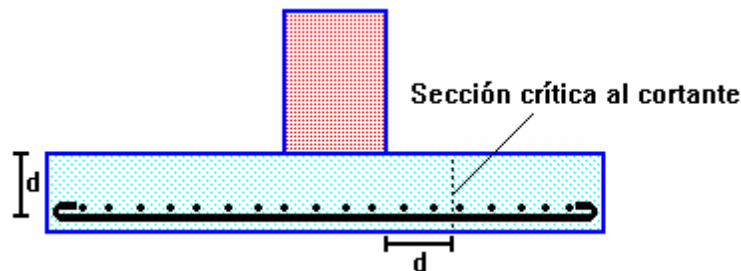


Figura 10.9: Sección crítica al cortante tipo viga en una zapata.

La capacidad resistente del hormigón a cortante tipo viga se calcula con la siguiente expresión [ACI 11.3.1.1]:

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c}$$

Ecuación (10.1)

Donde tanto **f'c** como **v_c** se expresan en Kg/cm².

Los plintos deberán diseñarse para resistir fuerzas cortantes de punzonamiento en dos direcciones simultáneamente [ACI 11.11.1.2], tomando como sección crítica a aquella que se ubica a una distancia **d/2** alrededor del elemento vertical de carga (columna, muro, etc.).

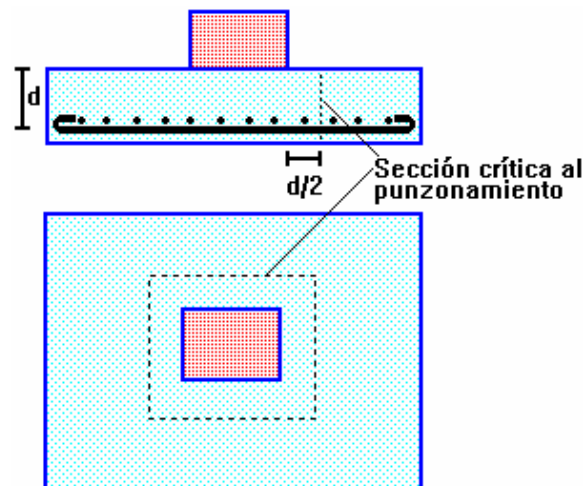


Figura 10.10: Sección crítica al cortante por punzonamiento.

La resistencia al cortante por punzonamiento que puede desarrollar el hormigón se calcula con el menor valor de las siguientes expresiones [ACI 11.11.2.1], también utilizadas en losas:

$$v_c = 1.06\sqrt{f'_c}$$

Ecuación (10.2)

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c} \left(1 + \frac{2}{\beta} \right)$$

Ecuación (10.3)

$$v_c = 0.27\sqrt{f'_c} \left(\frac{\alpha_s \cdot d}{b_o} + 2 \right)$$

Ecuación (10.4)

Donde:

- β : relación del lado largo al lado corto de la columna
- α_s : parámetro que vale 40 para columnas interiores, 30 para columnas de borde y 20 para columnas esquineras
- d : altura efectiva de la losa (distancia desde el centro de gravedad del acero de tracción hasta la cara comprimida extrema.
- b_o : perímetro de la sección crítica de cortante de la losa o zapata

Tanto f'_c como v_c se expresan en Kg/cm².

La sección crítica de flexión en una dirección se ubicará en las caras de los elementos verticales de carga [ACI 15.4.2].

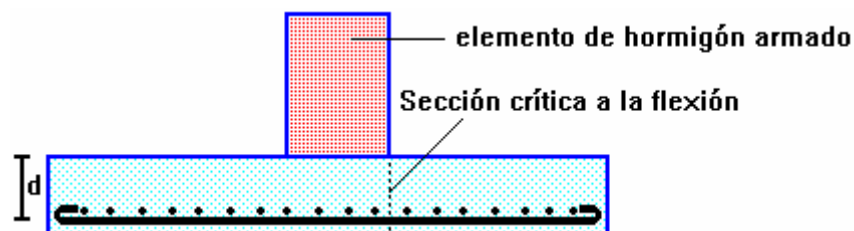


Figura 10.11: Sección crítica a la flexión en cimentaciones de columnas y muros de hormigón fundidos monolíticamente con la zapata.

En cimentaciones de muros de mampostería, la sección crítica de diseño a la flexión se considerará ubicada en la mitad, entre el eje medio y el borde del muro.

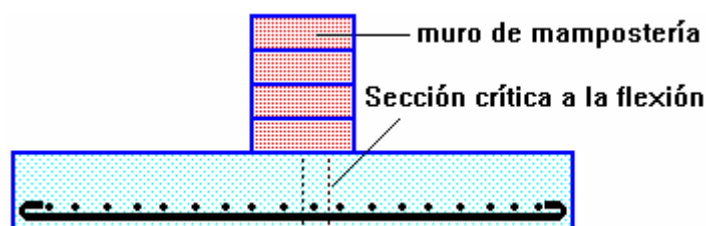


Figura 10.12: Sección crítica a la flexión en cimentaciones de muros de mampostería no integrados monolíticamente con la zapata.

En zapatas reforzadas en una dirección y en zapatas cuadradas reforzadas en dos direcciones, el acero de refuerzo debe distribuirse uniformemente a través del ancho total de la zapata [ACI 15.4.3].

En zapatas inclinadas o escalonadas, el ángulo de inclinación o la altura y colocación de los escalones serán tales que se satisfagan los requisitos de diseño en cada sección.

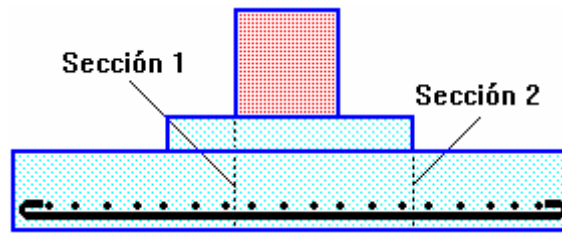


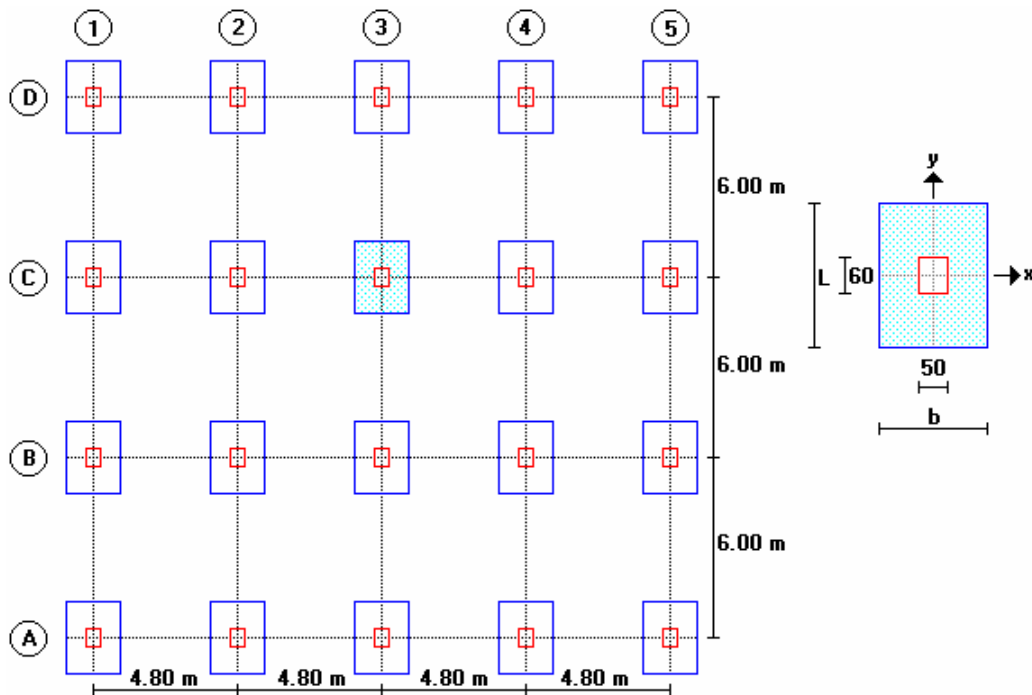
Figura 10.13: Secciones críticas para el diseño a flexión, por variabilidad del peralte de la zapata.

Las zapatas inclinadas o escalonadas que se dimensionen como una unidad, deben construirse para asegurar su comportamiento como tal (deberán ser monolíticas).

EJEMPLO 10.1:

Diseñar el plinto **C3** (cruce de los ejes **C** y **3**) que está sometido a las siguientes solicitaciones correspondientes a estados de carga gravitacionales de servicio y último:

- Carga de Servicio (**S = D + L**):
 $P = 80 \text{ T.}$
 $M_x = 12 \text{ T-m}$
 $M_y = 8 \text{ T-m}$
 Donde:
 P : carga axial de servicio
 M_x : momento de servicio alrededor del eje **x**
 M_y : momento de servicio alrededor del eje **y**
- Carga Ultima (**U = 1.4D + 1.7L**)
 $P_u = 120 \text{ T}$
 $M_{ux} = 19 \text{ T-m}$
 $M_{uy} = 13 \text{ T-m}$
 Donde:
 P_u : carga axial última
 M_{ux} : momento último alrededor del eje **x**
 M_{uy} : momento último alrededor del eje **y**



La capacidad resistente admisible del suelo es $q_a = 2 \text{ Kg/cm}^2$; la resistencia última del hormigón es 210 Kg/cm^2 , el esfuerzo de fluencia del acero es $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$, y el nivel de cimentación es 1.50 m por debajo de la superficie del suelo.

- Criterios para el dimensionamiento de plintos:**

En una estructura en que las losas están sometidas a cargas gravitacionales, y están soportadas por vigas perimetrales de mayor peralte, tanto la sección transversal de las columnas como las dimensiones en planta de los plintos conviene que guarden proporciones similares a los módulos de las losas, para que el diseño sea lo más económico posible. Este criterio obedece a que se espera que se presenten momentos flectores mayores en la dirección de las luces más largas.

En el presente diseño se espera que la dimensión **L** del plinto sea aproximadamente un 25% mayor que la dimensión **b** ($6.00 / 4.80 = 1.25$).

Cuando las estructuras están sometidas a sismos (no es el caso de este ejemplo), se pueden hacer crecer, a criterio del diseñador, las dimensiones de ciertas columnas en una dirección (dirección **x**), y hacer crecer otras columnas en la dirección ortogonal (dirección **y**). En este caso, las dimensiones de los plintos conviene que se aproximen a la proporcionalidad con las dimensiones de las columnas y no con las dimensiones de los módulos de losas, debido a que los momentos flectores causados por los sismos serán mayores en la dirección de la mayor dimensión de las columnas.

Cuando el área de cimentación de los plintos de una edificación supera aproximadamente el 25% del área del suelo de construcción, generalmente resulta más económico reemplazar los plintos por vigas de cimentación, o por losas de cimentación con vigas de cimentación.

- **Dimensionamiento de la superficie de contacto entre el plinto y el suelo de soporte:**

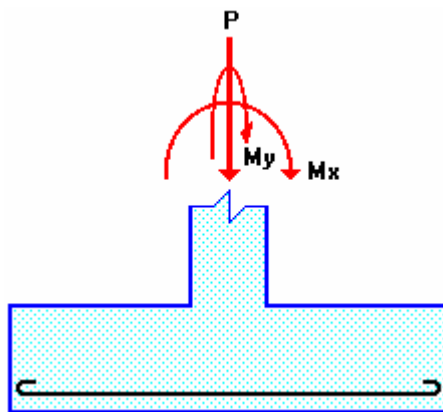
Los estados de carga de servicio ($S = D + L$) se utilizan para dimensionar la superficie de contacto entre el plinto y el suelo de soporte [ACI 15.2.2], debido a que la resistencia del suelo se la cuantifica mediante esfuerzos admisibles.

Si se desprecia la diferencia de peso específico entre el suelo sobre el nivel de cimentación y el peso específico del hormigón armado del plinto, las solicitaciones que actúan sobre el plinto son:

$$P = 80 \text{ T.}$$

$$M_x = 12 \text{ T-m}$$

$$M_y = 8 \text{ T-m}$$



Si no existieran momentos flectores, la sección transversal requerida sería:

$$A = \frac{P}{q_a} = \frac{80000 \text{ Kg}}{2 \text{ Kg/cm}^2} = 40000 \text{ cm}^2$$

Las dimensiones aproximadas requeridas para carga axial pura serían:

$$b = 1.80 \text{ m}$$

$$L = 2.20 \text{ m}$$

Las excentricidades de carga son:

$$e_x = \frac{M_y}{P} = \frac{800000 \text{ Kg-cm}}{80000 \text{ Kg}}$$

$$e_x = 10 \text{ cm}$$

$$e_y = \frac{M_x}{P} = \frac{1200000 \text{ Kg-cm}}{80000 \text{ Kg}}$$

$$e_y = 15 \text{ cm}$$

Se verifica si la carga está ubicada en el tercio medio de la cimentación:

$$e_x < b / 6$$

$$10 \text{ cm} < (180 \text{ cm} / 6) \quad (\text{O. K.})$$

$$e_y < L / 6$$

$$15 \text{ cm} < (220 \text{ cm} / 6) \quad (\text{O.K.})$$



Si se supone que el suelo trabaja con un comportamiento elástico, y debido a que la carga se encuentra en el tercio medio de la cimentación, puede aplicarse la siguiente expresión para calcular el esfuerzo máximo en el suelo, la misma que es una variante en presentación de las ecuaciones tradicionales de la Resistencia de Materiales para carga axial más flexión en dos direcciones ortogonales:

$$q_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{6e_x}{b} + \frac{6e_y}{L} \right]$$
$$q_{\text{máx}} = \frac{80000 \text{ Kg}}{(180 \text{ cm})(220 \text{ cm})} \left[1 + \frac{6(10 \text{ cm})}{180 \text{ cm}} + \frac{6(15 \text{ cm})}{220 \text{ cm}} \right] = 3.52 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo máximo (3.52 Kg/cm^2) es superior al esfuerzo permisible (2 Kg/cm^2), por lo que se requiere incrementar la sección transversal de cimentación en aproximadamente el 76% ($3.52 / 2.00 = 1.76$).

$$A = 1.76 (40000 \text{ cm}^2) = 70400 \text{ cm}^2$$

De donde las dimensiones básicas podrían ser:

$$b = 2.40 \text{ m}$$

$$L = 3.00 \text{ m}$$

$$A = (240 \text{ cm})(300 \text{ cm}) = 72000 \text{ cm}^2$$

Luego del recalcu de dimensiones, la carga permanece ubicada en el tercio medio de la cimentación, por lo que el esfuerzo máximo de reacción del suelo es:

$$q_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{6e_x}{b} + \frac{6e_y}{L} \right]$$
$$q_{\text{máx}} = \frac{80000 \text{ Kg}}{(240 \text{ cm})(300 \text{ cm})} \left[1 + \frac{6(10 \text{ cm})}{240 \text{ cm}} + \frac{6(15 \text{ cm})}{300 \text{ cm}} \right]$$
$$q_{\text{máx}} = 1.72 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo máximo de reacción del suelo (1.72 Kg/cm^2) es inferior al esfuerzo permisible (2 Kg/cm^2), por lo que vale la pena disminuir la sección transversal de cimentación en aproximadamente el 14% ($1.72 / 2.00 = 0.86$).

$$A = 0.86 (72000 \text{ cm}^2) = 61920 \text{ cm}^2$$

De donde las dimensiones básicas podrían ser:

$$b = 2.20 \text{ m}$$

$$L = 2.90 \text{ m}$$

$$A = (220 \text{ cm})(290 \text{ cm}) = 63800 \text{ cm}^2$$

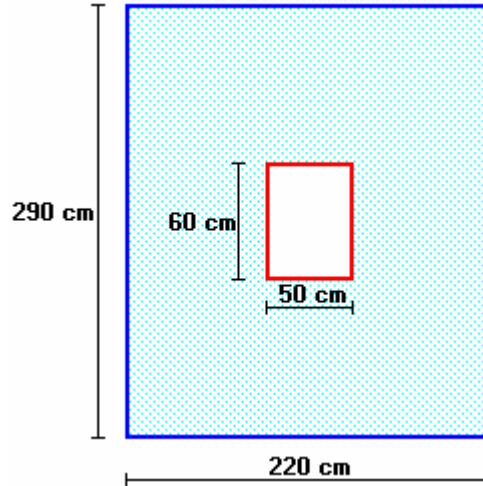
La carga está ubicada nuevamente en el tercio medio de la cimentación, por lo que el esfuerzo máximo de reacción del suelo es:

$$q_{\text{máx}} = \frac{P}{A} \left[1 + \frac{6e_x}{b} + \frac{6e_y}{L} \right]$$



$$q_{\max} = \frac{80000 \text{ Kg}}{(220 \text{ cm})(290 \text{ cm})} \left[1 + \frac{6(10 \text{ cm})}{220 \text{ cm}} + \frac{6(15 \text{ cm})}{290 \text{ cm}} \right] = 1.99 \text{ Kg / cm}^2$$

Las dimensiones en planta propuestas para el plinto son apropiadas.



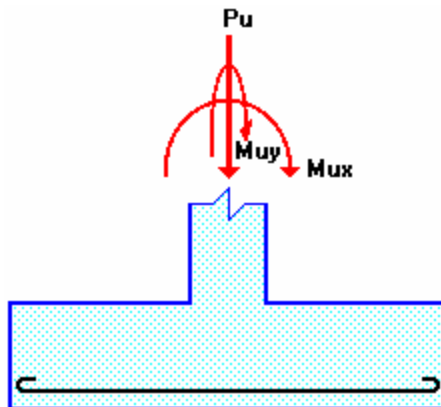
- Diagrama de reacciones del suelo de cimentación bajo cargas últimas:**

Las sollicitaciones últimas son:

$$P_u = 120 \text{ T}$$

$$M_{ux} = 19 \text{ T-m}$$

$$M_{uy} = 13 \text{ T-m}$$



Las excentricidades de carga son:

$$e_x = \frac{M_{u_y}}{P_u} = \frac{1300000 \text{ Kg - cm}}{120000 \text{ Kg}}$$

$$e_x = 10.8 \text{ cm}$$

$$e_y = \frac{M_{u_x}}{P_u} = \frac{1900000 \text{ Kg - cm}}{120000 \text{ Kg}}$$

$$e_y = 15.8 \text{ cm}$$



La carga está ubicada en el tercio medio de la cimentación, por lo que los cuatro esfuerzos últimos que definen el volumen de reacciones del suelo se pueden calcular mediante las siguientes expresiones:

$$q_1 = \frac{P_u}{A} \left[1 + \frac{6e_x}{b} + \frac{6e_y}{L} \right]$$

$$q_2 = \frac{P_u}{A} \left[1 - \frac{6e_x}{b} + \frac{6e_y}{L} \right]$$

$$q_3 = \frac{P_u}{A} \left[1 + \frac{6e_x}{b} - \frac{6e_y}{L} \right]$$

$$q_4 = \frac{P_u}{A} \left[1 - \frac{6e_x}{b} - \frac{6e_y}{L} \right]$$

$$q_1 = \frac{120000 \text{ Kg}}{(220 \text{ cm})(290 \text{ cm})} \left[1 + \frac{6(10.8 \text{ cm})}{220 \text{ cm}} + \frac{6(15.8 \text{ cm})}{290 \text{ cm}} \right]$$

$$\mathbf{q_1 = 3.05 \text{ Kg / cm}^2}$$

$$q_2 = \frac{120000 \text{ Kg}}{(220 \text{ cm})(290 \text{ cm})} \left[1 - \frac{6(10.8 \text{ cm})}{220 \text{ cm}} + \frac{6(15.8 \text{ cm})}{290 \text{ cm}} \right]$$

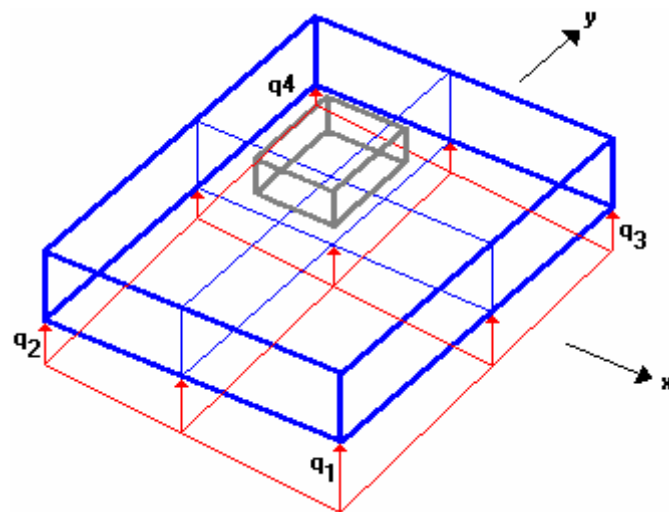
$$\mathbf{q_2 = 1.94 \text{ Kg / cm}^2}$$

$$q_3 = \frac{120000 \text{ Kg}}{(220 \text{ cm})(290 \text{ cm})} \left[1 + \frac{6(10.8 \text{ cm})}{220 \text{ cm}} - \frac{6(15.8 \text{ cm})}{290 \text{ cm}} \right]$$

$$\mathbf{q_3 = 1.82 \text{ Kg / cm}^2}$$

$$q_4 = \frac{120000 \text{ Kg}}{(220 \text{ cm})(290 \text{ cm})} \left[1 - \frac{6(10.8 \text{ cm})}{220 \text{ cm}} - \frac{6(15.8 \text{ cm})}{290 \text{ cm}} \right]$$

$$\mathbf{q_4 = 0.71 \text{ Kg / cm}^2}$$



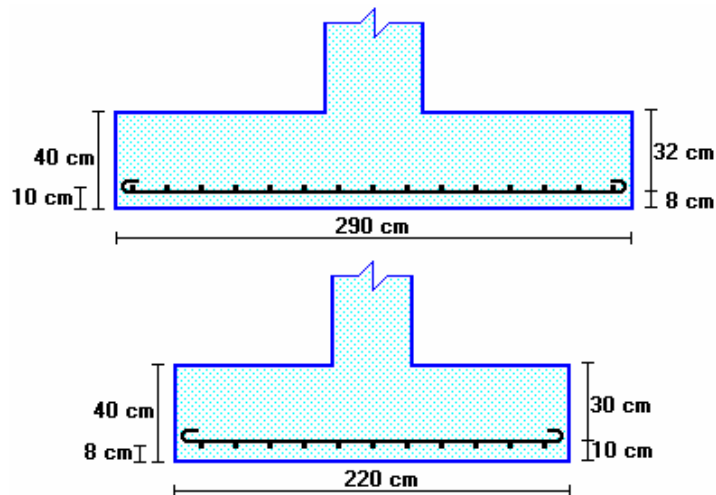


Los estados de carga últimos ($U = 1.4D + 1.7L$) se emplean para calcular el espesor del plinto y el refuerzo requerido, debido a que la capacidad resistente del hormigón y del acero se cuantifica mediante esfuerzos de rotura y esfuerzos de fluencia.

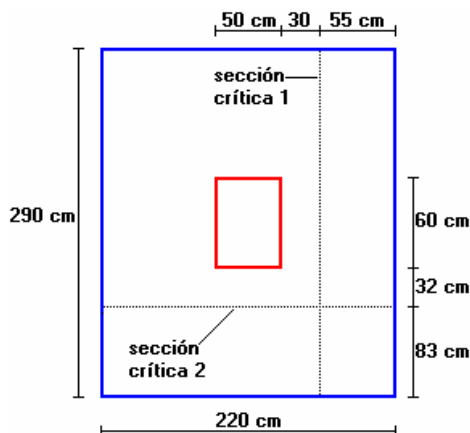
- **Diseño a Cortante Tipo Viga:**

El peralte de los plintos está definido por su capacidad resistente a **cortante tipo viga** y a **cortante por punzonamiento**. Para ambos casos se utilizan los estados de carga últimos.

Se asume una altura tentativa de 40 cm. para el plinto, y una distancia desde la cara inferior de hormigón hasta la capa de refuerzo de 10 cm en la dirección **x** y 8 cm en la dirección **y** (se ha supuesto un recubrimiento mínimo de 7.5 cm para el acero, y un diámetro aproximado de las varillas de refuerzo en las dos direcciones del orden de 15 mm.).



La sección crítica al cortante tipo viga se encuentra a 30 cm (**d**) de la cara de la columna en la dirección **x**, y a 32 cm (**d**) de la cara de la columna en la dirección **y**, en las dos orientaciones básicas, hacia el lado en que están presentes los esfuerzos máximos.





⇒ **Diseño en la Dirección x:**

La variación lineal de los esfuerzos de reacción del suelo, y el hecho de que la carga está ubicada en el tercio medio de la cimentación, determina que el promedio de todos los esfuerzos del suelo en la dirección x sean los esfuerzos sobre el eje centroidal, en dicha dirección.

$$q_{\text{máx}} = \frac{Pu}{A} \left[1 + \frac{6e_x}{b} \right]$$

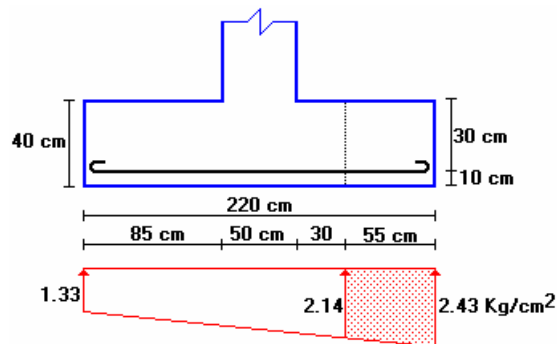
$$q_{\text{mín}} = \frac{Pu}{A} \left[1 - \frac{6e_x}{b} \right]$$

$$q_{\text{máx}} = \frac{120000 \text{ Kg}}{(220 \text{ cm})(290 \text{ cm})} \left[1 + \frac{6(10.8 \text{ cm})}{220 \text{ cm}} \right]$$

$$q_{\text{máx}} = 2.43 \text{ Kg/cm}^2$$

$$q_{\text{mín}} = \frac{120000 \text{ Kg}}{(220 \text{ cm})(290 \text{ cm})} \left[1 - \frac{6(10.8 \text{ cm})}{220 \text{ cm}} \right]$$

$$q_{\text{mín}} = 1.33 \text{ Kg/cm}^2$$



La fuerza cortante que actúa sobre la sección crítica es:

$$V_u = \left(\frac{2.43 \text{ Kg/cm}^2 + 2.14 \text{ Kg/cm}^2}{2} \right) (55 \text{ cm})(290 \text{ cm}) = 36446 \text{ Kg}$$

El esfuerzo cortante que actúa sobre la sección es:

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b \cdot d} = \frac{36446 \text{ Kg}}{(0.85)(290 \text{ cm})(30 \text{ cm})}$$

$$v_u = 4.93 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo de corte que es capaz de resistir el hormigón es:

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c} = 0.53\sqrt{210}$$

$$v_c = 7.68 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo de corte solicitante es inferior a la capacidad resistente del hormigón, por lo que el peralte del plinto es aceptable para la solicitación analizada.



$$v_u < v_c \quad (\text{O.K.})$$

⇒ **Diseño en la Dirección y:**

Los esfuerzos de reacción del suelo sobre el eje centroidal en la dirección y son:

$$q_{\text{máx}} = \frac{P_u}{A} \left[1 + \frac{6e_y}{L} \right]$$

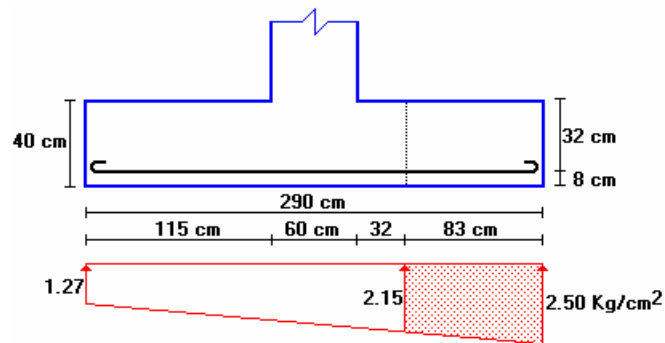
$$q_{\text{mín}} = \frac{P_u}{A} \left[1 - \frac{6e_y}{L} \right]$$

$$q_{\text{máx}} = \frac{120000 \text{ Kg}}{(220 \text{ cm})(290 \text{ cm})} \left[1 + \frac{6(15.8 \text{ cm})}{290 \text{ cm}} \right]$$

$$q_{\text{máx}} = 2.50 \text{ Kg/cm}^2$$

$$q_{\text{mín}} = \frac{120000 \text{ Kg}}{(220 \text{ cm})(290 \text{ cm})} \left[1 - \frac{6(15.8 \text{ cm})}{290 \text{ cm}} \right]$$

$$q_{\text{mín}} = 1.27 \text{ Kg/cm}^2$$



La fuerza cortante que actúa sobre la sección crítica es:

$$V_u = \left(\frac{2.50 \text{ Kg/cm}^2 + 2.15 \text{ Kg/cm}^2}{2} \right) (83 \text{ cm})(220 \text{ cm})$$

$$V_u = 42455 \text{ Kg}$$

El esfuerzo cortante que actúa sobre la sección es:

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b \cdot d} = \frac{42455 \text{ Kg}}{(0.85)(220 \text{ cm})(32 \text{ cm})}$$

$$v_u = 7.09 \text{ Kg/cm}^2$$

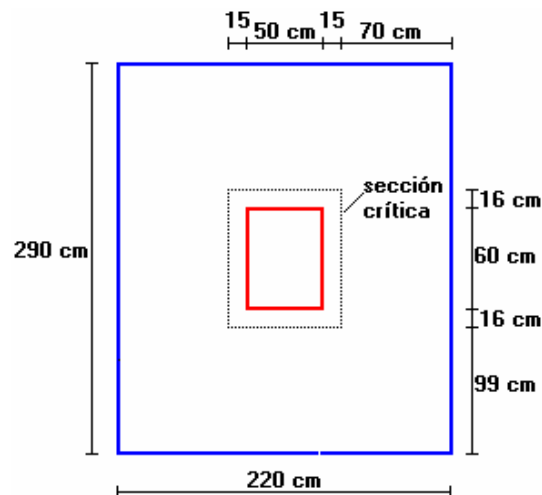
El esfuerzo de corte solicitante es inferior a la capacidad resistente del hormigón, por lo que el peralte del plinto es aceptable para la solicitación analizada.

$$v_u < v_c \quad (\text{O.K.})$$



- **Diseño a Cortante por Punzonamiento:**

La sección crítica a punzonamiento se sitúa alrededor de la columna con una separación de $d/2$ de sus caras (15 cm en la dirección x, y 16 cm en la dirección y).



La variación lineal de los esfuerzos de reacción del suelo, y el hecho de que la carga está ubicada en el tercio medio de la cimentación, determina que el promedio de todos los esfuerzos del suelo de cualquier sección cuyo centroide coincida con el centroide del plinto, sea el esfuerzo centoidal.

$$\bar{q} = \frac{P_u}{A} = \frac{120000 \text{ Kg}}{(220 \text{ cm})(290 \text{ cm})}$$

$$\bar{q} = 1.88 \text{ Kg/cm}^2$$

La fuerza cortante que actúa sobre la sección crítica es:

$$V_u = (1.88 \text{ Kg/cm}^2)[(220 \text{ cm})(290 \text{ cm}) - (50 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 15 \text{ cm})(60 \text{ cm} + 16 \text{ cm} + 16 \text{ cm})]$$

$$V_u = 106107 \text{ Kg}$$

El esfuerzo cortante por punzonamiento que actúa sobre la sección es:

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b \cdot d} = \frac{106107 \text{ Kg}}{(0.85)[(80 \text{ cm} + 80 \text{ cm})(30 \text{ cm}) + (92 \text{ cm} + 92 \text{ cm})(32 \text{ cm})]}$$

$$v_u = 11.68 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo resistente a corte por punzonamiento es:

$$v_c = 1.06\sqrt{f'_c} = 1.06\sqrt{210}$$

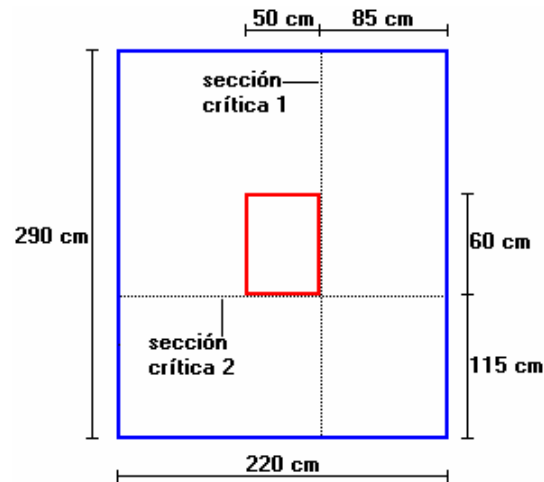
$$v_c = 15.36 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo de corte por punzonamiento solicitante es inferior a la capacidad resistente del hormigón, por lo que el peralte del plinto es aceptable para la sollicitación analizada.

$$v_u < v_c \quad (\text{O.K.})$$

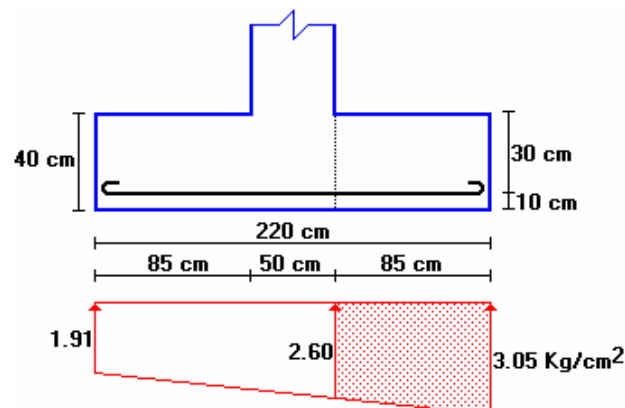
- **Diseño a Flexión:**

Las secciones críticas de diseño a flexión en las dos direcciones principales se ubican en las caras de la columna.



⇒ **Diseño a Flexión en la Dirección x:**

El refuerzo requerido por flexión será mayor en la franja en que se encuentra el máximo esfuerzo espacial de reacción del suelo ($q_1 \Leftrightarrow q_2$).



Para un ancho de diseño de 100 cm, se tiene la siguiente expresión para calcular el momento flector en la zona crítica, que subdivide la carga trapezoidal en una carga rectangular de ordenada 2.60 Kg/cm², más una carga triangular de ordenada máxima 0.45 Kg/cm² (3.05 - 2.60 = 0.45):

$$M_u = \left[\frac{(2.60 \text{ Kg/cm}^2)(85)^2}{2} + \left(\frac{(0.45 \text{ Kg/cm}^2)(85)}{2} \right) \left(\frac{2}{3}(85) \right) \right] (100)$$

$$M_u = 1047625 \text{ Kg-cm}$$

La sección de acero requerida, en la dirección **x**, para resistir el momento último en 100 cm de ancho es:

$$A_s = \frac{0.85f'_c b d}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M_u}{0.85\phi f'_c b d^2}} \right]$$



$$A_s = \frac{0.85(210)(100)(30)}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(1047625)}{0.85(0.90)(210)(100)(30)^2}} \right]$$

$$A_s = 9.60 \text{ cm}^2$$

La cuantía mínima de armado a flexión es:

$$\rho_{\min} = \frac{14}{F_y} = \frac{14}{4200}$$

$$\rho_{\min} = 0.003333$$

La sección mínima de armado para 100 cm de ancho es:

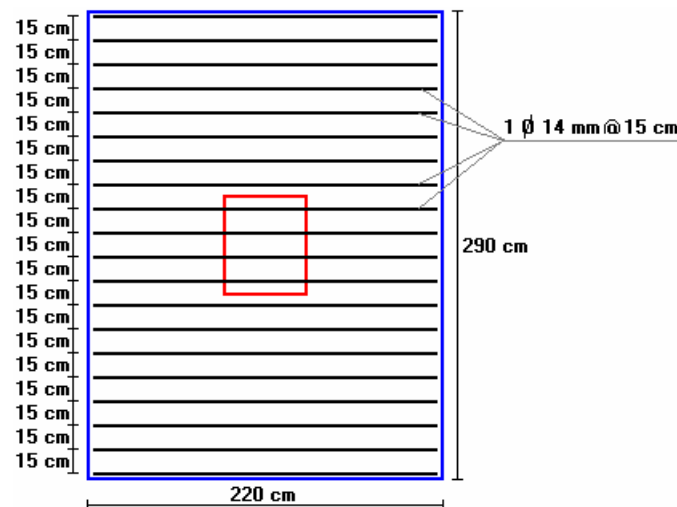
$$A_{s_{\min}} = \rho_{\min} \cdot b \cdot d = (0.003333) (100 \text{ cm}) (30 \text{ cm})$$

$$A_{s_{\min}} = 10.00 \text{ cm}^2$$

Dado que la sección mínima es superior a la obtenida para resistir el momento flector, el armado requerido es el armado mínimo:

$$A_s = 10.00 \text{ cm}^2$$

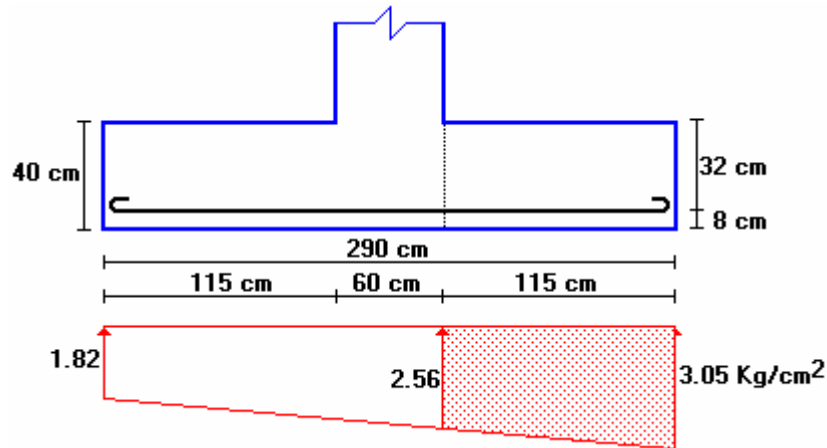
Se puede colocar 1 varilla de 14 mm orientada en la dirección x cada 15 cm, proporcionándose un armado de 10.27 cm^2 por cada 100 cm de ancho, lo que es equivalente a colocar 20 varillas de 14 mm de diámetro orientadas en la dirección x, en un ancho de 290 cm.



El gráfico anterior es incompleto pues queda pendiente la representación del armado en la dirección y.

⇒ **Diseño a Flexión en la Dirección y:**

El refuerzo requerido por flexión será mayor en la franja en que se encuentra el máximo esfuerzo espacial de reacción del suelo ($q_1 \Leftrightarrow q_3$).



Para un ancho de diseño de 100 cm, se tiene la siguiente expresión para calcular el momento flector en la zona crítica, que subdivide la carga trapezoidal en una carga rectangular de ordenada 2.56 Kg/cm², más una carga triangular de ordenada máxima 0.49 Kg/cm² (3.05 - 2.56 = 0.49):

$$M_u = \left[\frac{(2.56 \text{ Kg/cm}^2)(115)^2}{2} + \left(\frac{(0.49 \text{ Kg/cm}^2)(115)}{2} \right) \left(\frac{2}{3}(115) \right) \right] (100)$$

$$M_u = 1908808 \text{ Kg-cm}$$

La sección de acero requerida, en la dirección *y*, para resistir el momento último en 100 cm de ancho es:

$$A_s = \frac{0.85f'c.b.d}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M_u}{0.85\phi.f'c.b.d^2}} \right]$$

$$A_s = \frac{0.85(210)(100)(32)}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(1908808)}{0.85(0.90)(210)(100)(32)^2}} \right]$$

$$A_s = 16.82 \text{ cm}^2$$

La sección mínima de armado para 100 cm de ancho es:

$$A_{s_{\min}} = \rho_{\min} \cdot b \cdot d = (0.003333) (100 \text{ cm}) (32 \text{ cm})$$

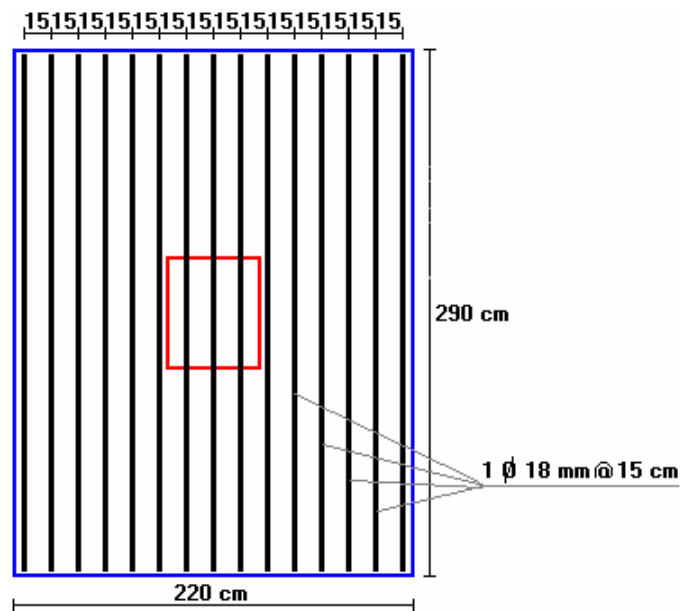
$$A_{s_{\min}} = 10.67 \text{ cm}^2$$

Dado que la sección de diseño a flexión es superior a la sección mínima, el armado requerido por flexión en la región crítica es el armado que debe utilizarse:

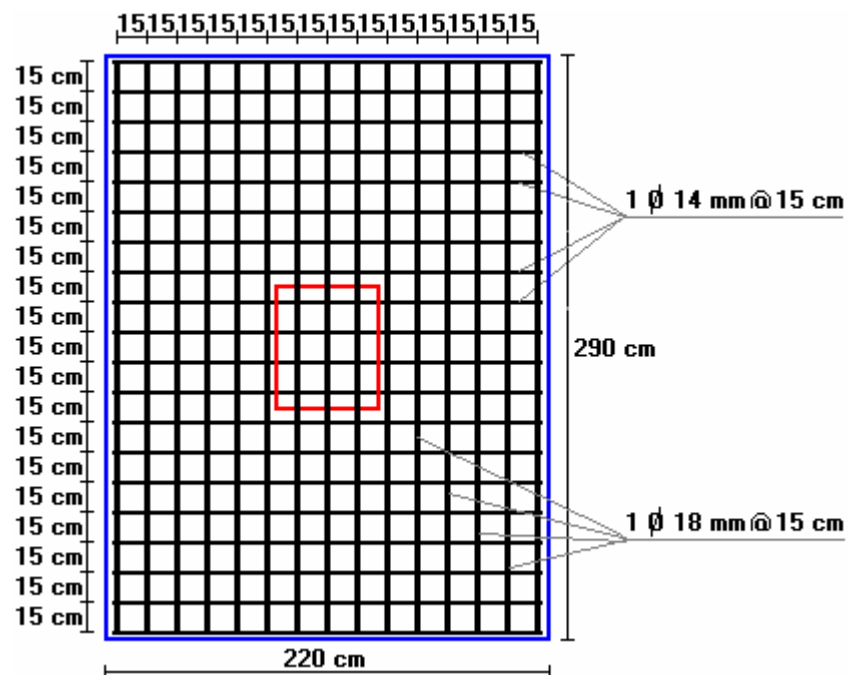
$$A_s = 16.82 \text{ cm}^2$$

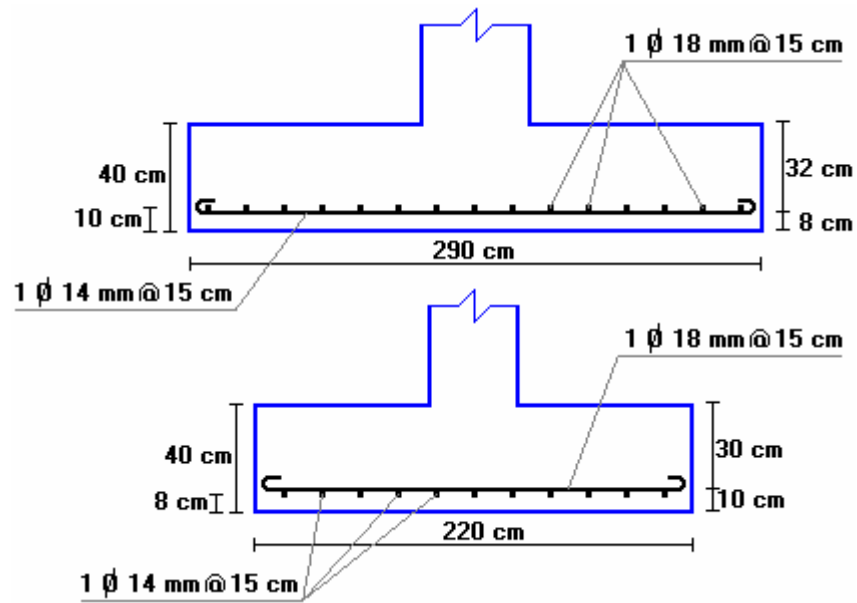
A pesar de que el momento flector varía desde un extremo transversal del plinto hasta el otro extremo, resulta conveniente mantener este armado a todo lo ancho del plinto.

Se puede colocar 1 varilla de 18 mm orientada en la dirección *y* y cada 15 cm, proporcionándose un armado de 16.93 cm² por cada 100 cm de ancho, lo que es equivalente a colocar 15 varillas de 18 mm de diámetro orientadas en la dirección *y*, en un ancho de 220 cm.



Los diagramas completos de la parrilla de armado por flexión son los siguientes:





REFERENCIAS:

- 10.1 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 10.2 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.
- 10.3 Nilson A., (1999), *Diseño de Estructuras de Concreto*, Mc Graw Hill.

CAPÍTULO XI

COMPRESIÓN AXIAL EN LOS ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO

11.1 INTRODUCCIÓN:

En términos generales, la manera más eficiente que tienen los elementos estructurales de resistir las solicitaciones se produce cuando tales solicitaciones tienen una orientación coincidente con el eje longitudinal de los elementos.



Figura 11.1: Elemento estructural sometido a compresión y tracción.

En este caso los elementos resisten a las solicitaciones mediante esfuerzos axiales (paralelos a las acciones) que pueden ser de tracción o compresión, dependiendo de las acciones externas.

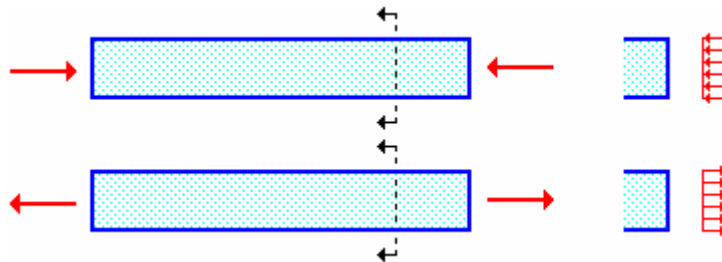


Figura 11.2: Esfuerzos internos generados por las fuerzas de compresión y de tracción.

El hormigón es un material particularmente apto para resistir las fuerzas de compresión, pero tiene una limitada resistencia a la tracción (apenas alrededor del 10% de su resistencia a la compresión).

El acero, por otra parte, es un material que se comporta eficientemente resistiendo las solicitaciones de tracción, pues alcanza toda su capacidad. El acero también puede llegar hasta el 100% de su resistencia ante solicitaciones de compresión, siempre que los elementos tengan dimensiones transversales importantes, lo que los vuelve muy costosos para nuestro medio, por que nuestro país no es productor de acero. En Norteamérica, Europa y Japón, que poseen industrias de acero altamente competitivas, el costo de los perfiles de acero puede ser comparable, y en ocasiones inferior al de otros materiales estructurales.

El **hormigón armado** aprovecha la gran resistencia a la compresión del hormigón y la capacidad de resistir solicitaciones de tracción del acero, integrándolas en un nuevo material compuesto.

La manera más ineficiente que tienen los elementos, para resistir a las solicitaciones, se produce cuando esas solicitaciones tienen una orientación perpendicular al eje longitudinal de los elementos.

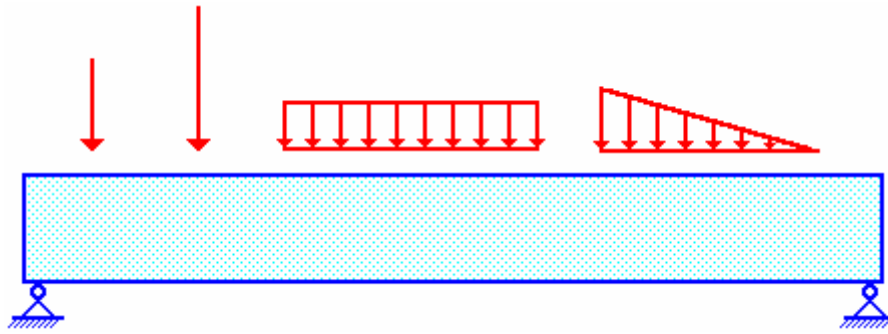


Figura 11.3: Viga sometida a fuerzas transversales.

En este caso, los elementos resisten las solicitaciones mediante esfuerzos longitudinales (perpendiculares a las acciones) que generan momentos flexionantes internos, que equilibran a los momentos flexionantes externos.

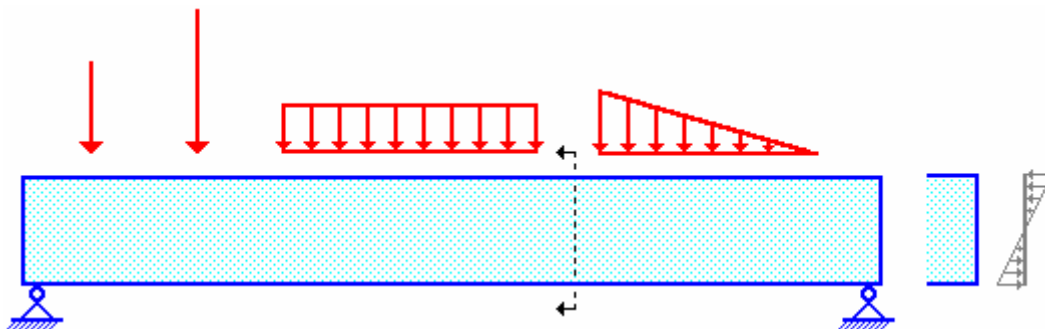


Figura 11.4: Esfuerzos longitudinales de flexión provocados por las cargas transversales.

11.2 COLUMNAS DE HORMIGÓN ARMADO:

Según su sección transversal, existen columnas cuadradas, columnas rectangulares, columnas circulares, columnas en L, columnas en T, columnas en cruz, etc.

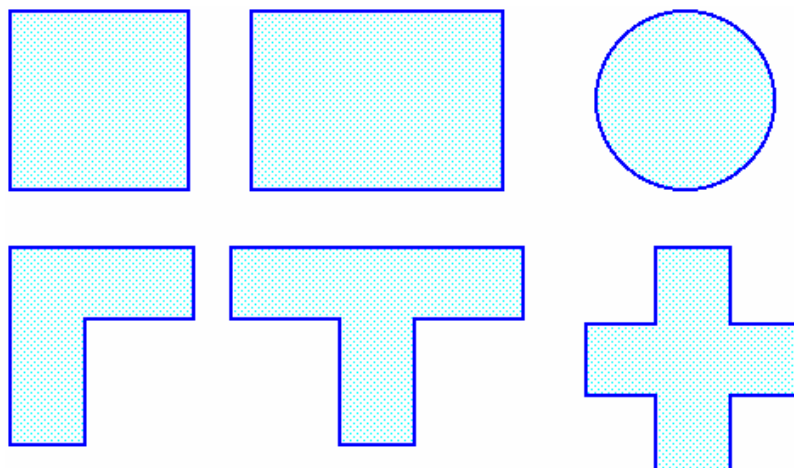


Figura 11.5: Distintas geometrías transversales de columnas.

Según su comportamiento ante las solicitaciones, existen fundamentalmente dos tipos de columnas de hormigón armado: columnas con estribos y columnas zunchadas.

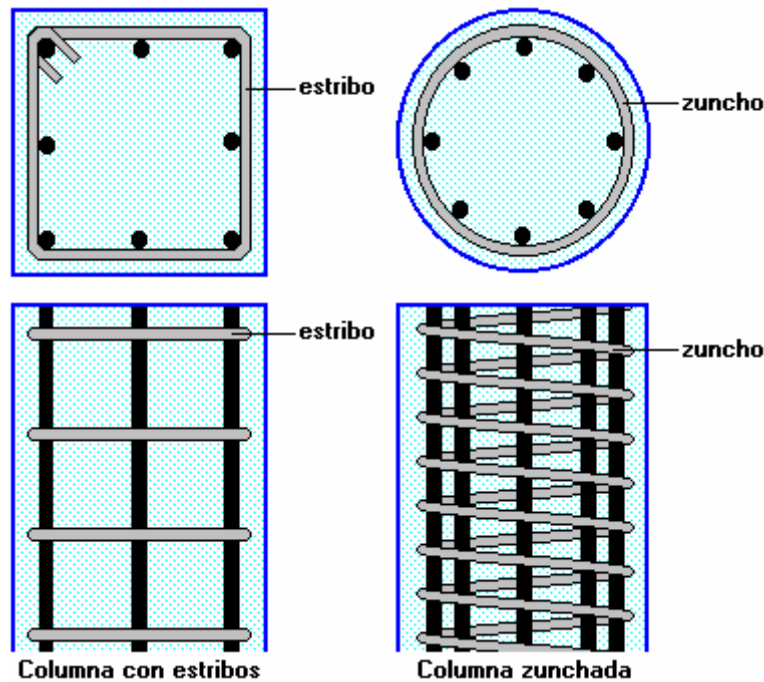


Figura 11.6: Columnas con estribos y columnas zunchadas.

Los estribos cumplen las siguientes funciones en las columnas:

- Definir la geometría de la armadura longitudinal
- Mantener en su sitio al hierro longitudinal durante la construcción
- Controlar el pandeo transversal de las varillas cuando están sometidas a compresión
- Colaborar en la resistencia a las fuerzas cortantes

Los zunchos helicoidales cumplen las siguientes funciones:

- Confinar al hormigón del núcleo de la columna para mejorar su capacidad resistente
- Definir la geometría de la armadura longitudinal
- Mantener en su sitio al hierro longitudinal durante la construcción
- Controlar el pandeo transversal de las varillas cuando están sometidas a compresión
- Colaborar en la resistencia a las fuerzas cortantes

11.3 LA RESISTENCIA DEL HORMIGÓN A PROCESOS DE CARGA LENTOS Y A CARGAS DE LARGA DURACIÓN:

La resistencia del hormigón a incrementos de carga lentos, y a cargas que permanecen durante largo tiempo actuando sobre el material, es menor que la resistencia del mismo hormigón sometido a procesos rápidos de carga y a cargas de corta duración.

La prueba estándar para medir la resistencia del hormigón, definida por ASTM (American Standards for Testing Materials), conlleva un proceso rápido de carga de cilindros, que usualmente toma menos de tres minutos para llegar a la rotura.

Para tener una visión más completa del comportamiento del material se han definido otros ensayos que permiten la carga lenta del hormigón, que pueden tomar varios minutos, varias horas, varios días e inclusive varios años, hasta llegar a la rotura de los especímenes. También se pueden definir ensayos ultra rápidos que toman segundos hasta alcanzar la rotura del hormigón.

Los elementos estructurales reales, sometidos a cargas de compresión, sufren un proceso lento de incremento de carga durante su fase de servicio, además de que mantienen niveles importantes de carga durante largos períodos de tiempo, por lo que, en el caso de columnas, la resistencia del hormigón a procesos de carga lenta es mucho más representativa que la resistencia estándar especificada por **ASTM**.

En el siguiente gráfico se presentan esquemáticamente las curvas esfuerzo-deformación de hormigones con resistencia a la rotura $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ según ASTM, sometidos a la prueba de carga de compresión axial estándar ASTM, a pruebas modificadas de carga lenta, y a pruebas modificadas de carga ultra rápida.

La resistencia a la rotura de los cilindros de hormigón, sometidos a carga lenta, llega a ser aproximadamente el 85% de la resistencia del mismo tipo de cilindros sometidos a carga estándar rápida ASTM, lo que es común para todas las resistencias de hormigones. Por su parte, cuando se realizan ensayos de carga ultra rápida, la resistencia del hormigón sobrepasa a la obtenida en los ensayos ASTM.

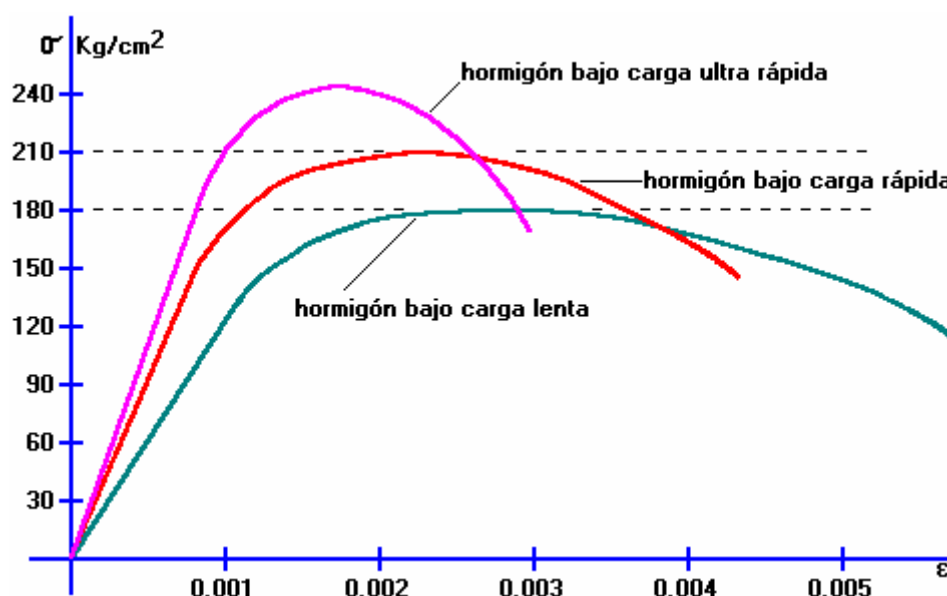


Figura 11.7: Curvas esfuerzo-deformación de hormigones sometidos a cargas lentas y rápidas.

Al diseñar elementos de hormigón armado, bajo fuerzas de compresión, es necesario tomar en consideración esta reducción del 15% en capacidad del material, por lo que la capacidad última del hormigón se deberá tomar como **$0.85 f'_c$** , y la capacidad general del material llegaría a ser solamente del 85% de la capacidad teórica fijada por los ensayos estándares [ACI 10.3.6.1, ACI 10.3.6.2].

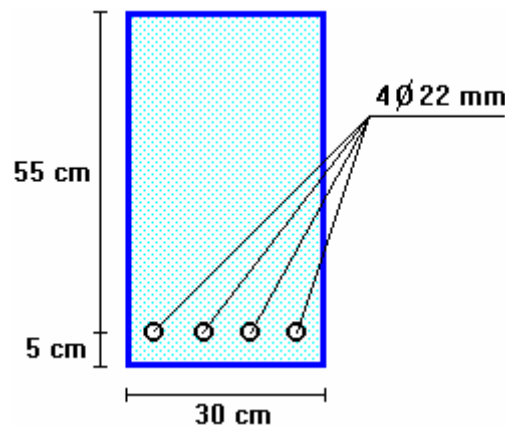
Un criterio similar podría fijarse para los elementos sometidos a flexión, pues también estos elementos se cargan lentamente y dicha carga perdura en el tiempo, pero la diferencia entre la capacidad última de las piezas al emplear una resistencia a la rotura



f'_c y $0.85 f'_c$ no es trascendente (no suele sobrepasar del 3%) por lo que, tanto el **Código Ecuatoriano de la Construcción (CEC)** como el **ACI (American Concrete Institute)** utilizan para diseño a flexión una resistencia f'_c , lo que facilita considerablemente la unificación de procedimientos y factores, en flexión y en compresión axial.

EJEMPLO 11.1:

Determinar el porcentaje de disminución de capacidad resistente de la viga de la figura cuyo acero tiene un esfuerzo de fluencia $f_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$, si se utiliza como capacidad máxima del hormigón $f_c = f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y $f_c = 0.85 f'_c = 178.5 \text{ Kg/cm}^2$.



$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 55 \text{ cm}$$

$$A_s = 15.20 \text{ cm}^2 \text{ (4 } \phi \text{ 22 mm)}$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

a. PRIMER CASO: Resistencia del hormigón a carga rápida ($f_c = f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$)

➤ **Cálculo de la cuantía de armado:**

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d}$$

$$\rho = \frac{15.20 \text{ cm}^2}{(30 \text{ cm})(55 \text{ cm})} = 0.00921$$

➤ **Cálculo de la cuantía balanceada:**

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003}$$

$$\rho_b = 0.85(0.85) \frac{210}{4200} \cdot \frac{0.003}{\frac{4200}{2100000} + 0.003} = 0.0218$$



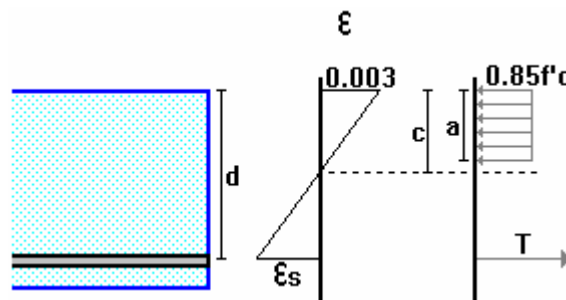
La cuantía de armado es inferior al 50% de la cuantía balanceada por lo que se satisfacen los criterios de diseño para zonas sísmicas, especificados en el Código Ecuatoriano de la Construcción.

➤ **Cálculo de la fuerza de tracción del acero:**

Dado que la cuantía de armado es inferior a la cuantía balanceada, el esfuerzo del acero es igual al esfuerzo de fluencia, por lo que:

$$T = A_s \cdot F_y = (15.20 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2)$$

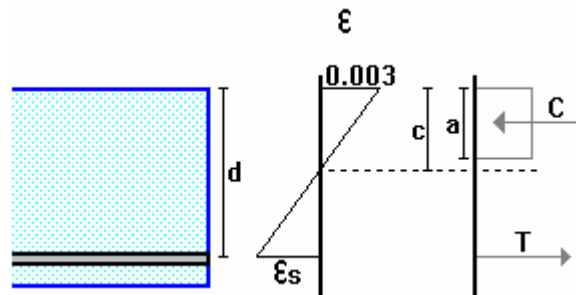
$$T = 63840 \text{ Kg}$$



➤ **Cálculo de la fuerza de compresión en el hormigón:**

Por equilibrio de fuerzas horizontales se tiene:

$$C = T = 63840 \text{ Kg}$$



➤ **Cálculo de la altura del bloque de compresión en el hormigón:**

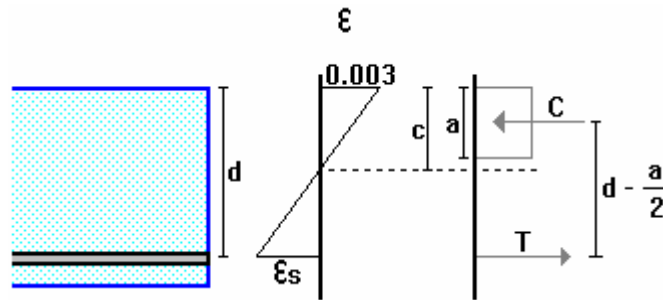
$$a = \frac{C}{0.85f'c \cdot b}$$

$$a = \frac{63840 \text{ Kg}}{0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})} = 11.92 \text{ cm}$$

➤ **Cálculo del momento nominal resistente:**

$$M_n = T (d - a / 2) = (63840 \text{ Kg}) (55 - 11.92 / 2) \text{ cm}$$

$$M_n = 3130700 \text{ Kg - cm}$$



- **Cálculo del momento último resistente:**

$$M_u = \phi \cdot M_n$$

$$M_u = 0.90 (3130700 \text{ Kg} \cdot \text{cm}) = 2817600 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

$$M_{u,1} = 2817600 \text{ Kg} \cdot \text{cm}$$

b. SEGUNDO CASO: Resistencia del hormigón a carga lenta ($f_c = 0.85 f'_c = 178.5 \text{ Kg/cm}^2$)

- **Cálculo de la cuantía de armado:**

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} = \frac{15.20 \text{ cm}^2}{(30 \text{ cm})(55 \text{ cm})} = 0.00921$$

- **Cálculo de la cuantía balanceada:**

$$\rho_b = 0.85 \beta_1 \frac{f'_c}{F_y} \cdot \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003}$$

$$\rho_b = 0.85(0.85) \frac{178.5}{4200} \cdot \frac{0.003}{\frac{4200}{2100000} + 0.003} = 0.0184$$

La cuantía de armado es el 50% de la cuantía balanceada por lo que se satisfacen los criterios de diseño para zonas sísmicas.

- **Cálculo de la fuerza de tracción del acero:**

$$T = A_s \cdot F_y = (15.20 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 63840 \text{ Kg}$$

- **Cálculo de la fuerza de compresión en el hormigón:**

$$C = T = 63840 \text{ Kg}$$

- **Cálculo de la altura del bloque de compresión en el hormigón:**

$$a = \frac{C}{0.85 f'_c b} = \frac{63840 \text{ Kg}}{0.85(178.5 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})} = 14.03 \text{ cm}$$

➤ **Cálculo del momento nominal resistente:**

$$M_n = T (d - a/2) = 63840 \text{ Kg} (55 - 14.03/2) \text{ cm}$$

$$M_n = 3063400 \text{ Kg-cm}$$

➤ **Cálculo del momento último resistente:**

$$M_u = \phi \cdot M_n = 0.90 M_n = (0.90) (3063400 \text{ Kg-cm})$$

$$M_{u,2} = 2757000 \text{ Kg-cm}$$

➤ **Porcentaje de disminución de capacidad resistente:**

$$\% \text{ dism. capacidad} = \frac{M_{u,1} - M_{u,2}}{M_{u,1}} \times 100 = \frac{2817600 - 2757000}{2817600} \times 100$$

$$\% \text{ disminución de capacidad} = 2.15 \%$$

La influencia de la disminución de la resistencia del hormigón bajo cargas de incremento lento o cargas que actúan a largo plazo, que ocurre en la mayor parte de las estructuras, es mínima cuando los elementos están sometidos fundamentalmente a solicitaciones flexionantes.

11.4 RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN DE COLUMNAS DE HORMIGÓN ARMADO CON ESTRIBOS TRANSVERSALES:

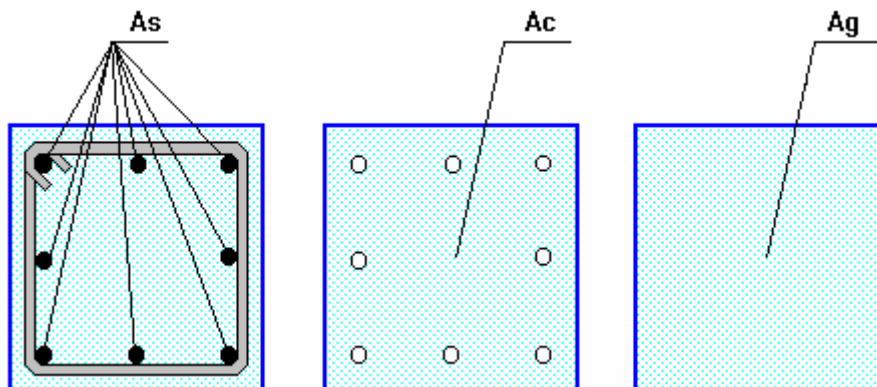


Figura 11.8: Componentes de la sección transversal de una columna de hormigón armado.

A_s = área de acero de refuerzo longitudinal

A_c = área de hormigón descontado el refuerzo longitudinal

A_g = área geométrica de la sección

La resistencia a la compresión de columnas de hormigón armado con estribos transversales se obtiene añadiendo la capacidad resistente del hormigón bajo cargas que incrementan lentamente, a la capacidad resistente del acero longitudinal (armadura principal). La **carga axial nominal** y la **carga axial última** se determinan con las siguientes expresiones [ACI 10.3.6.2] que no consideran la excentricidad mínima:

$P_n = 0.85 \cdot f'_c \cdot A_c + A_s \cdot F_y$	Ecuación (11.1)

$$P_u = \phi \cdot P_n$$

$$P_n = \phi \cdot (0.85 \cdot f'_c \cdot A_c + A_s \cdot F_y) \quad \text{Ecuación (11.2)}$$

Donde:

$\phi = 0.70$ para columnas con estribos

El ACI [ACI 10.3.6.2] recomienda realizar una reducción del 20% de la capacidad de las columnas no zunchadas, para obtener la **carga axial última efectiva**, debido a la presencia de eccentricidades mínimas no controlables en las solicitaciones.

$$P_{u,ef} = 0.80 \phi \cdot (0.85 \cdot f'_c \cdot A_c + A_s \cdot F_y) \quad \text{Ecuación (11.3)}$$

La cuantía de armado en columnas se define tomando como referencia el área geométrica de la sección transversal, y puede ser determinada mediante la siguiente expresión:

$$\rho = \frac{A_s}{A_g} \quad \text{Ecuación (11.4)}$$

La carga axial última puede ser reemplazada por la siguiente relación, en función de la cuantía de armado:

$$P_u = \phi (0.85 f'_c \cdot A_c + \rho \cdot A_c \cdot F_y)$$

Y la axial última efectiva sería:

$$P_{u,ef} = 0.80 \phi \cdot (0.85 \cdot f'_c \cdot A_c + \rho \cdot A_c \cdot F_y) \quad \text{Ecuación (11.5)}$$

Para zonas no sísmicas, los códigos de construcción vigentes en nuestro país (ACI y Código Ecuatoriano de la Construcción) establecen que la cuantía mínima de armado principal en columnas sea de 0.01 y la cuantía máxima de armado sea de 0.08 [ACI 10.9.1].

Para zonas sísmicas, el ACI y el CEC establecen una cuantía mínima de armado principal en columnas de 0.01 [ACI 10.9, CEC 10.9] **y una cuantía máxima más restrictiva de 0.06** [ACI 21.6.3.1, CEC 21.4.3.1].

$$\rho_{\min} = 0.01$$

$$\rho_{\max} = 0.06$$

En zonas sísmicas el diámetro mínimo de las varillas que conforman el armado longitudinal y los estribos debe ser de 10 mm [ACI 7.10.5.1].

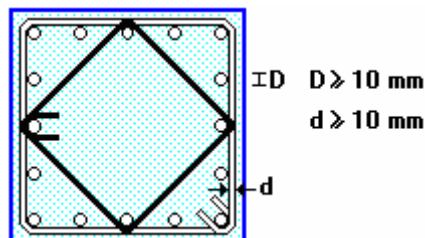


Figura 11.9: Diámetro mínimo de las varillas de refuerzo en columnas de hormigón armado.

Si las varillas longitudinales superan los 32 mm de diámetro y paquetes de varillas, las varillas transversales deberán tener al menos 12 mm de diámetro [ACI 7.10.5.1].

En zonas no sísmicas la sección transversal mínima de una columna rectangular debe ser 600 cm^2 , y su dimensión transversal mínima debe ser 20 cm.

En zonas sísmicas, la dimensión transversal mínima de las columnas y vigas con estribos debe ser de 30 cm [ACI 21.6.1.1].

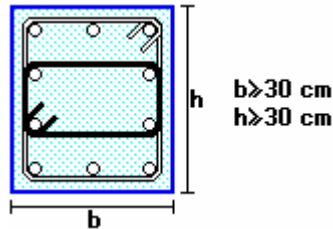


Figura 11.10: Dimensión mínima de las columnas con estribos, en zonas sísmicas.

NOTA: El criterio anterior (dimensión mínima de 30 cm) debería ser modificado en el Código Ecuatoriano de la Construcción (previa investigación), para el caso de viviendas unifamiliares con luces pequeñas, pues tiene un efecto limitante para la vivienda económica.

En zonas sísmicas, el esfuerzo de fluencia del acero F_y no debe sobrepasar de 4200 Kg/cm^2 , para cumplir con criterios de ductilidad en el hormigón armado [ACI 21.1.5.1].

A pesar de que el siguiente criterio no lo recogen los códigos de diseño, **en nuestro medio no es conveniente utilizar en columnas, cuantías de armado superiores a 0.025 por aspectos de economía de construcción** (nuestro país no es productor de acero sino simplemente laminador del mismo, por lo que su costo es comparativamente alto). Este límite práctico puede ser excedido puntualmente por requerimientos arquitectónicos.

En columnas y vigas rectangulares el número mínimo de varillas longitudinales será de 4 (una en cada esquina), lo que permitirá el armado adecuado de los estribos con tramos paralelos a cada una de las caras [ACI 10.9.2].

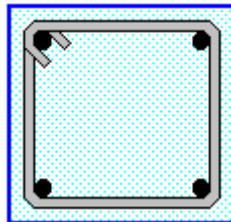


Figura 11.11: Número mínimo de varillas longitudinales en una columna.

Extendiendo la especificación anterior, **en columnas que pueden ser divididas en secciones rectangulares, deberán existir varillas longitudinales en cada esquina de los estribos rectangulares necesarios para que cada cara exterior recta de la sección transversal contenga al menos un ramal de estribo, y deberán existir varillas en cada vértice de la sección de hormigón.**

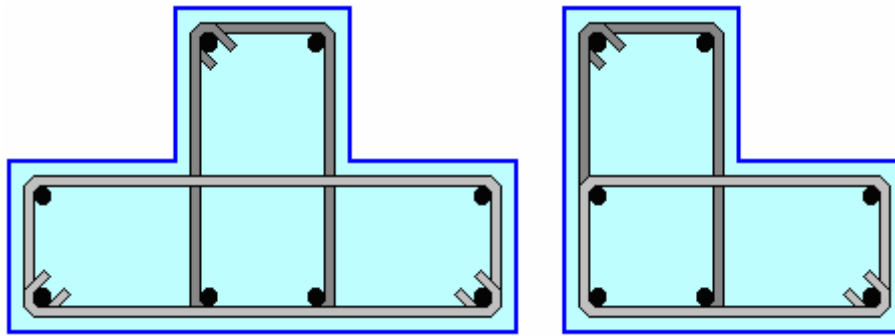


Figura 11.12: Número mínimo de varillas longitudinales en columnas de varias secciones rectangulares combinadas.

Las varillas longitudinales y transversales deberán tener resaltes (corrugado) para favorecer su adherencia con el hormigón [CEC 3.5.1].

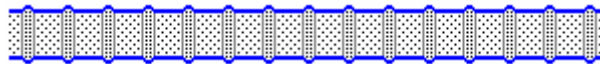


Figura 11.13: Varillas con resaltes.

Con el objeto de salvaguardar la integridad de la armadura de acero, ante el efecto corrosivo del medio ambiente, **en hormigones fundidos en sitio, el ACI y el CEC establecen que el recubrimiento mínimo del acero longitudinal y transversal en columnas debe ser de 4 cm** [CEC 10.9.2].

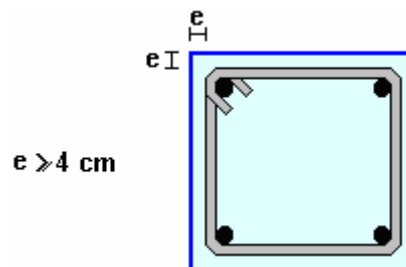


Figura 11.14: Recubrimiento mínimo de las varillas de armado.

En columnas prefabricadas, el recubrimiento mínimo puede disminuir a 2.5 cm.

En ambientes agresivos, como aquellos que se producen por la presencia constante de sal en el ambiente (zona costera), ácido láctico (pasteurizadoras) o materiales orgánicos en descomposición (camales, zonas de acumulación de desechos), el recubrimiento mínimo deberá ser mayor al especificado anteriormente, y será determinado de acuerdo a los niveles de aislamiento que ofrezcan los materiales presentes. Inclusive puede ser necesario el recubrimiento de las estructuras de hormigón armado mediante capas de materiales aislantes como pinturas especiales, capas de gran resistencia como endurecedores de piso, o aditivos químicos que mejoren ciertas características del hormigón [ACI 7.7.6].

De igual manera, si el hormigón armado puede estar sometido a altas temperaturas provocadas por incendios o por el tipo de utilización de la estructura, el recubrimiento deberá ser superior al mínimo especificado con anterioridad [ACI 7.7.8].

El espaciamiento mínimo entre caras externas en varillas longitudinales de columnas deberá ser el mayor de los siguientes tres valores [ACI 7.6.3, ACI 3.3.2]:

- 4 cm

- 1.5 veces el diámetro de las varillas longitudinales
- 1.33 veces el tamaño máximo del agregado grueso

Estos criterios tienen por objeto que el hormigón recubra adecuadamente a las varillas longitudinales de acero, evitándose posibles discontinuidades en la adherencia entre el acero y el hormigón debido a la presencia de hormigueros.

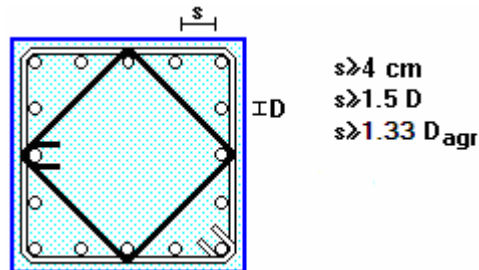


Figura 11.15: Espaciamiento mínimo entre varillas longitudinales.

Las varillas longitudinales pueden ser agrupadas en paquetes compactos de 2, 3 o 4 varillas paralelas, en contacto permanente, las que, para efectos de diseño, actúan como una sola unidad de diámetro equivalente. El diámetro equivalente se calcula en función de la suma de las áreas de las varillas del paquete, y permite calcular, entre otras, la longitud de traslape y la longitud de anclaje. Deben proveerse de sujetadores de alambre u otros mecanismos adecuados para asegurar que las varillas de un paquete permanezcan juntas [ACI 7.6.6.5].

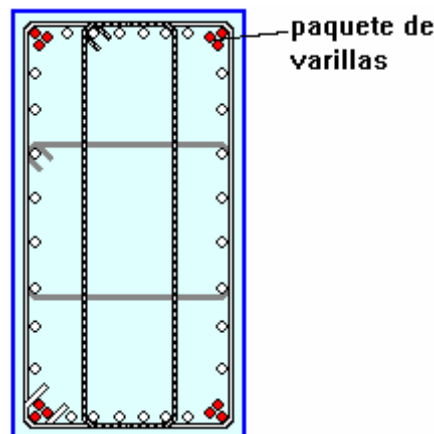


Figura 11.16: Paquetes de varillas.

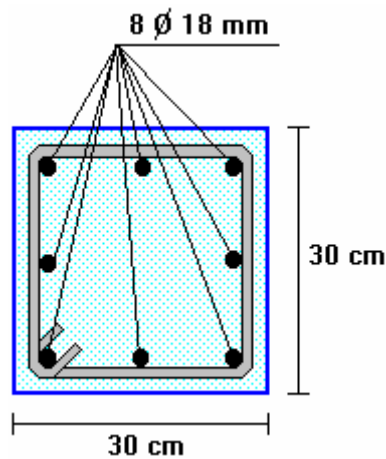
Los paquetes de varillas deberán localizarse en una esquina de estribo [ACI 7.6.6.2].

El recubrimiento mínimo de los paquetes de varillas deberá ser igual al diámetro equivalente de los paquetes, pero nunca deberá ser menor que lo requerido para una sola varilla, ni requiere ser superior a 5 cm [ACI 7.7.4].

Cuando se dispone de paquetes de varillas, las diferentes barras que los conforman no podrán interrumpirse en el mismo sitio, debiendo existir un escalonamiento en los cortes de las distintas varillas, con una separación longitudinal mínima de 40 diámetros de la varilla [ACI 7.6.6.4].

EJEMPLO 11.2:

Determinar la capacidad máxima a compresión de la columna de hormigón armado de la figura, si el hormigón tiene una resistencia $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y el acero un esfuerzo de fluencia $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.



- **Determinación del área geométrica, del área de hormigón y del área de acero:**

$$A_g = (30 \text{ cm}) (30 \text{ cm}) = 900 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 8 (2.54 \text{ cm}^2) = 20.32 \text{ cm}^2$$

$$A_c = A_g - A_s = 900 \text{ cm}^2 - 20.32 \text{ cm}^2 = 879.68 \text{ cm}^2$$

- **Verificación de cuantías mínimas y máximas de armado:**

$$\rho = \frac{A_s}{A_g} = \frac{20.32 \text{ cm}^2}{900 \text{ cm}^2} = 0.02258$$

$$\rho_{\min} = 0.01$$

$$\rho_{\max} = 0.06$$

$$\rho > \rho_{\min} \quad (\text{OK})$$

$$\rho < \rho_{\max} \quad (\text{OK})$$

- **Determinación de la carga de rotura máxima:**

$$P_u = 0.80 \phi (0.85 f'_c \cdot A_c + A_s \cdot F_y)$$

$$\phi = 0.70$$

$$P_u = (0.80) (0.70) [(0.85) (210 \text{ Kg/cm}^2) (879.68 \text{ cm}^2) + (20.32 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2)]$$

$$P_u = 135725 \text{ Kg}$$

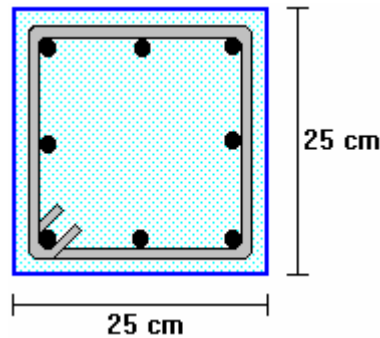
$$P_u = 135.7 \text{ T}$$

EJEMPLO 11.3:

Determinar la armadura longitudinal requerida para que la columna de hormigón armado de la figura, pueda resistir una carga axial de rotura de 120 T, si el hormigón



tiene una resistencia $f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y el acero un esfuerzo de fluencia $Fy = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.



Formulario básico:

$$P_u = 0.80 \phi (0.85 f'c \cdot A_c + A_s \cdot F_y)$$

$$A_c = A_g - A_s$$

Reemplazando la segunda expresión en la primera:

$$P_u = 0.80 \phi [0.85 f'c (A_g - A_s) + A_s F_y]$$

$$P_u = 0.80 \phi [0.85 f'c A_g + A_s (F_y - 0.85 f'c)]$$

Dividiendo para **0.80ϕ** :

$$\frac{P_u}{0.80\phi} = 0.85f'c.A_g + A_s(F_y - 0.85f'c)$$

Despejando **A_s** :

$$A_s = \frac{\frac{P_u}{0.80\phi} - 0.85f'c.A_g}{F_y - 0.85f'c}$$

Los datos del problema son:

$$P_u = 120000 \text{ Kg}$$

$$\phi = 0.70$$

$$f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_g = 25 \times 25 = 625 \text{ cm}^2$$

$$A_s = \frac{\frac{P_u}{0.80\phi} - 0.85f'c.A_g}{F_y - 0.85f'c} = \frac{\frac{120000 \text{ Kg}}{(0.80)(0.70)} - 0.85(210 \text{ Kg/cm}^2)(625 \text{ cm}^2)}{4200 \text{ Kg/cm}^2 - (0.85)(210 \text{ Kg/cm}^2)}$$

$$A_s = 25.54 \text{ cm}^2$$

Se podría escoger como armadura comercial **$4 \phi 22 \text{ mm}$** en las esquinas y **$4 \phi 20 \text{ mm}$** en la mitad de las caras, lo que proporciona una sección real de acero de 27.76 cm^2 , ligeramente superior a la sección de acero requerida.

$$\rho = \frac{A_s}{A_g} = \frac{27.76 \text{ cm}^2}{625 \text{ cm}^2}$$



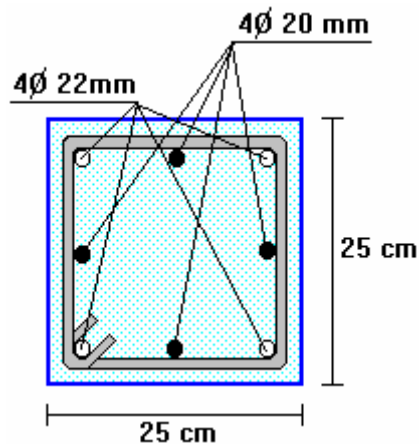
$$\rho = 0.044$$

TEMAS DE HORMIGÓN ARMADO

Marcelo Romo Proaño, M.Sc.

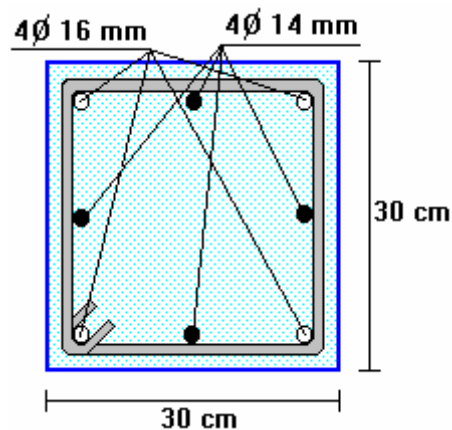
Escuela Politécnica del Ejército – Ecuador

mromo@espe.edu.ec



La cuantía de armado es bastante alta desde el punto de vista económico ($0.044 > 0.025$), aunque se encuentra dentro del rango admisible para zonas sísmicas ($0.01 \leq \rho \leq 0.06$).

Sería recomendable rediseñar la columna para una mayor sección de hormigón (30 cm x 30 cm) con lo que se conseguirá una considerable reducción de la sección de acero ($A_s = 13.34 \text{ cm}^2$; $\rho = 0.0148$).



En este punto debe mencionarse que los dos ejemplos anteriores pueden considerarse como ejemplos académicos, pues **en estructuras reales no existe carga axial pura**, sino que usualmente viene acompañada con momentos flectores, fuerzas cortantes, u otro tipo de solicitaciones.

El objetivo del presente capítulo es exclusivamente entender los problemas que generan las solicitaciones axiales que actúan sobre elementos de hormigón armado. En capítulos posteriores se incluirá la acción simultánea de otras solicitaciones.

11.5 RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN DE COLUMNAS DE HORMIGÓN ARMADO CON ZUNCHOS TRANSVERSALES:

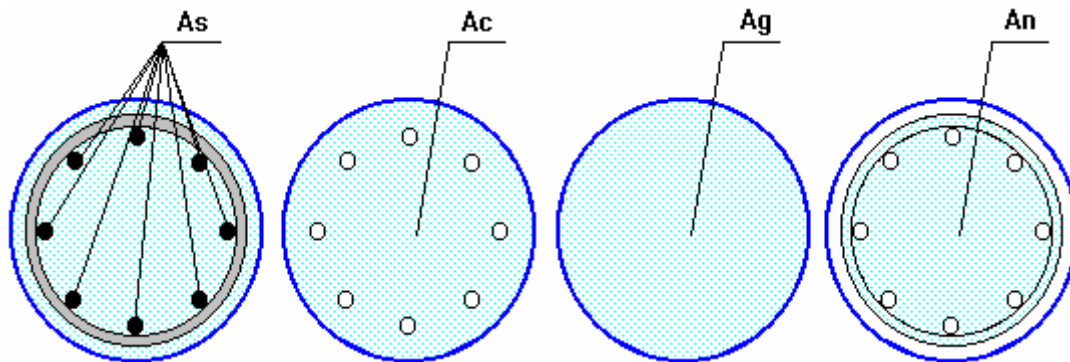


Figura 11.17: Componentes de la sección transversal de una columna zunchada de hormigón armado.

A_s = área de acero de refuerzo longitudinal

A_c = área de hormigón descontado el refuerzo longitudinal

A_g = área geométrica de la sección

A_n = área del núcleo de hormigón medida en la cara exterior del zuncho

En columnas zunchadas el número mínimo de varillas longitudinales será de 6 [ACI 10.9.2].

El zuncho es acero transversal con forma helicoidal, que envuelve a las varillas principales de ciertas columnas circulares. No todas las columnas circulares son zunchadas, pues algunas pueden utilizar estribos circulares en lugar del zuncho, y en otras la hélice no tiene la cuantía de armado suficiente o no poseen el espaciamiento adecuado entre ramales.

El diámetro mínimo de las varillas utilizadas como zunchos, y el de las varillas longitudinales es de 10 mm para zonas sísmicas [CEC 7.10.4.2, ACI 10.9.2].

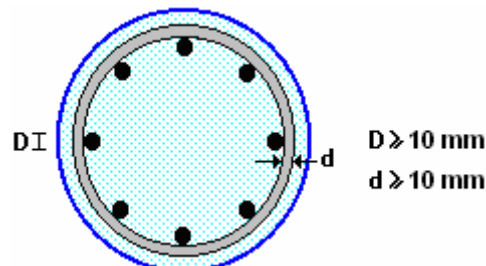


Figura 11.18: Diámetro mínimo de las varillas longitudinales y del zuncho.

Las varillas longitudinales y transversales en columnas zunchadas deben ser corrugadas.

La presencia del zuncho provoca un efecto de confinamiento del hormigón que permanece en su interior y que se conoce como **núcleo**, lo que mejora su ductilidad y su resistencia a la rotura por compresión triaxial. Para conseguir este efecto los códigos establecen que **el espaciamiento libre entre ramales contiguos del zuncho debe estar comprendido entre 2.5 cm y 7.5 cm** [ACI 7.10.4.3].

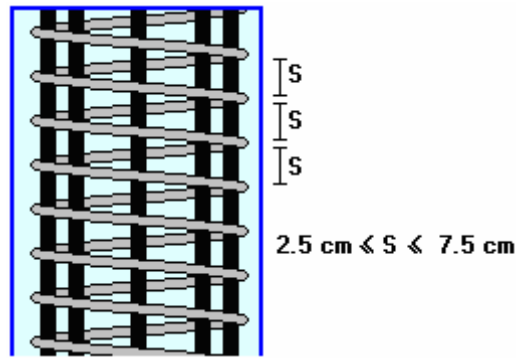


Figura 11.19: Espaciamiento libre entre ramales continuos del zuncho.

Durante el proceso de cargado axial lento, en una primera fase las columnas zunchadas se comportan de modo similar a las columnas con estribos, hasta alcanzar una carga equivalente a la capacidad del hormigón más la capacidad de las varillas longitudinales.

$$P_{U,1} = \phi (0.85 f'_c \cdot A_c + A_s \cdot F_y)$$

o alternativamente

$$P_{U,1} = \phi (0.85 f'_c \cdot A_c + \rho A_c \cdot F_y)$$

Donde el coeficiente de reducción de capacidad es [CEC 9.3, ACI 10.3.6.1]:

$$\phi = 0.75$$

En lugar de producirse el colapso de la columna, bajo este nivel de carga se produce el desprendimiento de la capa de hormigón exterior al zuncho. Simultáneamente, debido al efecto de Poisson, el zuncho entra en tensión produciéndose un efecto de compresión triaxial sobre el hormigón del núcleo, lo que permite que la columna resista cargas mayores.

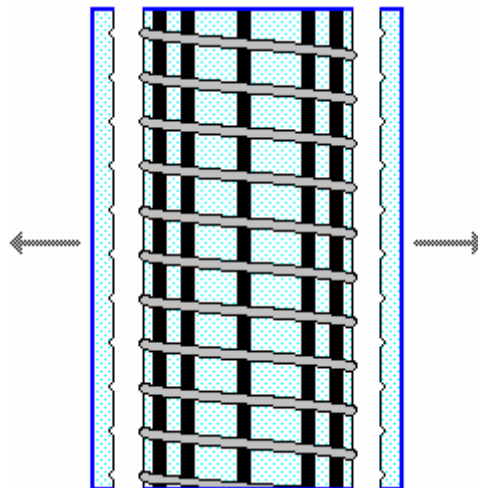


Figura 11.20: Desprendimiento de la capa exterior al zuncho.

La carga resistente adicional, como producto de la presencia del zuncho, ha sido cuantificada mediante estudios teóricos complementados con ensayos experimentales, y es equivalente al doble de lo que se obtendría colocando toda la armadura del zuncho en la dirección longitudinal.

La expresión que describe la capacidad última de una columna zunchada, de acuerdo al criterio anterior, es la siguiente:

$$P_{U,2} = \phi (0.85 f'_c \cdot A_n + \rho \cdot A_n \cdot F_y + 2 \rho_z \cdot A_n \cdot F_y)$$

Donde:

$$\phi = 0.75$$

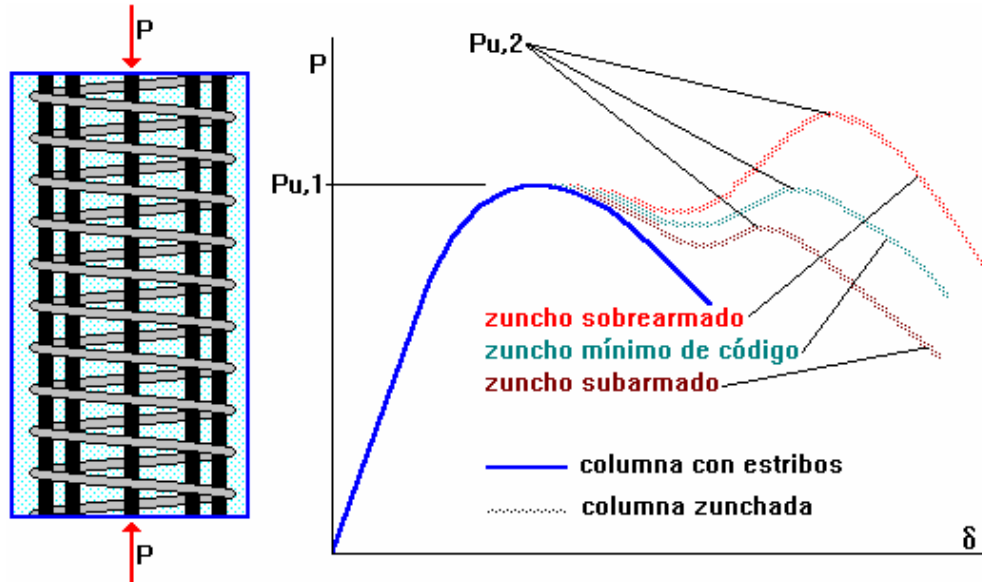


Figura 11.21: Curvas de carga resistidas por las columnas zunchadas.

La cuantía de armado del zuncho ρ_z , por facilidad, conviene calcularla en función de los volúmenes de zuncho y de hormigón del núcleo.

$$\rho_z = \frac{V_z}{V_n}$$

Donde:

V_z : volumen del zuncho
 V_n : volumen del núcleo

Debido a que una vez desprendida la capa exterior de hormigón la columna deja de ser útil, los códigos de construcción limitan la **cuantía útil de armado del zuncho** a valores tales que apenas permiten que la capacidad de la columna zunchada iguale la capacidad que tiene la misma columna sin zuncho. Con esto se consigue que la columna zunchada solamente mejore en su ductilidad y no en su capacidad aprovechable, lo que es importante en zonas sísmicas.

Se puede determinar la capacidad de la columna zunchada y de la misma columna sin zuncho:

$$P_{U,1} = \phi (0.85 f'_c \cdot A_c + A_s \cdot F_y)$$

$$P_{U,2} = \phi (0.85 f'_c \cdot A_n + A_s \cdot F_y + 2 \rho_z \cdot A_n \cdot F_y)$$

$$\phi = 0.75$$

Igualando la capacidad de la columna zunchada a la capacidad de la columna sin zuncho se tiene:



$$P_{U,2} = P_{U,1}$$

$$(0.75) (0.85 f'c \cdot A_n + A_s \cdot F_y + 2 \rho_z \cdot A_n \cdot F_y) = (0.75) (0.85 f'c \cdot A_c + A_s \cdot F_y)$$

$$(0.75)(0.85)f'c.A_n + 0.75A_s.F_y + 1.50\rho_z.A_n.F_y = (0.75)(0.85)f'c.A_c + 0.75A_s.F_y$$

$$1.50 \rho_z \cdot A_n \cdot F_y = 0.85 f'c (0.75) (A_c - A_n)$$

$$\rho_z \cdot A_n \cdot F_y = 0.425 f'c (A_c - A_n)$$

$$\rho_z = \frac{0.425 f'c (A_c - A_n)}{A_n \cdot F_y}$$

$$\rho_z = 0.425 \frac{f'c}{F_y} \cdot \frac{A_c - A_n}{A_n}$$

$$\rho_{z,\text{mín}} = 0.425 \frac{f'c}{F_y} \left(\frac{A_c}{A_n} - 1 \right)$$

El Código Ecuatoriano de la Construcción y el ACI [ACI 10.9.3] fijan la cuantía mínima de zuncho mediante la siguiente expresión, que es ligeramente superior a la anteriormente deducida:

$$\rho_{z,\text{mín}} = 0.450 \frac{f'c}{F_y} \left(\frac{A_c}{A_n} - 1 \right)$$

En caso de no cumplirse con este mínimo, la columna deberá diseñarse como columna circular con estribos, en cuyo caso el coeficiente de reducción de capacidad ϕ tiene un valor de 0.70 [ACI 10.9.3].

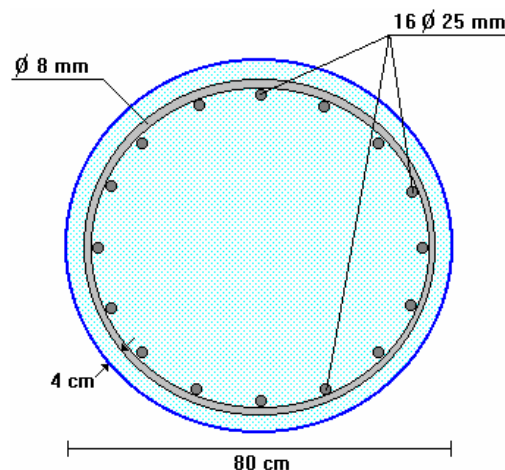
El ACI-2008 recomienda realizar una reducción del 15% de la capacidad de las columnas zunchadas, para obtener la **carga axial última máxima efectiva**, debido a la presencia de excentricidades mínimas no controlables en las solicitaciones [ACI 10.3.6.1].

$$P_{U,1,\text{máx}} = 0.85 \phi (0.85 f'c \cdot A_c + A_s \cdot F_y)$$

$$P_{U,2,\text{máx}} = 0.85 \phi (0.85 f'c \cdot A_n + \rho \cdot A_n \cdot F_y + 2 \rho_z \cdot A_n \cdot F_y)$$

EJEMPLO 11.4:

Determinar la capacidad máxima a carga axial de la columna zunchada de la figura, conformada por hormigón con resistencia $f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y acero con esfuerzo de fluencia $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$. El recubrimiento previsto es de 4 cm. El zuncho tiene un paso de 4 cm.





➤ **Determinación de áreas geométrica, de acero, de hormigón y del núcleo:**

$$\begin{aligned}A_g &= (80 \text{ cm})^2 \times (3.1416) / 4 = 5026.56 \text{ cm}^2 \\A_s &= 16 (4.91 \text{ cm}^2) = 78.56 \text{ cm}^2 \\A_c &= 5026.56 \text{ cm}^2 - 78.56 \text{ cm}^2 = 4948.00 \text{ cm}^2 \\A_n &= [(72 \text{ cm})^2 (3.1416) / 4] - 78.56 = 3992.95 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

➤ **Control de la cuantía de armado longitudinal:**

$$\rho = \frac{A_s}{A_g} = \frac{78.56 \text{ cm}^2}{5026.56 \text{ cm}^2} = 0.01563$$

$$\rho_{\min} = 0.01$$

$$\rho_{\max} = 0.06$$

$$\rho > \rho_{\min} \text{ (OK)}$$

$$\rho < \rho_{\max} \text{ (OK)}$$

➤ **Determinación de la Carga Ultima sin desprendimiento del recubrimiento:**

$$P_{U,1} = 0.85 \phi (0.85 f'_c \cdot A_c + A_s \cdot F_y)$$

$$\phi = 0.75$$

$$P_{U,1} = (0.85)(0.75)[(0.85)(210 \text{ Kg/cm}^2)(5026.56 \text{ cm}^2) + (78.56 \text{ cm}^2)(4200 \text{ Kg/cm}^2)]$$

$$P_{U,1} = 782336 \text{ Kg} = 782 \text{ T}$$

➤ **Ecuaciones de la Carga Ultima con desprendimiento del recubrimiento:**

$$P_{U,2} = 0.85 \phi (0.85 f'_c \cdot A_n + A_s \cdot F_y + 2 \rho_z \cdot A_n \cdot F_y)$$

$$\phi = 0.75$$

➤ **Calculo de la cuantía de armado del zuncho:**

Se toma un metro de longitud de la columna y se determina el volumen del zuncho.

En un metro de columna existen 25 ramales de zuncho (uno cada 4 cm de paso). El volumen de zuncho en un metro de columna es 25 veces el volumen de un ramal:

$$V_z = (25) [(0.50 \text{ cm}^2) (71.2 \text{ cm}) (3.1416)] = 2796.02 \text{ cm}^3$$

El volumen de hormigón del núcleo en un metro de columna es:

$$V_n = [(72 \text{ cm})^2 (3.1416) / 4] (100 \text{ cm}^2) = 407151.36 \text{ cm}^3$$

La cuantía de armado del zuncho es:

$$\rho_z = \frac{V_z}{V_n} = \frac{2796.02 \text{ cm}^3}{407151.36 \text{ cm}^3}$$

$$\rho_z = 0.006867$$



➤ **Verificación de la cuantía mínima de zuncho:**

$$\rho_{z,\text{mín}} = 0.450 \frac{f'_c}{F_y} \left(\frac{A_c}{A_n} - 1 \right) = 0.450 \frac{210}{4200} \left(\frac{4948.00}{3992.95} - 1 \right)$$

$$\rho_{z,\text{mín}} = 0.005382$$

La cuantía de armado del zuncho es superior a la cuantía mínima especificada en los códigos, por lo que la columna se cataloga como zunchada.

➤ **Determinación de la carga última con desprendimiento del recubrimiento:**

$$P_{U,2} = (0.85)(0.75)[(0.85)(210)(3992) + (78.56)(4200) + (2)(0.006867)(3992.95)(4200)]$$

$$P_{U,2} = 811549 \text{ Kg} = 812 \text{ T.}$$

La carga última de la columna es el mayor de los dos valores obtenidos (sin desprendimiento y con desprendimiento del recubrimiento):

Pu = 812 T.

Sin embargo, en estructuras que presentan momentos flectores importantes, y para diseño en zonas sísmicas solamente se debe utilizar la capacidad resistente como columna sin zuncho (Pu = 782 T).

11.6 PANDEO EN ELEMENTOS SOMETIDOS A COMPRESIÓN AXIAL:

Pandeo es un tipo de inestabilidad transversal flexionante que presentan los elementos sometidos a solicitaciones de compresión axial.

Ante un determinado nivel de cargas axiales, los elementos flexionan transversalmente a la dirección de acción de las solicitaciones, sin requerirse la presencia de ningún agente externo especial. La trascendencia de este tipo de inestabilidad depende de las características de deformabilidad del material, de cuán **esbeltos** sean los elementos y del tipo de **arriostramiento** transversal presente.



Figura 11.22: Pandeo de un elemento sometido a compresión.

Si se toma un alambre delgado de 1 mm de diámetro y 50 cm de longitud, y se lo somete manualmente a pequeñas fuerzas de compresión axial (mucho menores que las fuerzas axiales resistentes de tracción) aplicadas en sus extremos, se puede notar claramente una tendencia natural a flejar en la dirección perpendicular a la acción de las solicitaciones externas (pandeo). Como producto de esta flexión transversal, el alambre pierde inmediatamente su capacidad resistente a la compresión, y si no se lo descarga a tiempo llega al colapso.



Figura 11.23: Pandeo de un elemento muy esbelto sometido a compresión.

Si en una segunda fase del experimento propuesto se toma una varilla de 10 mm de diámetro con los mismos 50 cm de longitud, se nota claramente que al someterla a compresión, la fuerza axial que se requiere para dar origen al mismo tipo de inestabilidad y colapso por pandeo es mucho mayor que 100 veces la requerida para el alambre (la sección transversal es 100 veces mayor que la del alambre), y no puede ser proporcionada manualmente, sino que debe ser ejercida por algún aparato mecánico (una prensa), pero llegará a pandear eventualmente.



Figura 11.24: Pandeo de un elemento robusto sometido a compresión.

Si en una tercera fase continuamos incrementando las dimensiones transversales del elemento comprimido y utilizamos una varilla de 25 mm de diámetro y los mismos 50 cm de longitud, la varilla alcanzará la fluencia y el aplastamiento por compresión antes de verse afectada por la inestabilidad de pandeo, a pesar de que se utilicen equipos mecánicos para inducir la compresión.



Figura 11.25: Pandeo de un elemento muy robusto sometido a compresión.

Si la sección transversal del elemento sometido a compresión no es simétrica con relación a su eje centroidal (no es una sección circular o anular), el pandeo se producirá por flexión alrededor del eje más débil a la flexión (usualmente el eje con menor inercia).

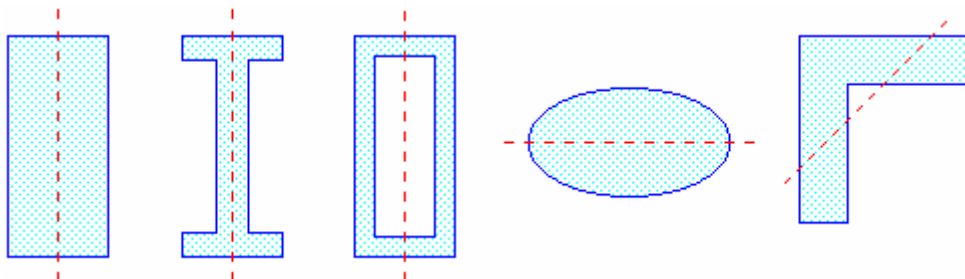


Figura 11.26: Ejes débiles de flexión alrededor de los que se producirá el pandeo.

Para visualizar este fenómeno se puede utilizar una regla plástica delgada, y se la somete a fuerzas de compresión en la dirección longitudinal. Se podrá observar claramente que la dirección del pandeo es la dirección débil a la flexión de la sección transversal rectangular.

11.7 CARGA CRÍTICA DE PANDEO:

La carga axial que da inicio a la inestabilidad por pandeo en un elemento estructural se conoce como **carga crítica de pandeo** del elemento o **carga de Euler**.

Se puede tomar como referencia a un elemento estructural ideal de eje recto, sin imperfecciones del material ni de alineación del elemento, con una longitud L , de sección constante A e inercia I , constituido por un material lineal elástico cuyo módulo de elasticidad es E . En uno de sus extremos se coloca un apoyo fijo y en el otro, un apoyo deslizante longitudinal.

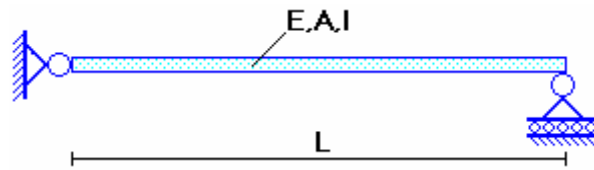


Figura 11.27: *Viga simplemente apoyada.*

Al elemento mencionado se lo somete a una carga axial de compresión en el extremo del apoyo deslizante, y se le proporciona una elástica de deformación flexionante continua similar a la que se observa en piezas de libre rotación en sus extremos (elementos apoyados - apoyados), debido a la inestabilidad por pandeo.

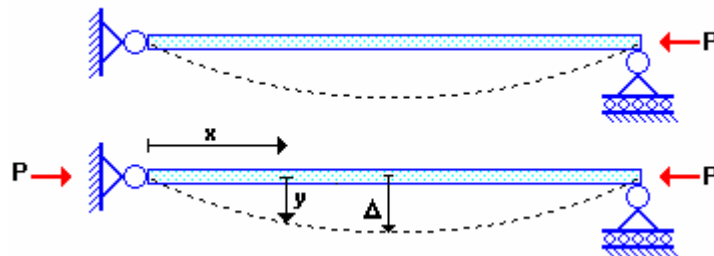


Figura 11.28: *Pandeo en una viga simplemente apoyada.*

El momento flector inducido por la deformación inicial, a una distancia x , determinado sobre la pieza deformada (**Teoría de Segundo Orden**) es:

$$M(x, y) = P \cdot y$$

Las deformaciones transversales del elemento por el efecto de flexión se pueden describir mediante la **Ecuación General de la Flexión**, tomada de la Resistencia de Materiales:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{M(x, y)}{E(x) \cdot I(x)} \quad \text{Ecuación (11.1)}$$

Reemplazando la ecuación de momentos flectores en la ecuación general de flexión, y considerando la sección constante del elemento y un único material elástico, se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= - \frac{P \cdot y}{E \cdot I} \\ y'' + \frac{P}{E \cdot I} y &= 0 \\ y'' + C^2 \cdot y &= 0 \end{aligned}$$

Donde C es siempre positiva y se puede calcular con la expresión:

$$C^2 = \frac{P}{E \cdot I}$$

La solución a la ecuación diferencial planteada es:

$$y = A \cdot \text{Sen}(C \cdot x) + B \cdot \text{Cos}(C \cdot x)$$

La condición de borde del extremo izquierdo impone que para $x = 0 \Rightarrow y = 0$, de donde:



$$B = 0$$

La solución simplificada es:

$$y = A \cdot \text{Sen}(C \cdot x)$$

La condición de borde del extremo derecho determina que cuando $x = L \Rightarrow y = 0$, por lo que:

$$0 = A \cdot \text{Sen}(c \cdot L)$$

$$C \cdot L = n \cdot \pi$$

Despejando C :

$$C = \frac{n \cdot \pi}{L}$$

Elevando al cuadrado:

$$C^2 = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2}$$

Donde n puede tomar cualquier valor entero mayor o igual a 1 ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Igualando los valores definidos anteriormente para C^2 se obtiene:

$$\frac{P}{E \cdot I} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2}$$

Despejando P de la igualdad, se obtienen las cargas axiales específicas o **cargas críticas de pandeo** correspondientes a todos los modos de deformación por pandeo:

$$P_{cr} = \frac{n^2 \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad \text{Ecuación (11.2)}$$

La menor carga crítica está asociada a $n = 1$, y corresponde al **primer modo de deformación por pandeo**:

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad \text{Ecuación (11.2a)}$$

Las cargas críticas para los restantes modos de deformación se obtienen con los otros valores que puede tomar n ($n = 2, 3, 4, \dots$).

$$P_{cr2} = \frac{4\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad \text{Ecuación (11.2b)}$$

$$P_{cr3} = \frac{9\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad \text{Ecuación (11.2c)}$$

A continuación se presenta un gráfico que describe la geometría de las deformaciones causadas por el pandeo de acuerdo con los tres primeros modos de deformación.

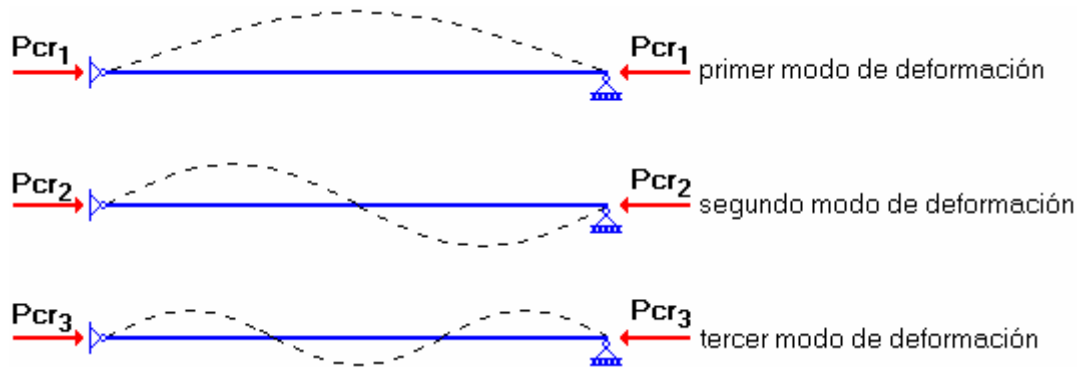


Figura 11.29: Modos de deformación por pandeo.

Debe anotarse que, en el presente caso, la carga crítica de pandeo para el segundo modo de deformación es 4 veces mayor que la carga crítica de pandeo para el primer modo de deformación, y la carga crítica de pandeo para el tercer modo de deformación es 9 veces mayor que la carga crítica de pandeo para el primer modo de deformación.

Es evidente que el primer modo de deformación controlará el pandeo de las columnas.

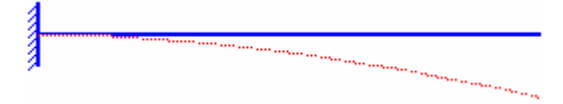
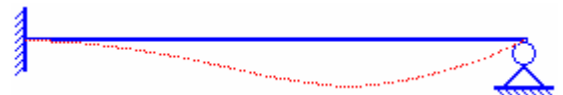
El segundo modo de deformación tiene utilidad por su semejanza a las deformaciones producidas por estados de carga flexionantes frecuentes, que afectan a las columnas, lo que podría provocar un amortiguamiento temporal del primer modo de deformación en elementos estructurales reales (no ideales). Los restantes modos de deformación tienen una utilidad estrictamente académica, por lo que no son trascendentales para la práctica ingenieril.

Para otros tipos de condiciones de borde (bordes empotrados, bordes libres, bordes elásticamente sustentados, etc.), la ecuación básica de Euler para el primer modo de deformación se ve modificada por un factor de forma de la elástica de deformación que afecta a la longitud de pandeo [ACI 10.10.1]:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(k \cdot L)^2}$$

Donde **k** toma los siguientes valores para condiciones de borde bien definidas:

Tabla 11.1: Coeficientes de longitud de pandeo.

Descripción	Gráfico	Coeficientes de Longitud de Pandeo
Barras apoyadas - apoyadas		k = 1.00
Barras empotradas en un extremo y libres en el otro		k = 2.00
Barras empotradas en los dos extremos		k = 0.50
Barras empotradas en un extremo y apoyadas en el otro		k = 0.70



Teóricamente, una columna perfecta sometida a una compresión axial creciente, no debería presentar ninguna señal de deformación transversal hasta que la carga axial iguale a la carga crítica de pandeo correspondiente al primer modo, momento en el cual la estructura pierde estabilidad y se pueden producir deformaciones transversales de cualquier magnitud y en cualquier dirección, sin que el elemento sea capaz de recuperar su geometría original. Este comportamiento teórico puede ser descrito mediante el siguiente gráfico.

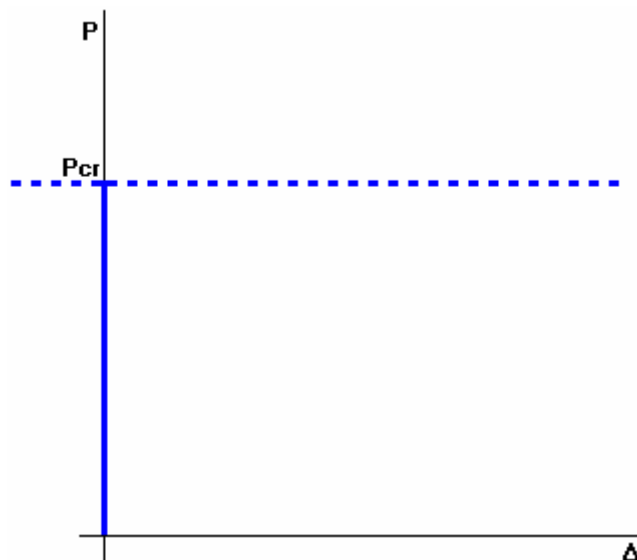


Figura 11.30: Comportamiento teórico de una columna perfecta al alcanzar la carga crítica de pandeo.

En una columna real es imposible evitar la presencia simultánea de cargas axiales y momentos flectores, por muy pequeños que sean estos últimos.

Existen excentricidades y momentos flectores inducidos por las imperfecciones de los materiales constitutivos de los elementos estructurales; producidos además por las imperfecciones geométricas de las columnas durante el proceso constructivo; generados también por la incertidumbre acerca de la posición real de acción de las solicitaciones exteriores; y, desde luego, provocados por el tipo de solicitaciones que actúan sobre la estructura, por lo que, **desde el inicio del proceso de carga, las columnas reales adquieren deformaciones transversales pequeñas que se vuelven cada vez más importantes conforme la carga axial se aproxima a la carga crítica de pandeo.**

Una curva tipo que puede describir esquemáticamente la deformación transversal de una columna real, en la que existen deformaciones transversales inclusive sin la presencia de cargas axiales, es la siguiente:

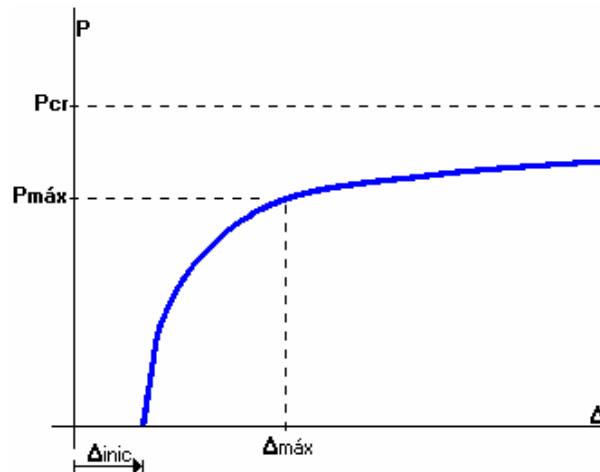
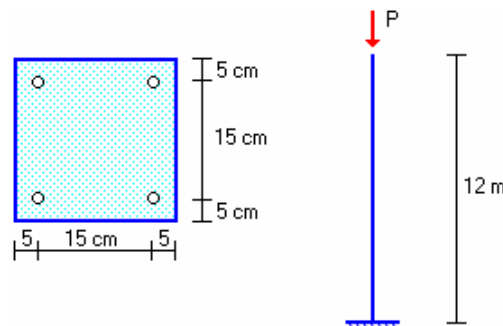


Figura 11.31: Comportamiento de una columna real al crecer la carga axial y aproximarse a la carga crítica de pandeo.

EJEMPLO 11.5:

Calcular la capacidad de una columna de hormigón armado cuadrada, con hormigón de resistencia a la rotura $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$, de 25 cm x 25 cm de sección transversal, que tiene cuatro varillas de acero de 16 mm de diámetro, que está en voladizo y tiene una longitud de 12 m.. Determinar la carga crítica de pandeo de la columna si las cargas permanentes representan la mitad de las cargas totales. Utilizar dos hipótesis de comportamiento del hormigón para la definición de la carga crítica de pandeo: hormigón no fisurado y hormigón fisurado.



a. Capacidad resistente de la columna

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_g = 25 \times 25 = 625 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 4 \times 2.01 = 8.04 \text{ cm}^2$$

$$A_c = A_g - A_s = 625 - 8.04 = 616.96 \text{ cm}^2$$

$$\phi = 0.70$$

La carga última se calcula con la siguiente expresión:

$$P_u = 0.80 \phi (0.85 f'_c \cdot A_c + A_s \cdot F_y)$$

$$P_u = (0.80)(0.70)(0.70)[(0.85)(210 \text{ Kg/cm}^2)(616.96 \text{ cm}^2) + (8.04 \text{ cm}^2)(4200 \text{ Kg/cm}^2)]$$

$$P_u = 80582 \text{ Kg} = 80.6 \text{ T}$$



b. Pandeo con hormigón no fisurado:

A pesar de que los códigos de diseño especifican que la carga crítica de pandeo debe calcularse con el hormigón fisurado, para efectos comparativos se calcula a continuación la carga crítica de pandeo considerando que el hormigón aún no se ha fisurado.

El módulo de elasticidad del hormigón no fisurado puede calcularse mediante la siguiente fórmula que se especifica en el Código Ecuatoriano de la Construcción y en el Código ACI:

$$E_c = 15000\sqrt{f'_c} = 15000\sqrt{210} = 217000 \text{ Kg/cm}^2$$

La inercia crítica, la longitud de la barra y el factor de forma de pandeo son:

$$I_c = (25)(25)^3 / 12 = 32552 \text{ cm}^4$$

$$L = 1200 \text{ cm}$$

$$k = 2$$

La carga crítica se determina mediante la ecuación de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(k \cdot L)^2} = \frac{\pi^2 (217000)(32552)}{[2(1200)]^2}$$

$$P_{cr} = 12104 \text{ Kg} = 12.1 \text{ T}$$

c. Pandeo con hormigón fisurado:

El Código Ecuatoriano de la Construcción y el ACI establecen que, para el cálculo de cargas de pandeo, debe considerarse el módulo de elasticidad y la inercia del hormigón armado fisurado, en lugar del módulo de elasticidad y la inercia sin fisuración. El producto **E.I** de columnas con hormigón fisurado puede calcularse aproximadamente con la siguiente expresión establecida en el ACI:

$$E \cdot I = \frac{0.2E_c I_g + E_s I_{se}}{1 + \beta_d}$$

Donde:

$$E_c = 217000 \text{ Kg/cm}^2 \quad : \text{módulo de elasticidad del hormigón no fisurado}$$

$$E_s = 2100000 \text{ Kg/cm}^2 \quad : \text{módulo de elasticidad del acero de refuerzo}$$

$$I_g = 32552 \text{ cm}^4 \quad : \text{inercia de la sección de hormigón armado}$$

$$I_{se} = 452 \text{ cm}^4 \quad : \text{inercia de la sección de acero de refuerzo}$$

$$\beta_d = P_{U,D} / P_{U,T} = 0.50 \quad : \text{razón entre carga muerta y carga total}$$

De donde:

$$E \cdot I = \frac{0.2(217000)(32552) + (2100000)(452)}{1 + 0.50} = 1574637867 \text{ Kg} - \text{cm}^2$$

La carga crítica de pandeo se calcula con la ecuación de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(k \cdot L)^2}$$



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 (1574637867)}{[2(1200)]^2}$$

$$P_{cr} = 2698 \text{ Kg} = 2.7 \text{ T.}$$

Es importante observar la gran diferencia que existe entre la capacidad resistente de los materiales (80.6 T), la carga crítica de pandeo teórica de la columna con material no fisurado (12.1 T) y la carga crítica de pandeo “real” de la columna (2.7 T), que incluye el fisuramiento, que siempre está presente en el hormigón.

Cuando se dispongan de las solicitaciones reales que actúan sobre los elementos estructurales, se puede realizar un análisis más exacto de la inercia que debe ser utilizada en las ecuaciones de pandeo, para lo que se debería calcular la posición del eje neutro, y asumir que la región traccionada no colabora en la inercia de la sección transversal.

REFERENCIAS:

- 11.1 Winter G. y Nilson A., *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, Editorial Reverté, S.A.
- 11.2 Jiménez P., García A. y Morán F., *Hormigón Armado*, Mateu Cromo, Artes Gráficas, S. A.
- 11.3 Park R. y Pauley T., *Estructuras de Concreto Reforzado*, Editorial LIMUSA S. A.
- 11.4 Nilson A., (1999), *Diseño de Estructuras de Concreto*, Mc Graw Hill.
- 11.5 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 11.6 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.

CAPÍTULO XII

TENSORES DE HORMIGÓN ARMADO

12.1 INTRODUCCIÓN:

Se denomina tensor a un elemento estructural cuyo comportamiento está dominado por las solicitaciones traccionantes que actúan sobre sí.

Es conocido que el hormigón es ineficiente para resistir fuerzas de tracción, por lo que en el caso de los tensores de hormigón armado, el acero es el responsable exclusivo de resistir las solicitaciones. El hormigón cumple como función recubrir el acero y protegerlo contra la corrosión.

La necesidad de utilizar tensores usualmente proviene de requerimientos arquitectónicos, como en el caso de niveles intermedios de escaleras que cuelgan de las vigas del nivel superior, o voladizos importantes que se sustentan en nudos del piso superior.

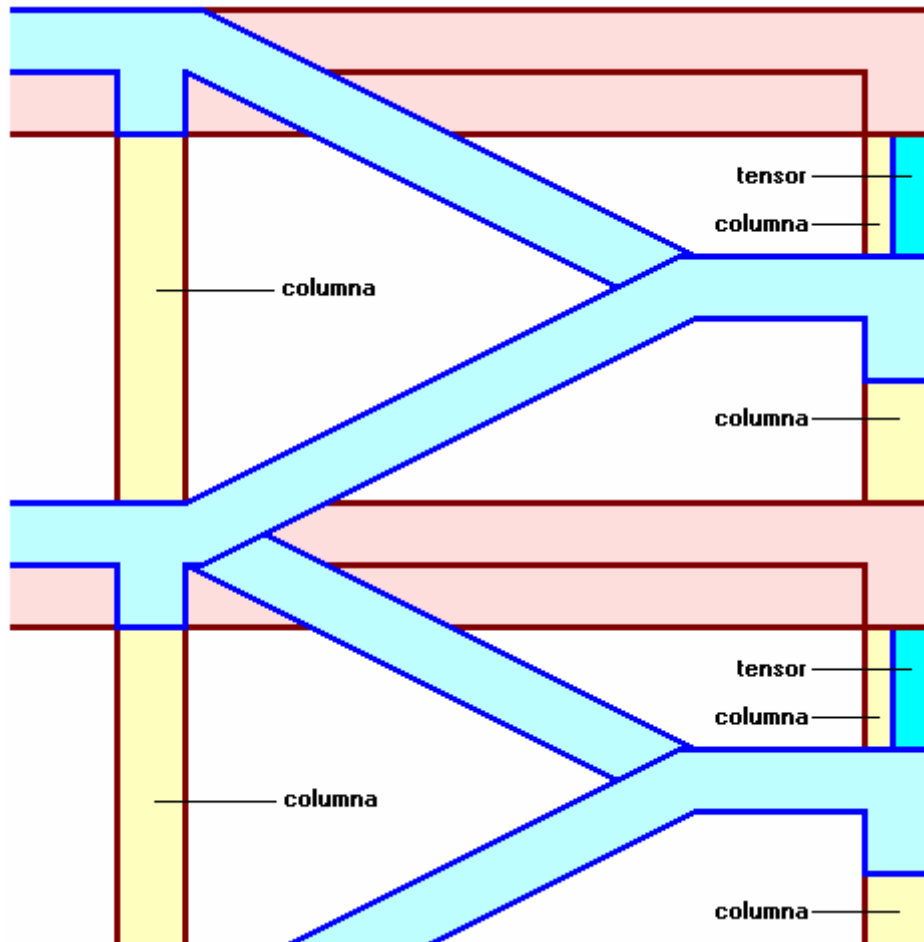


Figura 12.1: Tensores verticales que sostienen las vigas extremas de escaleras.

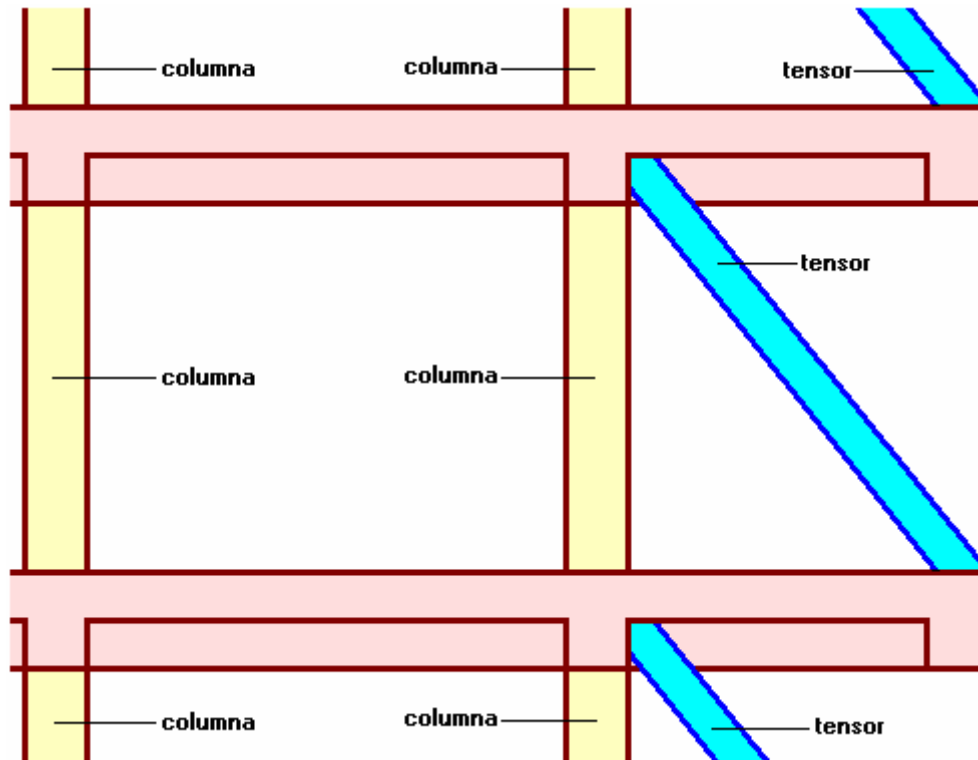


Figura 12.2: Tensores diagonales que sostienen la viga extrema de voladizos.

12.2 CRITERIOS DE ANÁLISIS, DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DE TENSORES:

Hay cuidados especiales que deben tomarse en consideración durante el análisis, el diseño y la construcción de estructuras que incluyan tensores.

a. Criterios de Análisis:

Durante el análisis estructural, solamente debe considerarse el área del acero A_s y el módulo de elasticidad del acero E_s , como propiedades del tensor. Debe ignorarse la colaboración del hormigón pues bajo pequeñas cargas de tracción se fisura.

b. Criterios de Diseño:

- Durante el diseño solamente debe considerarse la capacidad resistente del acero en los tensores [ACI 10.2.5], lo que significa que la capacidad a tensión está definida por la siguiente expresión:

$$P_u = \phi \cdot A_s \cdot F_y \quad \text{Ecuación (12.1)}$$

Donde:

P_u : carga axial última de tracción del tensor
 A_s : sección de acero del tensor
 F_y : esfuerzo de fluencia del acero



ϕ : factor de reducción de capacidad (0.90 para elementos sometidos a tracción [CEC 9.3, ACI2002 9.3])

- Las varillas de acero del tensor deben ser ancladas adecuadamente en los elementos de sustento y en los elementos sustentados, de modo que el acero pueda alcanzar la fluencia sin desgarrarse por falla de adherencia con el hormigón.
- Las cuantías de armado mínima y máxima de los tensores son similares a las de columnas sometidas a fuerzas de compresión ($\rho_{\min} = 0.01$; $\rho_{\max} = 0.06$, para regiones sísmicas [ACI 21.6.3.1]).
- La cuantía mínima de acero debe ser tal que la capacidad del acero a tracción supere a la capacidad resistente a tracción del hormigón, permiténdose de este modo que la fisuración del hormigón, bajo cargas que progresivamente se van incrementando, no provoque el colapso frágil del elemento de hormigón armado.

Mediante experimentación, se ha definido que la capacidad máxima resistente a la tensión del hormigón f_{ct} puede calcularse mediante la siguiente expresión aproximada:

$$f_{ct} = 0.59(f'c)^{2/3} \quad \text{Ecuación (12.2)}$$

Donde f_{ct} y $f'c$ se expresan en Kg/cm^2

La capacidad total del hormigón a tracción, de una sección transversal **Ag** es:

$$T = 0.59A_g(f'c)^{2/3}$$

La capacidad a tracción del acero es:

$$T = A_s \cdot F_y$$

Igualando ambas expresiones, para asegurar la transferencia de cargas del hormigón hacia el acero, se tiene:

$$A_s F_y = 0.59A_g(f'c)^{2/3}$$

Agrupando para obtener la cuantía de armado:

$$\rho = \frac{A_s}{A_g} = \frac{0.59(f'c)^{2/3}}{F_y}$$

Por consiguiente, mediante este nuevo criterio, la cuantía de armado de los tensores no debe ser inferior a la siguiente expresión:

$$\rho_{\min} = \frac{0.59(f'c)^{2/3}}{F_y} \quad \text{Ecuación (12.3)}$$

Aplicando la ecuación previa, para un hormigón de 210 Kg/cm^2 de resistencia, y un acero de 4200 Kg/cm^2 de fluencia, la cuantía mínima para asegurar la transferencia de las fuerzas de tracción del hormigón al acero es del orden de 0.005.



NOTA: El criterio empleado es similar al utilizado en la definición de la cuantía mínima de armado a tracción por flexión.

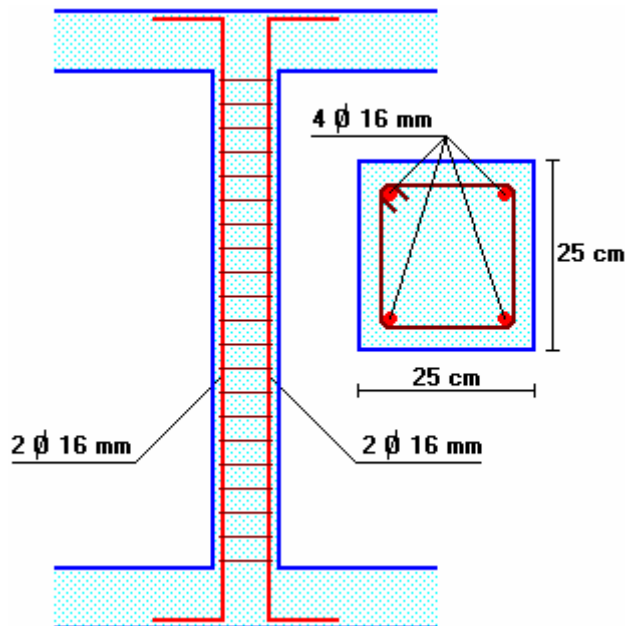
- La presencia de sismos puede provocar que ciertas columnas, que bajo cargas gravitacionales están comprimidas, entren en tensión, por lo que requieren ser diseñadas también como tensores.

c. Criterios de Construcción:

- Durante la construcción se debe tener mucho cuidado en que el hormigón del tensor sea fundido monolíticamente con todos los elementos que le sirven de soporte y los elementos a los que soporta el tensor, lo que limitará el asentamiento de los nudos sostenidos por el tensor.
- El encofrado del tensor debe ser retirado solamente cuando todos los elementos que lo sostienen y aquellos a los que sostiene el tensor hayan alcanzado una resistencia apropiada.

EJEMPLO 12.1:

Determinar la capacidad resistente última de un tensor cuadrado de 25 cm x 25 cm, que tiene 4 varillas de 16 mm de diámetro, si el esfuerzo de fluencia del acero es $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$, y el hormigón tiene una resistencia $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$.



La carga axial última de tracción se determina con la siguiente expresión:

$$P_u = \phi \cdot A_s \cdot F_y$$

Los datos son:

$$\phi = 0.90 \quad (\text{cargas axiales de tracción})$$

$$A_s = 4 \times 2.01 = 8.04 \text{ cm}^2$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_g = 25 \text{ cm} \times 25 \text{ cm} = 625 \text{ cm}^2$$



La cuantía de armado es:

$$\rho = 8.04 / 625 = 0.0129$$

La cuantía de armado está entre los límites fijados por los códigos para regiones sísmicas ($\rho_{\min} = 0.01$; $\rho_{\max} = 0.06$).

La cuantía de armado requerida para que no se produzca falla frágil del tensor, con la fisuración del hormigón es:

$$\rho_{\min} = \frac{0.59(f'c)^{2/3}}{F_y} = \frac{0.59(210)^{2/3}}{4200} = 0.00496$$

La cuantía de armado real supera también esta cuantía mínima, por lo que el diseño es aceptable.

Reemplazando los datos en la expresión que define la carga axial mínima:

$$P_u = (0.90) (8.04 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 30391 \text{ Kg}$$

$$\mathbf{P_u = 30.4 T.}$$

EJEMPLO 12.2:

Determinar la armadura requerida en un tensor de 20 cm x 30 cm, sometido a una carga última de tracción **Pu** de 40 T., si el esfuerzo de fluencia del acero es $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$, y la resistencia del hormigón es $f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$.

La capacidad última del tensor es:

$$P_u = \phi \cdot A_s \cdot F_y$$

Despejando **As**:

$$A_s = \frac{P_u}{\phi \cdot F_y}$$

Los datos son:

$$P_u = 40 \text{ T} = 40000 \text{ Kg}$$

$$\phi = 0.90 \quad (\text{cargas axiales de tracción})$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$A_g = 20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm} = 600 \text{ cm}^2$$

Reemplazando se tiene:

$$A_s = \frac{40000 \text{ Kg}}{(0.90) \cdot (4200 \text{ Kg/cm}^2)}$$

$$A_s = 10.58 \text{ cm}^2$$

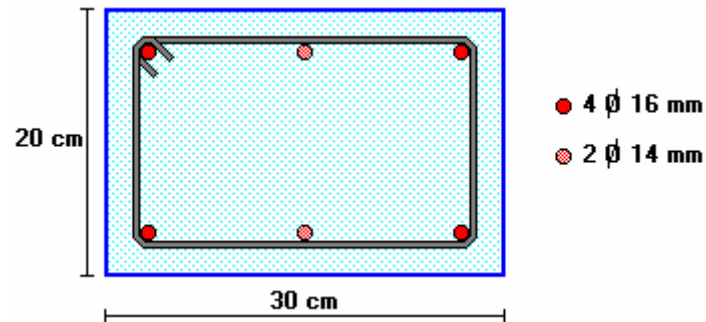
La cuantía de armado es:

$$\rho = \frac{A_s}{A_g} = \frac{10.58 \text{ cm}^2}{600 \text{ cm}^2} = 0.0176$$



La cuantía de armado está entre los límites fijados por los códigos para regiones sísmicas ($\rho_{\min} = 0.01$; $\rho_{\max} = 0.06$), y también cumple con la cuantía mínima para evitar la rotura frágil del tensor ($\rho_{\min} = 0.00496$), por lo que es aceptable.

Se reforzará al tensor con 4 varillas de 16 mm de diámetro y 2 varillas de 14 mm de diámetro, que proporcionan una sección transversal de acero de 11.12 cm^2 .



REFERENCIAS:

- 12.1 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 12.2 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.

CAPÍTULO XIII **FLEXOCOMPRESIÓN EN LOS ELEMENTOS DE** **HORMIGÓN ARMADO**

13.1 INTRODUCCIÓN:

La mayor parte de los elementos estructurales sometidos a compresión también están solicitados por momentos flectores, por lo que en su diseño debe tomarse en consideración la presencia simultánea de los dos tipos de acciones.

En zonas sísmicas, como las existentes en nuestro país, el efecto flexionante usualmente domina el diseño con relación a las solicitaciones axiales por lo que, a pesar de que los momentos por cargas gravitacionales sean importantes, se suelen escoger columnas con armadura simétrica, dada la reversibilidad de los sismos.

13.2 DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS CON FLEXION UNIDIRECCIONAL:

El comportamiento de secciones específicas de columnas de hormigón armado es descrito más claramente mediante gráficos denominados curvas o **diagramas de interacción**. Sobre el eje vertical se dibujan las cargas axiales resistentes y sobre el eje horizontal se representan los correspondientes momentos flectores resistentes, medidos con relación a un eje principal centroidal de la sección transversal de la columna.

A continuación se presenta una curva de interacción unidireccional de una columna tipo, en la que no se han incluido ni el factor ϕ de reducción de capacidad (solamente se manejan cargas axiales y momentos flectores nominales), ni la reducción de carga axial última por excentricidad mínima de las cargas axiales, para que su interpretación sea más sencilla.

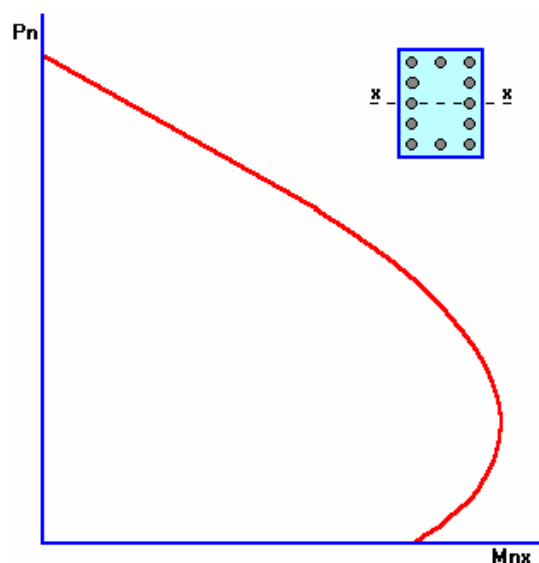


Figura 13.1: Diagrama de interacción de una columna.

Cualquier combinación de carga axial y de momento flector nominales, que defina un punto que caiga dentro de la curva de interacción (o sobre la curva de interacción), indicará que la sección escogida es capaz de resistir las solicitaciones propuestas.

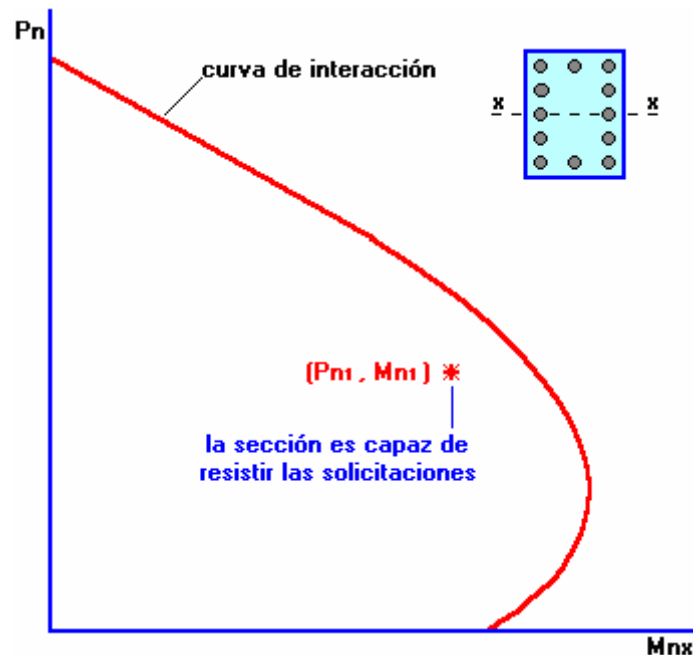


Figura 13.2: Combinación de momentos flectores y cargas axiales que pueden ser resistidos por la sección.

Cualquier punto que quede por fuera de la curva determinará que la sección transversal es incapaz de resistir las solicitaciones especificadas.

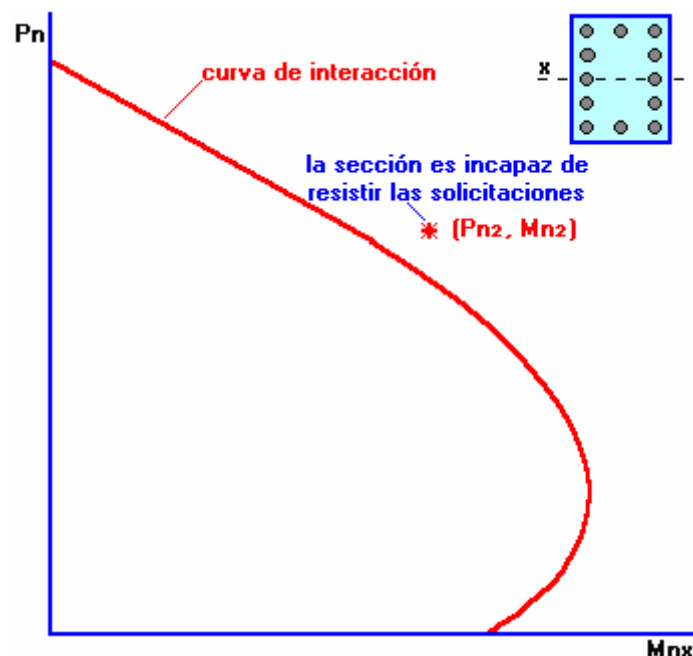


Figura 13.3: Combinación de momentos flectores y cargas axiales que no pueden ser resistidos por la sección.

Es importante observar que la presencia de pequeñas cargas axiales de compresión (parte inferior de la curva de interacción), teóricamente puede tener un efecto



beneficioso sobre el momento flector resistente de la columna (falta aún cuantificar el efecto del factor de reducción de capacidad ϕ para tener la visión completa). Este comportamiento poco usual se debe a que el hormigón, sometido a esfuerzos de tracción por la flexión, se fisura en gran medida, y la presencia de cargas axiales de compresión pequeñas permite disminuir la sección transversal fisurada y aumentar la sección efectiva de trabajo del material.

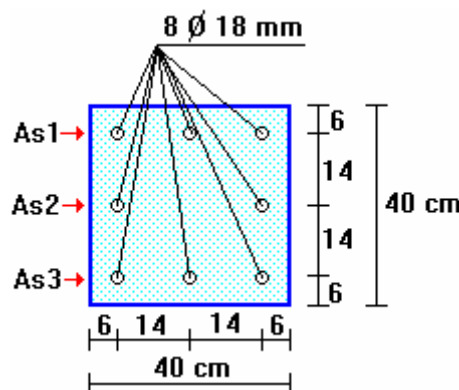
La presencia de grandes cargas axiales (parte superior de la curva de interacción), por otro lado, disminuye considerablemente la capacidad resistente a la flexión de las columnas.

Para la elaboración de las curvas de interacción nominales, para una sección dada, se utiliza el siguiente procedimiento:

- Se definen diferentes posiciones del eje neutro
- Para cada posición del eje neutro se calculan las deformaciones unitarias en cada fibra de la pieza, tomando como base una deformación máxima en el hormigón $\epsilon_u = 0.003$ [ACI 10.3.3]
- En función de las deformaciones en el acero y en el hormigón se determinan los diagramas de esfuerzos en el hormigón y la magnitud de los esfuerzos en el acero, y
- Se calculan los momentos flectores centroidales y cargas axiales internos que, por equilibrio, deben ser iguales a los momentos flectores y cargas axiales externos solicitantes [ACI 10.3.1]

EJEMPLO 13.1:

Dibujar la curva de interacción de cargas nominales y momentos flectores nominales respecto al eje centroidal x de la columna de la figura, tomando ejes neutros paralelos a dicho eje, si la resistencia a la rotura del hormigón es $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y el esfuerzo de fluencia del acero es $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.



$$As1 = 3 \times 2.54 = 7.62 \text{ cm}^2$$

$$As2 = 2 \times 2.54 = 5.08 \text{ cm}^2$$

$$As3 = 3 \times 2.54 = 7.62 \text{ cm}^2$$

La deformación unitaria que provoca fluencia en el acero es:



$$\epsilon_y = \frac{F_y}{E_s} = \frac{4200 \text{ Kg/cm}^2}{2100000 \text{ Kg/cm}^2} = 0.002$$

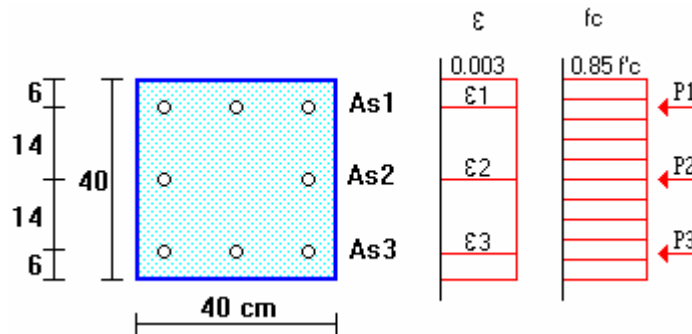
Cualquier deformación unitaria en el acero que esté por debajo de la deformación de fluencia ($\epsilon_s < \epsilon_y$) define esfuerzos en el acero que se pueden calcular con la siguiente expresión [ACI 10.2.4]:

$$f_s = E_s \cdot \epsilon_s \quad \text{Ecuación (13.1)}$$

Cualquier deformación unitaria en el acero que supere la deformación de fluencia ($\epsilon_s > \epsilon_y$) determinará un esfuerzo en el acero igual al esfuerzo de fluencia [ACI 10.2.4]:

$$f_s = F_y$$

- **Punto # 1 del Diagrama de Interacción:** Se supone que todas las fibras tienen una deformación unitaria igual a la máxima deformación permitida en el hormigón $\epsilon_u = 0.003$, lo que es equivalente a que el eje neutro se encuentre en el infinito.



Cálculo de deformaciones unitarias:

$$\epsilon_1 = 0.003 > 0.002$$

$$\epsilon_2 = 0.003 > 0.002$$

$$\epsilon_3 = 0.003 > 0.002$$

Cálculo de esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

Cálculo de la fuerza de compresión en el hormigón:

$$C_c = 0.85 f'_c \cdot b \cdot d = (0.85 \times 210 \text{ Kg/cm}^2) (40 \text{ cm}) (40 \text{ cm}) = 285600 \text{ Kg}$$

Cálculo de las fuerzas de compresión en el acero:

$$P_1 = A_{s1} \cdot f_{s1} = (7.62 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 32004 \text{ Kg}$$

$$P_2 = A_{s2} \cdot f_{s2} = (5.08 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 21336 \text{ Kg}$$

$$P_3 = A_{s3} \cdot f_{s3} = (7.62 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 32004 \text{ Kg}$$

Cálculo de la carga axial nominal:

$$P_n = C_c + P_1 + P_2 + P_3 = 285600 \text{ Kg} + 32004 \text{ Kg} + 21336 \text{ Kg} + 32004 \text{ Kg}$$

$$P_n = 370944 \text{ Kg} = 370.9 \text{ T}$$

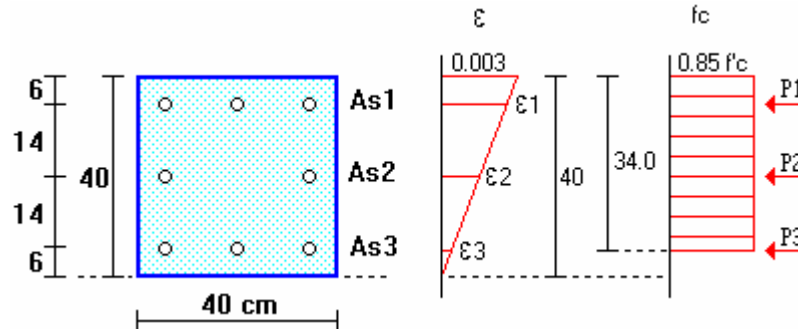


Cálculo del momento flector nominal con respecto al eje centroidal **x**:

$$M_n = (285600 \text{ Kg})(0 \text{ cm}) + (32004 \text{ Kg})(9 \text{ cm}) + (21336 \text{ Kg})(0 \text{ cm}) - (32004 \text{ Kg})(9 \text{ cm})$$

$$M_n = 0 \text{ Kg-cm} = 0.0 \text{ T-cm}$$

- **Punto # 2 del Diagrama de Interacción:** El eje neutro es paralelo al eje **x**, y coincide con el borde inferior de la sección transversal de la columna. La deformación unitaria en el borde superior es la máxima admitida en el hormigón $\epsilon_u = 0.003$.



Cálculo de deformaciones unitarias:

$$\epsilon_1 = 0.003 \frac{34 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = 0.00255 > 0.002$$

$$\epsilon_2 = 0.003 \frac{20 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = 0.0015 < 0.002$$

$$\epsilon_3 = 0.003 \frac{6 \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = 0.00045 < 0.002$$

Cálculo de esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = E_s \cdot \epsilon_2 = (2100000 \text{ Kg/cm}^2) (0.0015) = 3150 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = E_s \cdot \epsilon_3 = (2100000 \text{ Kg/cm}^2) (0.00045) = 945 \text{ Kg/cm}^2$$

Cálculo de la fuerza de compresión en el hormigón:

$$C_c = 0.85 f'_c \cdot b \cdot a = (0.85 \times 210 \text{ Kg/cm}^2) (40 \text{ cm}) (34.0 \text{ cm}) = 242760 \text{ Kg}$$

Cálculo de las fuerzas de compresión en el acero:

$$P_1 = A_{s1} \cdot f_{s1} = (7.62 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 32004 \text{ Kg}$$

$$P_2 = A_{s2} \cdot f_{s2} = (5.08 \text{ cm}^2) (3150 \text{ Kg/cm}^2) = 16002 \text{ Kg}$$

$$P_3 = A_{s3} \cdot f_{s3} = (7.62 \text{ cm}^2) (945 \text{ Kg/cm}^2) = 7201 \text{ Kg}$$

Cálculo de la carga axial nominal:

$$P_n = C_c + P_1 + P_2 + P_3 = 242760 \text{ Kg} + 32004 \text{ Kg} + 16002 \text{ Kg} + 7201 \text{ Kg}$$

$$P_n = 297967 \text{ Kg} = 298.0 \text{ T}$$

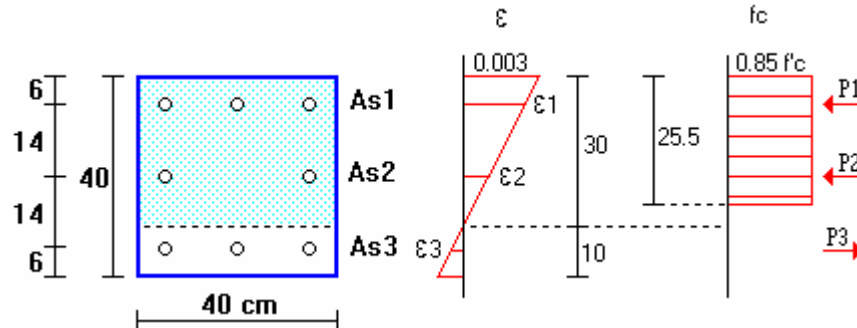
Cálculo del momento flector nominal con relación al eje centroidal **x**:

$$M_n = (242760) (20 - 34.0/2) + (32004) (14) + (16002) (0) - (9601) (14)$$

$$M_n = 1041922 \text{ Kg-cm} = 1041.9 \text{ T-cm}$$



- **Punto # 3 del Diagrama de Interacción:** El eje neutro es paralelo al eje x, y está 10 cm por encima del borde inferior de la sección transversal de la columna. La deformación unitaria en el borde superior es la máxima admitida en el hormigón $\epsilon_u = 0.003$.



Cálculo de deformaciones unitarias:

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= 0.003 \frac{24.0 \text{ cm}}{30.0 \text{ cm}} = 0.0024 > 0.002 \\ \epsilon_2 &= 0.003 \frac{10.0 \text{ cm}}{30.0 \text{ cm}} = 0.0010 < 0.002 \\ \epsilon_3 &= 0.003 \frac{4.0 \text{ cm}}{30.0 \text{ cm}} = 0.0004 < 0.002\end{aligned}$$

Cálculo de esfuerzos en el acero:

$$\begin{aligned}f_{s1} &= F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2 \\ f_{s2} &= E_s \cdot \epsilon_2 = (2100000 \text{ Kg/cm}^2) (0.0010) = 2100 \text{ Kg/cm}^2 \\ f_{s3} &= E_s \cdot \epsilon_3 = (2100000 \text{ Kg/cm}^2) (0.0004) = 840 \text{ Kg/cm}^2\end{aligned}$$

Cálculo de la fuerza de compresión en el hormigón:

$$C_c = 0.85 f'_c \cdot b \cdot a = (0.85 \times 210 \text{ Kg/cm}^2) (40 \text{ cm}) (25.5 \text{ cm}) = 182070 \text{ Kg}$$

Cálculo de las fuerzas de compresión en el acero:

$$\begin{aligned}P_1 &= A_{s1} \cdot f_{s1} = (7.62 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 32004 \text{ Kg} \\ P_2 &= A_{s2} \cdot f_{s2} = (5.08 \text{ cm}^2) (2100 \text{ Kg/cm}^2) = 10668 \text{ Kg} \\ P_3 &= A_{s3} \cdot f_{s3} = (7.62 \text{ cm}^2) (840 \text{ Kg/cm}^2) = 6401 \text{ Kg}\end{aligned}$$

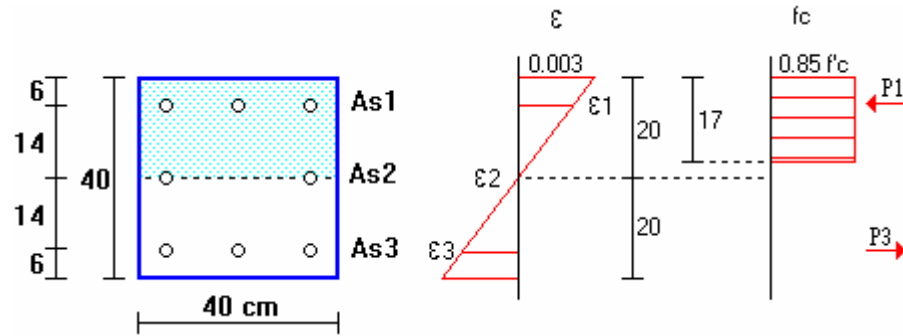
Cálculo de la carga axial nominal:

$$\begin{aligned}P_n &= C_c + P_1 + P_2 - P_3 = 182070 \text{ Kg} + 32004 \text{ Kg} + 10668 \text{ Kg} - 6401 \text{ Kg} \\ \mathbf{P_n} &= \mathbf{218341 \text{ Kg} = 218.3 \text{ T}}\end{aligned}$$

Cálculo del momento flector nominal con relación al eje centroidal x:

$$\begin{aligned}M_n &= (182070) (20 - 25.5/2) + (32004) (14) + (10668) (0) + (6401) (14) \\ \mathbf{M_n} &= \mathbf{1857678 \text{ Kg-cm} = 1857.7 \text{ T-cm}}\end{aligned}$$

- **Punto # 4 del Diagrama de Interacción:** El eje neutro es paralelo al eje x, y está 20 cm por encima del borde inferior de la sección transversal de la columna. La deformación unitaria en el borde superior es la máxima admitida en el hormigón $\epsilon_u = 0.003$.



Cálculo de deformaciones unitarias:

$$\varepsilon_1 = 0.003 \frac{14 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 0.0021 > 0.002$$

$$\varepsilon_2 = 0$$

$$\varepsilon_3 = 0.003 \frac{14 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = 0.0021 > 0.002$$

Cálculo de esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = E_s \cdot \varepsilon_2 = (2100000 \text{ Kg/cm}^2) (0) = 0 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

Cálculo de la fuerza de compresión en el hormigón:

$$C_c = 0.85 f'_c \cdot b \cdot a = (0.85 \times 210 \text{ Kg/cm}^2) (40 \text{ cm}) (17.0 \text{ cm}) = 121380 \text{ Kg}$$

Cálculo de las fuerzas de compresión en el acero:

$$P_1 = A_{s1} \cdot f_{s1} = (7.62 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 32004 \text{ Kg}$$

$$P_2 = A_{s2} \cdot f_{s2} = (5.08 \text{ cm}^2) (0 \text{ Kg/cm}^2) = 0 \text{ Kg}$$

$$P_3 = A_{s3} \cdot f_{s3} = (7.62 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 32004 \text{ Kg}$$

Cálculo de la carga axial nominal:

$$P_n = C_c + P_1 + P_2 - P_3 = 121380 \text{ Kg} + 32004 \text{ Kg} + 0 \text{ Kg} - 32004 \text{ Kg}$$

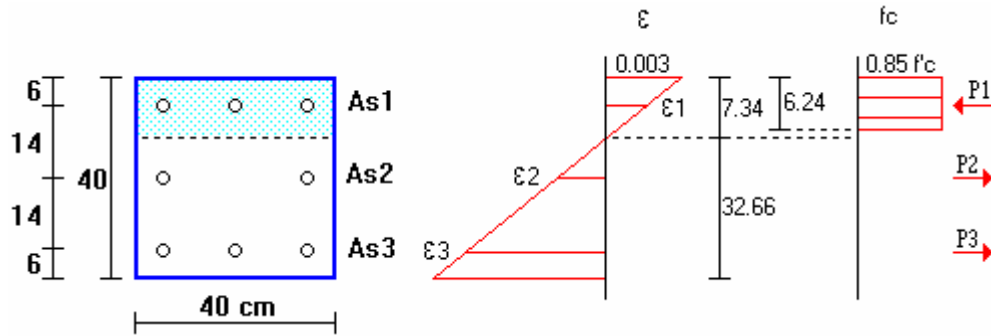
$$\mathbf{P_n = 121380 \text{ Kg} = 121.4 \text{ T}}$$

Cálculo del momento flector nominal con relación al eje centroidal x:

$$M_n = (121380) (20 - 17.0/2) + (32004) (14) + (0) (0) + (32004) (14)$$

$$\mathbf{M_n = 2291982 \text{ Kg-cm} = 2292.0 \text{ T-cm}}$$

- **Punto # 5 del Diagrama de Interacción:** El eje neutro es paralelo al eje x, y está 32.66 cm por encima del borde inferior de la sección transversal de la columna (la posición fue obtenida por tanteo hasta alcanzar flexión pura). La deformación unitaria en el borde superior es la máxima admitida en el hormigón $\varepsilon_u = 0.003$.



Cálculo de deformaciones unitarias:

$$\varepsilon_1 = 0.003 \frac{1.34 \text{ cm}}{7.34 \text{ cm}} = 0.000548 < 0.002$$

$$\varepsilon_2 = 0.003 \frac{12.66 \text{ cm}}{7.34 \text{ cm}} = 0.005174 > 0.002$$

$$\varepsilon_3 = 0.003 \frac{26.66 \text{ cm}}{7.34 \text{ cm}} = 0.010896 > 0.002$$

Cálculo de esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = (2100000 \text{ Kg/cm}^2) (0.000548) = 1151 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{s2} = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$f_{s3} = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

Cálculo de la fuerza de compresión en el hormigón:

$$C_c = (0.85 \times 210 \text{ Kg/cm}^2) (40 \text{ cm}) (6.24 \text{ cm}) = 44554 \text{ Kg}$$

Cálculo de las fuerzas de compresión en el acero:

$$P_1 = (7.62 \text{ cm}^2) (1151 \text{ Kg/cm}^2) = 8771 \text{ Kg}$$

$$P_2 = (5.08 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 21336 \text{ Kg}$$

$$P_3 = (7.62 \text{ cm}^2) (4200 \text{ Kg/cm}^2) = 32004 \text{ Kg}$$

Cálculo de la carga axial nominal:

$$P_n = C_c + P_1 - P_2 - P_3 = 44554 \text{ Kg} + 8771 \text{ Kg} - 21336 \text{ Kg} - 32004 \text{ Kg}$$

$$\mathbf{P_n = -15 \text{ Kg} = -0.0 \text{ T}}$$

Cálculo del momento flector nominal con relación al eje centroidal x:

$$M_n = (44554) (20 - 6.24/2) + (8771) (14) + (21336) (0) + (32004) (14)$$

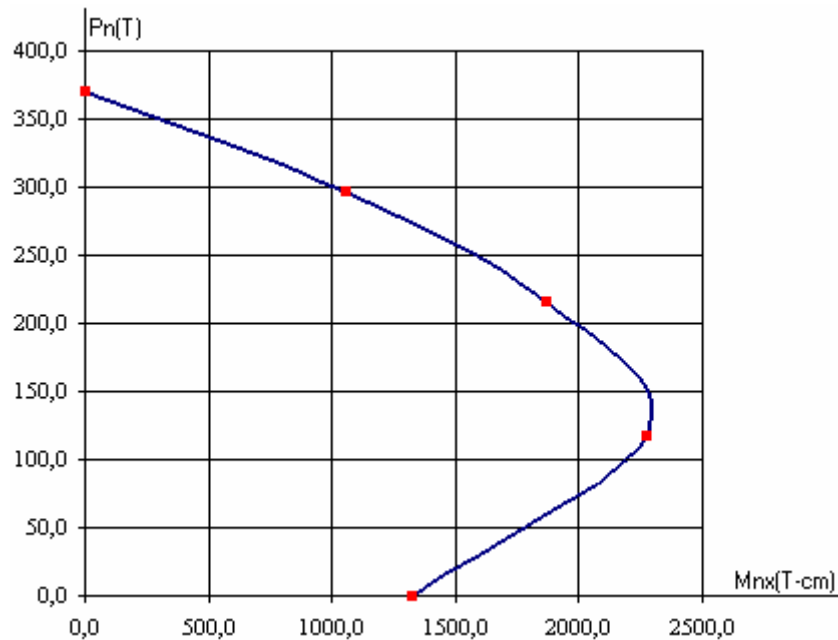
$$\mathbf{M_n = 1322922 \text{ Kg-cm} = 1322.9 \text{ T-cm}}$$

Se puede preparar una tabla con todos los pares de solicitaciones nominales obtenidos (M_n , P_n):



Punto	Mn (T-cm)	Pn (T)
1	0.0	370.9
2	1041.9	298.0
3	1857.7	218.3
4	2292.0	121.4
5	1322.9	0.0

La curva de interacción nominal es la representación gráfica de la tabla anterior:



Empleando una hoja electrónica o un programa de computación resulta más ágil la preparación de la tabla, y el número de puntos obtenidos será mayor, con lo que la calidad de la curva de interacción será mejor.

13.3 ESPECIFICACIONES CODIFICADAS PARA EL USO DE DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN EN EL DISEÑO DE COLUMNAS:

Existen dos aspectos adicionales que deben ser considerados para transformar las curvas de interacción nominales en curvas de interacción para diseño de columnas:

- El factor de reducción de capacidad ϕ para compresión pura en columnas rectangulares es 0.70 y para flexión pura es 0.90 [CEC 9.3, ACI2000 9.3], lo que determina la existencia de una transición entre los dos factores para el caso combinado de flexocompresión [CEC 9.3.2.2]. De cualquier modo, las solicitaciones de rotura se calcularán con las siguientes expresiones:

$P_u = \phi \cdot P_n$	Ecuación (13.2)
$M_u = \phi \cdot M_n$	Ecuación (13.3)

En flexocompresión de columnas con estribos, en que la dimensión del núcleo (zona entre los ejes de las capas más externas del acero) de hormigón en la dirección de diseño represente al menos el 70% de la dimensión exterior de la columna, el Código Ecuatoriano de la Construcción y el ACI especifican que se debe mantener un factor de reducción de capacidad de 0.70 para todos los valores de carga axial que superen $0.10 f'c.A_g$, y se puede realizar una interpolación lineal del factor desde 0.70 hasta 0.90, cuando la carga axial decrece de $0.10 f'c.A_g$ hasta 0 [ACI 10.3.5].

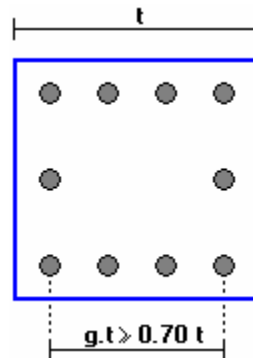


Figura 13.4: Representación gráfica del factor “g” de dimensión del núcleo en una columna rectangular.

En flexocompresión de columnas zunchadas, la variación del factor de reducción de capacidad es similar a las columnas con estribos, pero se produce entre 0.75 y 0.90 [ACI 10.3.5].

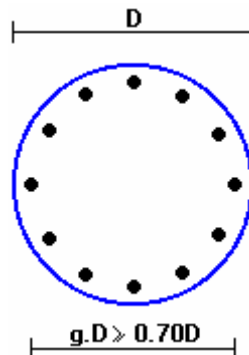


Figura 13.5: Representación gráfica del factor “g” de dimensión del núcleo en una columna circular.

Cuando la dimensión del núcleo de hormigón en columnas con estribos y columnas zunchadas es inferior al 70% de la dimensión exterior de la columna, el cambio en el coeficiente de reducción de capacidad se realizará entre el menor de la carga balanceada P_b y $0.10 f'c.A_g$, y 0 [ACI 10.3.5].

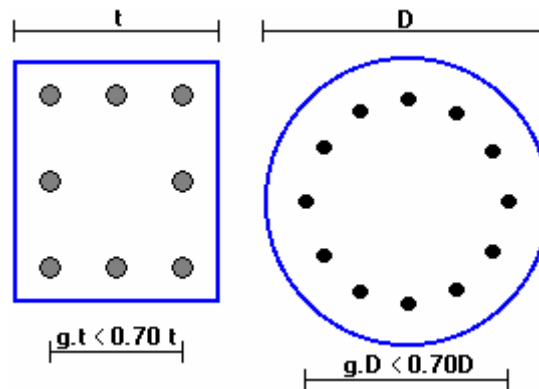


Figura 13.6: Núcleos de columna de tamaño comparativamente reducido.

- b. El ACI 2005 y CEC-2001 especifican que **en columnas con estribos se debe reducir en un 20% la carga axial última máxima para cubrir el efecto de los momentos flectores causados por pequeñas excentricidades de la carga**, cuya existencia no puede ser controlada por el diseñador [ACI 10.3.6.2].

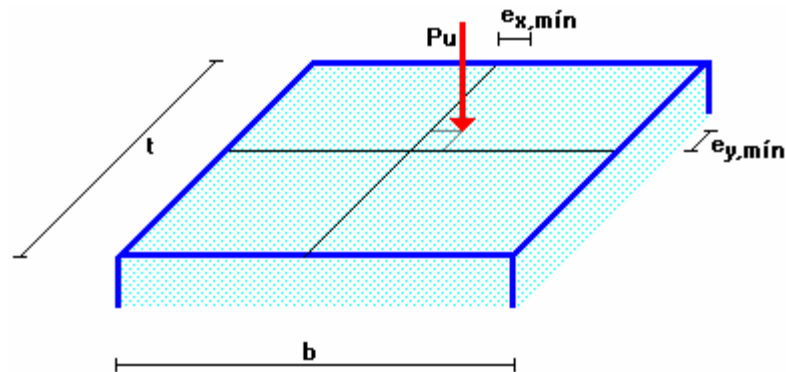


Figura 13.7: Excentricidades mínimas en columnas rectangulares.

Las versiones anteriores del código ACI, y del Código Ecuatoriano de la Construcción manejaban excentricidades mínimas del 10% de la dimensión máxima de la columna con estribos, en la dirección de la excentricidad ($0.10 b$, $0.10 t$ en el gráfico anterior).

En el caso de columnas zunchadas, se debe reducir en un 15% la carga axial última máxima para cubrir el efecto de los momentos flectores causados por pequeñas excentricidades de las cargas axiales, cuya existencia no puede ser controlada por el diseñador [ACI 10.3.6.1].

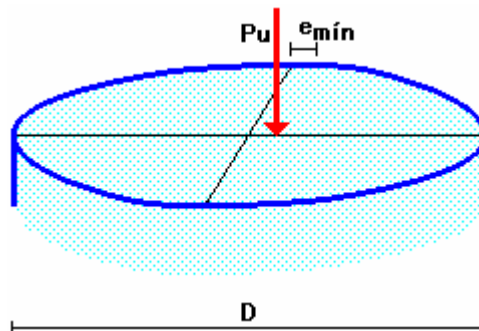


Figura 13.8: Excentricidades mínimas en columnas circulares zunchadas.



Las versiones anteriores del Código Ecuatoriano de la Construcción y del ACI manejaban excentricidades mínimas del 5% del diámetro de la columna zunchada en la dirección de la excentricidad (**0.05 D** en el gráfico anterior).

La excentricidad puede ser calculada con las siguientes expresiones:

$$e = M_u / P_u$$

$$e_x = M_{uy} / P_u$$

$$e_y = M_{ux} / P_u$$

Donde:

M_u: momento último

M_{ux}: momento último alrededor del eje x

M_{uy}: momento último alrededor del eje y

P_u: carga axial última

e: excentricidad de la carga axial con respecto al centroide de la sección

e_x: excentricidad de la carga axial medida en la dirección x

e_y: excentricidad de la carga axial medida en la dirección y

En la curva de interacción, estas ecuaciones pueden ser representadas mediante rectas que pasan por el origen.

EJEMPLO 13.2:

Modificar la curva de interacción del ejemplo anterior para tomar en consideración los factores de reducción de capacidad apropiados, la excentricidad mínima de la carga axial, y la reducción de la carga axial última máxima.

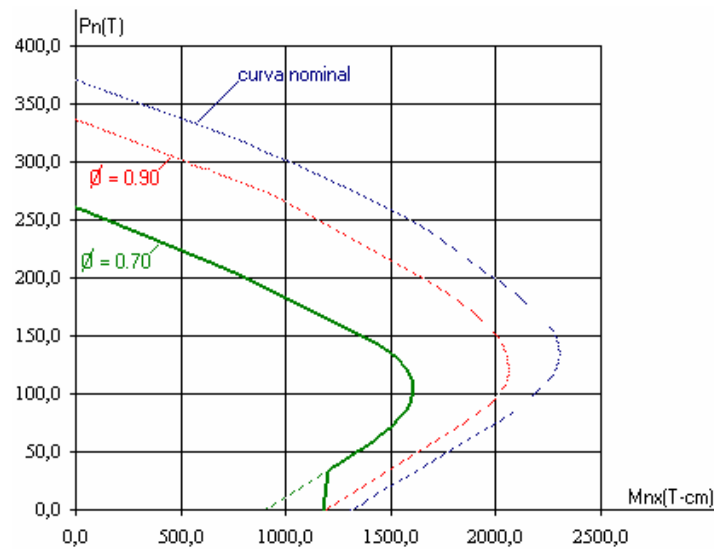
Se puede preparar una tabla que incluya valores de carga axial y de momentos flectores que incluyan los factores de reducción 0.70 y 0.90, basada en la tabla del ejemplo anterior.

Punto	Cargas Nominales		Cargas Ultimas $\phi = 0.90$		Cargas Ultimas $\phi = 0.70$	
	M _n (T-cm)	P _n (T)	M _{U,1} (T-cm)	P _{U,1} (T)	M _{U,2} (T-cm)	P _{U,2} (T)
1	0,0	370,9	0,0	333,8	0,0	259,6
2	1041,9	298,0	937,7	268,2	729,3	208,6
3	1857,7	218,3	1671,9	196,5	1300,4	152,8
4	2292,0	121,4	2062,8	109,3	1604,4	85,0
5	1322,9	0,0	1190,6	0,0	926,0	0,0

La carga axial que define una variación en el factor de reducción de capacidad es:

$$0.10 f'_c \cdot A_g = (0.10) (210) (1600) = 33600 \text{ Kg} = 33.6 \text{ T}$$

La curva de interacción de las cargas últimas, incluyendo el efecto del factor de reducción de capacidad es:



Para tomar en consideración la excentricidad mínima (10% de la dimensión respectiva de la columna = 4 cm, por ser no zunchada) especificada por las versiones antiguas del CEC y ACI, se dibuja sobre la curva de interacción la ecuación.

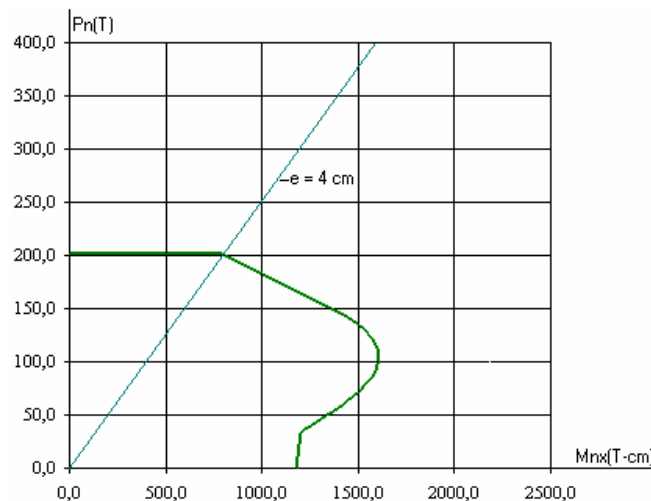
$$e = M_u / P_u = 4 \text{ cm}$$

Para el efecto, se definen dos puntos sobre la recta mencionada, los que permiten su representación gráfica:

$$M_u = 0 ; P_u = 0$$

$$M_u = 400 \text{ T-cm} ; P_u = 100 \text{ T}$$

Desde el punto de cruce de la recta de excentricidad mínima con la curva de interacción anterior se traza una recta horizontal para completar la curva de interacción definitiva.

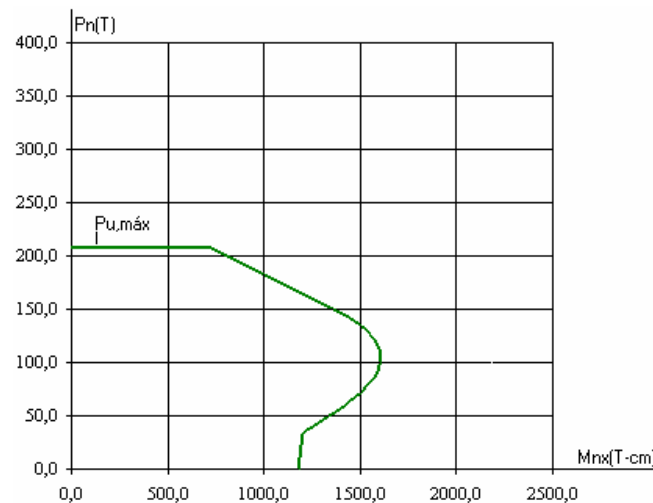


De igual manera, si utilizamos el criterio del ACI y códigos vigentes, el recorte horizontal de la curva de interacción debe producirse al nivel de la carga axial última máxima (una reducción del 20% con relación a la carga última teórica).

$$P_{u,m\acute{a}x} = 0.80 \phi (0.85 f'_c \cdot A_c + A_s \cdot F_y) \quad \text{Ecuación (13.4)}$$

$$P_{u,m\acute{a}x} = (0.80) (259.6 \text{ T}) = 207.68$$

El diagrama que se obtiene es muy similar al que se dedujo anteriormente.



13.4 DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN ADIMENSIONALES PARA EL DISEÑO DE COLUMNAS:

Existe una gran variedad de curvas de interacción adimensionales que evitan la preparación de curvas de interacción específicas para cada columna, cuya utilización facilita enormemente el diseño a flexocompresión. El propio ACI ha publicado curvas que contienen algunos de los criterios detallados en el numeral anterior, dejando los restantes criterios para la aplicación por parte del diseñador.

La presentación típica de estos diagramas es la de una familia de curvas para determinados valores de: esfuerzo de rotura del hormigón (f'_c), esfuerzo de fluencia del acero (F_y), relación entre la dimensión del núcleo de hormigón y la dimensión exterior de la columna (g), y distribución de la armadura en la sección de hormigón.

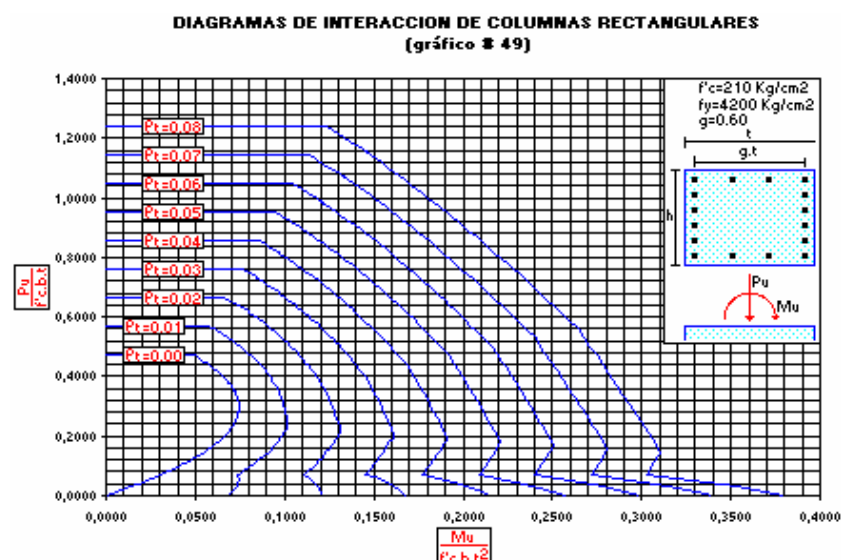


Figura 13.9: Diagramas de interacción adimensionales para flexión unidireccional en columnas rectangulares.

Como anexo al presente documento se ha incluido un conjunto de **Diagramas de Interacción para Columnas Rectangulares con Armadura Simétrica Respecto a los**

Ejes Principales, sometidas a flexión en una dirección principal; **Diagramas de Interacción para Columnas Circulares con Armadura Simétrica**; **Diagramas de Interacción para Columnas Zunchadas Circulares con Armadura Transversal Mínima Simétrica**; y **Diagramas de Interacción para Columnas Cuadradas con Flexión a 45° Respecto a los Ejes Principales con Armadura Simétrica**, elaboradas por el autor, en las que, además de los criterios expuestos en el párrafo anterior, se han incluido: la excentricidad mínima establecida en el Código Ecuatoriano de la Construcción, y el cambio del valor del factor de reducción de capacidad. Estos factores usualmente no son incluidos explícitamente en otras curvas de interacción disponibles, por lo que para el uso de otras curvas de interacción siempre es recomendable revisar la metodología propia de uso de sus diagramas.

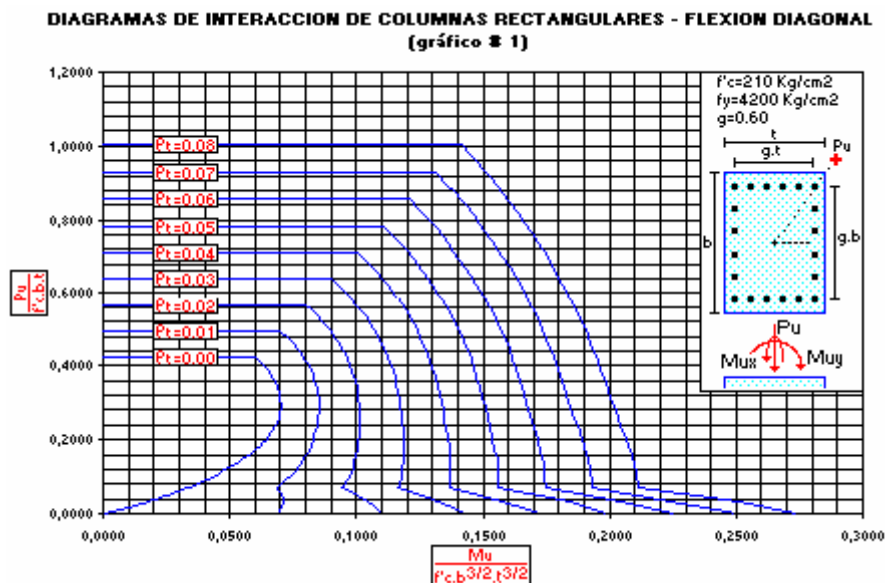


Figura 13.10: Diagramas de interacción adimensionales para flexión diagonal en columnas rectangulares.

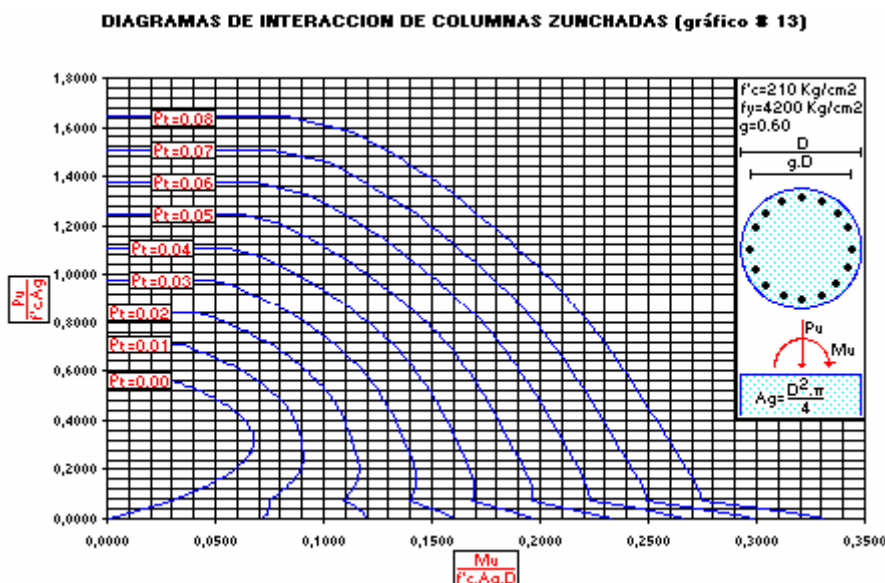


Figura 13.11: Diagramas de interacción adimensionales para flexión en columnas circulares zunchadas.

13.5 UTILIZACIÓN DE LOS DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN ADIMENSIONALES PARA COLUMNAS RECTANGULARES CON FLEXIÓN UNIDIRECCIONAL:

Para utilizar los diagramas de interacción adimensionales para columnas rectangulares, se definen en primer lugar las solicitaciones mayoradas que actúan sobre la columna (carga axial última **Pu** y momento flector último **Mu**), se especifican las dimensiones de la columna (**b**, **t**) que fueron utilizadas en el análisis estructural, y se escoge una distribución tentativa del acero de refuerzo longitudinal, respetando los recubrimientos mínimos y la separación mínima entre varillas.

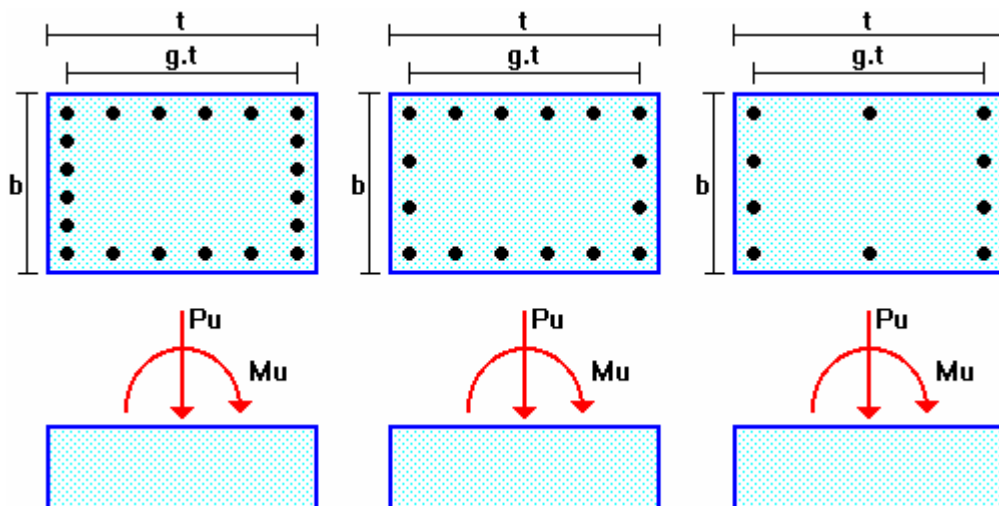


Figura 13.12: Varias distribuciones de armadura en columnas rectangulares.

- Se define, en primer lugar, la resistencia última del hormigón (**f'c**) y el esfuerzo de fluencia del acero (**Fy**), que en nuestro medio son usualmente 210 Kg/cm² y 4200 Kgr/cm² respectivamente. Ocasionalmente se utilizan hormigones de 280 Kg/cm² y 350 Kg/cm², y aceros importados en varilla con esfuerzo de fluencia de 2800 Kg/cm².
- Se proceden a calcular dos parámetros que definen la abscisa (**x**) y la ordenada (**y**) de un punto dentro del diagrama de interacción, mediante las siguientes expresiones:

$$x = \frac{Mu}{f'c \cdot b \cdot t^2} \quad \text{Ecuación (13.5)}$$

$$y = \frac{Pu}{f'c \cdot b \cdot t} \quad \text{Ecuación (13.6)}$$

- Se escoge el diagrama adimensional que mejor se ajuste a las condiciones del diseño real, y en él se identifica el punto de abscisa y ordenada anteriormente señalados.

El punto así obtenido puede coincidir sobre una de las curvas de interacción o puede ubicarse entre dos curvas de interacción, definidas para diferentes cuantías de armado (0.00, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07 y 0.08).



En el primer caso se lee directamente la cuantía de armado total ρ_t de la curva de interacción de la columna adimensional, y en el segundo caso se interpola la cuantía de armado mediante apreciación visual o medición de longitudes.

La cuantía de armado así obtenida será la mínima requerida por la columna real para resistir la carga axial última y el momento flector último, siempre que su valor esté comprendido entre las cuantías mínima y máxima permitidas por los códigos.

En caso de ser necesario se interpolará linealmente entre los resultados de la lectura en varios diagramas de interacción.

- La cantidad de acero total de la columna se obtiene mediante la siguiente expresión:

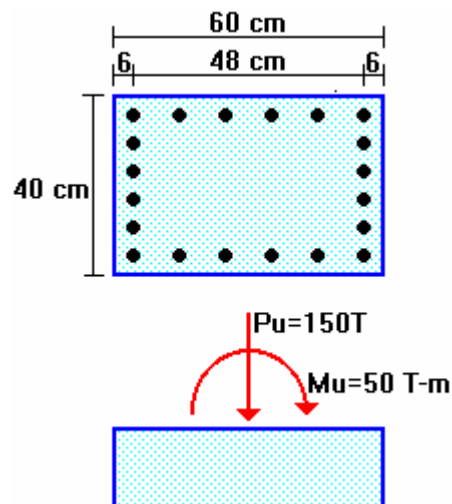
$$A_s = \rho_t \cdot b \cdot t$$

Ecuación (13.7)

EJEMPLO 13.3:

Una columna corta rectangular de hormigón armado, de 40 cm x 60 cm, está sometida a una carga axial última **Pu** de 150 T y a un momento flector último **Mu** de 50 T-m en la dirección más larga de la sección transversal de la columna (alrededor del eje principal más corto). El hormigón tiene una resistencia a la rotura **f'c** de 210 Kg/cm² y el acero tiene un esfuerzo de fluencia **Fy** de 4200 Kg/cm². Definir el armado longitudinal requerido para resistir estas solicitaciones.

El recubrimiento mínimo del acero es de 4 cm, al que debe añadirse el diámetro de los estribos que puede estimarse en 0.8 cm, y suponiendo un diámetro de las varillas longitudinales de 25 mm, se tiene una distancia aproximada desde la cara exterior de la columna hasta el centro de gravedad de las varillas de 6 cm (4 cm + 0.8 cm + 1.25 cm = 6.05 cm). Adicionalmente se puede suponer una distribución igual del número de varillas en las cuatro caras de la columna, como en el siguiente gráfico:



Se determina el factor de dimensión del núcleo (**g**) en la dirección de acción del momento flector:

$$g = 48 \text{ cm} / 60 \text{ cm}$$



$g = 0.80$

Se calculan la abscisa y la ordenada para utilizarlas en los diagramas auxiliares para columnas rectangulares adimensionales:

$$x = \frac{M_u}{f'c \cdot b \cdot t^2} = \frac{5000000 \text{ Kg} \cdot \text{cm}}{(210 \text{ Kg/cm}^2)(40 \text{ cm})(60 \text{ cm})^2}$$

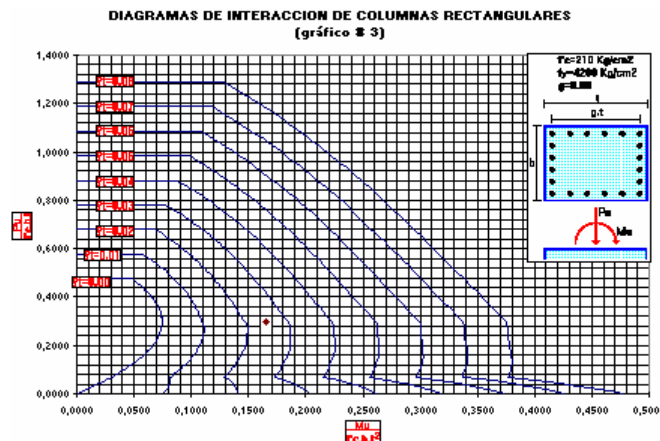
$x = 0.165$

$$y = \frac{P_u}{f'c \cdot b \cdot t} = \frac{150000 \text{ Kg}}{(210 \text{ Kg/cm}^2)(40 \text{ cm})(60 \text{ cm})}$$

$y = 0.298$

Se escoge el gráfico # 3 de los **Diagramas de Interacción Adimensionales para Columnas Rectangulares**, para la determinación del armado de la columna, el que está definido por $f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$, $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$, $g = 0.80$, y **20 varillas distribuidas uniformemente en sus cuatro caras** (6 varillas en cada cara).

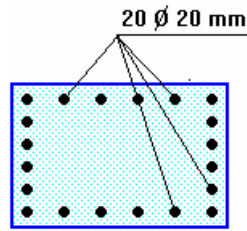
En el gráfico se busca el punto de coordenadas $x = 0.165$, $y = 0.298$. El punto mencionado se ubica entre las curvas de interacción con cuantías de armado total de 0.02 y 0.03, lo que al interpolar gráficamente proporciona una cuantía de armado para la columna $\rho_t = 0.025$, que por ser mayor a la cuantía mínima en columnas ($\rho_{\text{mín}} = 0.01$), e inferior a la cuantía máxima en zonas sísmicas ($\rho_{\text{máx}} = 0.06$), es un valor aceptable. Además, por aspectos de economía en el diseño, una cuantía de armado del 2.5% es razonable.



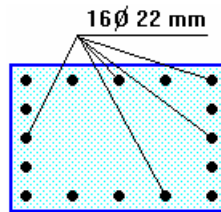
La sección transversal de acero es:

$$A_s = \rho_t \cdot b \cdot t = 0.025 (40 \text{ cm}) (60 \text{ cm}) = 60.00 \text{ cm}^2$$

La distribución escogida inicialmente determina que se requerirán **20 varillas de hierro de 20 mm de diámetro**, lo que proporciona **62.8 cm²** de sección transversal de acero (ligeramente superior a la cantidad requerida).



También podrían escogerse **16 varillas de 22 mm** que proporcionan **60.79 cm²** de acero, lo que significa 5 varillas en cada cara de la columna, que no está muy alejado de la hipótesis inicial de 6 varillas en cada cara.



13.6 UTILIZACIÓN DE LOS DIAGRAMAS AUXILIARES DE INTERACCIÓN ADIMENSIONALES PARA COLUMNAS ZUNCHADAS CIRCULARES CON FLEXIÓN UNIDIRECCIONAL:

De manera similar a la utilización de los diagramas de interacción para columnas rectangulares, para utilizar los diagramas de interacción adimensionales para columnas zunchadas circulares, se definen las solicitaciones mayoradas que actúan sobre la columna (carga axial última **P_u** y momento flector último **M_u**), se especifica el diámetro de la columna (**D**) que fue utilizado en el análisis estructural, y se escoge una distribución tentativa del acero de refuerzo longitudinal (8, 12, 16 o 20 varillas uniformemente distribuidas), respetando los recubrimientos mínimos y la separación mínima entre varillas.

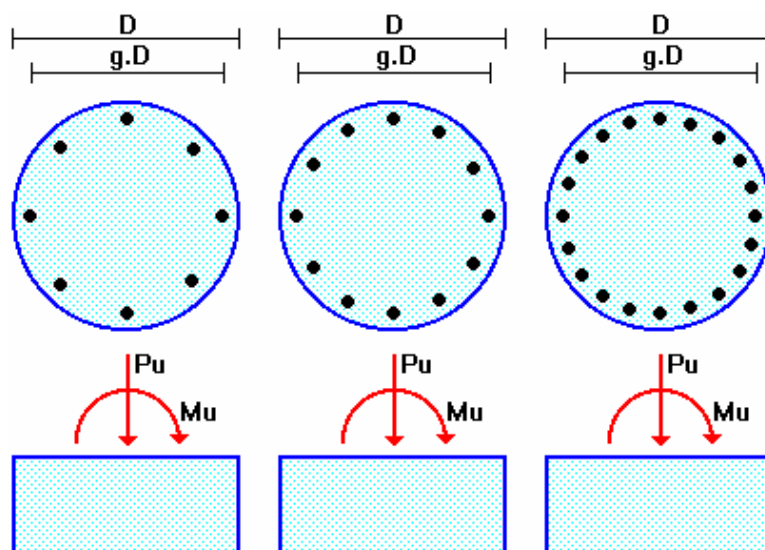


Figura 13.13: Varias distribuciones de armadura en columnas circulares.



- Se define, en primer lugar, la resistencia última del hormigón ($f'c$) y el esfuerzo de fluencia del acero (Fy).
- Se proceden a calcular dos parámetros que definen la abscisa y la ordenada de un punto dentro del diagrama de interacción, mediante las siguientes expresiones:

$$x = \frac{Mu}{f'c \cdot Ag \cdot D}$$

Ecuación (13.8)

$$y = \frac{Pu}{f'c \cdot Ag}$$

Ecuación (13.9)

Donde:

$$Ag = \frac{D^2 \cdot \pi}{4}$$

Se escoge el diagrama adimensional para columnas zunchadas que mejor se ajuste a las condiciones del diseño real, y en él se identifica el punto de abscisa y ordenada anteriormente señalados. Se lee el valor de la cuantía total ρ_t . En caso de ser necesario se interpolará linealmente entre los resultados de la lectura en varios diagramas de interacción.

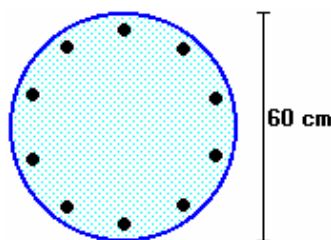
- La cantidad de acero total de la columna se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$As = \rho_t \cdot Ag$$

Ecuación (13.10)

EJEMPLO 13.4:

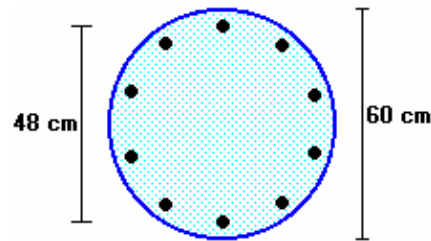
Diseñar una columna zunchada con poca esbeltez, cuyo diámetro es de 60 cm, que está sometida a una carga axial última **Pu** de 160 T y a un momento flector último **Mu** de 55 T-m, si la resistencia del hormigón $f'c$ es 210 Kg/cm² y el esfuerzo de fluencia del acero Fy es 4200 Kg/cm².



Con un recubrimiento de 4 cm, un zuncho de aproximadamente 8 mm de diámetro y un diámetro de las varillas longitudinales de 25 mm, se tiene una distancia de 6 cm. desde la superficie exterior de la columna al centroide de cada varilla principal de acero, por lo que el factor de dimensión del núcleo **g** es:

$$g = 48 / 60$$

$$g = 0.80$$



La sección transversal geométrica de la columna circular es:

$$A_g = (60)^2 \pi / 4 = 2827.43 \text{ cm}^2$$

Se calculan la abscisa y la ordenada para utilizarlas en los diagramas auxiliares para columnas zunchadas circulares adimensionales:

$$x = \frac{M_u}{f'c \cdot A_g \cdot D} = \frac{5500000 \text{ Kg} \cdot \text{cm}}{(210 \text{ Kg/cm}^2)(2827.43 \text{ cm}^2)(60 \text{ cm})}$$

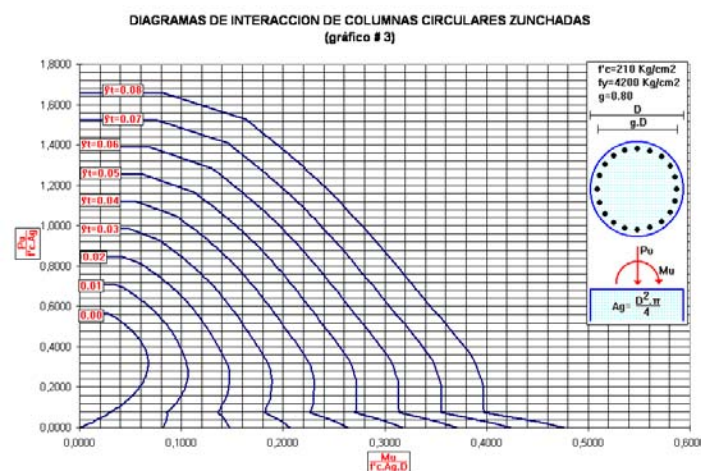
$$x = 0.154$$

$$y = \frac{P_u}{f'c \cdot A_g} = \frac{160000 \text{ Kg} \cdot \text{cm}}{(210 \text{ Kg/cm}^2)(2827.43 \text{ cm}^2)}$$

$$y = 0.269$$

Se escoge el gráfico # 3 de los **Diagramas de Interacción Adimensionales para Columnas Zunchadas Circulares**, para la determinación del armado de la columna, el que está definido por $f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$, $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$, $g = 0.80$, y 20 varillas distribuidas uniformemente en toda la periferie.

En el gráfico se busca el punto de coordenadas $x = 0.154$, $y = 0.269$. El punto mencionado se ubica entre las curvas de interacción con cuantías de armado total de 0.02 y 0.03, lo que al interpolar gráficamente proporciona una cuantía de armado para la columna $\rho_t = 0.0225$, que por ser mayor a la cuantía mínima en columnas ($\rho_{\min} = 0.01$), e inferior a la cuantía máxima para zonas sísmicas ($\rho_{\max} = 0.06$), es un valor aceptable. Además, por aspectos de economía en el diseño, una cuantía de armado del 2.25% está por debajo del máximo recomendado de 2.5%.

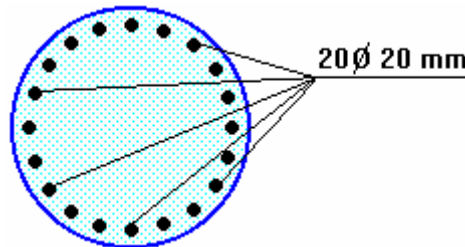


La sección transversal necesaria de acero es:



$$A_s = \rho_t \cdot A_g = (0.0225) (2827.43) = 63.62 \text{ cm}^2$$

La distribución escogida inicialmente determina que se requerirán **20 varillas de hierro de 20 mm de diámetro**, lo que proporciona **62.80 cm²** de sección transversal de acero, apenas un 1% inferior al requerimiento.



13.7 EFECTO DEL PANDEO EN EL DISEÑO A FLEXOCOMPRESIÓN:

Las columnas esbeltas tienen una capacidad resistente a flexocompresión menor que las columnas cortas, lo que debe ser tomado en consideración durante el diseño.

Tanto el Código Ecuatoriano de la Construcción como el Código ACI establecen que, para cuantificar la reducción de capacidad por pandeo en columnas, se deben mayorar los momentos flectores de diseño [ACI 10.10].

Los mencionados códigos establecen tres alternativas fundamentales para enfrentar el problema de pandeo en columnas:

- Las columnas pueden diseñarse empleando **análisis estructural de segundo orden**, que implica el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio sobre la estructura deformada, o la utilización de procesos iterativos, por lo que requiere la resolución de ecuaciones diferenciales [ACI 10.10.1]. Este método es el más exacto pero también el más laborioso de utilizar.
- Las **columnas arriostradas contra desplazamiento transversal**, o cuyas cargas no provocan desplazamientos transversales importantes (usualmente la carga permanente y la carga viva), pueden diseñarse empleando un método aproximado basado en **análisis estructural de primer orden** (las ecuaciones de equilibrio se plantean sobre la estructura sin deformar) y en la **ecuación de Euler** [ACI 10.10.2].

El método consiste en utilizar la carga axial de diseño **P_u** obtenida en el análisis estructural convencional (análisis de primer orden), y un momento flector de diseño amplificado **M_c**, definido por la siguiente expresión [ACI 10.10.6]:

$$M_c = \delta \cdot M_2 \quad \text{Ecuación (13.11)}$$

Donde:

M_c: momento flector amplificado, utilizado para el diseño de secciones en las que se considera el efecto del pandeo

M₂: mayor momento flector último en el extremo de barra

δ: factor de mayoración de los momentos flectores por efecto del pandeo



Para calcular el factor de mayoración de momentos flectores se utiliza la siguiente expresión:

$$\delta = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{0.75 P_{cr}}} \geq 1.0 \quad \text{Ecuación (13.12)}$$

Donde:

C_m: factor de sensibilidad al primer modo de deformación por pandeo del elemento de compresión

P_u: carga axial última de compresión que actúa sobre el elemento estructural

P_{cr}: carga crítica de pandeo de Euler

La carga crítica de pandeo de Euler deberá calcularse con la siguiente expresión:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(k \cdot L_u)^2} \quad \text{Ecuación (13.13)}$$

Donde:

E: modulo de elasticidad del hormigón armado con hormigón fisurado

I: inercia de la sección transversal compuesta por hormigón y acero

k: coeficiente de longitud de pandeo

L_u: longitud geométrica de pandeo del elemento

Para miembros arriostrados contra el desplazamiento lateral y sin cargas transversales entre los apoyos, **C_m** se puede calcular mediante la siguiente expresión [ACI 10.10.6.4]:

$$C_m = 0.6 + 0.4 \frac{M_1}{M_2} \geq 0.4 \quad \text{Ecuación (13.14)}$$

Donde:

M₁: momento flexionante último menor de diseño en el extremo de miembros sujetos a compresión, calculado mediante un análisis elástico convencional de pórticos. Es positivo si el miembro está flexionado con curvatura simple, y negativo si está flexionado con doble curvatura.

M₂: momento flexionante último mayor de diseño en el extremo de miembros sujetos a compresión, calculado por análisis elástico convencional de pórticos (en el extremo opuesto a **M₁**). Siempre se considera positivo.

Para todos los demás casos, **C_m** debe tomarse como **1.0**

El producto **E.I** se puede calcular con la siguiente expresión aproximada:

$$E \cdot I = \frac{0.2 E_c I_g + E_s I_s}{1 + \beta d} \quad \text{Ecuación (13.15)}$$

o mediante la siguiente expresión simplificada:

$$E \cdot I = \frac{0.4 E_c I_g}{1 + \beta d} \quad \text{Ecuación (13.16)}$$



Donde:

- Ec: módulo de elasticidad del hormigón simple
Ig: inercia de la sección geométrica de hormigón armado
Es: módulo de elasticidad del acero de refuerzo
Is: inercia del acero de refuerzo
 β_d : razón entre la carga permanente factorada y la carga axial factorada (P_D/P_T)

El valor del momento factorado M_2 no debe ser menor que la siguiente expresión:

$$M_{2,MIN} = P_u (1.5 \text{ cm} + 0.03 h) \quad \text{Ecuación (13.17)}$$

Donde:

- Pu: carga axial última
h: espesor del elemento en la dirección en que se mide el momento flector

En este punto cabe mencionar que la ecuación para el cálculo del factor de mayoración del momento flector (δ) proporciona valores comprendidos entre uno e infinito. Mientras más cercano sea el valor de P_u al de $0.75 P_{cr}$, el factor de mayoración es mucho más alto.

El pandeo, en columnas reales (en contraposición de las columnas ideales), no se produce repentinamente al alcanzarse la carga crítica de pandeo, sino que se manifiesta progresivamente desde los nivel bajos de carga axial, y se vuelve cada vez más importante conforme la carga axial se aproxima a la carga crítica de pandeo.

A continuación se presenta un gráfico con la variación del factor de mayoración de momentos δ , conforme lo proponen los códigos de diseño vigentes, para diferentes valores de $P_u / (0.75 P_{cr})$, y para distintos valores de C_m .

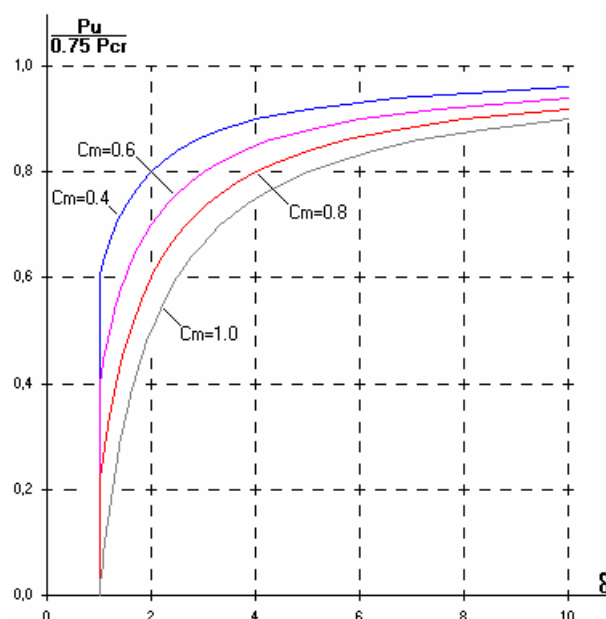


Figura 13.14: Variación del factor de mayoración de momentos “ δ ”, para distintos valores de “ C_m ”.

Vale la pena mencionar que la ecuación definida por los códigos de diseño para **Cm**, en el caso de columnas sin desplazamiento transversal de los nudos extremos, trata de corregir la manera muy simple de modelar el efecto del pandeo en columnas, tomando en consideración la influencia de la elástica de deformación provocada por los momentos flectores de primer orden sobre la geometría de la elástica de deformación de pandeo. El valor natural de **Cm** es 1.

El criterio básico utilizado para definir el valor de **Cm** es que **los códigos de diseño consideran que los momentos flectores constituyen el factor más importante para definir el comportamiento de las columnas ante el pandeo, por lo que la geometría de pandeo, en sus inicios, sería muy similar a la elástica de deformación provocada por la flexión de primer orden, aunque en los estadios finales siempre será semejante al primer modo de deformación de pandeo.**

En el gráfico siguiente se presentan las elásticas de deformación iniciales de columnas de eje recto, provocadas por las cuatro posibles combinaciones de dirección de los momentos extremos de barra que son contempladas en los códigos, para el caso de que las columnas no puedan tener desplazamientos transversales relativos entre los extremos de barra (éste es el único caso en que los códigos admiten que el valor de **Cm** puede ser diferente de 1).

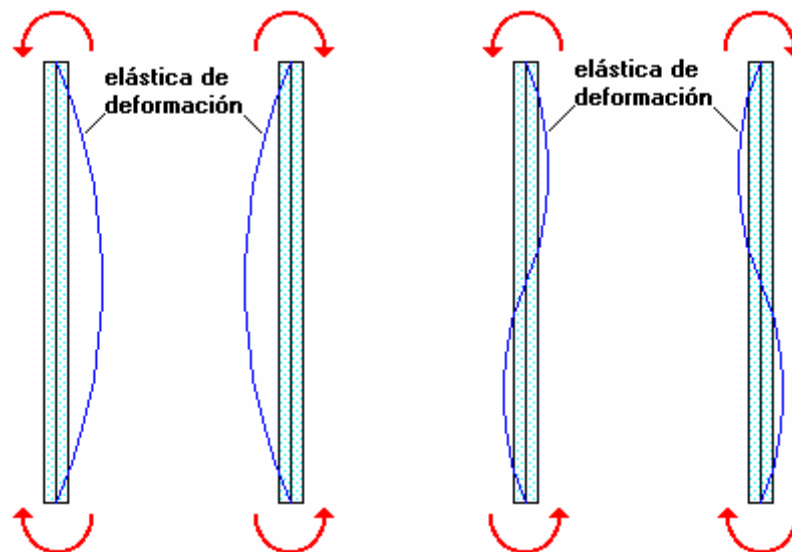


Figura 13.15: Elásticas de deformación iniciales para distintas combinaciones de momentos extremos de barra.

Las dos primeras combinaciones de momentos extremos de barra, en el gráfico anterior, generan elásticas de deformación muy similares al primer modo de deformación por pandeo detallado en el Capítulo X. Es evidente que, en estos dos primeros casos, el comportamiento de las columnas ante el pandeo debería estar definido casi directamente por la ecuación básica de Euler para ese primer modo de deformación.

$$P_{cr1} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(k \cdot L)^2}$$



C_m en estos casos debería tener un valor de 1 o muy cercano a 1, como en efecto ocurre al emplear los criterios de los códigos.

Las dos últimas combinaciones de momentos extremos de barra, en el gráfico anterior, generan elásticas de deformación muy similares al segundo modo de deformación por pandeo. En estos dos casos se esperaría que el comportamiento de las columnas ante el pandeo esté dominado por la ecuación de Euler para el segundo modo de deformación, al menos en sus primeras fases.

$$P_{cr2} = \frac{4\pi^2 \cdot E \cdot I}{(k \cdot L)^2}$$

Dado que la carga crítica de pandeo para el segundo modo de deformación es 4 veces mayor a la carga crítica de pandeo para el primer modo de deformación, **los dos últimos modelos de columnas podrían ser hasta 4 veces menos sensibles al efecto del pandeo, en sus inicios**, lo que significa que **C_m** podría teóricamente variar entre 0.25 y 1. Los códigos han tomado una variación más conservadora de **C_m** entre 0.40 y 1.00, lo que resulta razonable.

- c. Las **columnas no arriostradas contra desplazamiento transversal** pueden diseñarse empleando un segundo método aproximado, también basado en **análisis estructural de primer orden** y la **ecuación de Euler** [ACI 10.10.7].

El método consiste en amplificar los momentos flectores extremos de barra mediante las siguientes expresiones:

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s \cdot M_{1s}$$

Ecuación (13.18)

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s \cdot M_{2s}$$

Ecuación (13.19)

Donde:

M_{1ns}: momento factorado del extremo 1 de barra, provocado por las cargas que no causan desplazamientos transversales apreciables (permanente, viva)

M_{2ns}: momento factorado del extremo 2 de barra, provocado por las cargas que no causan desplazamientos transversales apreciables (permanente, viva)

M_{1s}: momento factorado del extremo 1 de barra, provocado por las cargas que causan desplazamientos transversales apreciables (sismo, viento)

M_{2s}: momento factorado del extremo 2 de barra, provocado por las cargas que causan desplazamientos transversales apreciables (sismo, viento)

δ_s: factor de amplificación de momentos en columnas no arriostradas

Los momentos flectores amplificados pueden calcularse con teoría de segundo orden, o mediante las siguientes expresiones:

$$\delta_s \cdot M_s = \frac{M_s}{1 - Q} \geq M_s$$

Ecuación (13.20)

$$Q = \frac{\sum (P_u \cdot \Delta_o)}{V_u \cdot L_c}$$

Ecuación (13.21)

Donde:

P_u: carga axial factorada

Δo : desplazamiento transversal entre extremos de columnas debido a la fuerza cortante V_u

V_u : cortante transversal factorado

L_c : longitud de la columna medida de centro a centro de nudo

También se deberá calcular la amplificación de momentos flectores por desplazamiento del piso completo mediante la siguiente expresión:

$$\delta_s.M_s = \frac{M_s}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_{cr}}} \geq M_s \quad \text{Ecuación (13.22)}$$

En principio, se deberá escoger el mayor de los dos valores calculados de $\delta_s.M_s$. Sin embargo, cuando el valor de δ_s obtenido con la primera fórmula supere **1.5**, deberá utilizarse la amplificación de momento definida en la última fórmula.

Las columnas reales, de hormigón armado, rara vez son articuladas o empotradas. Normalmente están elásticamente sustentadas en otros elementos estructurales, por lo que la constante de longitud de pandeo **k** depende fundamentalmente de la capacidad de desplazamiento transversal de los extremos de la columna y de cuán rígidas a la rotación sean las columnas con respecto a los demás elementos que concurren a los nudos.

Existen nomogramas que permiten determinar directamente la constante de longitud de pandeo **k** para columnas en pórticos arriostrados transversalmente (con nudos sin capacidad de desplazamiento transversal como las columnas de los subsuelos de los edificios cuando existen muros de contención perimetrales integrados a los pórticos), y columnas en pórticos no arriostrados transversalmente (como las columnas que sobresalen del nivel del suelo).

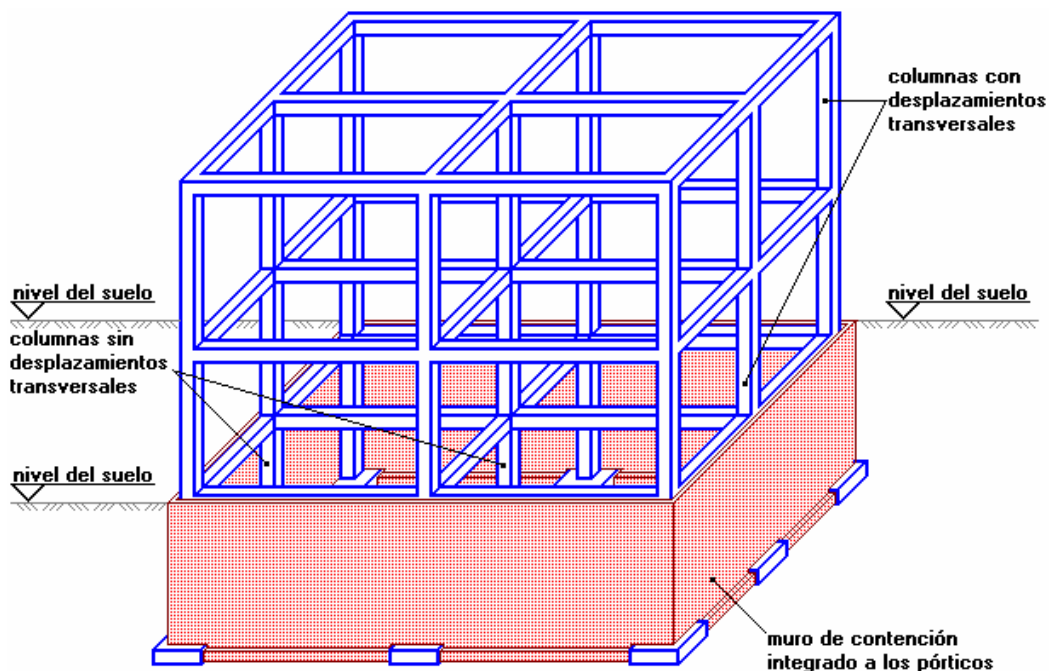


Figura 13.16: Columnas con y sin desplazamientos transversales.

Se presentan a continuación gráficos basados en los **Nomogramas de Jackson y Morland**, los que son recomendados por el ACI [ACI 10.10.1.2]. Para su utilización se debe escoger entre los gráficos para pórticos arriostrados (sin desplazamientos transversales) y pórticos no arriostrados (con desplazamientos transversales); se calculan las constantes Ψ_A y Ψ_B para los dos extremos de la columna analizada; se señalan los valores Ψ_A y Ψ_B en la escalas izquierda y derecha del nomograma apropiado; se traza una línea recta desde la escala izquierda (escala de Ψ_A), hacia la escala derecha (escala de Ψ_B), y en el punto de intersección de la recta con la escala intermedia (escala de k), se lee el valor de la constante de longitud de pandeo.

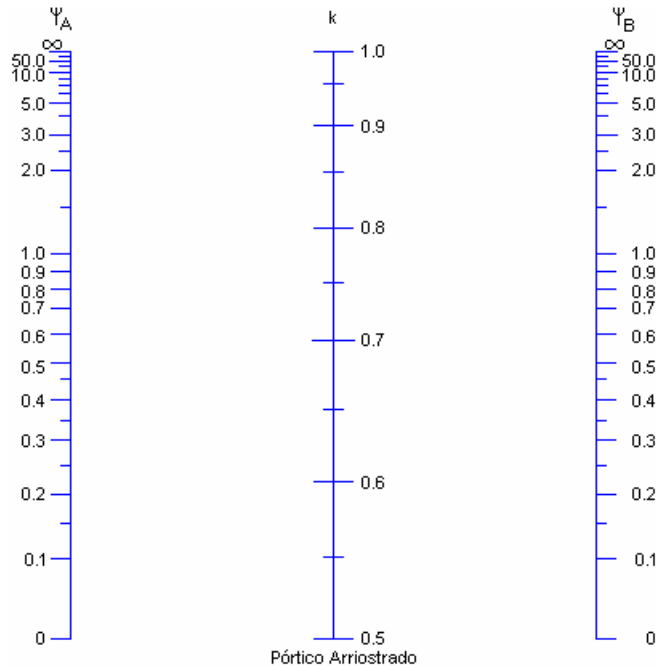


Figura 13.17: Coeficiente de longitud de pandeo para pórticos arriostrados.

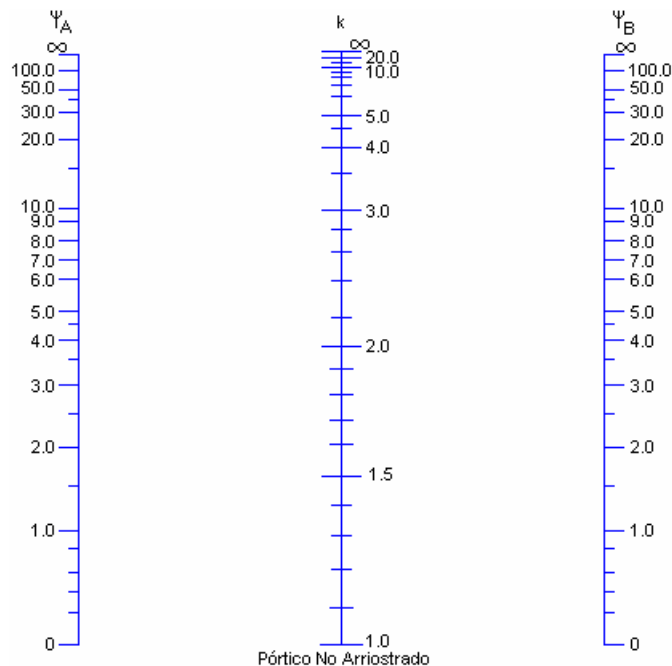
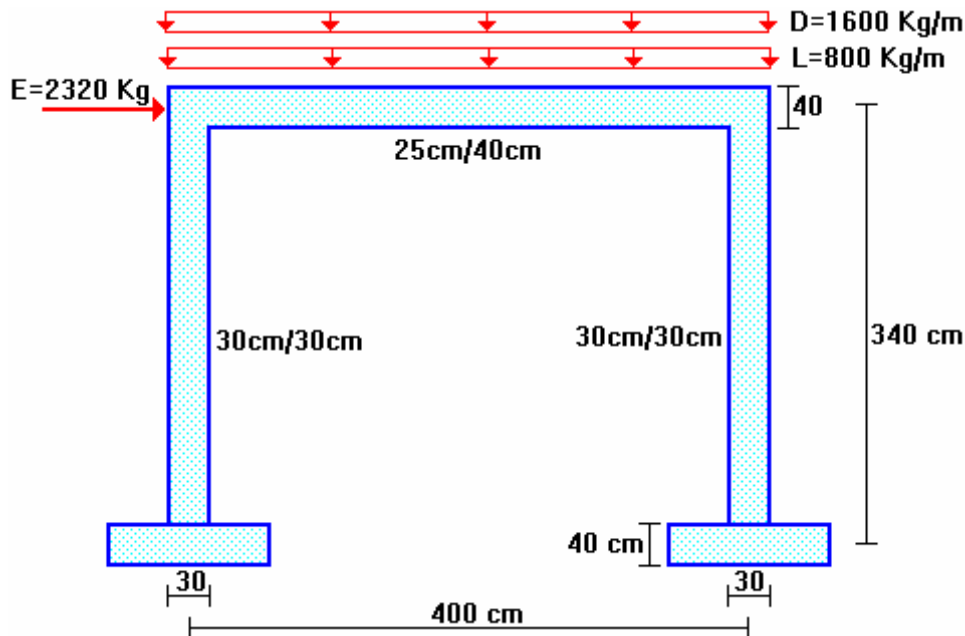


Figura 13.18: Coeficiente de longitud de pandeo para pórticos no arriostrados.

EJEMPLO 13.5:

Determinar el armado longitudinal de las columnas cuadradas de 30cm x 30cm, del pórtico de la figura, si $f'c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.

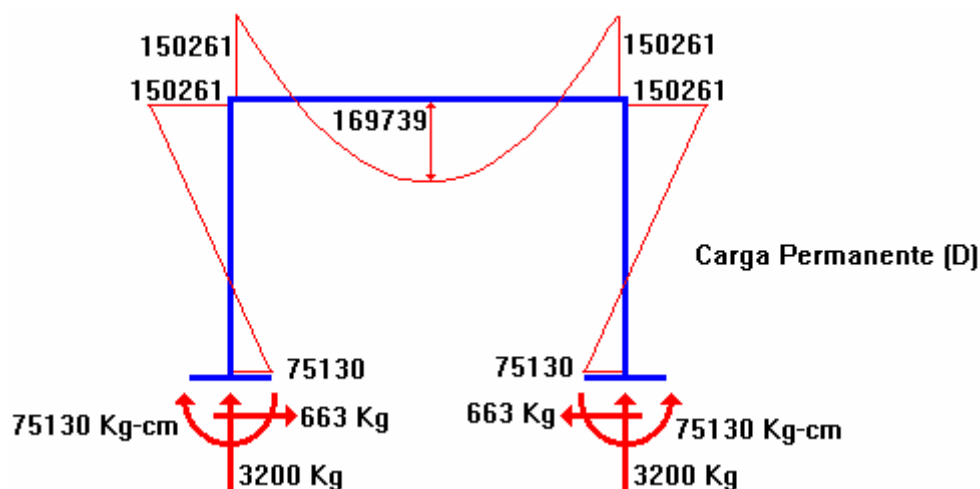


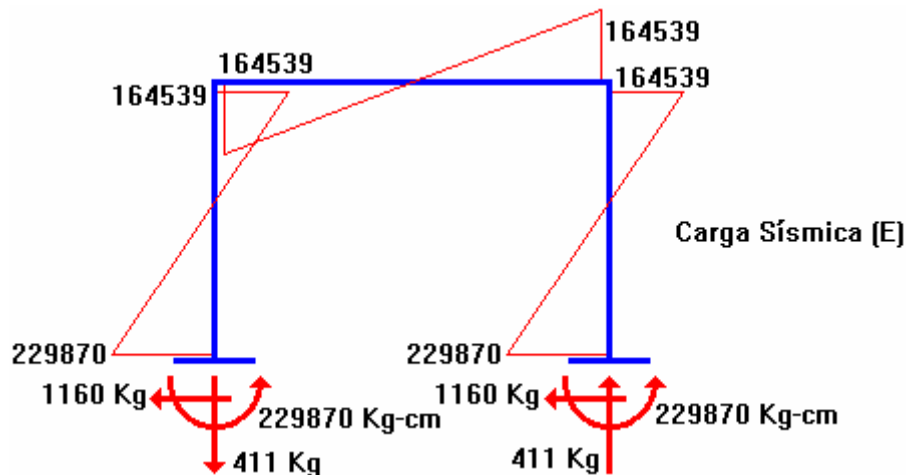
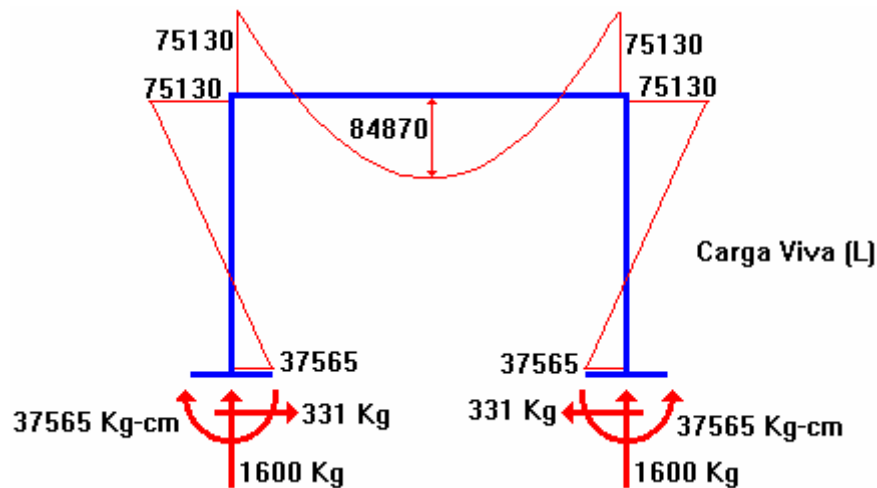
Para el análisis estructural se puede tomar como una buena aproximación del efecto de la fisuración en el hormigón armado de columnas y vigas, al producto $E \cdot I$ definido mediante las siguientes expresiones simplificadas:

$$E_{col} \cdot I_{col} = \frac{(E_c \cdot I_c) / 2.5}{1 + \beta_d} \quad \text{Ecuación (13.16)}$$

$$E_{vig} \cdot I_{vig} = \frac{(E_c \cdot I_c) / 5}{1 + \beta_d}$$

Las reacciones de apoyo y los diagramas de momentos flectores para cada uno de los tres estados de carga son:





Los códigos vigentes establecen diferentes combinaciones de cargas para determinar los estados críticos [CEC-2001 9.2.1, ACI-2002 9.2.1]. Las combinaciones más relevantes para el presente caso son:

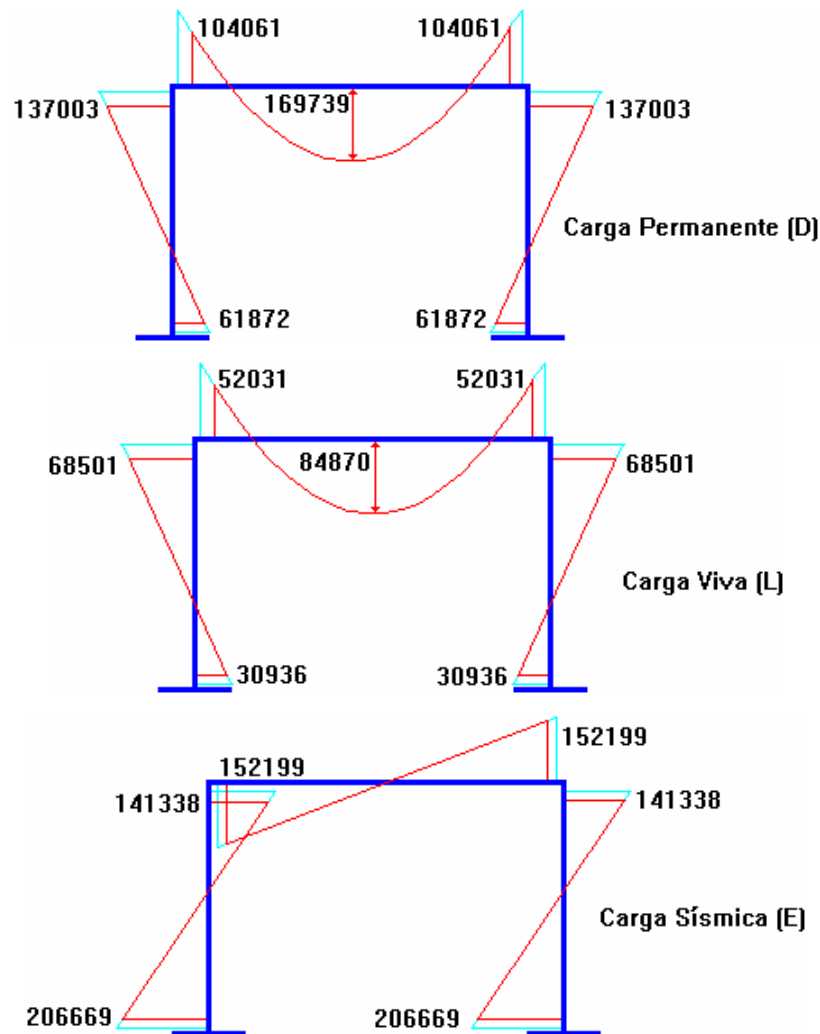
$$U = 1.4 D + 1.7 L$$

$$U = 0.75 (1.4 D + 1.7 L + 1.87 E)$$

$$U = 0.9 D + 1.43 E$$

El sismo (E) debe ser analizado considerando que puede actuar en cualquier dirección, por lo que los diagramas de esfuerzos y reacciones son reversibles, pero deben ser consistentes.

Los momentos flectores de diseño en columnas se calculan en la zona de unión con las caras de las vigas y con la cara superior de la cimentación.



Para determinar las combinaciones críticas de carga se deben estudiar las solicitaciones tanto en cabeza como en pie de columna.

Combinación Crítica en Pie de Columna:

$$U = 0.75 (1.4 D + 1.7 L + 1.87 E)$$

$$Mu = 0.75 [1.4 (61872 \text{ Kg-cm}) + 1.7 (30936 \text{ Kg-cm}) + 1.87 (206669 \text{ Kg-cm})] = 394262 \text{ Kg-cm}$$

$$Pu = 0.75 [1.4 (3200 \text{ Kg}) + 1.7 (1600 \text{ Kg}) + 1.87 (411 \text{ Kg})] = 5976 \text{ Kg}$$

Combinación Crítica en Cabeza de Columna:

$$Mu = 0.75 [1.4 (137003 \text{ Kg-cm}) + 1.7 (68501 \text{ Kg-cm}) + 1.87 (141338 \text{ Kg-cm})] = 429418 \text{ Kg-cm}$$

$$Pu = 0.75 [1.4 (3200 \text{ Kg}) + 1.7 (1600 \text{ Kg}) + 1.87 (411 \text{ Kg})] = 5976 \text{ Kg}$$

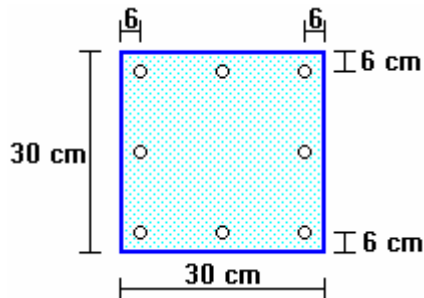
Es evidente que la combinación crítica de cargas en la cabeza de columna es dominante sobre la combinación crítica de cargas en el pie de columna, y dado que el armado de columna normalmente se mantiene constante en cada tramo entre pie y cabeza de columna, la combinación de diseño que se emplea en este caso es la correspondiente a la cabeza de columna.

Cuando del análisis no es tan evidente cuál estado de solicitaciones es crítico, se deben analizar todas las combinaciones de carga y se diseña para todas ellas.

a. Diseño de las Columnas Ignorando el Efecto de la Esbeltez:

$$\begin{aligned} f'_c &= 210 \text{ Kg/cm}^2 \\ F_y &= 4200 \text{ Kg/cm}^2 \\ M_u &= 429418 \text{ Kg-cm} \\ P_u &= 5976 \text{ Kg} \end{aligned}$$

Se escoge una distribución tentativa de la armadura longitudinal:



Se calcula el factor de tamaño del núcleo de hormigón:

$$g = 18 \text{ cm} / 30 \text{ cm} = 0.60$$

Se escoge el gráfico # 121 de los **Diagramas de Interacción para Columnas Rectangulares**, que asume $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$, $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$ y $g = 0.60$

Se calculan las coordenadas adimensionales.

$$x = \frac{M_u}{f'_c \cdot b \cdot t^2} = \frac{429418 \text{ Kg-cm}}{(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})(30 \text{ cm})^2}$$

$$x = 0.076$$

$$y = \frac{P_u}{f'_c \cdot b \cdot t} = \frac{5976 \text{ Kg}}{(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})(30 \text{ cm})}$$

$$y = 0.032$$

Interpolando en los diagramas de interacción se obtiene:

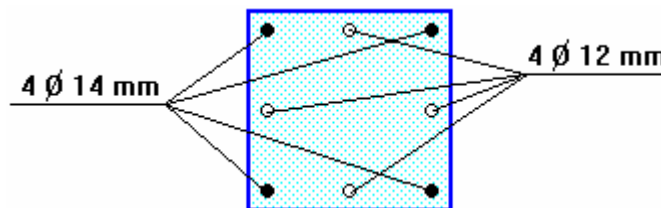
$$\rho_t = 0.011 > 0.01 \text{ (OK)}$$

La sección transversal de acero es:

$$A_s = \rho_t \cdot b \cdot t = 0.011 (30 \text{ cm}) (30 \text{ cm})$$

$$A_s = 9.90 \text{ cm}^2$$

Se requieren 4 varillas de 14 mm y 4 varillas de 12 mm que proporcionan una sección transversal de acero de 10.68 cm^2 .



b. Diseño de las Columnas Incluyendo el Efecto de la Esbeltez:

Se calcula el módulo de elasticidad del hormigón no fisurado:



$$E_c = 15000\sqrt{f'_c} = 217000 \text{ Kg/cm}^2$$

Se calcula el valor aproximado del producto $E \cdot I$ para las columnas con la siguiente expresión:

$$E_{col} \cdot I_{col} = \frac{(E_c \cdot I_c) / 2.5}{1 + \beta_d}$$

$$I_g = (30 \text{ cm}) (30 \text{ cm})^3 / 12$$

$$I_g = 67500 \text{ cm}^4$$

$$\beta_d = 1.4 M_D / (1.4 M_D + 1.7 M_L)$$

$$\beta_d = 1.4 (137003 \text{ Kg-cm}) / (1.4 \times 137003 \text{ Kg-cm} + 1.7 \times 68501 \text{ Kg-cm}) = 0.622$$

$$E_{col} \cdot I_{col} = \frac{(217000 \text{ Kg/cm}^2)(67500 \text{ cm}^4) / 2.5}{1 + 0.622}$$

$$E_{col} \cdot I_{col} = 3612000000 \text{ Kg-cm}^2$$

Se calcula el valor del producto $E \cdot I$ para las vigas que aproximadamente es la mitad de la expresión válida para columnas (se divide $[E \cdot I]$ para 5 en lugar de 2.5) debido a un nivel mayor de agrietamiento:

$$E_{vig} \cdot I_{vig} = \frac{E_c \cdot I_g}{1 + \beta_d} \cdot \frac{5}{5}$$

$$I_g = (25 \text{ cm}) (40 \text{ cm})^3 / 12 = 133333 \text{ cm}^4$$

$$\beta_d = 1.4 (169739 \text{ Kg-cm}) / (1.4 \times 169739 \text{ Kg-cm} + 1.7 \times 84870 \text{ Kg-cm}) = 0.622$$

$$E_{vig} \cdot I_{vig} = \frac{(217000 \text{ Kg/cm}^2)(133333 \text{ cm}^4) / 5}{1 + 0.667} = 3568000000 \text{ Kg-cm}^2$$

Se determina el nivel de arriostramiento en los extremos superior e inferior de la columna, mediante la siguiente expresión:

$$\Psi = \frac{\sum (E_{col} \cdot I_{col} / L_{col})}{\sum (E_{vig} \cdot I_{vig} / L_{vig})} \quad \text{Ecuación (13.23)}$$

En el extremo superior de la columna se tiene:

$$\Psi_{sup} = \frac{3612000000 \text{ Kg-cm}^2 / 340 \text{ cm}}{3568000000 \text{ Kg-cm}^2 / 400 \text{ cm}} = 1.19$$

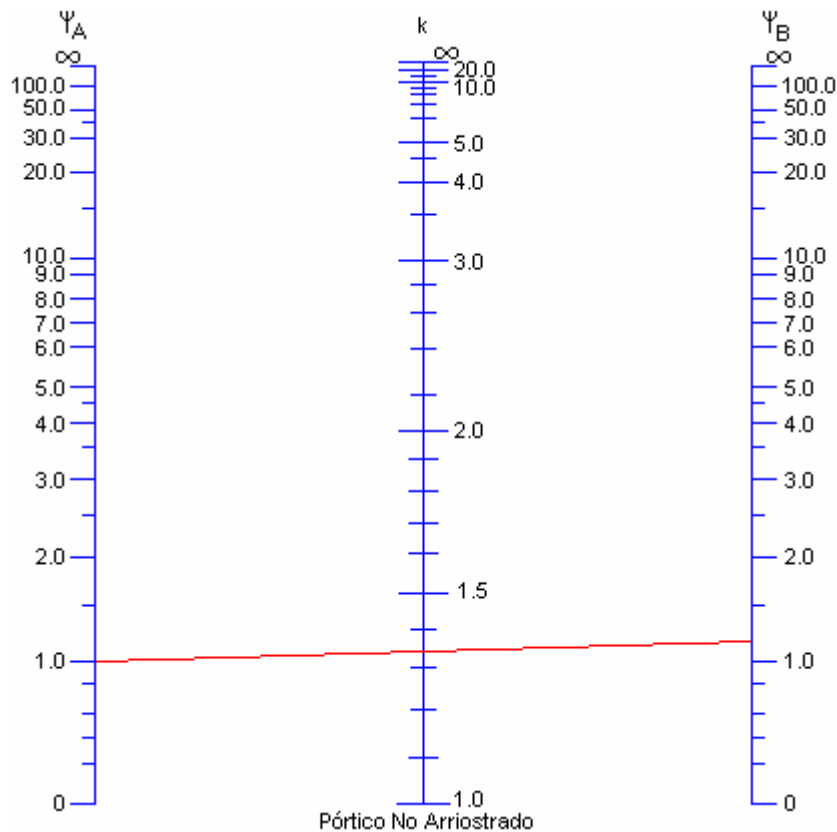
En el caso del extremo inferior, que llega al plinto de cimentación, se considera un semiempotramiento, lo que significa que:

$$\Psi_{inf} = 1.00$$

Un empotramiento total significaría que $\Psi_{inf} = \infty$ y un apoyo articulado significaría que $\Psi_{inf} = 0$

Con los dos valores calculados ($\Psi_{inf} = 1$; $\Psi_{sup} = 1.19$) se accede al nomograma para columnas con desplazamiento transversal y se obtiene:

$$k = 1.34$$



La carga crítica de pandeo se calcula con la ecuación de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E_{col} \cdot I_{col}}{(k \cdot L_{col})^2} = \frac{\pi^2 (3514000000 \text{ Kg} - \text{cm}^2)}{[(1.34)(340)]^2} = 167000 \text{ Kg}$$

P_{cr} = 167000 Kg

La carga axial última es:

P_u = 5976 Kg

El momento flector último por cargas que no producen desplazamientos transversales es:

$$M_{1ns} = 0.75 [1.4 (137003 \text{ Kg-cm}) + 1.7 (68501 \text{ Kg-cm})]$$

M_{1ns} = 231192 Kg-cm

El momento flector último por cargas que no producen desplazamientos transversales es:

$$M_{1s} = 0.75 [1.87 (141338 \text{ Kg-cm})]$$

M_{1s} = 198227 Kg-cm

Se calcula el factor de amplificación del momento flector que no produce desplazamientos transversales:

$$C_m = 1$$

$$\delta = \frac{C_m}{1 - \frac{P_u}{(0.75)P_{cr}}} = \frac{1}{1 - \frac{5976 \text{ Kg}}{(0.75)(167000 \text{ Kg})}}$$



$$\delta = 1.050$$

Se calcula el momento flector de diseño, mayorado:

$$M_c = \delta \cdot M_2 = (1.050) (231192 \text{ Kg-cm}) = 242752 \text{ Kg-cm}$$

Se calcula el factor de amplificación del momento flector que si produce desplazamientos transversales:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - Q}$$
$$Q = \frac{\sum (P_u \cdot \Delta_o)}{V_u \cdot L_c}$$

Donde:

$$P_u = 5976 \text{ Kg}$$

$$\Delta_o = 0.75 [1.87 (0.740 \text{ cm})] = 1.038 \text{ cm}$$

$$V_u = 0.75 [1.87 (2320 \text{ Kg})] = 3254 \text{ Kg}$$

$$L_c = 340 \text{ cm} - 20 \text{ cm} - 20 \text{ cm} = 300 \text{ cm}$$

$$Q = \frac{(5976 \text{ Kg} + 5976 \text{ Kg})(1.038 \text{ cm})}{(3254 \text{ Kg})(300 \text{ cm})} = 0.01271$$

$$\delta_s = \frac{1}{1 - Q} = \frac{1}{1 - 0.01271} = 1.0129$$

Se calcula el factor de amplificación de momento δ_s por desplazamiento de piso:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{0.75 \sum P_{cr}}}$$
$$\delta_s = \frac{1}{1 - \frac{(5976 \text{ Kg} + 5976 \text{ Kg})}{0.75(167000 \text{ Kg} + 167000 \text{ Kg})}} = 1.0501$$

El momento último de diseño es:

$$M_c = 242752 \text{ Kg-cm} + 1.0501(198227 \text{ Kg-cm}) = 450910 \text{ Kg-cm}$$

Se determinan las coordenadas para el uso de los diagramas de interacción adimensionales:

$$x = \frac{M_u}{f'_{c.b.t}{}^2} = \frac{450910 \text{ Kg-cm}}{(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})(30 \text{ cm})^2}$$

$$x = 0.080$$

$$y = \frac{P_u}{f'_{c.b.t}} = \frac{5976 \text{ Kg}}{(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})(30 \text{ cm})}$$

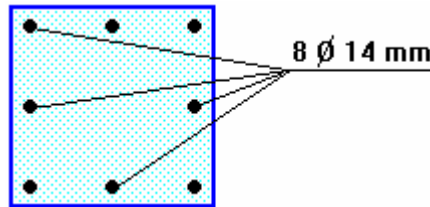
$$y = 0.032$$

Interpolando en los diagramas de interacción se obtiene:

$$\rho_t = 0.012$$

$$A_s = \rho_t \cdot b \cdot t = (0.012) (30 \text{ cm}) (30 \text{ cm}) = 10.80 \text{ cm}^2$$

La cuantía determinada es ligeramente mayor a la cuantía obtenida al menospreciar el efecto de pandeo, por lo que se requieren 8 varillas de 14 mm, que proporcionan una sección transversal de acero de 12.31 cm^2 .



13.8 FLEXOCOMPRESIÓN BIAxIAL:

Las columnas en estructuras espaciales presentan simultáneamente cargas axiales y momentos flectores en dos direcciones ortogonales, dando lugar a la flexocompresión biaxial.

De manera similar a la flexocompresión uniaxial, es posible determinar diagramas de interacción para distintas orientaciones del momento flector resultante, los que integrados en un diagrama tridimensional conforman superficies de interacción como la que se presenta en la siguiente figura:

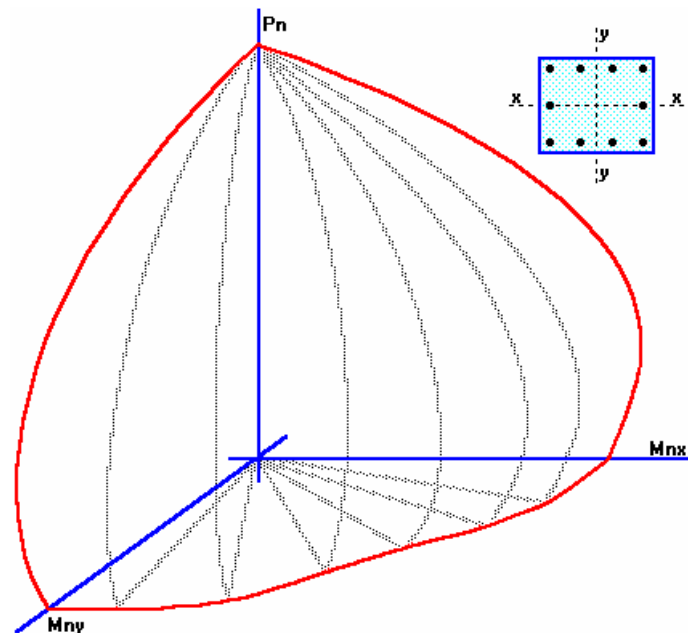


Figura 13.19: Superficies de interacción para columnas sometidas a flexocompresión biaxial.

Es indudable que las curvas de interacción respecto de los ejes principales (x, y) pueden ser determinadas con relativa facilidad, pero las curvas de interacción respecto a ejes diagonales guardan cierto grado de complejidad.

Las investigaciones realizadas con columnas cuadradas, armadas de la manera tradicional, demuestran que existe una considerable disminución de la capacidad resistente a flexión de tales columnas cuando las solicitaciones se producen



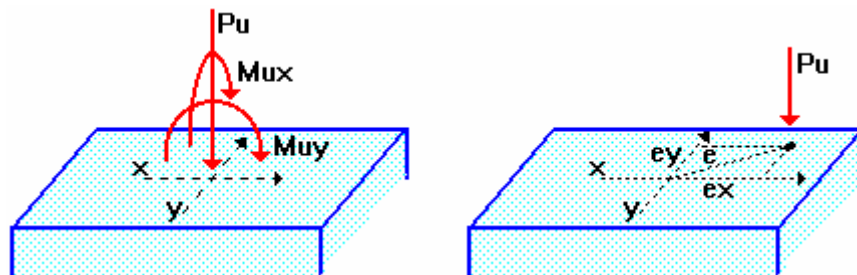
aproximadamente a 45° de los ejes principales. Esta disminución puede llegar a ser del orden de un 30% con relación a la flexión sobre los ejes principales, por lo que la utilización exclusiva de las curvas de interacción principales, para modelar la flexocompresión biaxial, puede conducir a errores importantes.

Con el objeto de mejorar la precisión en el resultado del diseño de columnas sometidas a flexocompresión biaxial, el ACI ha publicado **Diagramas de Interacción para Columnas Cuadradas, Uniformemente Armadas en sus Cuatro Caras, con Flexión a 45° Respecto a los Ejes Principales**. Estas curvas de interacción a 45° , junto con las **Curvas de Interacción Respecto a los Ejes Principales** permiten una interpolación angular bastante más confiable para cualquier ángulo de flexión en columnas cuadradas. Existen autores como **Row y Pauley** que recomiendan diagramas de interacción para más ángulos de flexión intermedios (15° , 30° y 45°), con el objeto de tener una mayor precisión en la interpolación.

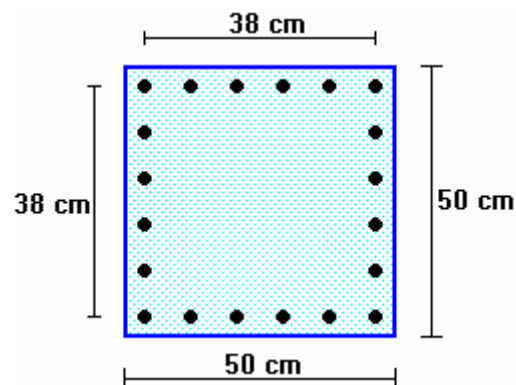
Se anexan a esta publicación familias de **Curvas de Interacción de Columnas Rectangulares para Flexión Diagonal** (un caso particular son las columnas cuadradas con flexión a 45°), con diferentes cuantías de armado en caras con distinta orientación y armadura idéntica en caras opuestas, lo que amplía el campo de utilización de las curvas propuestas por el ACI, y parcialmente mejora las curvas propuestas por Row y Pauley.

EJEMPLO 13.6:

Diseñar una columna cuadrada de hormigón armado de 50 cm x 50 cm, que debe resistir una carga axial última **Pu** de 178 T, un momento flector último **Muy** (en la dirección del eje **x**, y alrededor del eje **y**) de 37 T-m y un momento flector último **Mux** (en la dirección del eje **y**, y alrededor del eje **x**) de 22 T-m. La resistencia del hormigón **f'c** es 280 Kg/cm²; el esfuerzo de fluencia del acero **Fy** es 4200 Kg/cm².



Se escoge el tipo de distribución tentativa de las varillas de acero:



Se calcula el factor de dimensión del núcleo de la columna:



$$g = 38 / 50 = 0.76 \cong 0.80$$

El momento flector resultante se obtiene sumando vectorialmente los momentos flectores en la dirección de los ejes coordenados principales ortogonales.

$$M_u = \sqrt{M_{ux}^2 + M_{uy}^2}$$

$$M_u = \sqrt{(22 \text{ T} - \text{m})^2 + (37 \text{ T} - \text{m})^2}$$

$$M_u = 43.05 \text{ T} - \text{m}$$

Se calcula el ángulo que forma el momento flector último resultante con relación al eje **x**:

$$\text{Tg}(\alpha) = M_{ux} / M_{uy} = 22 \text{ T-m} / 37 \text{ T-m} = 0.595$$

$$\alpha = 30.74^\circ$$

Con la carga axial última y el momento flector último resultante se determinan los coeficientes de entrada a las curvas de interacción adimensionales.

$$x = \frac{M_u}{f'_c b^{3/2} t^{3/2}} = \frac{4305000 \text{ Kg} - \text{cm}}{(280 \text{ Kg} / \text{cm}^2)(50 \text{ cm})^{3/2}(50 \text{ cm})^{3/2}}$$

$$x = 0.123$$

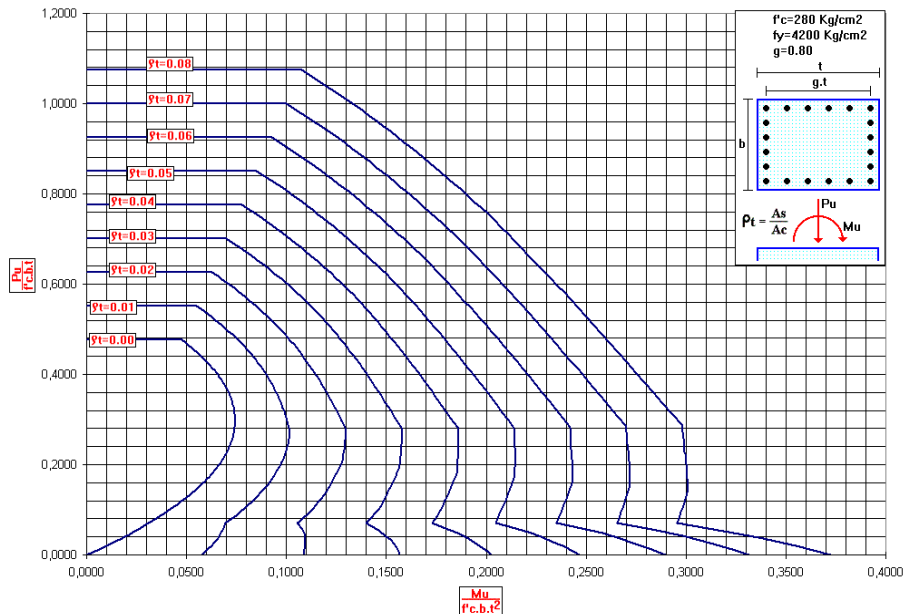
$$y = \frac{P_u}{f'_c b t} = \frac{178000 \text{ Kg}}{(280 \text{ Kg} / \text{cm}^2)(50 \text{ cm})(50 \text{ cm})}$$

$$y = 0.254$$

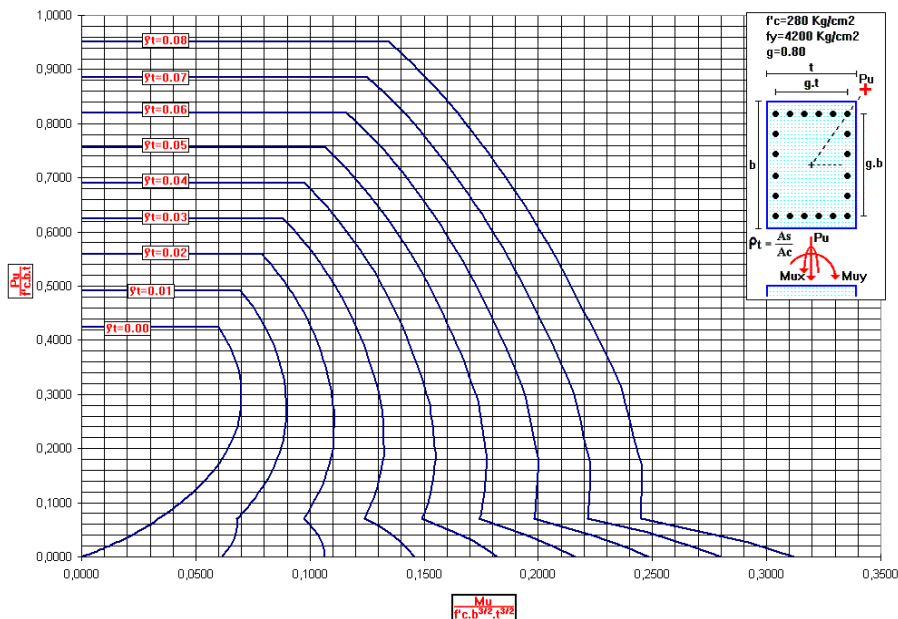
Se escoge el gráfico # 7 de los **Diagramas de Interacción de Columnas Rectangulares con Flexión Uniaxial** y el correspondiente gráfico # 7 de los **Diagramas de Interacción de Columnas Rectangulares con Flexión Diagonal**, los que están definidos por $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$, $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$, $g = 0.80$, y 20 varillas distribuidas uniformemente en sus cuatro caras.



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 7)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES - FLEXION DIAGONAL
(gráfico # 7)



En el diagrama de interacción a 0° se obtiene una cuantía de armado $p_t = 0.0175$

En el diagrama de interacción diagonal a 45° se obtiene una cuantía de armado $p_t = 0.025$

Es importante notar, que en esta columna cuadrada, el armado requerido a 45° es superior en un 43% al armado requerido a 0° .

Interpolando linealmente entre 0° y 45° , para 30.74° , se tiene:



$$\rho_t = 0.0175 + (0.025 - 0.0175) \frac{30.74^\circ}{45^\circ}$$

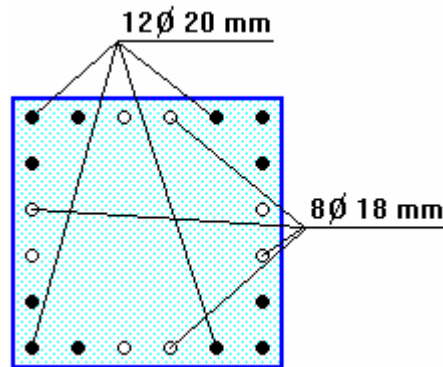
$$\rho_t = 0.0226$$

ρ_t es mayor a la cuantía mínima en columnas ($\rho_{\min} = 0.01$), e inferior a la cuantía máxima en zonas sísmicas ($\rho_{\max} = 0.06$). Además la cuantía de armado cumple criterios de economía.

La sección transversal de acero requerida es:

$$A_s = \rho_t \cdot A_g = \rho_t \cdot b \cdot t = 0.0226 (50 \text{ cm}) (50 \text{ cm}) = 56.50 \text{ cm}^2$$

La distribución escogida inicialmente determina que se requerirán **12 varillas de hierro esquineras de 20 mm** y **8 varillas centrales de 18 mm de diámetro**, lo que proporciona **58.00 cm²** de sección transversal de acero.

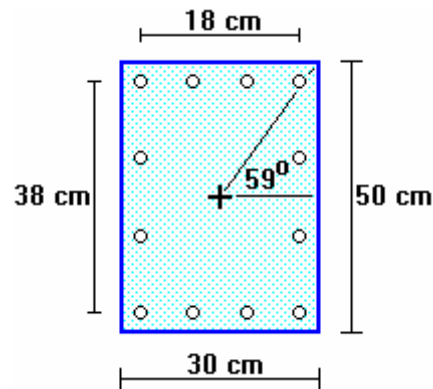


Para mejorar la capacidad resistente de las columnas a flexocompresión biaxial, es preferible colocar los hierros de mayor diámetro en las esquinas.

Las investigaciones han demostrado que los gráficos de flexocompresión diagonal dan los mejores resultados para columnas cuadradas, y proporcionan resultados aceptables, en columnas rectangulares cuya relación **lado mayor / lado menor** no supere 2, reajustando el ángulo respectivo en función de la posición de los vértices de las columnas; reajustando el factor de tamaño del núcleo **g**; y tomando en consideración la geometría y la capacidad resistente en las dos direcciones ortogonales principales.

EJEMPLO 13.7:

Diseñar una columna rectangular de hormigón de 50 cm x 30 cm sometida a una carga axial última **Pu** de 107 T, a un momento flector último **Muy** (alrededor del eje **y**) de 11 T-m en la dirección de los 30 cm, y a un momento flector último **Mux** (alrededor del eje **x**) de 13 T-m en la dirección de los 50 cm. El hormigón tiene una resistencia característica de 280 Kg/cm² y un esfuerzo de fluencia de 4200 Kg/cm².



Se determina el ángulo de posición del vértice con relación al eje x:

$$\text{Tg}(\beta) = 25 \text{ cm} / 15 \text{ cm} = 1.667$$

$$\beta = 59.04^\circ$$

Se determina el momento flector último resultante:

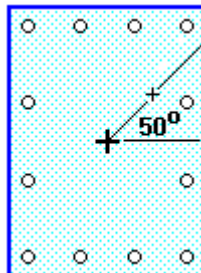
$$M_u = \sqrt{M_{ux}^2 + M_{uy}^2} = \sqrt{(13 \text{ T} - \text{m})^2 + (11 \text{ T} - \text{m})^2}$$

$$\mathbf{M_u = 17.03 \text{ T} - m}$$

Se determina el ángulo de acción del momento flector resultante con relación al eje x:

$$\text{Tg}(\alpha) = 13 \text{ T} - \text{m} / 11 \text{ T} - \text{m} = 1.182$$

$$\alpha = 49.76^\circ$$



El ángulo obtenido está comprendido entre 0° y 59.04° , por lo que para la interpolación se requieren las cuantías de armado para esos ángulos de flexión.

Se calculan los coeficientes adimensionales de entrada a los diagramas de interacción a 0° :

$$x = \frac{M_u}{f'_{c.b.t} \cdot t^2} = \frac{1703000 \text{ Kg} - \text{cm}}{(280 \text{ Kg} / \text{cm}^2)(50 \text{ cm})(30 \text{ cm})^2}$$

$$\mathbf{x = 0.135}$$

$$y = \frac{P_u}{f'_{c.b.t}} = \frac{107000 \text{ Kg}}{(280 \text{ Kg} / \text{cm}^2)(50 \text{ cm})(30 \text{ cm})}$$

$$\mathbf{y = 0.255}$$

Se calcula el momento flector resultante:

$$M_u = \sqrt{M_{ux}^2 + M_{uy}^2} = \sqrt{(13 \text{ T} - \text{m})^2 + (11 \text{ T} - \text{m})^2}$$



$$M_u = 17.03 \text{ T} - \text{m}$$

Se calculan los coeficientes adimensionales de entrada a los diagramas de interacción con flexión diagonal (59.04° para esta columna rectangular), que consideran la capacidad resistente en las dos direcciones principales:

$$x = \frac{M_u}{f'_c b^{3/2} t^{3/2}} = \frac{1703000 \text{ Kg} - \text{cm}}{(280 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})^{3/2}(50 \text{ cm})^{3/2}}$$

$$x = \mathbf{0.105}$$

$$y = \frac{P_u}{f'_c b t} = \frac{107000 \text{ Kg}}{(280 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})(50 \text{ cm})}$$

$$y = \mathbf{0.255}$$

Se calculan los factores de dimensión del núcleo para los ejes principales:

$$g_x = 18 \text{ cm} / 30 \text{ cm}$$

$$g_x = \mathbf{0.60}$$

$$g_y = 38 \text{ cm} / 50 \text{ cm}$$

$$g_y = \mathbf{0.76}$$

Se calcula el factor de dimensión del núcleo para los diagramas de flexión diagonal (a 59.04° para la columna rectangular):

$$g = (g_x + g_y) / 2 = 0.68 \approx 0.70$$

Se escoge el gráfico # 65 de los **Diagramas de Interacción de Columnas Rectangulares** definido por $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$, $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$, $g = 0.60$, y **16 varillas distribuidas uniformemente en sus cuatro caras**, así como el gráfico # 66 de los **Diagramas de Interacción de Columnas Rectangulares con Flexión Diagonal**, definido por $f'_c = 280 \text{ Kg/cm}^2$, $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$, $g = 0.70$, y **16 varillas distribuidas uniformemente en sus cuatro caras**.

En el diagrama de interacción a 0° , utilizando $x = 0.135$, $y = 0.255$, se obtiene una cuantía de armado $\rho_t = 0.033$

En el diagrama de interacción diagonal (a 59.04° para la presente columna rectangular), utilizando $x = 0.105$, $y = 0.255$, se obtiene una cuantía de armado $\rho_t = 0.0235$

Interpolando para 49.76° se tiene:

$$\rho_t = 0.033 + (0.0235 - 0.033) \frac{49.76^\circ}{59.04^\circ}$$

$$\rho_t = \mathbf{0.0250}$$

ρ_t es mayor a la cuantía mínima en columnas ($\rho_{\min} = 0.01$), e inferior a la cuantía máxima en zonas sísmicas ($\rho_{\max} = 0.06$). Además una cuantía de armado de 2.50% es aceptable para nuestro medio, desde un punto de vista económico.

Es importante notar que la cuantía de armado requerida para esta columna rectangular es menor que la cuantía de armado requerida en la dirección débil a 0° ($0.0235 < 0.033$), debido a la importancia de la dimensión de la columna en la dirección y (50 cm) comparada con la dimensión en la dirección x (30 cm), que mejora la capacidad

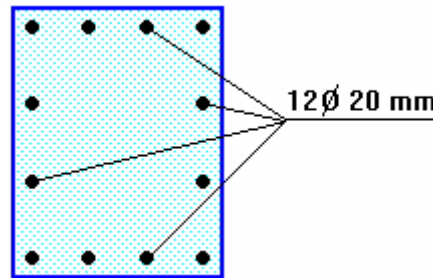


resistente diagonal. Así mismo, por el motivo antes expuesto, si el momento actuara solamente en la dirección **y**, mucho más resistente, la cuantía de armado sería aún menor que las dos cuantías anteriores ($\rho_t = 0.004$).

La sección transversal de acero requerida es:

$$A_s = \rho_t \cdot b \cdot t = 0.0250 (50 \text{ cm}) (30 \text{ cm})$$
$$A_s = 37.50 \text{ cm}^2$$

Se escogen 12 varillas de 20 mm, que proporcionan 37.68 cm^2 de sección transversal.



13.9 DISEÑO DE COLUMNAS A CORTE UNIDIRECCIONAL:

Las solicitaciones de corte que actúan sobre las columnas serán resistidas por el hormigón, y por estribos transversales colocados apropiadamente.

Cuando las fuerzas cortantes que actúan sobre las columnas en una dirección dominan sobre las fuerzas cortantes ortogonales, se puede realizar el diseño a corte unidireccional tradicional utilizando una metodología similar a la empleada en vigas.

El hormigón de las columnas podrá resistir esfuerzos cortantes v_c definidos por la siguiente expresión [ACI 11.2.1.1]:

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c} \quad \text{Ecuación (13.24a)}$$

El efecto beneficioso de la presencia de fuerzas de compresión, al controlar la fisuración diagonal de corte puede ser cuantificado mediante la siguiente expresión [ACI 11.3.1.2]:

$$v_c = 0.53 \left[1 - \frac{N_u}{140A_g} \right] \sqrt{f'_c} \quad \text{Ecuación (13.24b)}$$

Donde:

- v_c : esfuerzo cortante resistente en el hormigón en Kg/cm^2
 N_u : fuerza axial en Kg
 A_g : área de hormigón en la columna en cm^2
 f'_c : resistencia característica del hormigón en Kg/cm^2

El esfuerzo cortante que no puede ser resistido por el hormigón ($v_u - v_c$) deberá ser resistido por acero transversal.

La sección transversal resistente al corte **A_v** de los elementos transversales se calcula con la siguiente expresión [ACI 11.4.7.2]:

$$A_v = \frac{(v_u - v_c) \cdot b_w \cdot s}{F_y}$$

Ecuación (13.25)

Para cumplir con la sección transversal mínima requerida por cortante, adicionalmente a los estribos cerrados externos se podrán colocar estribos cerrados internos con el mismo espaciamiento de los estribos externos [ACI 11.4.1.1, ACI 11.4.7.8]. La efectividad de tales estribos será función del ángulo con que cosen las fisuras de corte.

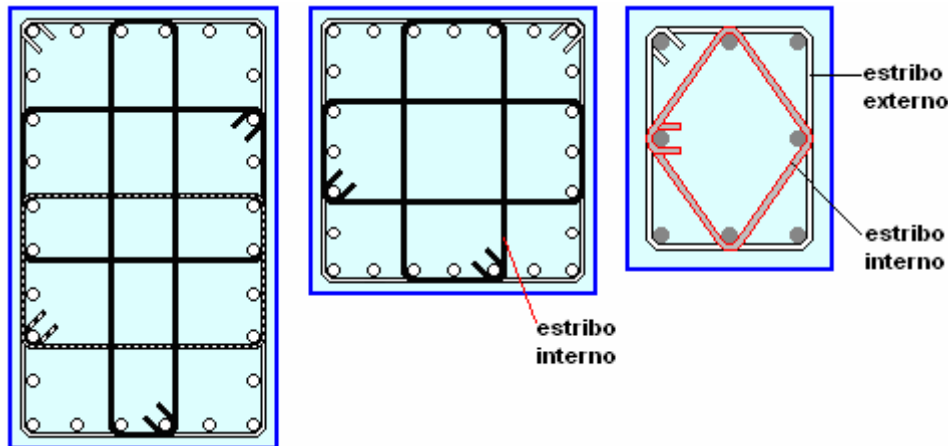
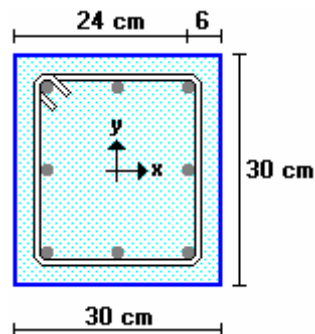


Figura 13.20: Estribos cerrados externos e internos para resistir las fuerzas cortantes.

La capacidad resistente de varios tipos de estribos que actúan simultáneamente se obtendrá sumando las resistencias individuales.

EJEMPLO 13.8:

Determinar el armado transversal requerido por la columna cuya sección transversal se detalla en la figura, sometida a una fuerza cortante unidireccional de 14 T, coincidente con el eje principal x. El hormigón tiene una resistencia de $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y el acero tiene un esfuerzo de fluencia $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.



➤ **Cálculo del esfuerzo cortante último:**

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 24 \text{ cm}$$

$$\phi = 0.85 \quad (\text{corte})$$

$$V_u = 14 \text{ T.} = 14000 \text{ Kg}$$

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b \cdot d}$$



$$v_u = \frac{14000}{(0.85)(30)(24)}$$

$$v_u = 22.88 \text{ Kg/cm}^2$$

➤ **Cálculo del esfuerzo resistente del hormigón:**

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c}$$

$$v_c = 0.53\sqrt{210}$$

$$v_c = 7.68 \text{ Kg/cm}^2$$

➤ **Verificación del esfuerzo máximo que puede resistir el acero transversal:**

El esfuerzo máximo que puede absorberse con acero transversal es:

$$2.12\sqrt{f'_c} = 2.12\sqrt{210} = 30.72 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo que debe absorberse con acero transversal es:

$$v_u - v_c = 22.88 \text{ Kg/cm}^2 - 7.68 \text{ Kg/cm}^2 = 15.20 \text{ Kg/cm}^2$$

Debe verificarse que:

$$v_u - v_c \leq 2.12\sqrt{f'_c}$$

$$15.20 \text{ Kg/cm}^2 < 30.72 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{O.K.})$$

➤ **Cálculo de la armadura transversal:**

La sección transversal se calcula con la siguiente expresión:

$$A_v = \frac{(v_u - v_c) \cdot b_w \cdot s}{F_y}$$

Despejando el espaciamiento s de la ecuación anterior se tiene:

$$s = \frac{A_v \cdot F_y}{(v_u - v_c) \cdot b_w}$$

Tomando un estribo de 8 mm de diámetro cuya sección transversal es 0.50 cm^2 , y considerando que un estribo cuadrado tiene dos ramales orientados en la dirección x , se tiene que:

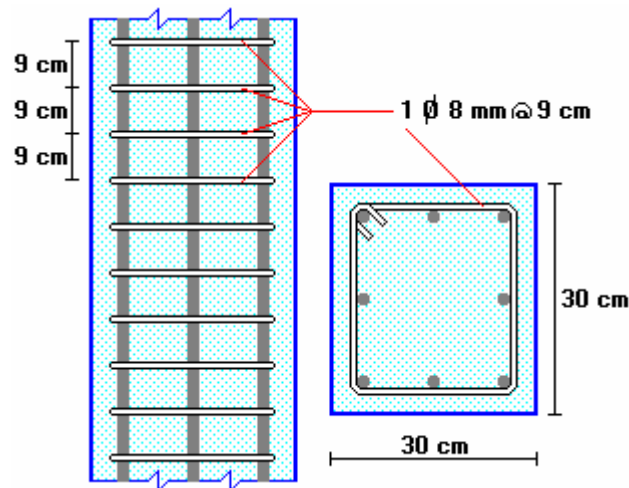
$$A_v = 2 \times 0.50 \text{ cm}^2 = 1.00 \text{ cm}^2$$

Reemplazando en la ecuación de cálculo del espaciamiento s :

$$s = \frac{(1.00 \text{ cm}^2)(4200 \text{ Kg/cm}^2)}{(22.88 \text{ Kg/cm}^2 - 7.68 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})}$$

$$s = 9.21 \text{ cm}$$

Para resistir las fuerzas cortantes se requieren estribos cerrados de 8 mm espaciados cada 9 cm.



13.10 DISEÑO DE COLUMNAS A CORTE BIDIRECCIONAL:

El diseño de columnas a corte bidireccional tiene características especiales, que los códigos vigentes pasan por alto pues únicamente analizan el caso de corte unidireccional. Sin embargo se pueden rescatar ciertos criterios del diseño de corte con torsión especificado en los códigos, con el objeto de definir una metodología apropiada.

La capacidad resistente nominal a corte del hormigón simple en las dos direcciones principales (v_{cx} , v_{cy}) depende del nivel de esfuerzos cortantes últimos en las dos direcciones (v_{ux} , v_{uy}) y se calcula con las siguientes expresiones:

$$v_{cx} = \frac{0.53\sqrt{f'c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{uy}}{v_{ux}}\right)^2}} \quad \text{Ecuación (13.26)}$$

$$v_{cy} = \frac{0.53\sqrt{f'c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{ux}}{v_{uy}}\right)^2}} \quad \text{Ecuación (13.27)}$$

Donde:

- v_{cx} : esfuerzo resistente a corte del hormigón simple en la dirección x
- v_{cy} : esfuerzo resistente a corte del hormigón simple en la dirección y
- v_{ux} : esfuerzo cortante último en la dirección x
- v_{uy} : esfuerzo cortante último en la dirección y

Las dos ecuaciones anteriores se interpretan como que la resistencia nominal del hormigón simple a cortante puro es $0.53\sqrt{f'c}$. Cualquier estado tensional de corte bidireccional se describe por una circunferencia base que tiene como radio $0.53\sqrt{f'c}$, y una circunferencia de diseño, múltiplo de la circunferencia base, que superpone las solicitaciones en las dos direcciones.

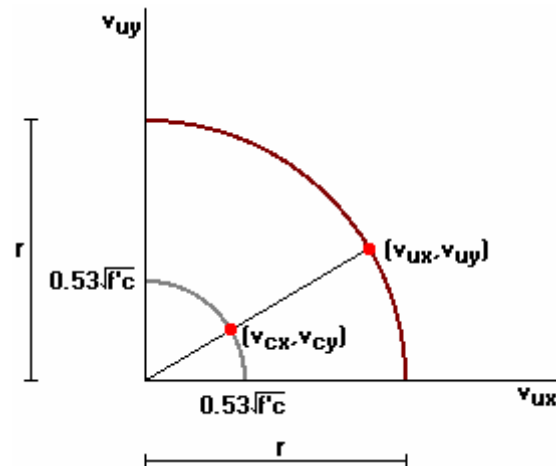


Figura 13.21: Estado tensional para corte bidireccional.

Las solicitaciones máximas que pueden resistir las secciones rectangulares de hormigón armado, incluida la colaboración del refuerzo transversal de acero, también están controladas por una circunferencia proporcional a las anteriores, en las que el esfuerzo máximo que se admite a corte puro es $2.65\sqrt{f'c}$ [ACI 11.4.7.9]. Esta nueva circunferencia es 5 veces mayor que la circunferencia base.

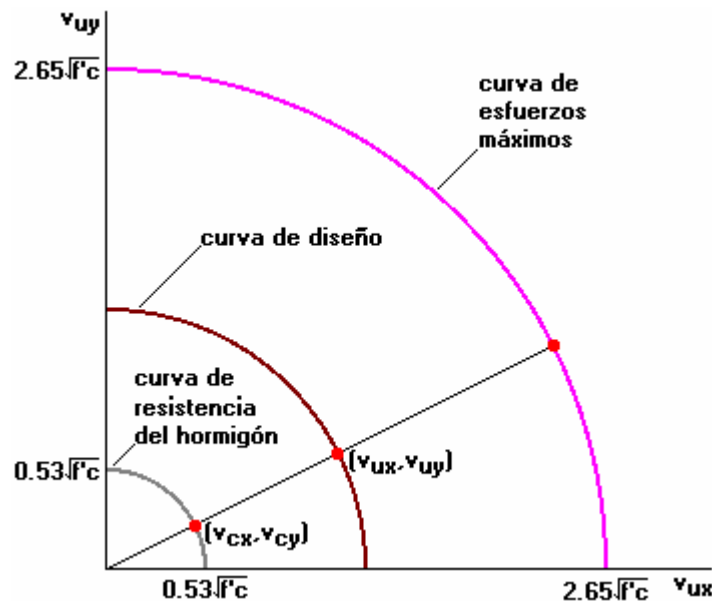


Figura 13.22: Diagrama de diseño para corte bidireccional.

La expresión que define el mayor esfuerzo cortante bidireccional que puede resistir una sección rectangular reforzada en las dos direcciones con acero (con estribos rectangulares cerrados) es la siguiente:

$$\sqrt{(v_{ux})^2 + (v_{uy})^2} \leq 2.65\sqrt{f'c} \quad \text{Ecuación (13.28)}$$

El acero de refuerzo transversal (A_{vx} , A_{vy}) requerido para resistir las fuerzas cortantes en las dos direcciones ortogonales (x , y) se calcula con las siguientes expresiones:

$$A_{vx} = \frac{(v_{ux} - v_{cx}) \cdot b_w \cdot s}{F_y} \quad \text{Ecuación (13.29)}$$



$$A_{vy} = \frac{(v_{uy} - v_{cy}) \cdot b_w \cdot s}{F_y}$$

Ecuación (13.30)

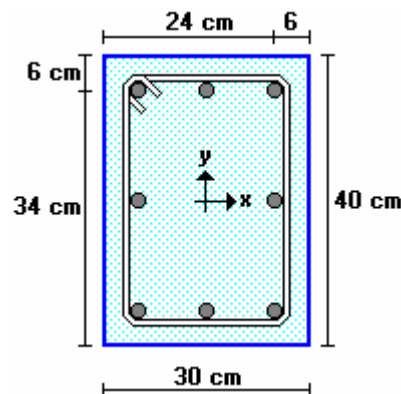
Donde:

A_{vx} : sección transversal resistente al corte de los ramales orientados en la dirección x

A_{vy} : sección transversal resistente al corte de los ramales orientados en la dirección y

EJEMPLO 13.9:

Determinar el armado transversal requerido por la columna cuya sección transversal se detalla en la figura, sometida simultáneamente a una fuerza cortante en la dirección del eje x de 10 T, y una fuerza cortante en la dirección del eje y de 16 T. El hormigón tiene una resistencia de $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y el acero tiene un esfuerzo de fluencia $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.



➤ **Cálculo del esfuerzo cortante último en la dirección x :**

$$b = 40 \text{ cm}$$

$$d = 24 \text{ cm}$$

$$\phi = 0.85 \quad (\text{corte})$$

$$V_{ux} = 10 \text{ T.} = 10000 \text{ Kg}$$

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b \cdot d}$$

$$v_u = \frac{10000}{(0.85)(40)(24)}$$

$$v_u = 12.25 \text{ Kg/cm}^2$$

➤ **Cálculo del esfuerzo cortante último en la dirección y :**

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 34 \text{ cm}$$

$$\phi = 0.85 \quad (\text{corte})$$

$$V_{uy} = 16 \text{ T.} = 16000 \text{ Kg}$$

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b \cdot d}$$



$$v_u = \frac{16000}{(0.85)(30)(34)}$$

$$v_u = 18.45 \text{ Kg/cm}^2$$

➤ **Verificación del esfuerzo máximo que puede resistir el hormigón armado:**

El esfuerzo máximo que puede absorberse con hormigón y acero transversal es:

$$2.65\sqrt{f'c} = 2.65\sqrt{210} = 38.40 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo cortante combinado es:

$$\sqrt{(v_{ux})^2 + (v_{uy})^2} = \sqrt{(12.25 \text{ Kg/cm}^2)^2 + (18.45 \text{ Kg/cm}^2)^2}$$

$$\sqrt{(v_{ux})^2 + (v_{uy})^2} = 22.15 \text{ Kg/cm}^2$$

Debe verificarse que:

$$\sqrt{(v_{ux})^2 + (v_{uy})^2} \leq 2.1\sqrt{f'c}$$

$$22.15 \text{ Kg/cm}^2 < 38.40 \text{ Kg/cm}^2 \quad (\text{O.K.})$$

➤ **Cálculo del esfuerzo resistente del hormigón en la dirección x:**

$$v_{cx} = \frac{0.53\sqrt{f'c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{uy}}{v_{ux}}\right)^2}} = \frac{0.53\sqrt{210}}{\sqrt{1 + \left(\frac{18.45}{12.25}\right)^2}}$$

$$v_{cx} = 4.25 \text{ Kg/cm}^2$$

➤ **Cálculo del esfuerzo resistente del hormigón en la dirección y:**

$$v_{cy} = \frac{0.53\sqrt{f'c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{ux}}{v_{uy}}\right)^2}} = \frac{0.53\sqrt{210}}{\sqrt{1 + \left(\frac{12.25}{18.45}\right)^2}}$$

$$v_{cy} = 6.40 \text{ Kg/cm}^2$$

➤ **Cálculo de la armadura transversal en la dirección x:**

La sección transversal se calcula con la siguiente expresión:

$$A_{vx} = \frac{(v_{ux} - v_{cx}) \cdot b_w \cdot s}{F_y}$$

Despejando el espaciamiento s de la ecuación anterior se tiene:



$$s = \frac{A_{vx} \cdot F_y}{(v_{ux} - v_{cx}) \cdot b_w}$$

Tomando un estribo de 8 mm de diámetro cuya sección transversal es 0.50 cm^2 , y considerando que un estribo cuadrado tiene dos ramales orientados en la dirección x , se tiene que:

$$A_v = 2 \times 0.50 \text{ cm}^2 = 1.00 \text{ cm}^2$$

Reemplazando en la ecuación de cálculo del espaciamiento s :

$$s = \frac{(1.00 \text{ cm}^2)(4200 \text{ Kg/cm}^2)}{(12.25 \text{ Kg/cm}^2 - 4.25 \text{ Kg/cm}^2)(40 \text{ cm})}$$
$$s = 13.12 \text{ cm}$$

Para resistir las fuerzas cortantes en la dirección “x” se requieren estribos cerrados de 8 mm de diámetro espaciados cada 13 cm.

➤ **Cálculo de la armadura transversal en la dirección y:**

La sección transversal se calcula con la siguiente expresión:

$$A_{vy} = \frac{(v_{uy} - v_{cy}) \cdot b_w \cdot s}{F_y}$$

Despejando el espaciamiento s de la ecuación anterior se tiene:

$$s = \frac{A_{vy} \cdot F_y}{(v_{uy} - v_{cy}) \cdot b_w}$$

Tomando un estribo de 8 mm de diámetro cuya sección transversal es 0.50 cm^2 , y considerando que un estribo cuadrado tiene dos ramales orientados en la dirección y , se tiene que:

$$A_v = 2 \times 0.50 \text{ cm}^2 = 1.00 \text{ cm}^2$$

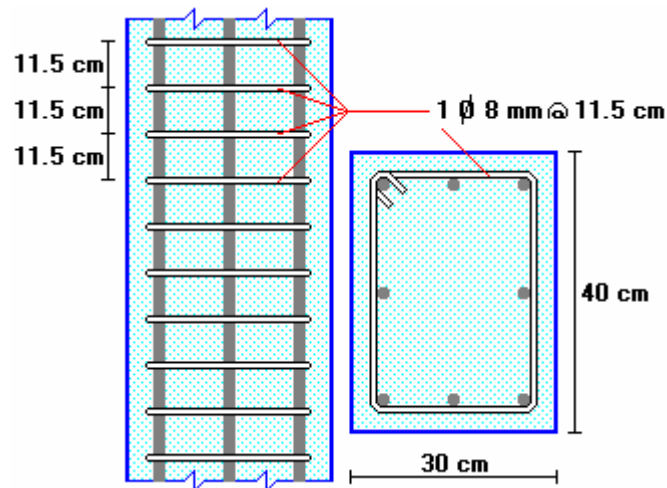
Reemplazando en la ecuación de cálculo del espaciamiento s :

$$s = \frac{(1.00 \text{ cm}^2)(4200 \text{ Kg/cm}^2)}{(18.45 \text{ Kg/cm}^2 - 6.40 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})}$$
$$s = 11.62 \text{ cm}$$

Para resistir las fuerzas cortantes en la dirección “y” se requieren estribos cerrados de 8 mm de diámetro espaciados cada 11.5 cm.

Los fuerzas cortantes en las dos direcciones ortogonales son resistidas por ramales diferentes de los estribos cerrados por lo que no es necesario superponer las dos armaduras calculadas.

Para resistir las fuerzas cortantes en las dos direcciones se toma el menor de los espaciamientos calculados, es decir que se requieren estribos cerrados de 8 mm de diámetro espaciados cada 11.5 cm.



13.11 CARACTERÍSTICAS DEL REFUERZO TRANSVERSAL EN COLUMNAS CON ESTRIBOS:

En zonas sísmicas, en columnas con estribos, todas las varillas no preesforzadas deberán confinarse mediante **estribos transversales** (incluidos **estribos interiores** si fueran necesarios) por lo menos de 10 mm de diámetro para varillas longitudinales de 28 mm o menores [CEC 7.10.5.1, ACI 7.10.5.1]; por lo menos de 12 mm para varillas longitudinales de 32 mm o más, y para paquetes de varillas.

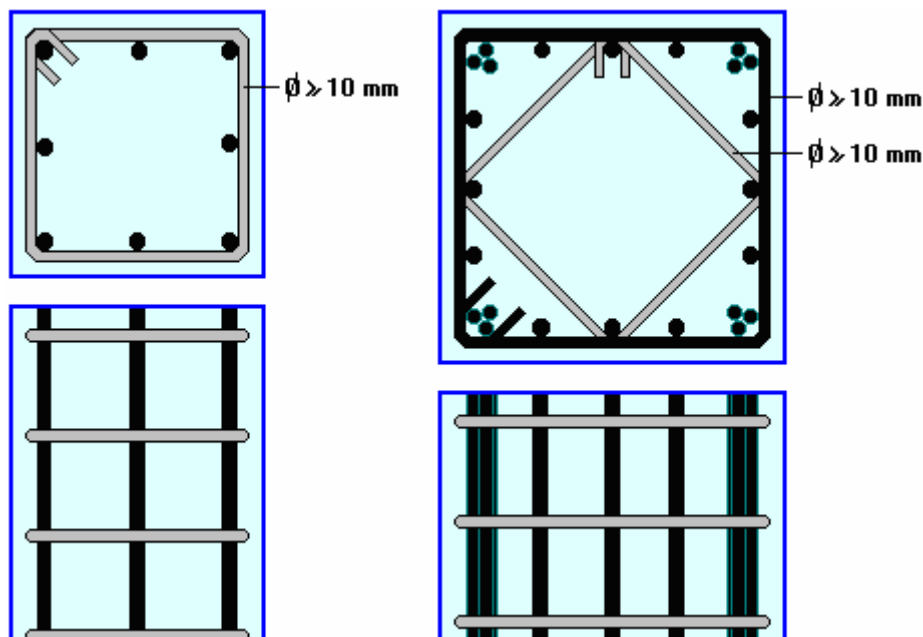


Figura 13.23: Diagrama de diseño para corte bidireccional.

Los estribos deberán ser cerrados, con ángulos de doblez extremos de al menos 135°, más una longitud de al menos 6 diámetros de la varilla del estribo, pero no menor a 7.5 cm en los extremos libres [ACI 21.5.3].

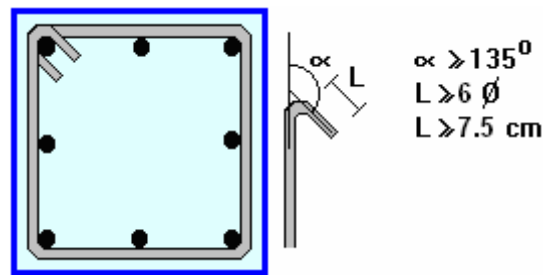


Figura 13.24: Características geométricas mínimas de los estribos.

Los estribos se dispondrán de tal forma que cada varilla esquinera y cada varilla longitudinal alternada tengan un soporte lateral proporcionado por la esquina de un estribo cerrado cuyo ángulo comprendido (ángulo interior) no supere los 135°. Ninguna varilla longitudinal deberá estar separada más de 15 cm libres a cualquier lado de una varilla lateralmente soportada [ACI 7.10.5.3].

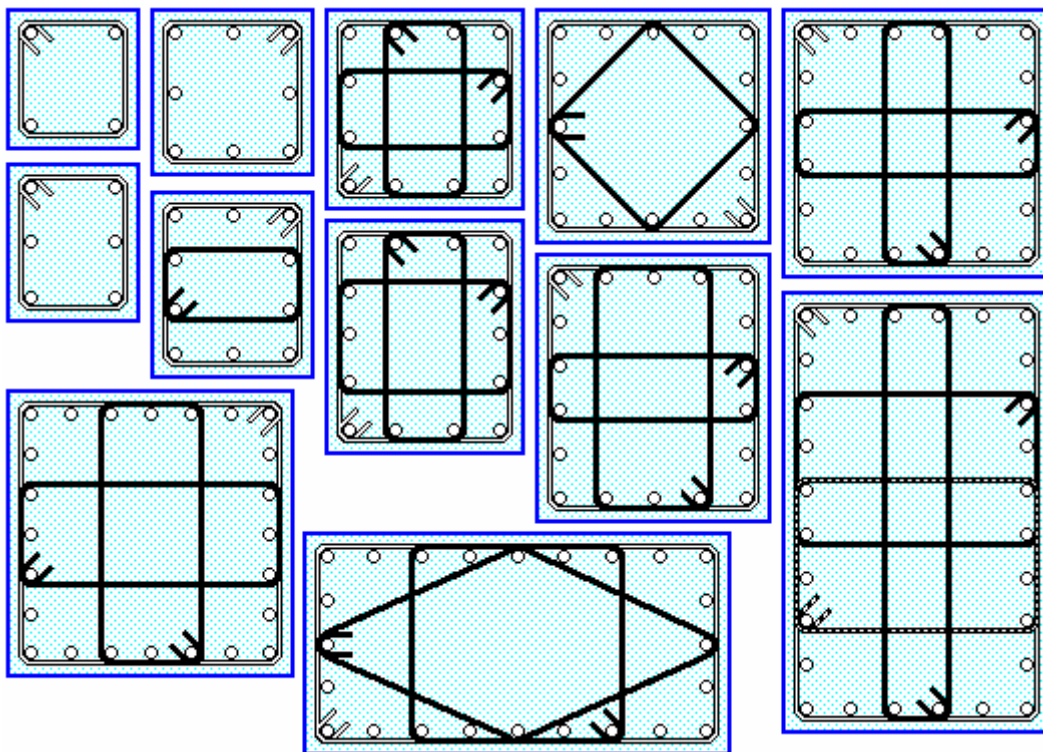


Figura 13.25: Geometrías tipo para el armado transversal de estribos.

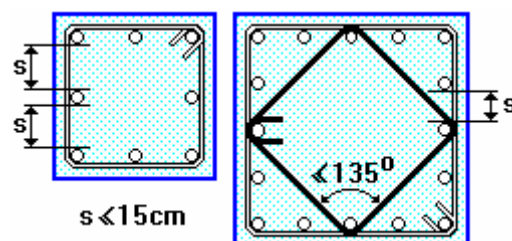


Figura 13.26: Espaciamiento libre de varillas longitudinales y ángulos internos máximos de los estribos.

En zonas sísmicas, los estribos deberán colocarse con un espaciamiento no mayor que **d/2, 16 diámetros de la varilla longitudinal, 48 diámetros de la varilla del estribo**, el que sea menor, en toda la longitud del miembro [ACI 11.4.5.1].

En zonas sísmicas, en los extremos de las columnas (en su unión con vigas u otros elementos estructurales) deberá colocarse un **refuerzo transversal especial** conformado por estribos laterales cerrados de confinamiento y estribos interiores si fueran necesarios, hasta una distancia de **1/6 de su altura libre, el doble de la mayor dimensión de la sección transversal de la columna, o 50 cm**, la que sea mayor [ACI 21.3.3.1].

El primer estribo del refuerzo transversal especial, medido desde la cara de la viga (o el elemento transversal a la columna), debe estar ubicado a lo sumo a la mitad del espaciamiento del refuerzo transversal especial o a 5 cm, el que sea menor. El espaciamiento del refuerzo transversal especial no podrá ser mayor que **d/4, 8 diámetros de la varilla longitudinal, 24 diámetros de la varilla del estribo cerrado, o 30 cm**, el que sea menor [ACI 21.5.3.2].

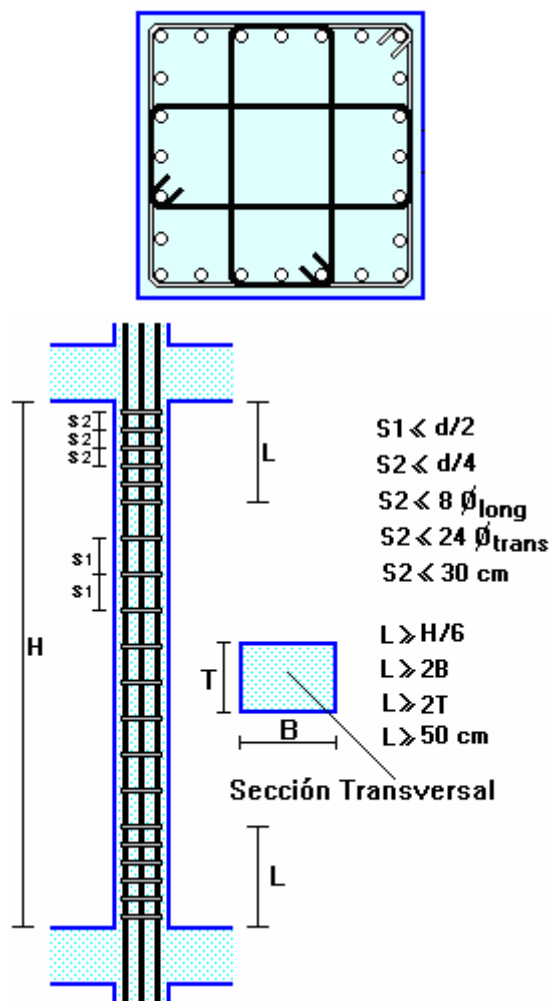


Figura 13.27: Refuerzo transversal especial para zonas sísmicas.

El refuerzo transversal especial rectangular podrá ser el requerido para resistir las fuerzas cortantes y momentos torsores, pero al menos deberá ser la mayor de las dos expresiones que se establecen a continuación [ACI 21.6.4.4]:

$$A_{sh} = 0.30 s_h h_c \frac{f'_c}{f_y} \left(\frac{A_g}{A_{ch}} - 1 \right) \quad \text{Ecuación (13.31)}$$

$$A_{sh} = 0.12sh \cdot hc \frac{f'_c}{f_y}$$

Ecuación (13.32)

Donde:

Ash: área total del refuerzo transversal

Ag: área total de la sección transversal de la columna

Ach: área del núcleo rectangular de una columna medida entre las caras exteriores de un estribo cerrado

hc: dimensión mayor del núcleo de una columna rectangular con estribos

sh: espaciamiento centro a centro de los estribos cerrados

13.12 CARACTERÍSTICAS DEL REFUERZO TRANSVERSAL EN COLUMNAS ZUNCHADAS:

El refuerzo transversal en columnas zunchadas consistirá en espirales continuas espaciadas regularmente, firmemente colocadas y alineadas mediante espaciadores verticales. Los zunchos tendrán un diámetro mínimo de varilla de 10 mm cuando los elementos son fabricados en obra [ACI 7.10.4.2], o cuando los elementos son prefabricados.

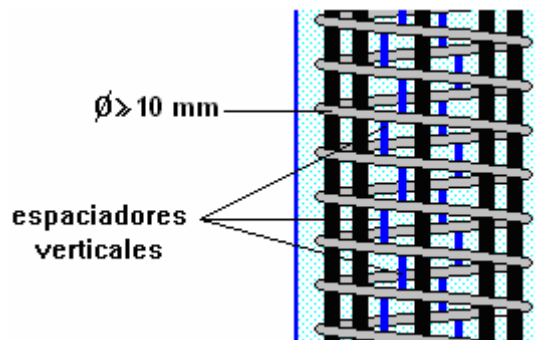


Figura 13.28: Refuerzo transversal en columnas zunchadas.

El refuerzo transversal, en espiral, deberá ser capaz de resistir las fuerzas cortantes y los momentos torsores actuantes.

La relación volumétrica del refuerzo en espiral ρ_z deberá cumplir con los siguientes valores mínimos [ACI 10.9.3]:

$$\rho_z = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1 \right) \frac{f'_c}{f_y}$$

Ecuación (13.33)

$$\rho_z = 0.12 \frac{f'_c}{f_y}$$

Ecuación (13.34)

Las espirales deben mantenerse firmemente colocadas y bien alineadas [ACI 7.10.4.9]. Las versiones anteriores de los códigos especifican que para lograr ese alineamiento se requieren al menos 2 espaciadores por ramal de hélice para espirales de un diámetro del zuncho menor a 50 cm, 3 espaciadores por ramal (por cada aro de la espiral) para diámetros de 50 a 75 cm, y 4 espaciadores por ramal para diámetros superiores a 75 cm; cuando los diámetros de las varillas de las espirales son de 14 mm. o más, se requieren 3

espaciadores para espirales de 60 cm o menos de diámetro, y se requieren 4 espaciadores para espirales de más de 60 cm. de diámetro.

El anclaje del refuerzo espiral debe ser provisto por al menos 1.5 vueltas del helicoide [ACI 7.10.4.4]. El zuncho deberá extenderse desde la parte superior del plinto o de la losa, hasta el refuerzo inferior de los elementos soportados superiores (columna o losa), debiendo añadirse el anclaje correspondiente.

El traslape de dos varillas del refuerzo espiral corrugado debe ser de 48 diámetros de la varilla del helicoide, pero nunca menos de 30 cm. También se puede conseguir la continuidad entre dos varillas del zuncho mediante soldaduras apropiadas [ACI 7.10.4.5].

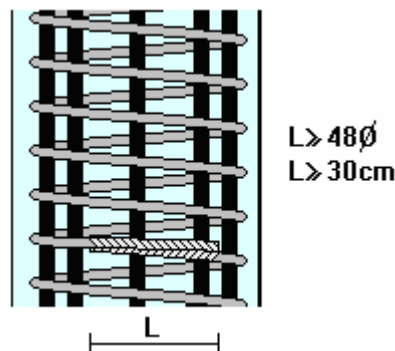


Figura 13.29: Traslape del refuerzo lateral en columnas zunchadas.

REFERENCIAS:

- 13.1 Winter G. y Nilson A., *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, Editorial Reverté, S.A.
- 13.2 Jiménez P., García A. y Morán F., *Hormigón Armado*, Mateu Cromo, Artes Gráficas, S. A.
- 13.3 Park R. y Pauley T., *Estructuras de Concreto Reforzado*, Editorial LIMUSA S. A.
- 13.4 Nilson A., (1999), *Diseño de Estructuras de Concreto*, Mc Graw Hill.
- 13.5 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 13.6 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.

CAPÍTULO XIV

TORSIÓN EN LOS ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO

14.1 INTRODUCCIÓN:

Muchas veces, los elementos estructurales, además de estar sometidos a flexión, cortante y cargas axiales, deben resistir solicitaciones torsionales. Por otra parte, muy rara vez se tienen elementos sometidos solamente a momentos torsores.

Las vigas extremas, que sirven de sustento para las losas; las vigas de soporte de gradas en voladizo; y las escaleras helicoidales, son casos clásicos de elementos que están sujetos a momentos torsores.

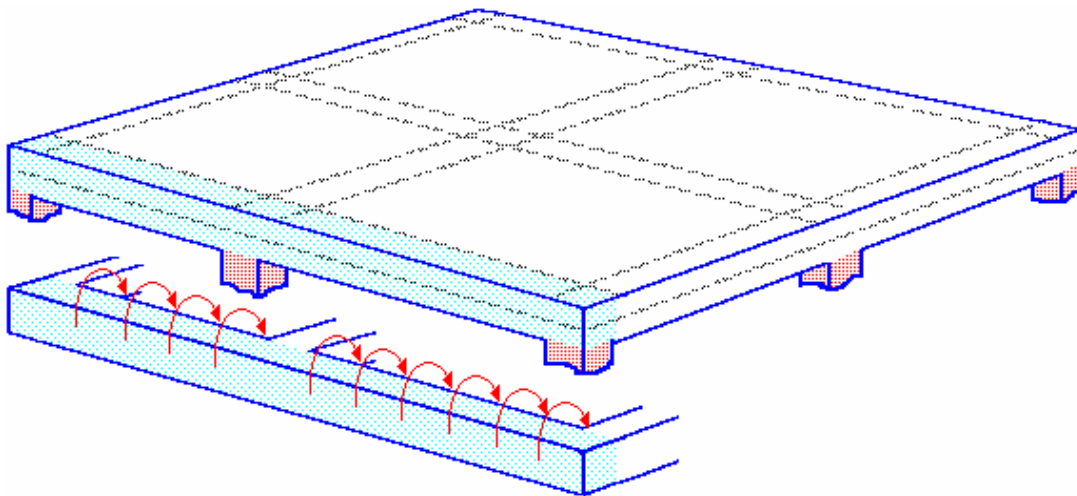


Figura 14.1: Momentos torsores en vigas de borde de losas.

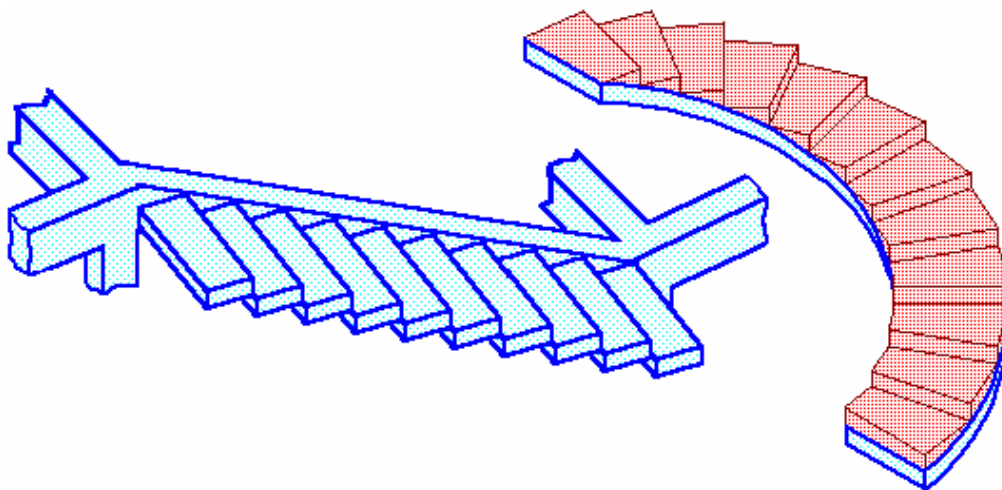


Figura 14.2: Escalera en voladizo y escalera helicoidal afectadas por momentos torsores.

Mientras en las escaleras en voladizo y en las escaleras helicoidales normalmente se toma en consideración el efecto de los momentos torsores, las vigas perimetrales que sirven de sustento a losas casi nunca son diseñadas para resistir solicitaciones torsionales.

14.2 EL FLUJO DE ESFUERZOS CORTANTES DIAGONALES:

Los momentos torsores que actúan sobre los elementos estructurales son resistidos mediante el flujo de **esfuerzos cortantes diagonales**, de orientación opuesta a las solicitaciones.

Existen secciones transversales sumamente eficientes resistiendo a los momentos torsores como las secciones circulares y los anillos circulares, y en menor proporción las secciones cuadradas y los anillos cuadrados, en las que el flujo de cortante se cierra naturalmente, describiendo círculos o geometrías similares a círculos, por lo que reciben el nombre de **secciones cerradas**.

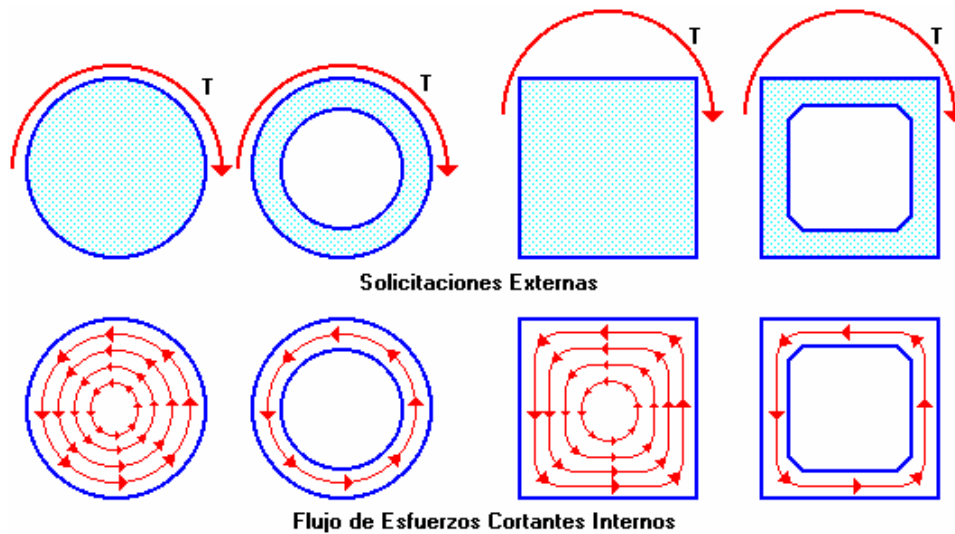


Figura 14.3: Flujo de esfuerzos cortantes internos para diferentes secciones transversales sometidas a momentos torsores.

Las secciones rectangulares alargadas, y las secciones compuestas por varios rectángulos alargados que no permiten el cierre natural del flujo de corte, son menos eficientes, recibiendo las últimas el nombre de **secciones abiertas**.

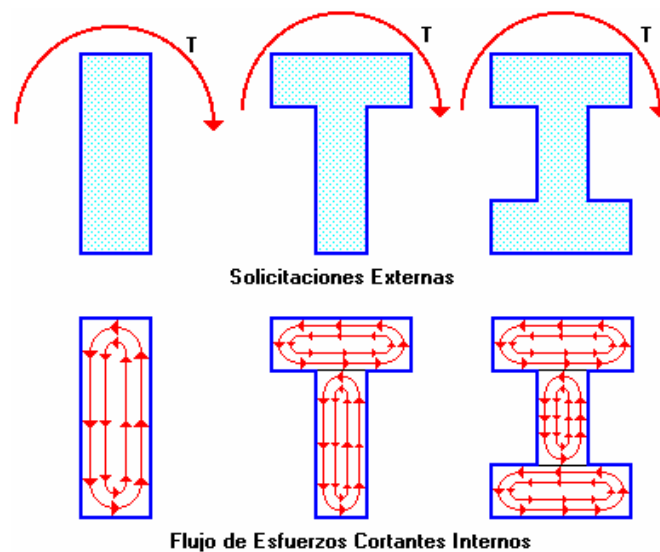


Figura 14.4: Flujo de esfuerzos cortantes internos en secciones transversales compuestas por varios sectores rectangulares.

14.3 EL COMPORTAMIENTO ANTE LA TORSIÓN DE LOS ELEMENTOS DE HORMIGÓN ARMADO CON SECCIÓN TRANSVERSAL RECTANGULAR:

Se puede tomar una pieza de hormigón, de sección transversal rectangular (es la de uso más frecuente), cuya dimensión mayor es **h** y cuya dimensión menor es **b**, sometida a momentos torsores **T**.

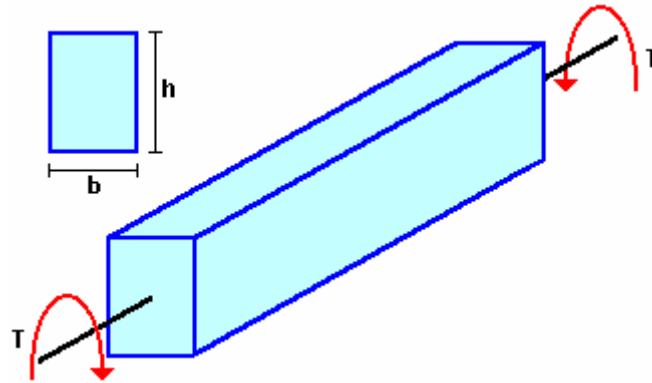


Figura 14.5: Elemento rectangular de hormigón armado sometido a momentos torsores.

Los esfuerzos cortantes “**v**”, provocados por los momentos torsores pueden ser descritos esquemáticamente mediante los siguientes gráficos:

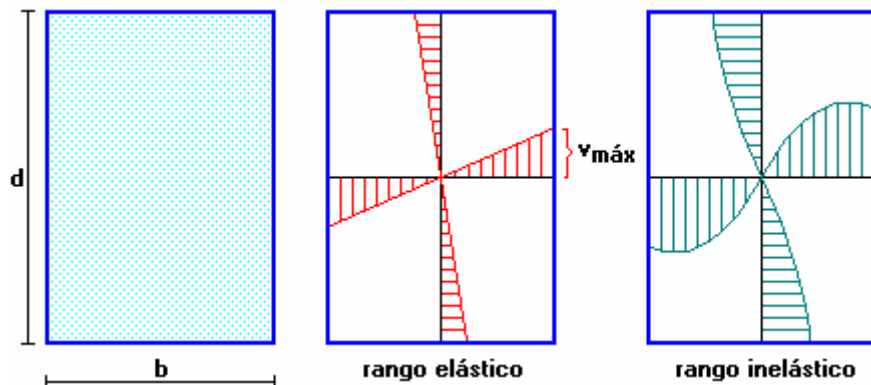


Figura 14.6: Esfuerzos de corte por torsión en rango elástico y en rango inelástico.

Se puede observar que:

- Los esfuerzos cortantes por torsión crecen desde el centro de la sección hacia las caras exteriores
- La capacidad resistente a la torsión de la sección depende mayoritariamente de la magnitud de la dimensión más corta **b**, y
- Los cortantes máximos se producen en la parte central de las caras de mayor longitud.

Si se lleva el elemento estructural propuesto hasta la rotura, ésta se produce mediante una superficie de falla diagonal, que tiende a formar un helicoides en tres de sus caras (una cara larga y dos caras cortas), y cierra la superficie de corte en la cuarta cara. La superficie de falla tiene ángulos característicos en cada una de las tres caras helicoidales, donde una de las caras (la de mayor longitud) presenta una fisura que

forma un ángulo de aproximadamente 45° con el eje longitudinal, y las dos caras restantes del helicoide presentan una fisura con un ángulo ϕ con respecto al eje longitudinal, aproximadamente igual en las dos caras. El ángulo ϕ está comprendido entre 45° y 90° .

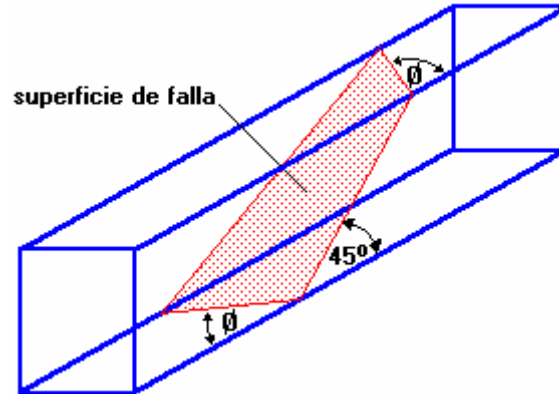


Figura 14.7: Superficie de falla en elementos rectangulares ante momentos torsores.

Para controlar las fisuras provocadas por las solicitaciones torsionales, además de la capacidad resistente del hormigón simple, puede ser necesario el proveer estribos cerrados transversales, y varillas longitudinales ubicadas en todas las caras de la sección, lo que permite coser y estabilizar las fisuras.

14.4 DISEÑO COMBINADO A LA TORSIÓN Y AL CORTE:

Debido a que la torsión se transforma en esfuerzos cortantes diagonales, en el diseño de los elementos estructurales se deben tomar en consideración simultáneamente las fuerzas cortantes y los momentos torsores.

En secciones transversales genéricas, el esfuerzo cortante último causado por la torsión v_{tu} se calcula mediante la siguiente expresión:

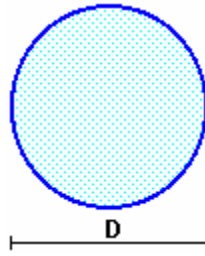
$$v_{tu} = \frac{T_u}{\phi \cdot W_t} \quad \text{Ecuación (14.1)}$$

Donde:

- v_{tu} : esfuerzo cortante último generado por la torsión
- T_u : momento torsor último
- W_t : módulo resistente a torsión
- ϕ : factor de reducción de capacidad a la torsión, cuyo valor es **0.85**

En secciones circulares, el módulo resistente a torsión W_t se calcula con la siguiente expresión:

$$W_t = \frac{\pi \cdot D^3}{16} \quad \text{Ecuación (14.2)}$$

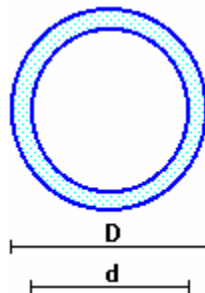


Donde:

D: diámetro de la sección circular

En anillos circulares, el módulo resistente a torsión W_t se calcula con la siguiente expresión:

$$W_t = \frac{\pi \cdot (D^3 - d^3)}{16} \quad \text{Ecuación (14.3)}$$



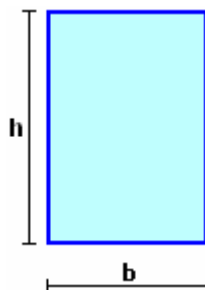
Donde:

D: diámetro exterior del anillo circular

d: diámetro interior del anillo circular

La solución matemática al problema de las secciones rectangulares fue propuesta por Barré de Saint-Venant, pero no es descrita mediante una expresión exacta para el módulo de torsión W_t , pudiendo emplearse la siguiente expresión aproximada, utilizada por los códigos de diseño, la misma que presenta mejores aproximaciones cuando d/h tiene valores grandes:

$$W_t = \frac{b^2 \cdot h}{3} \quad \text{Ecuación (14.4)}$$



Donde:

b: menor dimensión de la sección transversal rectangular

h: mayor dimensión de la sección transversal rectangular

Una expresión más refinada, pero aún así todavía aproximada, para secciones transversales rectangulares, es la siguiente:

$$W_t = \frac{b^2 \cdot h}{3} \left\{ 1 - 2.15 \frac{b}{h} \left[1 - \frac{b^{1/8}}{1.212 h^{1/8}} \right] \right\} \quad \text{Ecuación (14.5)}$$

De acuerdo a la primera expresión para W_t , en secciones rectangulares, el esfuerzo cortante último causado por la torsión v_{tu} se puede calcular mediante la siguiente expresión, que aparece en los códigos:

$$v_{tu} = \frac{3T_u}{\phi \cdot b^2 \cdot h} \quad \text{Ecuación (14.6)}$$

Cuando una sección transversal puede ser dividida en varias secciones rectangulares, el módulo resistente a torsión W_t puede calcularse con la siguiente expresión:

$$W_t = \sum \left(\frac{b_i^2 \cdot h_i}{3} \right) \quad \text{Ecuación (14.7)}$$

La expresión anterior debe ser el mayor de todos los posibles valores que se obtienen al dividir la sección transversal en rectángulos de área positiva.

En ese caso el esfuerzo cortante último v_{tu} se calcula con la siguiente expresión:

$$v_{tu} = \frac{3T_u}{\phi \cdot \sum_{i=1}^n (b_i^2 \cdot h_i)} \quad \text{Ecuación (14.8)}$$

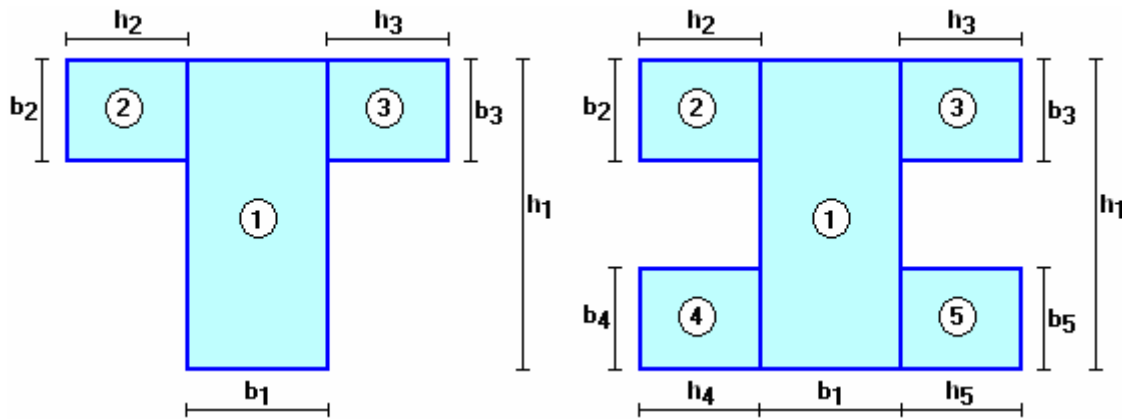


Figura 14.8: Secciones transversales divididas en múltiples rectángulos.

Donde:

- b_i : menor dimensión del rectángulo i
- h_i : mayor dimensión del rectángulo i

La longitud efectiva de las alas de este tipo de secciones transversales no deben superar a tres veces el espesor de dichas alas:

$$\begin{aligned} h_2 &\leq 3b_2 \\ h_3 &\leq 3b_3 \end{aligned}$$

Cuando el esfuerzo cortante último por torsión v_{tu} , calculado con las ecuaciones anteriores, no excede de $0.4\sqrt{f'c}$, los códigos permiten ignorar el efecto de los momentos torsores pues el hormigón se considera capaz de resistir ese nivel de solicitaciones sin necesidad de refuerzo de acero adicional al especificado para corte y para flexión.

Cuando el esfuerzo cortante último por torsión v_{tu} , sobrepasa $0.4\sqrt{f'c}$, la capacidad resistente nominal a corte por torsión del hormigón simple v_{tc} depende del nivel de esfuerzos cortantes v_u , y del esfuerzo cortante por torsión v_{tu} , y se calcula con la siguiente expresión:

$$v_{tc} = \frac{0.636\sqrt{f'c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1.2v_u}{v_{tu}}\right)^2}} \quad \text{Ecuación (14.9)}$$

Bajo esas mismas circunstancias, el esfuerzo nominal resistente a corte se calcula mediante la siguiente expresión:

$$v_c = \frac{0.53\sqrt{f'c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{tu}}{1.2v_u}\right)^2}} \quad \text{Ecuación (14.10)}$$

Las dos ecuaciones anteriores se interpretan como que la resistencia nominal del hormigón simple a cortante puro es $0.53\sqrt{f'c}$, mientras que la resistencia nominal a cortante por torsión pura es $0.636\sqrt{f'c}$. Cualquier estado tensional combinado (fuerzas cortantes más momentos torsores) se describe por una elipse base que tiene las dos magnitudes como radios principales, y una elipse de diseño, múltiplo de la elipse base, que superpone los dos tipos de solicitaciones.

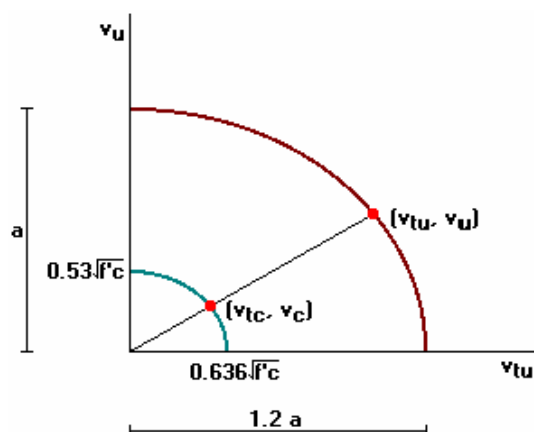


Figura 14.9: Estado tensional combinado de cortante por corte y cortante por torsión.

El factor **1.2** que multiplica a v_u es el resultado de que la distribución de cortantes en una sección transversal rectangular no es uniforme como presupone la fórmula de cálculo del esfuerzo nominal v_u , establecida en los códigos, sino que está descrita por una parábola. Las deformaciones producidas por la distribución parabólica son **1.2** veces mayores que las que se presentan con una distribución constante. Este factor de

1.2 también se ve reflejado en que la resistencia nominal del hormigón a corte por torsión $v_{tc} = 0.636\sqrt{f'c}$ es 1.2 veces mayor que la resistencia nominal a corte puro $v_c = 0.53\sqrt{f'c}$.

Las solicitaciones máximas que pueden resistir las secciones rectangulares de hormigón armado, incluida la colaboración del refuerzo de acero, también están controladas por una elipse proporcional a las anteriores, en las que el esfuerzo máximo que se admite a corte puro es $2.65\sqrt{f'c}$ y el esfuerzo máximo a corte por torsión es $3.18\sqrt{f'c}$. Esta nueva elipse es 5 veces mayor que la elipse base.

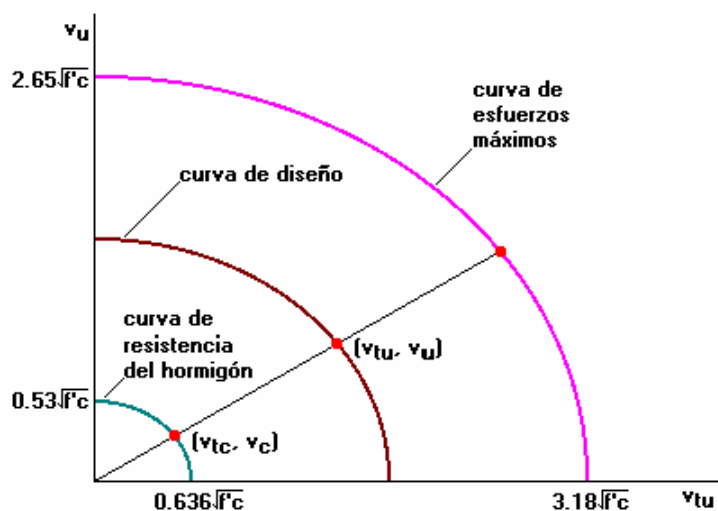


Figura 14.10: Curva de resistencia del hormigón, curva de esfuerzos máximos del hormigón armado y curva de diseño.

La expresión que define el mayor esfuerzo que puede resistir una sección rectangular reforzada longitudinal y transversalmente con acero es la siguiente:

$$v_{tu} \leq \frac{3.18\sqrt{f'c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1.2v_u}{v_{tu}}\right)^2}} \quad \text{Ecuación (14.11)}$$

Una expresión de más fácil manejo que incluye la combinación de cortante y torsión es:

$$\sqrt{(1.2v_u)^2 + (v_{tu})^2} \leq 3.18\sqrt{f'c} \quad \text{Ecuación (14.12)}$$

La zona crítica a cortante por torsión (cercana a los apoyos en pórticos espaciales) generalmente ocupa la misma posición que la posición crítica a cortante puro. Todas las secciones comprendidas entre la zona crítica y los apoyos se diseñarán para las solicitaciones que actúan en la zona crítica a torsión.

Cuando el esfuerzo cortante último por torsión v_{tu} supera al esfuerzo cortante por torsión que puede resistir el hormigón v_{tc} , los elementos estructurales requerirán de refuerzo transversal en forma de estribos rectangulares cerrados, y refuerzo longitudinal en forma de varillas en las cuatro caras, para resistir el exceso de esfuerzos $(v_{tu} - v_{tc})$, simultáneamente.

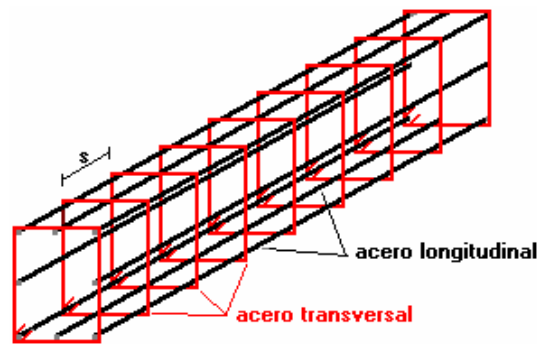


Figura 14.11: Acero longitudinal y acero transversal resistentes a la torsión en un elemento de sección transversal rectangular.

En secciones rectangulares, la armadura transversal (estribos cerrados) que se requiere para resistir a los momentos torsores se calcula con la siguiente expresión:

$$A_t = \frac{(v_{tu} - v_{tc}) \cdot s \cdot b^2 \cdot h}{3\alpha_t \cdot b_1 \cdot h_1 \cdot F_y} \quad \text{Ecuación (14.13)}$$

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33 \frac{h_1}{b_1} \leq 1.50 \quad \text{Ecuación (14.14)}$$

Donde:

- A_t : sección transversal de un ramal de estribo
- s : espaciamiento longitudinal entre estribos
- b : dimensión exterior menor de la sección transversal rectangular
- h : dimensión exterior mayor de la sección transversal rectangular
- α_t : factor de forma del rectángulo
- b_1 : dimensión menor del estribo rectangular, medida centro a centro
- h_1 : dimensión mayor del estribo rectangular, medida centro a centro
- F_y : esfuerzo de fluencia del acero

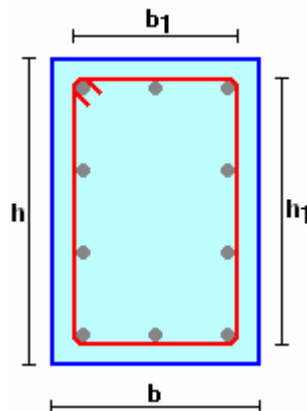


Figura 14.12: Sección transversal rectangular y armado resistente a la torsión.

Con el objeto de controlar la fisuración espiral, la separación máxima entre estribos cerrados no debe superar las siguientes expresiones:

$$s \leq \frac{b_1 + h_1}{4} \quad \text{Ecuación (14.15)}$$

$$s \leq 30 \text{ cm} \quad \text{Ecuación (14.16)}$$



El acero longitudinal requerido está definido por la mayor de las siguientes expresiones:

$$A_L = 2A_t \frac{b_1 + h_1}{s} \quad \text{Ecuación (14.17)}$$

$$A_L = \left[\frac{28.1(b.s)}{F_y} \left(\frac{v_{tu}}{v_{tu} + v_u} \right) - 2A_t \right] \cdot \left(\frac{b_1 + h_1}{s} \right) \quad \text{Ecuación (14.18)}$$

Donde:

A_L : sección total de acero longitudinal (total de las cuatro caras)

La primera de las dos expresiones pretende que exista el mismo volumen de refuerzo longitudinal y de refuerzo transversal.

El acero longitudinal calculado con las dos fórmulas anteriores no requiere superar la siguiente expresión:

$$A_L \leq \left(\frac{3.52b_w.s}{F_y} \right) \left(\frac{b_1 + h_1}{s} \right) \quad \text{Ecuación (14.19)}$$

Donde:

b_w : ancho del alma resistente al corte

El acero longitudinal se debe distribuir uniformemente en el perímetro del rectángulo.

Cuando se tiene una sección transversal que puede ser descompuesta en varios rectángulos, las dos expresiones que definen el acero transversal requerido en cada rectángulo son:

$$A_{t,i} = \frac{(v_{tu} - v_{tc}).s.\sum_{i=1}^n (b_i^2 . h_i)}{3\alpha_{t,i} . b_{1,i} . h_{1,i} . F_y} \quad \text{Ecuación (14.20)}$$

$$\alpha_{t,i} = 0.66 + 0.33 \frac{h_{1,i}}{b_{1,i}} \leq 1.50 \quad \text{Ecuación (14.21)}$$

Donde:

$A_{t,i}$: sección transversal de un ramal de estribo del rectángulo i

b_i : dimensión menor del rectángulo i de la sección transversal

h_i : dimensión mayor del rectángulo i de la sección transversal

$\alpha_{t,i}$: factor de forma del rectángulo i

$b_{1,i}$: dimensión menor del estribo del rectángulo i , medida centro a centro

$h_{1,i}$: dimensión mayor del estribo del rectángulo i , medida centro a centro

Las expresiones que definen el acero longitudinal son:

$$A_{L,i} = 2A_{t,i} \frac{b_{1,i} + h_{1,i}}{s} \quad \text{Ecuación (14.22)}$$

$$A_{L,i} = \left[\frac{28.1(b.s)}{F_y} \left(\frac{v_{tu}}{v_{tu} + v_u} \right) - 2A_{t,i} \right] \cdot \left(\frac{b_{1,i} + h_{1,i}}{s} \right) \quad \text{Ecuación (14.23)}$$

$$A_L \leq \frac{3.52b_w \cdot s}{F_y} \cdot \frac{b_1 + h_1}{s}$$

Ecuación (14.24)

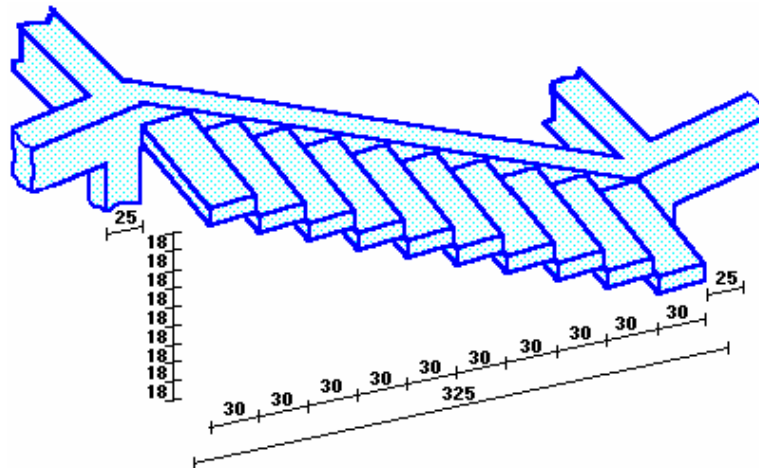
Donde:

$A_{L,i}$: acero longitudinal

b_w : ancho del alma resistente al corte

EJEMPLO 14.1:

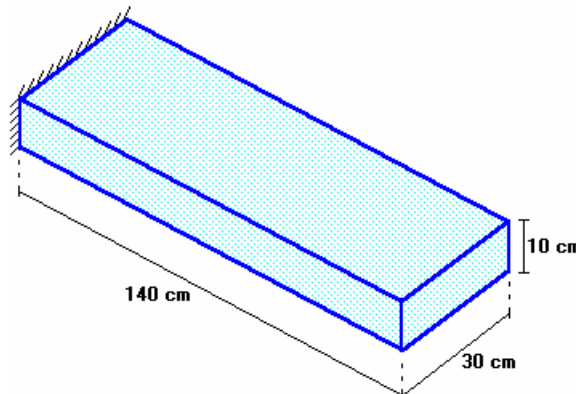
Diseñar la siguiente escalera con gradas en voladizo si $f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$ y $F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$.



Las gradas en voladizo tienen una longitud libre de 1.40 m; la sección transversal de las gradas es constante y mide 30 cm de ancho x 10 cm de altura. La viga de torsión tentativamente tiene una sección transversal cuadrada (es la más eficiente) de 30 cm de ancho x 30 cm de altura, y se supone torsionalmente empotrada en los nudos extremos (en realidad debería realizarse un análisis espacial de la estructura total para definir el diagrama de momentos torsores en la viga, pero por fines académicos se ha realizado esta simplificación).

a. Diseño de los Escalones de Hormigón Armado:

• Cargas sobre los Escalones:



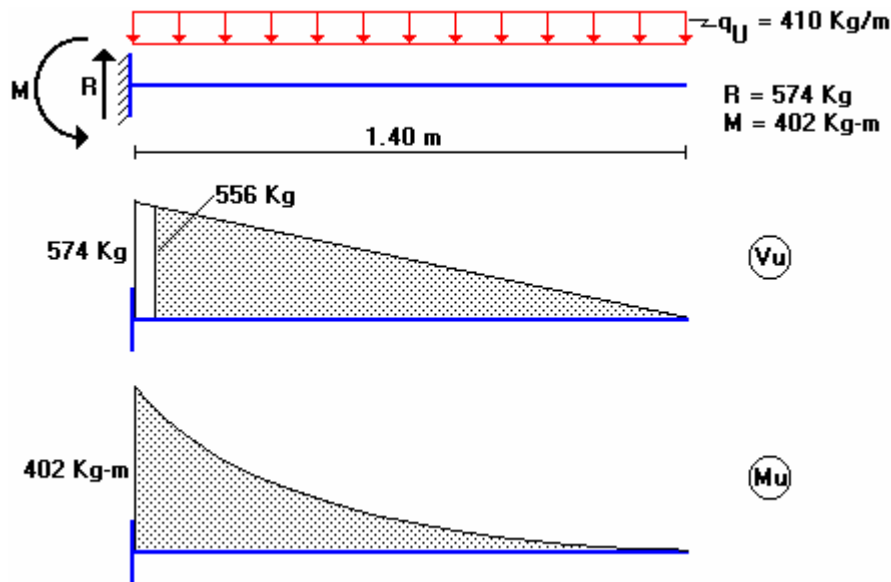


Peso propio: $0.30 \times 0.10 \times 1.00 \times 2400 =$	72 Kg/m
Enlucido y masillado: $0.30 \times 0.04 \times 1.00 \times 2200 =$	26 Kg/m
Revestimiento en madera: $0.30 \times 0.015 \times 1.00 \times 1600 =$	7 Kg/m
Pasamanos:	5 Kg/m

Carga Permanente:	110 Kg/m
Carga Viva: $(0.30 \times 1.00) \times 500 =$	150 Kg/m
Carga Ultima: $(1.4 \times 110) + (1.7 \times 150) =$	410 Kg/m

- Diagramas de Cargas, de Cortes y Momentos Flectores:**

Los diagramas de cargas, de cortes y de momentos flectores de un escalón de hormigón armado son:



- Diseño a Corte:**

El esfuerzo cortante nominal que resiste el hormigón del escalón es:

$$v_c = 0.53\sqrt{f'_c} = 0.53\sqrt{210}$$

$$v_c = 7.68 \text{ Kg/cm}^2$$

El esfuerzo cortante último es:

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b \cdot d} = \frac{556 \text{ Kg}}{(0.85)(30 \text{ cm})(5.5 \text{ cm})}$$

$$v_u = 3.96 \text{ Kg/cm}^2 < v_c \quad (\text{O.K.})$$

El hormigón es capaz de resistir el esfuerzo cortante.

- Diseño a Flexión:**

Los datos son:

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$



$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$d = 5.5 \text{ cm}$$

$$\phi = 0.90$$

$$M_u = 402 \text{ Kg-m} = 40200 \text{ Kg-cm}$$

El cálculo de la sección de acero requerida se lo puede realizar mediante las siguientes expresiones (ecuaciones 7.4 y 7.5):

$$k = 0.85f'_c b d \quad \text{Ecuación (7.4)}$$

$$k = (0.85)(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})(5.5 \text{ cm})$$

$$k = 29452.5 \text{ Kg}$$

$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2M_u}{\phi k d}} \right] \quad \text{Ecuación (7.5)}$$

$$A_s = \frac{29452.5 \text{ Kg}}{4200 \text{ Kg/cm}^2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2(40200 \text{ Kg-cm})}{(0.90)(29452.5 \text{ Kg})(5.5 \text{ cm})}} \right]$$

$$\mathbf{A_s = 2.32 \text{ cm}^2}$$

La cuantía mínima de armado es:

$$\rho_{\min} = 14 / F_y \quad \text{Ecuación (7.18)}$$

$$\rho_{\min} = 14 / 4200$$

$$\rho_{\min} = 0.003333$$

La cantidad mínima de acero es:

$$A_{s\min} = \rho_{\min} \cdot b \cdot d = (0.003333) (30 \text{ cm}) (5.5 \text{ cm})$$

$$\mathbf{A_{s\min} = 0.55 \text{ cm}^2}$$

La cuantía balanceada es:

$$\rho_b = 0.85\beta_1 \left(\frac{f'_c}{F_y} \right) \frac{0.003}{\frac{F_y}{E_s} + 0.003} \quad \text{Ecuación (7.8)}$$

$$\rho_b = 0.85(0.85) \left(\frac{210}{4200} \right) \frac{0.003}{\frac{4200}{2100000} + 0.003}$$

$$\mathbf{\rho_b = 0.0217}$$

La cuantía máxima de armado (las gradas en voladizo son horizontales, estáticamente determinadas y no absorben fuerzas sísmicas) es:

$$\rho_{\max} = 0.75 \rho_b = 0.75 (0.0217) = 0.0163$$

La armadura máxima es:

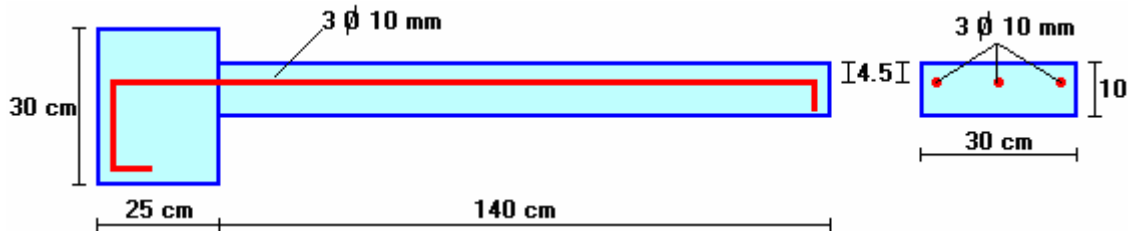
$$A_{s\max} = \rho_{\max} \cdot b \cdot d = (0.0163) (30) (5.5)$$

$$\mathbf{A_{s\max} = 2.69 \text{ cm}^2}$$

Dado que la armadura calculada está comprendida entre la armadura mínima y máxima, el diseño es aceptable:

$$A_s = 2.32 \text{ cm}^2$$

$A_s = 3$ varillas de 10 mm de diámetro



b. Diseño de la Viga de Torsión:

• **Cargas Provenientes de los Escalones:**

Peso de un escalón: (110 Kg/m) (1.40 m) =	154 Kg
Carga viva sobre un escalón: (150 Kg/m) (1.40 m) =	210 Kg

• **Cargas Sobre la Viga de Torsión:**

Peso propio de la viga: $0.30 \times 0.30 \times 1.00 \times 2400 =$	216 Kg/m
Carga permanente de los escalones: $(110\text{Kg/m})(1.40\text{m})/(0.30\text{m}) =$	513 Kg/m

Carga permanente de flexión:	729 Kg/m

Momento torsor permanente por escalón: $(110\text{Kg/m})(1.40\text{m})^2/2 =$	108 Kg-m

Carga permanente de torsión por metro: $(108\text{Kg-m})/(0.30\text{m}) =$	360 Kg-m

Carga viva de flexión: $(150 \text{ Kg/m}) (1.40 \text{ m}) / (0.30 \text{ m}) =$	700 Kg/m

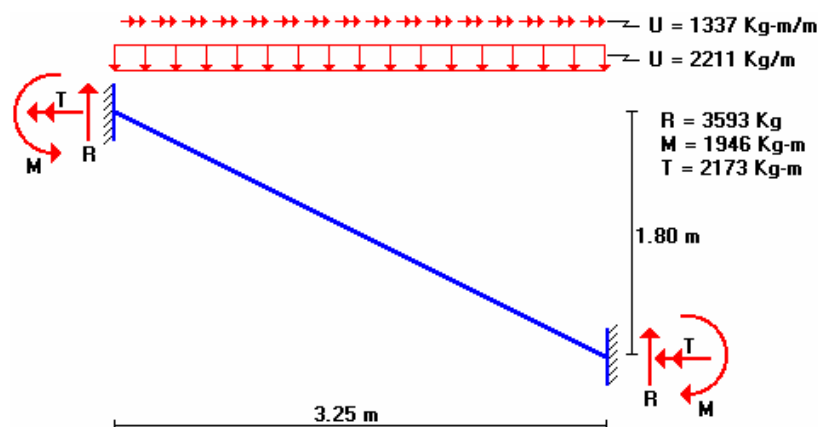
Momento torsor vivo por escalón: $(150 \text{ Kg/m}) (1.40 \text{ m})^2 / 2 =$	147 Kg-m

Carga viva de torsión por metro: $(147 \text{ Kg-m}) / (0.30 \text{ m}) =$	490 Kg-m

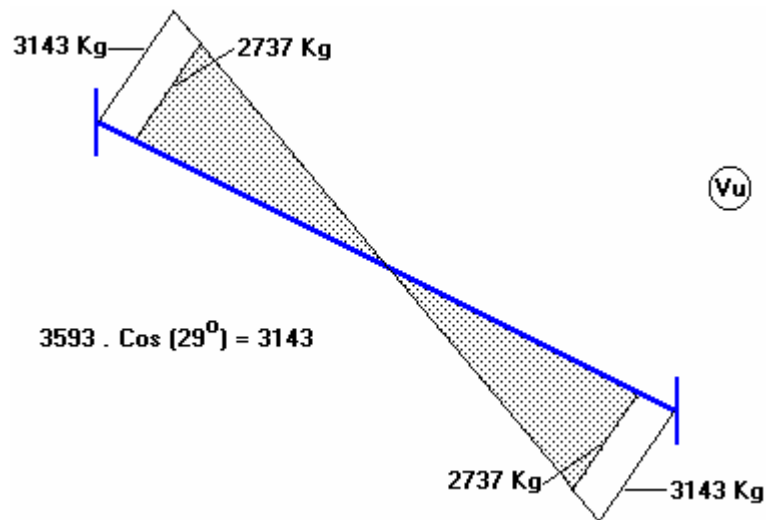
Carga última de flexión: $1.4 (729) + 1.7 (700) =$	2211 Kg/m

Carga última de torsión: $1.4 (360) + 1.7 (490) =$	1337 Kg-m

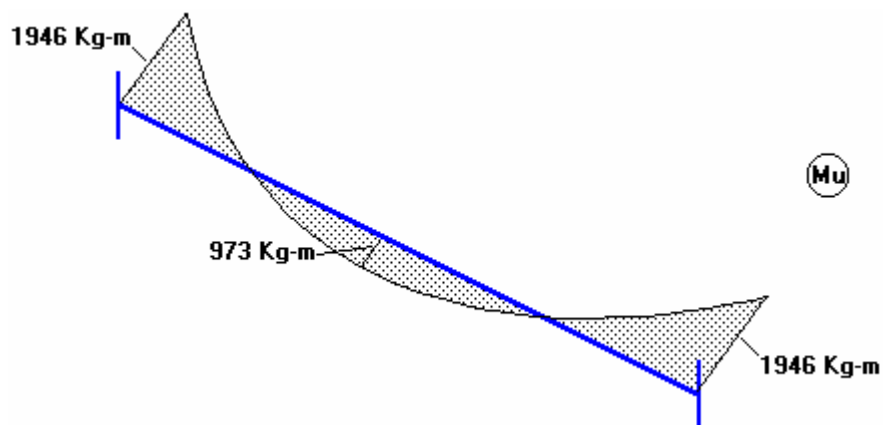
• **Modelo Estructural Idealizado y Reacciones de Apoyo:**



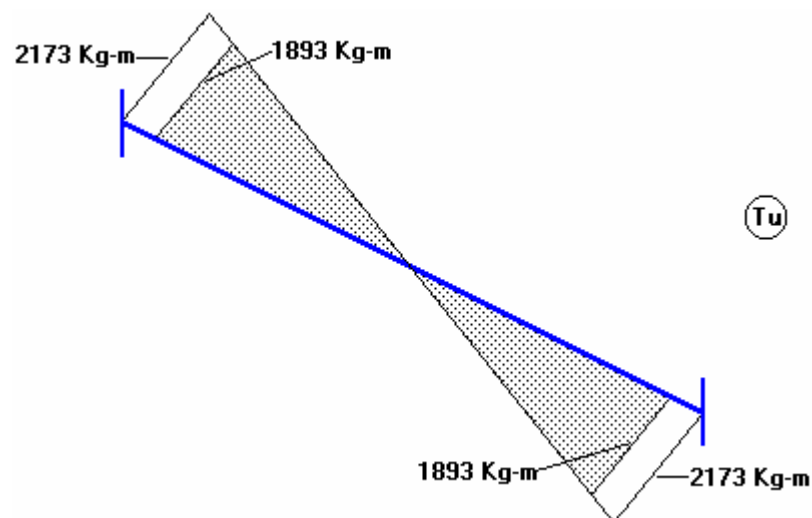
- Diagrama de Cortes:**



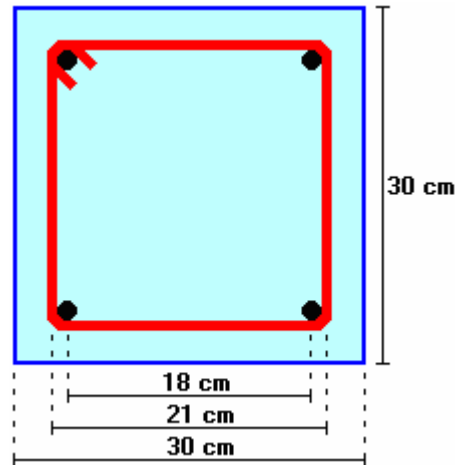
- Diagrama de Momentos Flectores:**



- Diagrama de Momentos Torsores:**



- **Dimensiones Transversales Básicas de la Viga de Torsión:**



- **Diseño a Flexión de la Viga de Torsión:**

⇒ **Armadura mínima positiva y negativa:**

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 30 \text{ cm}$$

$$d = h - 6 \text{ cm} = 30 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\rho_{\min} = 14/F_y = 14/4200 = 0.003333$$

$$A_{s\min} = \rho_{\min} \cdot b \cdot d = (0.003333) (30) (24) = 2.40 \text{ cm}^2$$

⇒ **Armadura negativa:**

$$f'_c = 210 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\phi = 0.90 \quad (\text{flexión})$$

$$M_u(-) = 1946 \text{ Kg-m} = 194600 \text{ Kg-cm}$$

$$k = 0.85f'_c \cdot b \cdot d$$

$$k = (0.85)(210 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})(24 \text{ cm})$$

$$k = 128520 \text{ Kg}$$

$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_u}{\phi \cdot k \cdot d}} \right]$$

$$A_s = \frac{128520}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (194600)}{(0.90) \cdot (128520) \cdot (24)}} \right]$$

$$A_s(-) = 2.23 \text{ cm}^2 < A_{s\min}$$

$$A_s(-) = A_{s\min} = 2.40 \text{ cm}^2$$

$$A_s(-) = 3 \phi 10 \text{ mm}$$

⇒ **Armadura positiva:**

$$M_u(+) = 973 \text{ Kg-m} = 97300 \text{ Kg-cm}$$

$$k = 0.85f'_c \cdot b \cdot d = (0.85) \cdot (210) \cdot (30) \cdot (24)$$



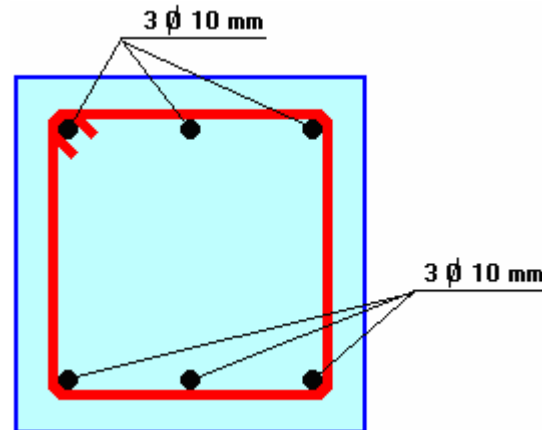
$$k = 128520 \text{ Kg}$$

$$A_s = \frac{k}{F_y} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot M_u}{\phi \cdot k \cdot d}} \right] = \frac{128520}{4200} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (97300)}{(0.90) \cdot (128520) \cdot (24)}} \right]$$

$$A_s(+) = 1.09 \text{ cm}^2 < A_{s_{\min}}$$

$$A_s(+) = A_{s_{\min}} = 2.40 \text{ cm}^2$$

$$A_s(+) = 3 \phi 10 \text{ mm}$$



- Cálculo de Esfuerzos de Corte y Torsión para Diseño:**

⇒ **Cálculo del esfuerzo cortante último:**

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 30 \text{ cm}$$

$$d = h - 6 \text{ cm} = 30 \text{ cm} - 6 \text{ cm} = 24 \text{ cm}$$

$$\phi = 0.85 \quad (\text{corte})$$

$$V_u = 2737 \text{ Kg}$$

$$v_u = \frac{V_u}{\phi \cdot b \cdot d} = \frac{2737}{(0.85)(30)(24)}$$

$$v_u = 4.47 \text{ Kg/cm}^2$$

⇒ **Cálculo del esfuerzo cortante último por torsión:**

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 30 \text{ cm}$$

$$\phi = 0.85 \quad (\text{torsión})$$

$$T_u = 1893 \text{ Kg-m} = 189300 \text{ Kg-cm}$$

$$v_{tu} = \frac{3T_u}{\phi \cdot b^2 \cdot h} = \frac{3(189300)}{(0.85)(30)^2 (30)}$$

$$v_{tu} = 24.75 \text{ Kg/cm}^2$$

⇒ **Verificación del esfuerzo combinado máximo de corte y torsión:**

$$\sqrt{(1.2v_u)^2 + (v_{tu})^2} = \sqrt{[1.2(4.47)]^2 + (24.75)^2}$$



$$\sqrt{(1.2v_u)^2 + (v_{tu})^2} = 25.32 \text{ Kg/cm}^2$$
$$3.18\sqrt{f'_c} = 3.18\sqrt{210} = 46.08 \text{ Kg/cm}^2$$
$$25.32 < 46.08 \quad (\text{O.K.})$$

El esfuerzo combinado de corte y corte por torsión no sobrepasa el límite máximo y puede ser resistido por la sección transversal propuesta, mediante la inclusión de armadura transversal y longitudinal.

⇒ **Definición del proceso de diseño en función del esfuerzo básico de corte por torsión:**

$$0.4\sqrt{f'_c} = 0.4\sqrt{210} = 5.80 \text{ Kg/cm}^2$$
$$v_{tu} = 24.75 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_{tu} \geq 0.4\sqrt{f'_c} \Rightarrow \text{debe diseñarse a cortante y torsión combinados}$$

Si se hubiera cumplido la condición opuesta ($v_{tu} \leq 0.4\sqrt{f'_c}$) no se hubiera requerido diseñar a torsión, y se podría analizar el cortante como una sollicitación independiente ($v_c = 0.53\sqrt{f'_c}$), despreciando el efecto de cortante por torsión.

⇒ **Esfuerzo de corte nominal del hormigón para sollicitaciones combinadas:**

$$v_c = \frac{0.53\sqrt{f'_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{v_{tu}}{1.2v_u}\right)^2}}$$
$$v_c = \frac{0.53\sqrt{210}}{\sqrt{1 + \left[\frac{24.75}{1.2(4.47)}\right]^2}}$$
$$v_c = 1.63 \text{ Kg/cm}^2$$

Este valor es muy diferente del tradicional $v_c = 0.53\sqrt{f'_c} = 7.68 \text{ Kg/cm}^2$ cuando el efecto de torsión es inexistente o despreciable. Claramente se aprecia que, en el caso actual, la sollicitación dominante es la torsión.

⇒ **Esfuerzo de corte por torsión nominal del hormigón para sollicitaciones combinadas:**

$$v_{tc} = \frac{0.636\sqrt{f'_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{1.2v_u}{v_{tu}}\right)^2}}$$



$$v_{tc} = \frac{0.636\sqrt{210}}{\sqrt{1 + \left[\frac{1.2(4.47)}{24.75} \right]^2}}$$

$$v_{tc} = 9.01 \text{ Kg/cm}^2$$

Este valor es bastante cercano al máximo cortante resistente por torsión $v_{tc} = 0.636\sqrt{f'_c} = 9.22 \text{ Kg/cm}^2$ cuando el efecto de corte puro es inexistente. Se verifica que la sollicitación dominante es la torsión.

- **Diseño a Corte:**

La sección transversal resistente al corte A_v de los estribos transversales se calcula con la siguiente expresión:

$$A_v = \frac{(v_u - v_c).b_w.s}{F_y}$$

Despejando el espaciamiento s de la ecuación anterior se tiene:

$$s = \frac{A_v.F_y}{(v_u - v_c).b_w}$$

Para la presente viga se tienen los siguientes datos en la sección crítica (a una distancia “d” de la cara de la viga transversal):

$$v_u = 4.47 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_c = 1.63 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b_w = 30 \text{ cm}$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

Si se toman estribos cerrados de 8 mm de diámetro (es el mínimo diámetro permitido por los códigos para regiones geográficas afectadas por sismos), A_v es la sección transversal de dos ramales del estribo.

$$A_v = 2 (0.50 \text{ cm}^2) = 1.00 \text{ cm}^2$$

El espaciamiento requerido s de los estribos de 8 mm de diámetro es:

$$s = \frac{(1.00 \text{ cm}^2)(4200 \text{ Kg/cm}^2)}{(4.47 \text{ Kg/cm}^2 - 1.63 \text{ Kg/cm}^2)(30 \text{ cm})}$$

$$s = 49.30 \text{ cm}$$

El Código Ecuatoriano de la Construcción establece que, en regiones afectadas por sismos, debe guardarse el siguiente espaciamiento mínimo entre estribos, a todo lo largo de la viga:

$$s_{\min} = d/2 = 24/2$$

$$s_{\min} = 12 \text{ cm}$$

De igual manera, en regiones sísmicas, el espaciamiento mínimo de los estribos en los sectores próximos a los nudos (desde el nudo hasta 2 veces la altura geométrica de la viga, $2h$) debe ser:



$$s_{\text{mín,nudo}} = d/4 = 24/4$$

$$s_{\text{mín,nudo}} = \mathbf{6 \text{ cm}}$$

Este diseño debe combinarse con el diseño del acero transversal a torsión para obtener los resultados definitivos por lo que, por el momento, no conviene realizar ningún reajuste por espaciamientos mínimos.

- **Diseño del Acero Transversal de Torsión:**

La sección transversal resistente al corte por torsión A_t de los estribos se calcula con las siguientes expresiones:

$$A_t = \frac{(v_{tu} - v_{tc}).s.b^2.h}{3\alpha_t.b_1.h_1.F_y}$$

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33 \frac{h_1}{b_1} \leq 1.50$$

Para la presente viga se tienen los siguientes datos en la sección crítica:

$$v_{tu} = 24.75 \text{ Kg/cm}^2$$

$$v_{tc} = 9.01 \text{ Kg/cm}^2$$

$$b = 30 \text{ cm}$$

$$h = 30 \text{ cm}$$

$$b_1 = 21 \text{ cm}$$

$$h_1 = 21 \text{ cm}$$

$$F_y = 4200 \text{ Kg/cm}^2$$

Se calcula α_t :

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33 \frac{21}{21} = 0.99$$

De la expresión para el cálculo de A_t se despeja el espaciamiento s :

$$s = \frac{3A_t.\alpha_t.b_1.h_1.F_y}{(v_{tu} - v_{tc}).b^2.h}$$

Si se toman estribos de 8 mm de diámetro (el mismo diámetro que los estribos de cortante puro para no provocar errores en la etapa constructiva), A_t es la sección transversal de un ramal del estribo (en esto se diferencia de la sección transversal resistente al cortante).

$$A_t = 0.50 \text{ cm}^2$$

El espaciamiento requerido s de los estribos de 8 mm de diámetro es:

$$s = \frac{3(0.50\text{cm}^2)(0.99)(21\text{cm})(21\text{cm})(4200\text{Kg/cm}^2)}{(24.75\text{Kg/cm}^2 - 9.01\text{Kg/cm}^2)(30\text{cm})^2(30\text{cm})}$$

$$s = \mathbf{6.47 \text{ cm.}}$$

El espaciamiento para controlar la fisuración por torsión debe ser menor que las siguientes expresiones:

$$s \leq \frac{b_1 + h_1}{4}$$

$$s \leq 30 \text{ cm}$$

Colocando valores a la primera expresión:

$$\frac{b_1 + h_1}{4} = \frac{21 + 21}{4} = 10.5 \text{ cm}$$

El espaciamiento calculado anteriormente (6.47 cm o 6 cm si se redondea) es apropiado pues es menor que el espaciamiento mínimo. En los sectores con momentos torsores de menor magnitud (sector central) es conveniente aumentar el espaciamiento hasta los 10.5 cm (por motivos constructivos hasta 10 cm.).

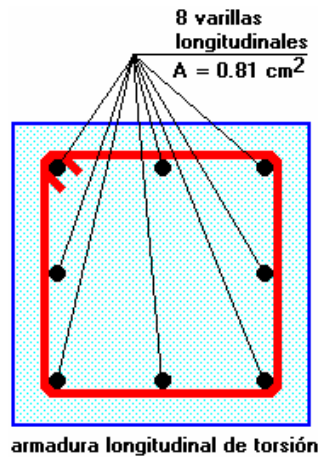
- **Diseño del Acero Longitudinal a Torsión:**

El acero longitudinal se calcula con la siguiente expresión:

$$A_L = 2A_t \frac{b_1 + h_1}{s}$$

$$A_L = 2(0.50 \text{ cm}^2) \frac{21 \text{ cm} + 21 \text{ cm}}{6.47 \text{ cm}} = 6.49 \text{ cm}^2$$

Se requieren al menos 8 varillas distribuidas por igual en el perímetro de las 4 caras. Cada varilla debería tener una sección transversal de 0.81 cm^2 ($6.49/8$), que aproximadamente coincide con las varillas de 10 mm (0.79 cm^2)



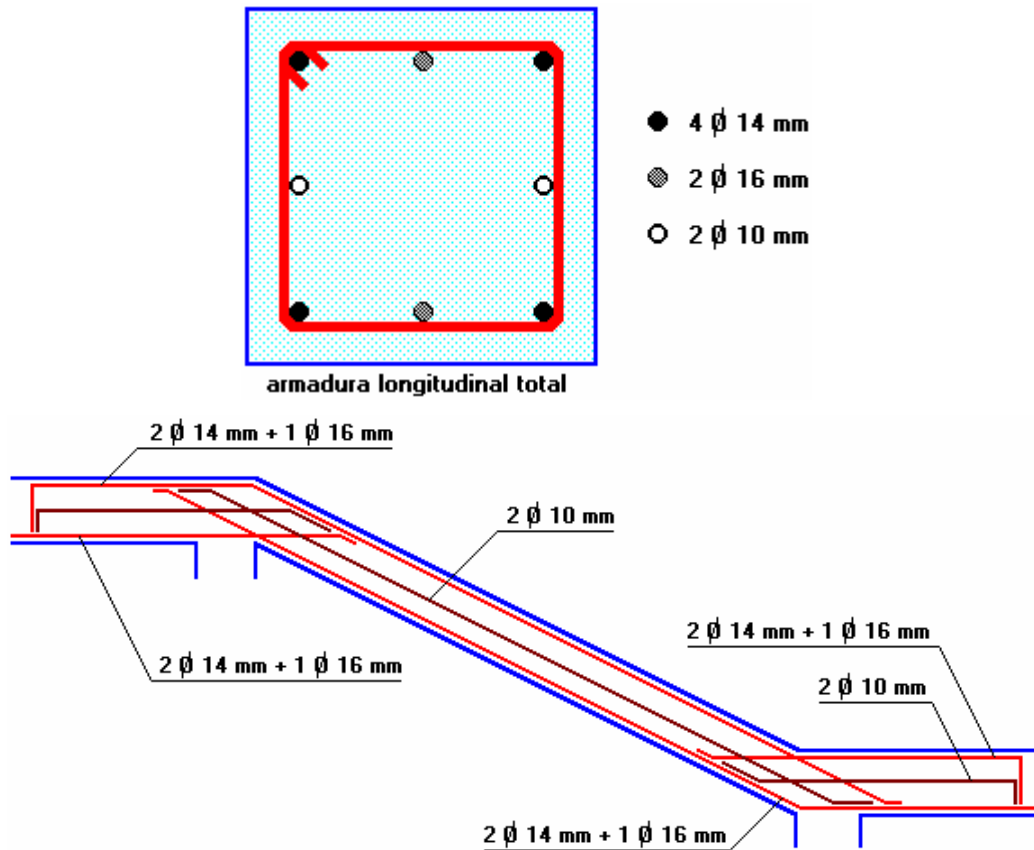
Por el momento no se escogen los diámetros comerciales de las varillas longitudinales de torsión pues este diseño debe combinarse con el diseño a flexión realizado previamente.

- **Diseño del Acero Longitudinal Combinado a Flexión y Torsión:**

Al combinar los diseños a flexión y a torsión se obtiene la siguiente distribución de las 3 capas de refuerzo:

Capa	Acero de Flexión (cm ²)	Acero de Torsión (cm ²)	Acero Total (cm ²)	Acero comercial requerido
Inferior	2.40	3 x 0.81 = 2.43	4.83	2 ϕ 14 mm + 1 ϕ 16 mm
Media		2 x 0.81 = 1.62	1.62	2 ϕ 10 mm
Superior	2.40	3 x 0.81 = 2.43	4.83	2 ϕ 14 mm + 1 ϕ 16 mm

La representación gráfica correspondiente es:



- Diseño del Acero Transversal Combinado a Corte y Torsión:**

El espaciamiento y la sección transversal de estribos del mismo diámetro a corte y torsión combinados se calcula con la siguiente expresión:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$$

Donde:

- s: espaciamiento de los estribos por corte y torsión combinados
- s₁: espaciamiento de los estribos por corte
- s₂: espaciamiento de los estribos por torsión

⇒ **Armado mínimo de estribos a todo lo largo de la viga (armado mínimo para las zonas centrales alejadas de los nudos):**

Espaciamiento mínimo por corte:



$$s_{1\min} = d/2 = 12 \text{ cm}$$

Espaciamiento mínimo por torsión:

$$s_{2\min} = (b_1 + d_1)/4 = 10.5 \text{ cm}$$

Domina la especificación mínima por torsión, que se redondea al valor menor por aspectos constructivos:

$$s_{\min} = 10 \text{ cm}$$

Se requiere como armado mínimo 1 estribo cerrado de 10 mm cada 10 cm en las zonas centrales.

⇒ **Armado mínimo de estribos en la zona próxima a los nudos:**

Espaciamiento mínimo por corte:

$$s_{1\min} = d/4 = 6 \text{ cm}$$

Espaciamiento mínimo por torsión:

$$s_{2\min} = (b_1 + d_1)/4 = 10.5 \text{ cm}$$

Domina la especificación mínima por corte

$$s_{\min} = 6 \text{ cm}$$

Se requiere como armado mínimo 1 estribo cerrado de 10 mm cada 6 cm hasta una distancia de 60 cm (2h) desde los nudos extremos.

⇒ **Diseño combinado de estribos por corte y torsión en el sector próximo a los nudos**

Para el diámetro de las varillas de 8 mm, se tiene:

$$s_1 = 49.30 \text{ cm}$$

$$s_2 = 6.47 \text{ cm}$$

Se emplea la ecuación de espaciamento para diseño combinado:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{49.30} + \frac{1}{6.47}$$

$$\frac{1}{s} = 0.11059$$

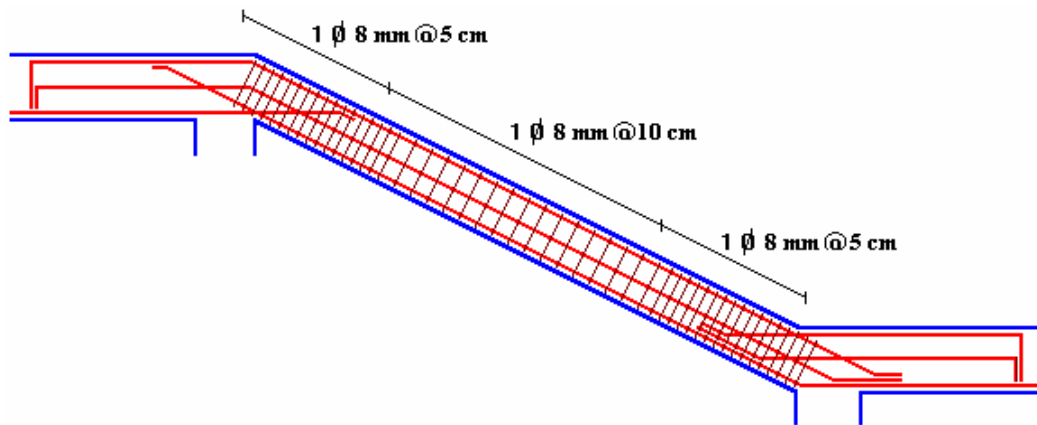
$$s = 5.12 \text{ cm}$$

Se requeriría 1 estribo cerrado de 8 mm de diámetro cada 5 cm a todo lo largo de la viga, pero el espaciamento mínimo especifica un estribo de 8 mm cada 6 cm, por lo que:

$$s_{\min} = 6 \text{ cm}$$

En el sector próximo a los nudos se requiere 1 estribo cerrado de 8 mm de diámetro cada 5 cm.

La representación gráfica de los estribos requeridos es la siguiente:



REFERENCIAS:

- 14.1 Winter G. y Nilson A., *Proyecto de Estructuras de Hormigón*, Editorial Reverté, S.A.
- 14.2 Jiménez P., García A. y Morán F., *Hormigón Armado*, Mateu Cromo, Artes Gráficas, S. A.
- 14.3 Park R. y Pauley T., *Estructuras de Concreto Reforzado*, Editorial LIMUSA S. A.
- 14.4 Nilson A., (1999), *Diseño de Estructuras de Concreto*, Mc Graw Hill.
- 14.5 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 14.6 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.



CAPÍTULO XV

CARGAS EN EDIFICACIONES DE HORMIGÓN ARMADO

15.1 CARGAS EN LAS ESTRUCTURAS:

A través de las definiciones arquitectónicas y de ingeniería de los proyectos de edificaciones es posible estimar, con un grado de precisión aceptable, la magnitud de las cargas que actuarán sobre la estructura. Los códigos de diseño organizan dichas cargas en las siguientes categorías:

- **Carga Permanente:** Carga gravitacional que siempre está actuando sobre la estructura.
- **Carga viva:** Carga gravitacional que puede actuar o puede dejar de actuar en diferentes partes de la estructura, y varía su magnitud en el tiempo desde un valor nulo hasta un valor máximo estimado.
- **Carga de Viento:** Actúa sobre todas las superficies expuestas tanto como presión o como succión, a barlovento y a sotavento.
- **Carga Sísmica:** Proviene de las ondas que actúan sobre las cimentaciones de la estructura ante eventos telúricos tectónicos y volcánicos.
- **Empuje Lateral de Suelos:** Se origina en la presión que producen los suelos sobre los elementos estructurales que contienen a dichos suelos.
- **Presión Hidrostática de Fluidos:** Está presente en sitios donde se almacenan líquidos, que actúan simultáneamente con el peso de dichos líquidos.
- **Alteraciones Geométricas Especiales:** por cambios de temperatura, retracción de fraguado, flujo plástico y asentamientos diferenciales.

Las cargas que actúan sobre las estructuras deben ser incluidas en alguna de las categorías antes mencionadas, de acuerdo a su comportamiento, para que puedan intervenir en el análisis y diseño. En caso de no ser factible esta categorización deben identificarse analogías de comportamiento con las cargas mencionadas previamente para que en las combinaciones de cargas se manejen con coeficientes de mayoración similares (*Capítulo 6, numeral 6.2: Las Cargas y las Combinaciones de Carga para el Diseño de Estructuras de Hormigón Armado*).

15.2 CARGAS PERMANENTES:

Dependiendo del elemento estructural que se deba diseñar es necesario incluir, entre otros, el efecto del peso de las losas, las vigas, las columnas, los tensores, los muros y otros elementos estructurales. Además son importantes las cargas arquitectónicas y las cargas de ingeniería que provienen de la mampostería, de los recubrimientos de piso, de los enlucidos, de las jardineras, del peso de ascensores, del peso de la ventilación mecánica, del peso de generadores y transformadores eléctricos, del cableado, de los sistemas de almacenamiento y conducción de agua, etc.



Figura 15.1: Cargas permanentes de una edificación (losas, vigas, columnas, mampostería, ventanería, recubrimientos, etc.).

En los diseños realizados en el presente libro se ha prestado especial atención al origen de estas cargas, pero debido a que cada edificación tiene sus particularidades es necesario estudiar el proyecto arquitectónico y todos los proyectos de ingeniería.

15.3 CARGAS VIVAS:

El CEC-2001 [CEC 4.1.1 - Parte 1] establece los siguientes valores de sobrecarga viva que deberán actuar sobre las estructuras:

Tabla 15.1: Cargas vivas en áreas de distinto uso u ocupación.
 (transcrito del CEC-2001 / Tabla 4.1 - Parte 1)

USO U OCUPACIÓN		Carga Uniforme (Kg/m ²)	Carga Concentrada (Kg)
CATEGORÍA	DESCRIPCIÓN		
Armerías		750	0
Áreas de reuniones	Áreas de asientos fijos	250	0
	Áreas de asientos móviles	500	0
	Escenarios y plataformas	600	0
Cornisas, marquesinas y balcones de residencias		300	0
Facilidades de salida públicas		500	0
Garajes	Almacenaje general y/o reparación	500	Cargas especiales
	Almacenaje particular	250	
Hospitales	Salas y cuartos	200	450

Bibliotecas	Salas de lectura	300	450
	Cuartos de anaqueles	600	700
Fábricas	Livianas	400	900
	Pesadas	600	1400
Oficinas		250	900
Imprentas	Cuartos de impresión	750	1200
	Cuartos de composición y linotipos	500	900
Residencias		200	0
Salas de descanso		250	0
Plataformas de revisión, grandes tribunas y graderíos		500	0
Escuelas	Aulas	200	450
Veredas y calzadas	Acceso público	1200	
Bodegas	Livianas	600	
	Pesadas	1200	
Almacenes	Minoristas	400	900
	Mayoristas	500	1400



Figura 15.2: Cargas vivas en las tribunas de un estadio.

Las cargas que recomienda el CEC-2001 son referenciales y representan valores mínimos; en caso de proyectos especiales se deberán incluir las especificaciones de carga del proyecto si éstas superan los valores mínimos previos. Por otro lado los valores de carga son función del uso y no del nombre, por lo que deberá ejercitarse criterio para la selección de la magnitud de cargas.

15.4 CARGAS SÍSMICAS:

El CEC-2001 (Parte 1 - Capítulo 12) establece la necesidad de determinar un cortante basal de diseño para las edificaciones (el cortante basal es la suma de las fuerzas horizontales equivalentes a la acción sísmica, que actúan sobre toda la estructura), y a partir de su cálculo se distribuye dicho corte en los diferentes niveles de la estructura, en los sitios donde existe concentración de masas.



Figura 15.3: Edificios afectados por la acción sísmica.

15.4.1 Criterios para la Definición de las Fuerzas Sísmicas:

El CEC-2001 fija los siguientes criterios para la determinación de la magnitud del cortante basal:

- El primer parámetro es la carga gravitacional **W** que probablemente esté presente en la estructura el momento en que ocurra el sismo de diseño. La masa asociada a la carga gravitacional será responsable de las fuerzas inerciales generadas con los sismos.
- El segundo parámetro constituye la **zona sísmica** en la que se va a construir la edificación o la estructura.

La peligrosidad sísmica de la zona de construcción de la estructura permite fijar un **factor de aceleración sísmica** mínima (**Z**) de la roca que transmite las ondas del evento telúrico; esta aceleración mínima se establece como una fracción de la gravedad. En el CEC-2001, el valor de **Z** está comprendido entre 0.15 y 0.40.

El producto de los dos primeros parámetros (**Z.W**) proporciona una medida referencial de la magnitud de las fuerzas inerciales básicas involucradas en la acción sísmica.

- El tercer parámetro es el **factor de importancia de la estructura (I)** que mide la necesidad de que ante un sismo muy severo, deben existir estructuras que permanezcan funcionales por ser vitales, o porque representan un peligro adicional al sismo para los habitantes, mientras que otras estructuras podrían quedar inhabilitadas parcial o totalmente. El valor de **I**, que es un factor de mayoración de la fuerza sísmica, está comprendido entre 1 y 1.5.

El resultado de aplicar el factor de importancia es que las edificaciones vitales como hospitales, servicios de bomberos, servicios de telecomunicaciones,



servicios de agua potable, etc., permanecerán funcionando luego del sismo severo. Así mismo, instalaciones peligrosas como depósitos de materiales tóxicos o explosivos, no deberían producir daños adicionales luego del sismo.

- El cuarto parámetro es el **factor de configuración estructural en planta (ϕ_P)**, que castiga a las estructuras con irregularidades en planta, aumentando las fuerzas sísmicas.
- El quinto parámetro es el **factor de configuración estructural en elevación (ϕ_E)**, que castiga a las estructuras con irregularidades en elevación.
- El sexto parámetro es el factor de reducción de la respuesta estructural **R**., que diferencia la manera de resistir las sollicitaciones sísmicas de las estructuras.

15.4.2 Procedimiento de Cálculo de las Fuerzas Sísmicas:

El CEC-2001 [CEC 5. - Parte 1] establece la siguiente mecánica para la determinación de las cargas estáticas equivalentes al sismo de diseño.

El cortante basal de las estructuras se calcula mediante la siguiente expresión [CEC 6.2.1 – Parte 1].

$$V = \left[\frac{Z \cdot I \cdot C}{R \cdot \phi_P \cdot \phi_E} \right] \cdot W \quad \text{Ecuación (15.1)}$$

Donde:

- V: cortante basal de diseño
W: carga gravitacional que está presente en la estructura cuando actúa el sismo de diseño
Z: factor de peligrosidad sísmica de la zona
I: factor de importancia de la edificación
C: coeficiente de suelo (interacción suelo – estructura)
R: factor de reducción de la fuerza sísmica
 ϕ_P : factor de configuración estructural en planta
 ϕ_E : factor de configuración estructural en elevación

a. Carga Gravitacional Presente el Momento del Sismo:

La carga gravitacional involucrada en el sismo generalmente está conformada por la totalidad de la carga permanente y una fracción de la carga viva.

EJEMPLO 15.1:

Estimar la carga gravitacional **W** que participará en los sismos para un edificio de residencias.

Solución:

Ante la presencia del sismo de diseño se debe esperar la presencia de la totalidad de la carga permanente y una pequeña fracción de la carga viva.

$$W = D + 0.20L$$



Donde:

W: carga gravitacional que actúa en la estructura durante el sismo

D: carga permanente

L: carga viva

La expresión anterior indica que para la estructura analizada, durante el sismo de diseño, probablemente la edificación tenga una sobrecarga del orden del 20% de la carga viva de diseño. La probabilidad de que simultáneamente se produzca el sismo de diseño y que la estructura tenga su máxima carga viva es sumamente baja.

Un edificio de oficinas posiblemente tenga un nivel de cargas gravitacionales similar al de un edificio residencial.

Es muy importante definir el porcentaje de la carga viva que probablemente esté presente durante el sismo de diseño, valor que debería basarse en la carga viva más frecuente.

Hay estructuras, como los reservorios de agua o los tanques de almacenamiento de combustibles, en las que la carga viva del peso del líquido contenido debe ser tomada en un 100%, pues su probabilidad de presencia durante el sismo severo de diseño es muy alta. En esos casos, una expresión más adecuada para definir la carga gravitacional involucrada en el sismo sería:

$$W = D + L$$

b. Factor Z de Zona Sísmica:

El CEC-2001 [CEC 5.2] zonifica al país en cuatro tipos de sectores, de acuerdo al riesgo sísmico. La aceleración base de la roca base para las estructuras se define en función de la zona del país en que se ubicará la estructura, y se expresa como una fracción de la aceleración de la gravedad.

Tabla 15.2: Factor Z de zona sísmica.
(transcrito del CEC-2001 / Tabla 4.1 - Parte 1)

Zona Sísmica	I	II	III	IV
Valor Factor Z	0.15	0.25	0.30	0.40

A continuación se presenta el mapa de zonificación de la peligrosidad sísmica del Ecuador, relacionado con la tabla anterior.

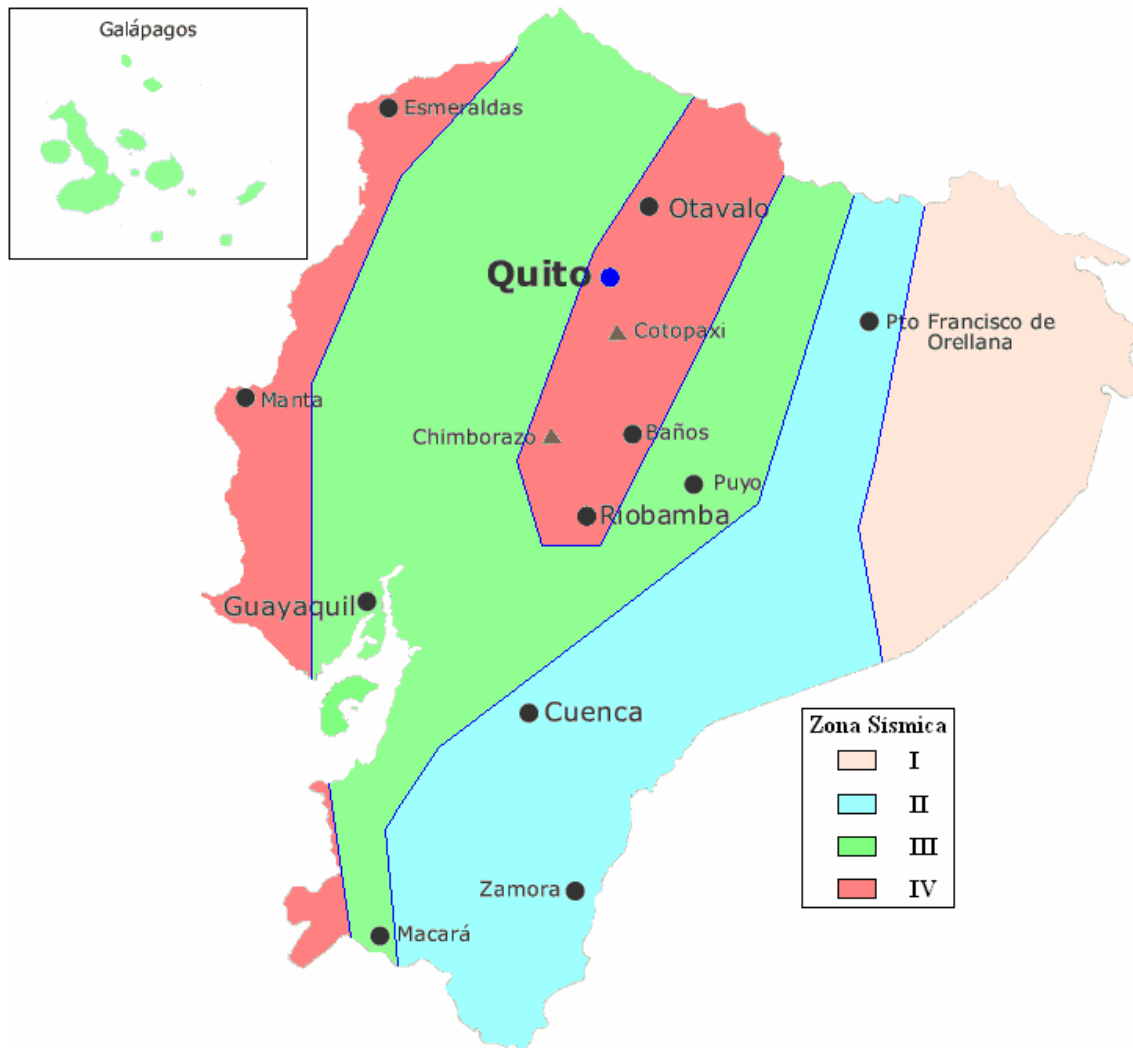


Figura 15.3: Zonificación sísmica para el Ecuador.
 (tomado del CEC-2001 / Figura 1 - Parte 1)

El contacto de la Placa Sudamericana (arriba) con la Placa de Nazca (debajo) genera una cantidad apreciable de sismos de gran magnitud en el Océano Pacífico, próximo a las costas de Ecuador, lo que provoca que la peligrosidad sísmica de la parte occidental de la costa sea sumamente alta (zona tipo IV). Así mismo, luego de atravesar el pliegue de la cordillera occidental de los andes, entre la cordillera oriental y la cordillera central se produce un repliegue de la corteza con la correspondiente liberación de esfuerzos, donde la peligrosidad sísmica también es alta. Al alejarse estas 2 zonas críticas, la peligrosidad sísmica va disminuyendo progresivamente (zonas tipo III, tipo II y tipo I).

c. Factor de Importancia de la Estructura:

El CEC-2001 ^[CEC 5.4] recomienda los siguientes criterios para fijar el factor de importancia mínimo.



Tabla 15.3: Factor de importancia mínimo para edificaciones.

(transcrito del CEC-2001 / Tabla 4.1 - Parte 1)

Categoría	Tipo de Uso, destino e importancia	Factor I
Edificaciones esenciales y/o peligrosas	Hospitales, clínicas, centros de salud o de emergencia sanitaria. Instalaciones militares, de policía, bomberos, defensa civil. Garajes o estacionamientos para vehículos y aeronaves que atienden emergencias. Torres de control aéreo. Estructuras de centros de telecomunicaciones u otros centros de atención de emergencias. Estructuras que albergan equipos de generación y distribución eléctrica. Tanques u otras estructuras utilizadas para depósito de agua u otras sustancias anti-incendio. Estructuras que albergan depósitos tóxicos, explosivos, químicos u otras sustancias peligrosas.	1.5
Estructuras de ocupación especial	Museos, iglesias, escuelas y centros de educación o deportivos que albergan más de trescientas personas. Todas las estructuras que albergan más de cinco mil personas. Edificios públicos que requieren operar continuamente.	1.3
Otras estructuras	Todas las estructuras de edificación y otras que no clasifican dentro de las categorías anteriores.	1.0

d. Coeficiente de Interacción Suelo-Estructura:

El CEC-2001 diferencia 4 tipos de suelos de cimentación, y especifica los siguientes parámetros para definir la geología local **S** y los perfiles de suelo **Cm** [CEC 5.1 – Parte 1]:

Tabla 15.4: Coeficiente de tipo de suelo.

(transcrito del CEC-2001 / Tabla 4.1 - Parte 1)

Perfil Tipo	Descripción	S	Cm
S1	Roca o suelo firme	1.0	2.5
S2	Suelos intermedios	1.2	3.0
S3	Suelos blandos y estrato profundo	1.5	2.8
S4	Condiciones especiales de suelo	2.0	2.5

El coeficiente de interacción suelo-estructura **C** debe calcularse con la siguiente expresión:

$$C = \frac{1.25 S^S}{T} \quad \text{Ecuación (15.2)}$$

Donde:

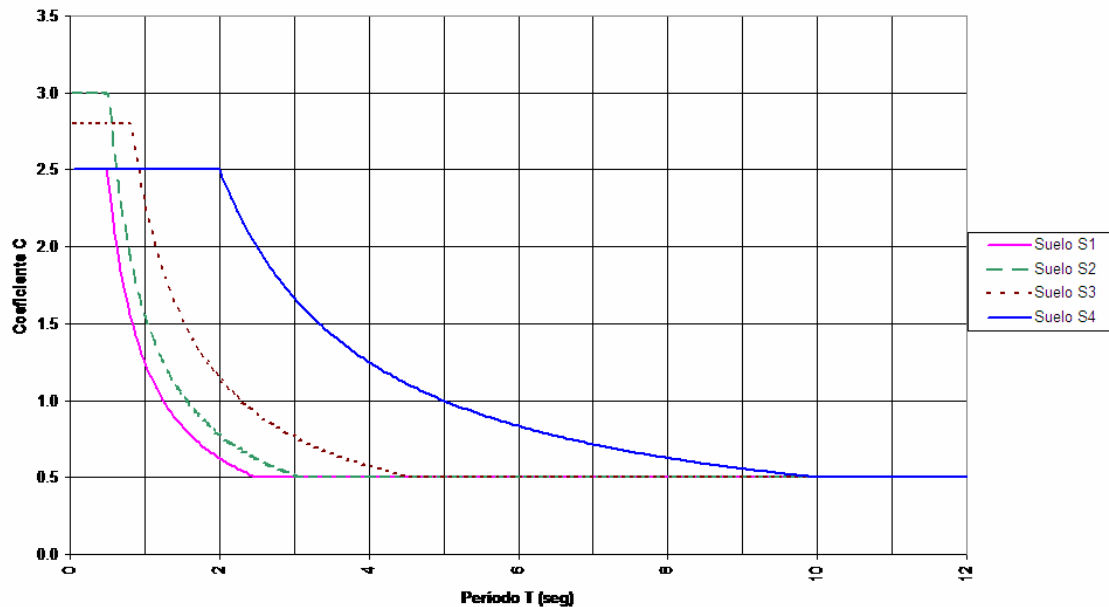
S: coeficiente de la geología local

T: período fundamental de vibración de la estructura

El valor de **C**, una vez cuantificado con la expresión previa, no debe ser menor de **0.5** ni requiere superar el valor de **Cm** de la tabla.

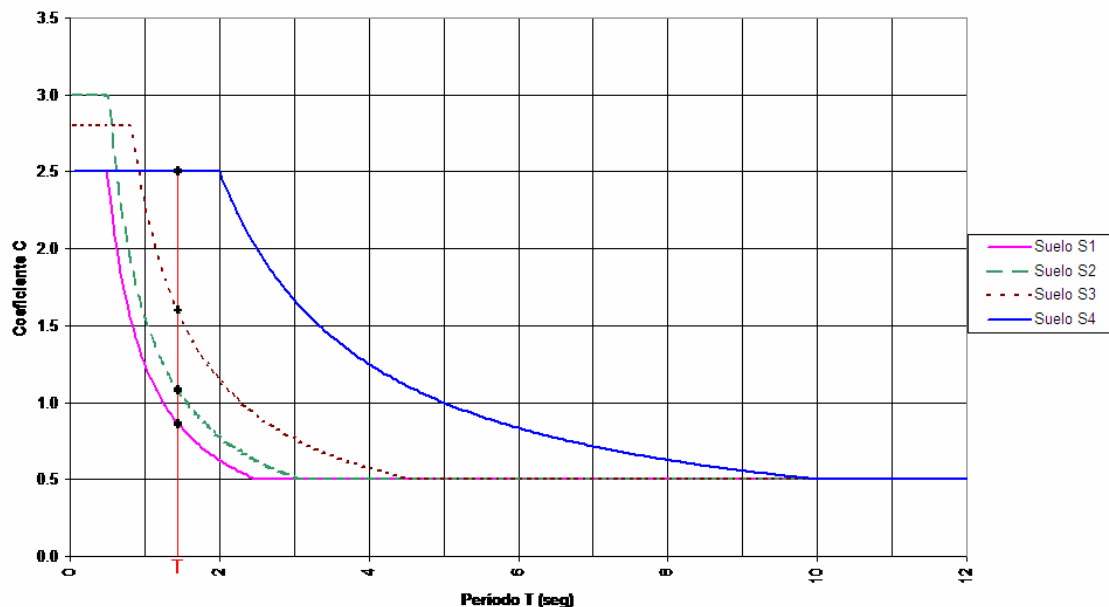
A continuación se presenta un diagrama que resume los valores del coeficiente **C** de interacción suelo-estructura:

Coefficiente de Interacción Suelo-Estructura



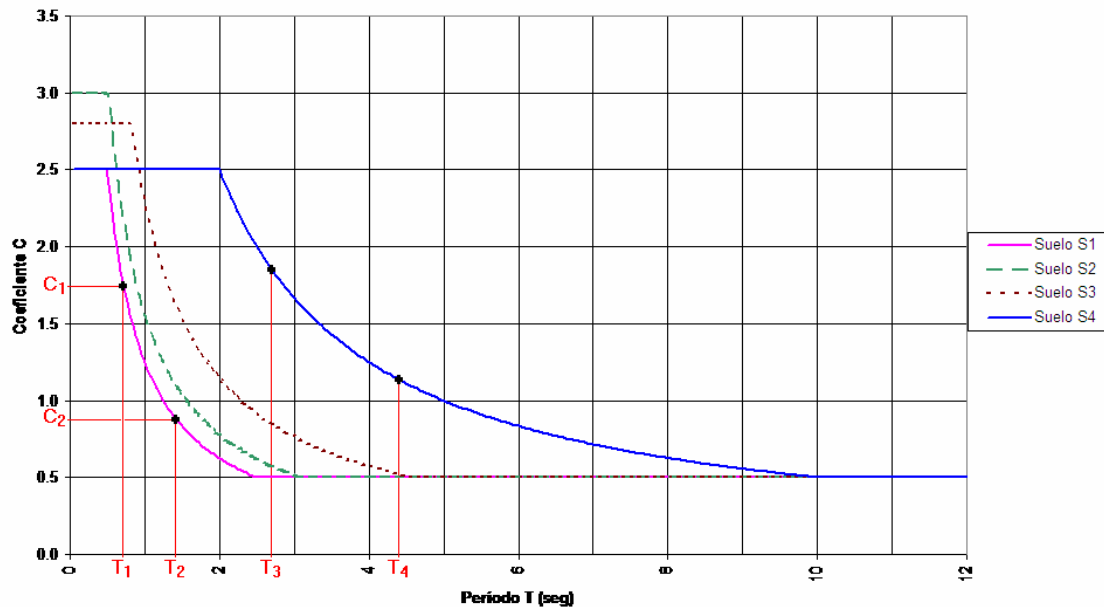
Para un mismo período de vibración de la estructura, los suelos de cimentación más competentes generalmente definen un coeficiente de interacción suelo-estructura menor, y por consiguiente las fuerzas sísmicas que actúan sobre la estructura también son menores.

Coefficiente de Interacción Suelo-Estructura



Adicionalmente, las estructuras con período natural de vibración alto, al interactuar con cualquier tipo de suelo generan menores solicitaciones sísmicas que aquellas estructuras con período natural de vibración bajo (la parte derecha de los 4 diagramas presentan ramales con ordenadas decrecientes para valores incrementales de T).

Coefficiente de Interacción Suelo-Estructura



El período fundamental de vibración de la estructura puede calcularse de manera bastante cercana a la realidad a través de modelos dinámicos, o de manera aproximada con cualquiera de los 2 métodos siguientes:

Método 1:

Para edificaciones, **T** puede determinarse de manera aproximada con la siguiente expresión:

$$T = C_1 \cdot (h_n)^{3/4} \quad \text{Ecuación (15.3)}$$

Donde:

- h_n : Altura máxima de la edificación de **n** pisos, medida desde la base de la estructura
- C_1 : coeficiente del tipo de edificación que vale **0.09** para pórticos de acero, **0.08** para pórticos espaciales de hormigón armado, y **0.06** para pórticos espaciales de hormigón armado con muros estructurales o con diagonales, y **0.06** para otras estructuras.

Método 2:

El período fundamental de vibración **T** [CEC 6.2.6.2 – Parte 1] de la edificación puede ser calculado empleando las propiedades estructurales de los elementos resistentes, mediante un análisis dinámico adecuadamente sustentado.

Como alternativa al análisis dinámico, el período puede obtenerse mediante la siguiente expresión, basada en las deformaciones de un análisis estático:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (w_i \cdot \delta_i^2)}{g \cdot \sum_{i=1}^n (\delta_i)}} \quad \text{Ecuación (15.4)}$$

Donde:

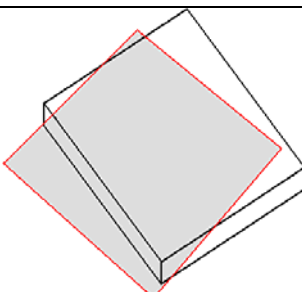
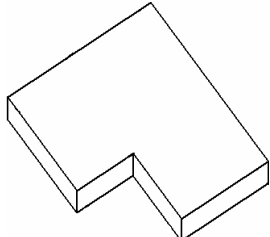
- n: número de pisos de la edificación.
- w_i : peso inercial en el piso i .
- f_i : distribución aproximada de las fuerzas laterales basada en el Procedimiento de Distribución de Fuerzas Sísmicas, o cualquiera otra distribución racional.
- δ_i : desplazamiento lateral elástico del piso i , calculado para las fuerzas laterales f_i .
- g : aceleración de la gravedad.

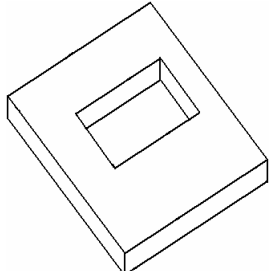
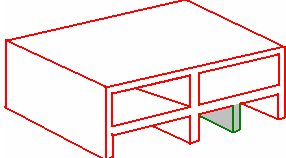
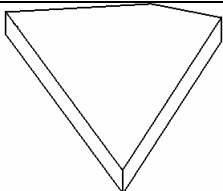
El valor de T determinado con el método 2 no debe superar en más del 30% al valor de T calculado con el método 1.

e. Coeficiente de Configuración Estructural en Planta:

El coeficiente ϕ_p de configuración estructural en planta [CEC 6.2.2 – Parte 1], se calcula en base a los factores que afectan a las irregularidades que se describen en la siguiente tabla.

Tabla 15.5: Coeficiente de configuración estructural en planta.
 (transcrito del CEC-2001 / Tabla 4.1 - Parte 1)

Tipo	Descripción de las irregularidades en planta	Gráfico	ϕ_{pi}
1	Irregularidad torsional: Existe irregularidad por torsión, cuando la máxima deriva de piso de un extremo de la estructura, calculada incluyendo la torsión accidental y medida perpendicularmente a un eje determinado, es mayor que 1.2 veces la deriva promedio de los extremos de la estructura con respecto al mismo eje de referencia.		0.9
2	Entrantes excesivos en las esquinas: La configuración de una estructura se considera irregular cuando presenta entrantes excesivos en sus esquinas. Un entrante en una esquina se considera excesivo cuando las proyecciones de la estructura, a ambos lados del entrante, son mayores que el 15% de la dimensión de la planta de la estructura en la dirección del entrante.		0.9

3	Discontinuidad en el sistema de piso: La configuración de la estructura se considera irregular cuando el sistema de piso tiene discontinuidades apreciables o variaciones significativas en su rigidez, incluyendo las causadas por aberturas, entrantes o huecos, con áreas mayores al 50% del área total del piso o con cambios de rigidez en el plano del sistema de piso de más del 50% entre niveles consecutivos.		0.9
4	Desplazamiento del plano de acción de elementos verticales: Una estructura se considera irregular cuando existen discontinuidades en los ejes verticales, tales como desplazamientos del plano de acción de elementos verticales del sistema resistente.		0.8
5	Ejes estructurales no paralelos: La estructura se considera irregular cuando los ejes estructurales no son paralelos o simétricos con respecto a los ejes ortogonales principales de la estructura.		0.9
6	Sistema de piso flexible: Cuando la relación de aspecto en planta de la edificación es mayor que 4:1, o cuando el sistema de piso no sea rígido en su propio plano, se debe revisar la condición de piso flexible en el modelo estructural.		–

Para el cálculo de ϕ_P se emplea la siguiente expresión:

$$\phi_P = \phi_{PA} \cdot \phi_{PB}$$

Ecuación (15.5)

Donde:

ϕ_{PA} : el mínimo valor de ϕ_{Pi} de cada piso i de la estructura, obtenido de la tabla previa, para las irregularidades tipo 1, 2 y 3.

ϕ_{PB} : el mínimo valor de ϕ_{Pi} de cada piso i de la estructura, obtenido de la tabla previa, para las irregularidades tipo 4 y 5.

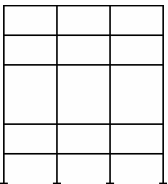
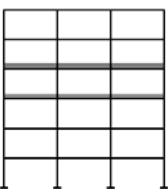
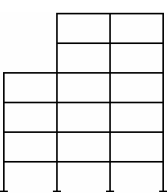
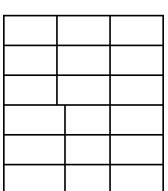
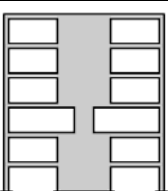
Cuando una estructura no tiene ninguna de las 5 irregularidades admisibles, en ninguno de los pisos, ϕ_P tomará un valor de 1.

Cuando una estructura no tiene ninguna de las irregularidades asociadas a un factor parcial (ϕ_{PA} o ϕ_{PB}), ese factor parcial tomará un valor de 1.

f. Coeficiente de Configuración Estructural en Elevación:

El coeficiente ϕ_E de configuración estructural en elevación [CEC 6.2.3 – Parte 1], se calcula en base a los factores que afectan a las irregularidades que se describen en la siguiente tabla.

Tabla 15.6: Coeficiente de configuración estructural en elevación.
 (transcrito del CEC-2001 / Tabla 6 - Parte 1)

Tipo	Descripción de las irregularidades en elevación	Gráfico	Pórticos espaciales y pórticos con vigas banda ϕ_{Ei}	Sistemas duales con diagonales ϕ_{Ei}
1	Piso blando (irregularidad en rigidez): La estructura se considera irregular cuando la rigidez lateral de un piso es menor que el 70% de la rigidez lateral del piso superior o menor que el 80% del promedio de la rigidez lateral de los tres pisos superiores		0.9	1.0
2	Irregularidad en la distribución de las masas: La estructura se considera irregular cuando la masa de cualquier piso es mayor que 1.5 veces la masa de uno de los pisos adyacentes, con excepción del piso de cubierta que sea más liviano que el piso inferior.		0.9	1.0
3	Irregularidad geométrica: La estructura se considera irregular cuando la dimensión en planta del sistema resistente en cualquier piso es mayor que 1.3 veces la misma dimensión en un piso adyacente, exceptuando el caso de los altillos de un solo piso.		0.9	1.0
4	Desalineamiento de ejes verticales: La estructura se considera irregular cuando existen desplazamientos en el alineamiento de elementos verticales del sistema resistente, dentro del mismo plano en el que se encuentran, y estos desplazamientos son mayores que la dimensión horizontal del elemento. Se exceptúa la aplicabilidad de este requisito cuando los elementos desplazados sólo sostienen la cubierta de la edificación sin otras cargas adicionales de tanques o equipos.		0.8	0.9
5	Piso débil – discontinuidad en la resistencia: La estructura se considera irregular cuando la resistencia del piso es menor que el 70% de la resistencia del piso inmediatamente superior (resistencia al cortante del piso, en la dirección analizada).		0.8	1.0
6	Columnas cortas: Se debe evitar la presencia de columnas cortas, tanto en el diseño como en la construcción de las estructuras.		—	—

Para el cálculo de ϕ_E se emplea la siguiente expresión:

$$\phi_E = \phi_{EA} \cdot \phi_{EB} \cdot \phi_{EC}$$

Ecuación (15.6)

Donde:

- ϕ_{EA} : el mínimo valor de ϕ_{Ei} de cada piso i de la estructura, obtenido de la tabla previa, para las irregularidades tipo 1 y 5.
- ϕ_{EB} : el mínimo valor de ϕ_{Ei} de cada piso i de la estructura, obtenido de la tabla previa, para las irregularidades tipo 2 y 3.
- ϕ_{EC} : se establece cuando existe la irregularidad tipo 4.

Cuando una estructura no tiene ninguna de las 5 irregularidades admisibles, en ninguno de los pisos, ϕ_E tomará un valor de **1**.

Cuando una estructura no tiene ninguna de las irregularidades asociadas a un factor parcial (ϕ_{EA} , ϕ_{EB} o ϕ_{EC}), ese factor parcial tomará un valor de **1**.

g. Factor de Reducción de la Fuerza Sísmica:

El CEC-2001 [CEC 6.2.5 – Parte 1] recomienda escoger el factor de reducción de la fuerza sísmica de la siguiente tabla, en función del sistema estructural utilizado:

Tabla 15.7: Coeficiente de reducción de respuesta estructural.
 (transcrito del CEC-2001 / Tabla 7 - Parte 1)

Sistema estructural	R
Sistemas de pórticos espaciales sismo-resistentes, de hormigón armado con vigas descolgadas o de acero laminado en caliente, con muros estructurales de hormigón armado (sistemas duales).	12
Sistemas de pórticos espaciales sismo-resistentes, de hormigón armado con vigas descolgadas o de acero laminado en caliente.	10
Sistemas de pórticos espaciales sismo-resistentes, de hormigón armado con vigas banda y muros estructurales de hormigón armado (sistemas duales).	10
Sistemas de pórticos espaciales sismo-resistentes, de hormigón armado con vigas descolgadas y diagonales rigidizadoras.	10
Sistemas de pórticos espaciales sismo-resistentes, de hormigón armado con vigas banda y diagonales rigidizadoras.	9
Sistemas de pórticos espaciales sismo-resistentes, de hormigón armado con vigas banda.	8
Estructuras de acero con elementos armados de placas o con elementos de acero conformados en frío. Estructuras de aluminio.	7
Estructuras de madera	7
Estructuras de mampostería reforzada o confinada.	5
Estructuras con muros portantes de tierra reforzada o confinada.	3

El factor de reducción de la fuerza sísmica **R** tiene 3 componentes:

- **R_μ**: Factor de reducción por ductilidad.
- **R_Ω**: Factor de reducción por sobrerresistencia.
- **R_R**: Factor de reducción por redundancia

De modo que **R** se calcula con la siguiente expresión:

$$R = R_{\mu} \cdot R_{\Omega} \cdot R_R$$

Ecuación (15.7)



15.4.3 Procedimiento de Distribución de las Fuerzas Sísmicas:

Cuando no se realiza un análisis dinámico, el CEC-2001 [CEC 6.3 - Parte 1] fija una distribución de las fuerzas sísmicas que aproxima a la combinación de los 2 primeros modos de vibración de la estructura, con un dominio del primer modo.

Para el efecto se aplica las siguientes expresiones [CEC 6.3.1 - Parte 1]:

$$V = F_t + \sum_{i=1}^n f_i$$

Ecuación (15.8)

$$F_t = 0.07 T \cdot V$$

Ecuación (15.9)

Donde:

- f_i : fuerza que se aplica en el piso i , como parte de un sistema de fuerzas que actúa sobre cada uno de los pisos, que modela el efecto del primer modo de vibración de la estructura.
- F_t : fuerza concentrada que se aplica en la parte más alta de la estructura, adicional al sistema de fuerzas tipo f_i , que modela el efecto del segundo modo de vibración de la estructura.
- n : número de pisos de la estructura
- T : período de vibración de la edificación, empleado en el cálculo del cortante basal.
- V : cortante basal

En primer lugar debe calcularse F_t , que no necesita exceder de **0.25 V**, y puede considerarse nulo cuando T es menor que **0.7 seg.**

La parte restante del corte basal ($V - F_t$) debe distribuirse sobre toda la estructura mediante fuerzas en cada uno de los niveles [CEC 6.3.1.1 - Parte 1], incluyendo el nivel n , basándose en la siguiente expresión:

$$f_x = \frac{(w_x \cdot h_x) \cdot (V - F_t)}{\sum_{i=1}^n (w_i \cdot h_i)}$$

Ecuación (15.10)

Donde:

- f_x : fuerza en el nivel x de la edificación.
- w_x : peso asignado al nivel x de la edificación
- w_i : peso asignado al nivel i de la edificación

Para localizar espacialmente a las fuerzas horizontales equivalentes a la acción sísmica, las masas deberán ubicarse desplazadas del centro de masas de piso un 5% de la máxima dimensión de piso perpendicular a la acción de las fuerzas [CEC 6.4.1 - Parte 1], para considerar una torsión accidental.



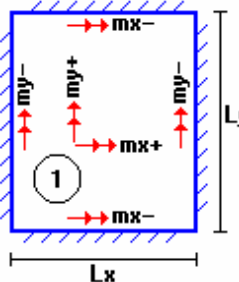
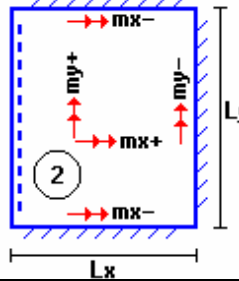
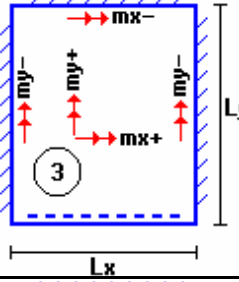
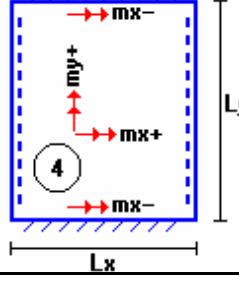
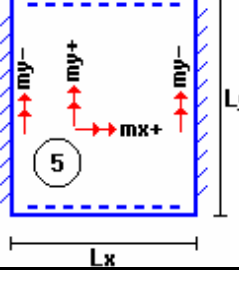
REFERENCIAS:

- 15.1 ACI 318S-08, (2008), *Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural y Comentario*, American Concrete Institute.
- 15.2 CEC-2001, (2001), *Código Ecuatoriano de la Construcción*, Instituto Ecuatoriano de Normalización.



TABLAS PARA DISEÑO DE LOSAS MACIZAS RECTANGULARES
SUSTENTADAS PERIMETRALMENTE, SOMETIDAS A CARGAS
DISTRIBUIDAS UNIFORMES

(m = 0.20)

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	147 512 214 512 214	178 587 257 538 214	211 664 303 556 214	244 736 347 563 214	273 794 386 563 214	293 829 411 563 214
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	186 549 225 611 269	239 652 286 669 282	304 772 359 721 287	379 903 443 762 287	460 1030 532 788 287	536 1150 613 795 287
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	186 611 269 549 225	213 673 306 561 225	241 732 343 566 225	266 782 376 566 225	286 819 402 566 225	298 838 418 566 225
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x-} m_{x+}	222 217 697 319	301 287 795 353	410 382 900 385	557 508 1010 408	748 666 1100 414	976 850 1180 414
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x+}	222 697 319 217	243 742 348 217	264 781 374 217	281 813 397 217	294 834 413 217	301 842 422 217



TABLAS PARA DISEÑO DE LOSAS MACIZAS RECTANGULARES
SUSTENTADAS PERIMETRALMENTE, SOMETIDAS A CARGAS
DISTRIBUIDAS UNIFORMES

(m = 0.20)

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	254 691 306 691 306	309 791 367 731 306	371 897 435 764 306	438 1010 508 786 306	504 1100 579 797 306	561 1180 641 797 306
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x+}	329 836 391 318	380 920 446 318	433 1000 504 318	487 1090 562 318	538 1160 617 318	581 1210 661 318
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x-} m_{x+}	329 318 836 391	424 400 923 414	546 502 1010 430	698 628 1090 433	879 774 1160 433	1079 932 1200 433
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x+}	468 443 443	571 528 449	694 629 449	838 744 449	999 871 449	1167 1000 449
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{xb-} m_{x+} m_{xb+}	324 562 143 696 909 330 434	487 692 170 805 1120 377 524	757 872 202 936 1390 429 635	1216 1130 237 1090 1750 483 767	2018 1500 269 1260 2230 531 910	3421 2060 281 1450 2810 531 1030



TABLAS PARA DISEÑO DE LOSAS MACIZAS RECTANGULARES
SUSTENTADAS PERIMETRALMENTE, SOMETIDAS A CARGAS
DISTRIBUIDAS UNIFORMES
(m = 0.20)

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	324	325	325	325	325	325
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{xb-} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{xb+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+} m_{xb-} m_{xb+}	617	895	1325	2002	3070	4725
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	617	640	657	667	672	672
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{xb+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x+} m_{xb+}	1196	1639	2270	3170	4440	6188
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	1196	1303	1404	1492	1561	1607



TABLAS PARA DISEÑO DE LOSAS MACIZAS RECTANGULARES
SUSTENTADAS PERIMETRALMENTE, SOMETIDAS A CARGAS
DISTRIBUIDAS UNIFORMES
(m = 0.20)

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x+} m_{xb+}	1372 343 821 1090	1970 408 932 1270	2911 491 1060 1480	4448 592 1200 1720	7076 713 1370 2000	11840 855 1530 2300
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{yb+} m_{x+}	1372 821 1090 343	1439 884 1150 352	1501 950 1200 358	1553 1020 1240 362	1594 1080 1280 365	1620 1150 1300 366
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{x-} m_{xb-}	4697 1440 2970 1440 2970	5733 1680 3310 1500 3240	6973 1990 3670 1570 3520	8415 2380 4050 1640 3780	10010 2860 4420 1700 4000	11620 3430 4760 1740 4150

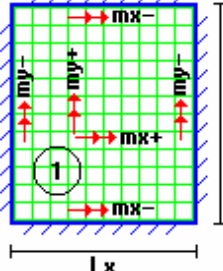
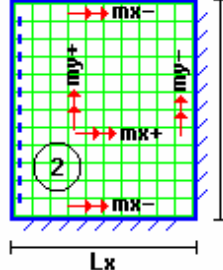
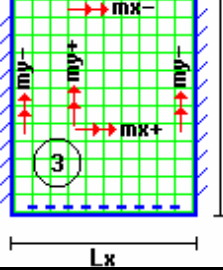
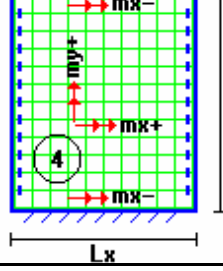
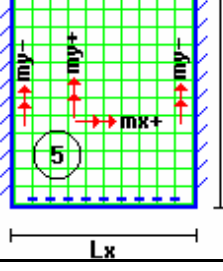


Simbología:

δ :	valor adimensional para determinar la deflexión máxima en la losa
Δ :	deflexión máxima en la losa
L_x :	longitud más corta de la losa rectangular
L_y :	longitud más larga de la losa rectangular
E :	módulo de elasticidad del hormigón
h :	espesor de la losa maciza
q :	carga uniformemente distribuida por unidad de superficie de losa
m_{y-} :	valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo alrededor del eje y
m_{yb-} :	valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje y
m_{y+} :	valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de tramo alrededor del eje y
m_{yb+} :	valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje y
m_{x-} :	valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo alrededor del eje x
m_{xb-} :	valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje x
m_{x+} :	valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de tramo alrededor del eje x
m_{xb+} :	valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje x
M_{y-} :	momento flector negativo máximo alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
M_{yb-} :	momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
M_{y+} :	momento flector positivo máximo alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
M_{yb+} :	momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
M_{x-} :	momento flector negativo máximo alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
M_{xb-} :	momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
M_{x+} :	momento flector positivo máximo alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
M_{xb+} :	momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje x , por metro de ancho de losa

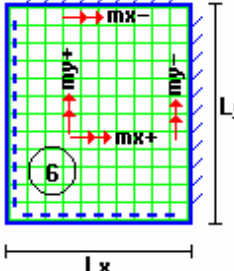
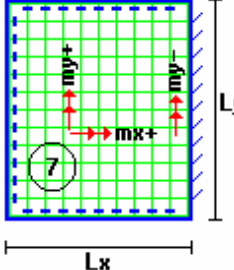
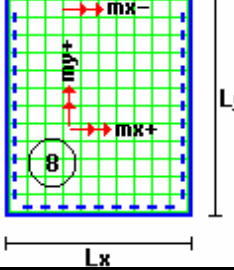
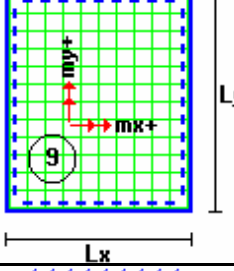
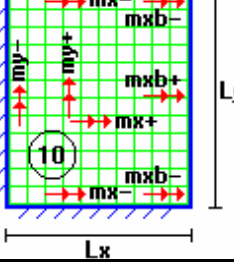


TABLAS PARA DISEÑO DE LOSAS NERVADAS RECTANGULARES
SUSTENTADAS PERIMETRALMENTE, SOMETIDAS A CARGAS
DISTRIBUIDAS UNIFORMES

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	200	241	281	315	336	339
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	265	347	443	545	635	691
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	265	297	322	339	345	339
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x-} m_{x+}	323	456	644	894	1191	1479
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x+}	323	340	351	354	348	335



TABLAS PARA DISEÑO DE LOSAS NERVADAS RECTANGULARES
SUSTENTADAS PERIMETRALMENTE, SOMETIDAS A CARGAS
DISTRIBUIDAS UNIFORMES

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{x+}	406 839 428 839 428	489 980 525 857 409	572 1120 621 852 369	644 1240 704 827 310	693 1323 761 793 271	712 1353 782 764 238
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x+}	569 1118 616 433	630 1220 687 375	681 1303 746 311	715 1360 785 269	729 1382 802 252	718 1364 790 238
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x-} m_{x+}	569 433 1118 616	754 587 1225 654	979 775 1304 659	1230 984 1334 615	1469 1183 1308 527	1644 1329 1246 434
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x+}	969 765 765	1170 932 737	1371 1101 665	1550 1250 547	1684 1361 439	1749 1416 397
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{xb-} m_{x+} m_{xb+}	355 542 113 698 898 344 471	567 664 128 800 1132 384 596	944 834 125 925 1452 432 766	1637 1084 86 1086 1886 490 993	2935 1494 14 1298 2456 563 1278	5348 2205 7 1552 3131 639 1575



TABLAS PARA DISEÑO DE LOSAS NERVADAS RECTANGULARES
SUSTENTADAS PERIMETRALMENTE, SOMETIDAS A CARGAS
DISTRIBUIDAS UNIFORMES

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	355	337	327	326	326	326
			698	746	791	829	853	856
			898	877	859	858	857	856
			344	374	403	428	442	445
			471	457	446	445	445	445
			542	543	542	538	532	522
			113	122	124	125	127	127
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{xb-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{xb+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x-} m_{xb-} m_{x+} m_{xb+}	789	1230	1768	3216	5298	8520
			768	943	1196	1584	2201	3133
			126	113	87	42	7	4
			914	1039	1194	1388	1607	1799
			1390	1721	2145	2668	3254	3760
			484	538	603	681	758	800
			807	1000	1241	1527	1816	1977
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	789	758	718	679	674	672
			914	990	1074	1159	1233	1278
			1390	1369	1335	1296	1287	1285
			484	536	593	651	701	733
			807	793	771	744	739	737
			768	775	780	780	775	764
			126	151	165	176	174	179
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{xb+} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{y+} m_{x+} m_{xb+}	1937	2866	4277	6355	9192	12510
			1191	1486	1912	2522	3343	4292
			88	52	16	0	0	0
			698	770	998	907	916	8187
			1406	1665	1941	2183	2284	2093
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{yb+} m_{x-} m_{x+}	1937	1941	1895	1800	1676	1620
			698	776	870	983	1108	1225
			1406	1430	1426	1394	1341	1309
			1191	1189	1196	1208	1214	1208
			88	138	196	239	267	262



TABLAS PARA DISEÑO DE LOSAS NERVADAS RECTANGULARES
SUSTENTADAS PERIMETRALMENTE, SOMETIDAS A CARGAS
DISTRIBUIDAS UNIFORMES

Losa	Fórmula	Coef	Lx / Ly					
			1.00	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$ $M_{xb+} = 0.0001 q \cdot m_{xb+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{x+} m_{xb+}	2005 337 1078 1533	3182 368 1150 1945	5274 393 1248 2521	9241 409 1384 3353	17450 415 1580 4622	36620 409 1873 6703
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y+} = 0.0001 q \cdot m_{y+} \cdot L_x^2$ $M_{yb+} = 0.0001 q \cdot m_{yb+} \cdot L_x^2$ $M_{x+} = 0.0001 q \cdot m_{x+} \cdot L_x^2$	δ m_{y+} m_{yb+} m_{x+}	2005 1078 1533 337	1908 1128 1482 369	1795 1187 1422 392	1678 1250 1357 396	1654 1304 1336 407	1651 1334 1334 406
	$\Delta = 0.0001 q \cdot \delta L_x^4 / (E \cdot h^3)$ $M_{y-} = 0.0001 q \cdot m_{y-} \cdot L_x^2$ $M_{yb-} = 0.0001 q \cdot m_{yb-} \cdot L_x^2$ $M_{x-} = 0.0001 q \cdot m_{x-} \cdot L_x^2$ $M_{xb-} = 0.0001 q \cdot m_{xb-} \cdot L_x^2$	δ m_{y-} m_{yb-} m_{x-} m_{xb-}	11330 1720 3528 1720 3528	13660 2026 4113 1758 3621	15920 2358 4692 1760 3626	17770 2709 5191 1734 3566	18820 3095 5527 1705 3503	18680 3572 5625 1699 3505



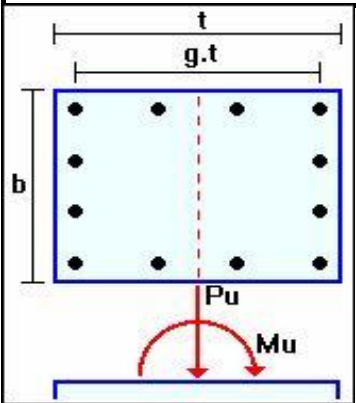
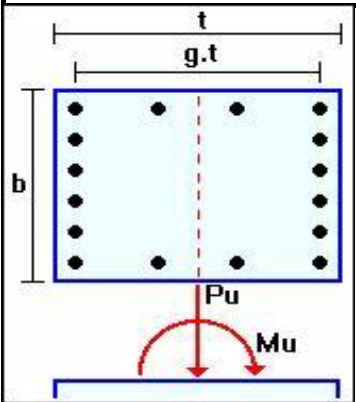
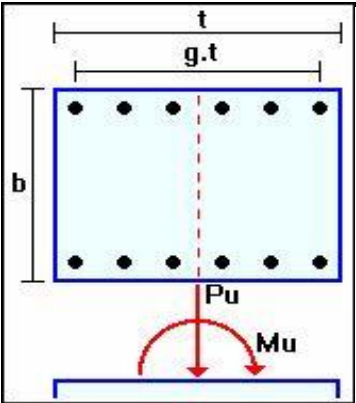
Simbología:

δ :	valor adimensional para determinar la deflexión máxima en la losa
k :	división entre la distancia entre nervios y el ancho de los nervios (b / b_o)
Δ :	deflexión máxima en la losa
L_x :	longitud más corta de la losa rectangular
L_y :	longitud más larga de la losa rectangular
E :	módulo de elasticidad del hormigón
h :	espesor de la losa maciza equivalente en inercia a la losa nervada
q :	carga uniformemente distribuida por unidad de superficie de losa
m_{y-} :	valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo alrededor del eje y
m_{yb-} :	valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje y
m_{y+} :	valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de tramo alrededor del eje y
m_{yb+} :	valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje y
m_{x-} :	valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo alrededor del eje x
m_{xb-} :	valor adimensional para calcular momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje x
m_{x+} :	valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de tramo alrededor del eje x
m_{xb+} :	valor adimensional para calcular momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje x
M_{y-} :	momento flector negativo máximo alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
M_{yb-} :	momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
M_{y+} :	momento flector positivo máximo alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
M_{yb+} :	momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje y , por metro de ancho de losa
M_{x-} :	momento flector negativo máximo alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
M_{xb-} :	momento flector negativo máximo de borde libre alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
M_{x+} :	momento flector positivo máximo alrededor del eje x , por metro de ancho de losa
M_{xb+} :	momento flector positivo máximo de borde libre alrededor del eje x , por metro de ancho de losa

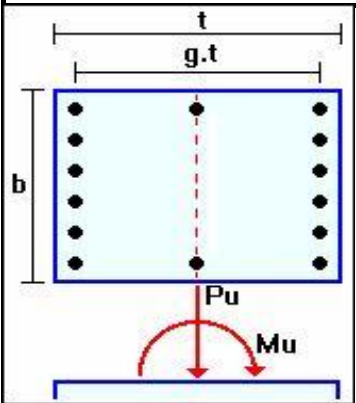
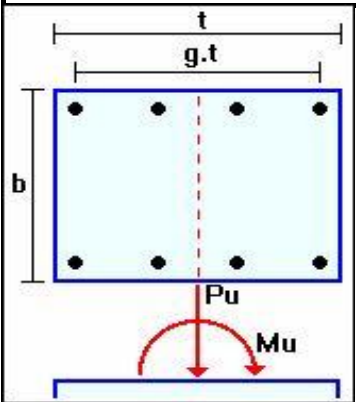
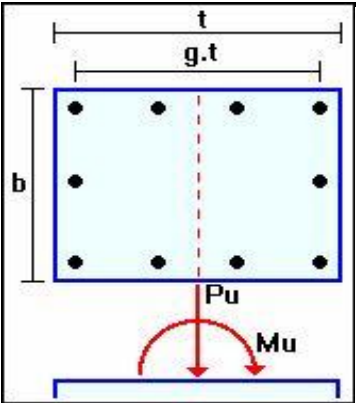
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN PARA EL DISEÑO DE COLUMNAS RECTANGULARES DE HORMIGÓN ARMADO – Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño, M.Sc.
Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

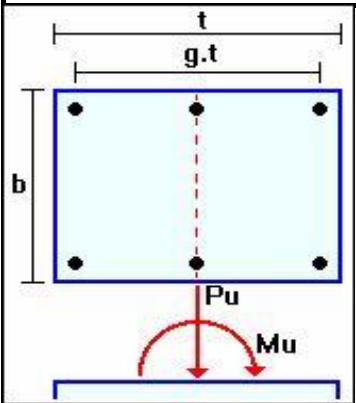
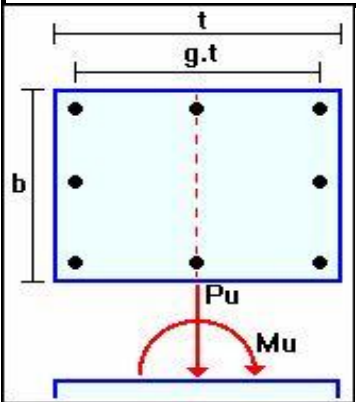
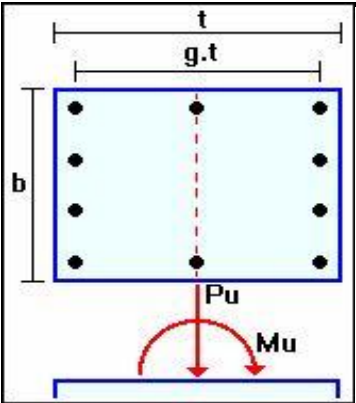
Distribución de Hierros	Fy (Kg/cm ²)	f'c (Kg/cm ²)	g	Gráficos
	4200	210	0.6	Gráfico 1
	4200	210	0.7	Gráfico 2
	4200	210	0.8	Gráfico 3
	4200	210	0.9	Gráfico 4
	4200	280	0.6	Gráfico 5
	4200	280	0.7	Gráfico 6
	4200	280	0.8	Gráfico 7
	4200	280	0.9	Gráfico 8
	4200	350	0.6	Gráfico 9
	4200	350	0.7	Gráfico 10
	4200	350	0.8	Gráfico 11
	4200	350	0.9	Gráfico 12
	4200	210	0.6	Gráfico 13
	4200	210	0.7	Gráfico 14
	4200	210	0.8	Gráfico 15
	4200	210	0.9	Gráfico 16
	4200	280	0.6	Gráfico 17
	4200	280	0.7	Gráfico 18
	4200	280	0.8	Gráfico 19
	4200	280	0.9	Gráfico 20
	4200	350	0.6	Gráfico 21
	4200	350	0.7	Gráfico 22
	4200	350	0.8	Gráfico 23
	4200	350	0.9	Gráfico 24
	4200	210	0.6	Gráfico 25
	4200	210	0.7	Gráfico 26
	4200	210	0.8	Gráfico 27
	4200	210	0.9	Gráfico 28
	4200	280	0.6	Gráfico 29
	4200	280	0.7	Gráfico 30
	4200	280	0.8	Gráfico 31
	4200	280	0.9	Gráfico 32
	4200	350	0.6	Gráfico 33
	4200	350	0.7	Gráfico 34
	4200	350	0.8	Gráfico 35
	4200	350	0.9	Gráfico 36



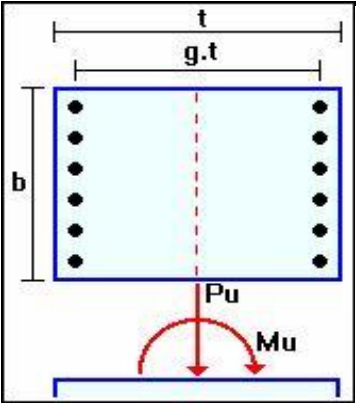
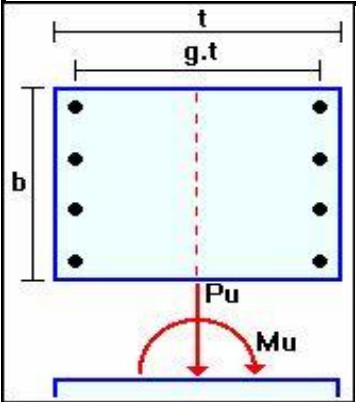
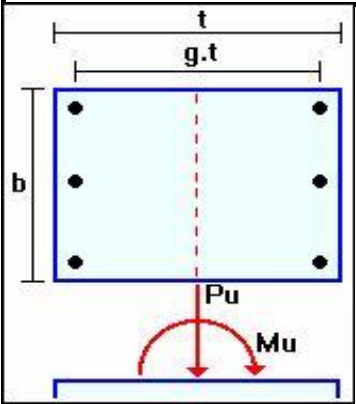
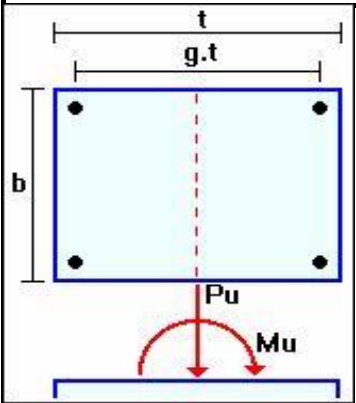
4200	210	0.6	Gráfico 37
4200	210	0.7	Gráfico 38
4200	210	0.8	Gráfico 39
4200	210	0.9	Gráfico 40
4200	280	0.6	Gráfico 41
4200	280	0.7	Gráfico 42
4200	280	0.8	Gráfico 43
4200	280	0.9	Gráfico 44
4200	350	0.6	Gráfico 45
4200	350	0.7	Gráfico 46
4200	350	0.8	Gráfico 47
4200	350	0.9	Gráfico 48
4200	210	0.6	Gráfico 49
4200	210	0.7	Gráfico 50
4200	210	0.8	Gráfico 51
4200	210	0.9	Gráfico 52
4200	280	0.6	Gráfico 53
4200	280	0.7	Gráfico 54
4200	280	0.8	Gráfico 55
4200	280	0.9	Gráfico 56
4200	350	0.6	Gráfico 57
4200	350	0.7	Gráfico 58
4200	350	0.8	Gráfico 59
4200	350	0.9	Gráfico 60
4200	210	0.6	Gráfico 61
4200	210	0.7	Gráfico 62
4200	210	0.8	Gráfico 63
4200	210	0.9	Gráfico 64
4200	280	0.6	Gráfico 65
4200	280	0.7	Gráfico 66
4200	280	0.8	Gráfico 67
4200	280	0.9	Gráfico 68
4200	350	0.6	Gráfico 69
4200	350	0.7	Gráfico 70
4200	350	0.8	Gráfico 71
4200	350	0.9	Gráfico 72



4200	210	0.6	Gráfico 73
4200	210	0.7	Gráfico 74
4200	210	0.8	Gráfico 75
4200	210	0.9	Gráfico 76
4200	280	0.6	Gráfico 77
4200	280	0.7	Gráfico 78
4200	280	0.8	Gráfico 79
4200	280	0.9	Gráfico 80
4200	350	0.6	Gráfico 81
4200	350	0.7	Gráfico 82
4200	350	0.8	Gráfico 83
4200	350	0.9	Gráfico 84
4200	210	0.6	Gráfico 85
4200	210	0.7	Gráfico 86
4200	210	0.8	Gráfico 87
4200	210	0.9	Gráfico 88
4200	280	0.6	Gráfico 89
4200	280	0.7	Gráfico 90
4200	280	0.8	Gráfico 91
4200	280	0.9	Gráfico 92
4200	350	0.6	Gráfico 93
4200	350	0.7	Gráfico 94
4200	350	0.8	Gráfico 95
4200	350	0.9	Gráfico 96
4200	210	0.6	Gráfico 97
4200	210	0.7	Gráfico 98
4200	210	0.8	Gráfico 99
4200	210	0.9	Gráfico 100
4200	280	0.6	Gráfico 101
4200	280	0.7	Gráfico 102
4200	280	0.8	Gráfico 103
4200	280	0.9	Gráfico 104
4200	350	0.6	Gráfico 105
4200	350	0.7	Gráfico 106
4200	350	0.8	Gráfico 107
4200	350	0.9	Gráfico 108



4200	210	0.6	Gráfico 109
4200	210	0.7	Gráfico 110
4200	210	0.8	Gráfico 111
4200	210	0.9	Gráfico 112
4200	280	0.6	Gráfico 113
4200	280	0.7	Gráfico 114
4200	280	0.8	Gráfico 115
4200	280	0.9	Gráfico 116
4200	350	0.6	Gráfico 117
4200	350	0.7	Gráfico 118
4200	350	0.8	Gráfico 119
4200	350	0.9	Gráfico 120
4200	210	0.6	Gráfico 121
4200	210	0.7	Gráfico 122
4200	210	0.8	Gráfico 123
4200	210	0.9	Gráfico 124
4200	280	0.6	Gráfico 125
4200	280	0.7	Gráfico 126
4200	280	0.8	Gráfico 127
4200	280	0.9	Gráfico 128
4200	350	0.6	Gráfico 129
4200	350	0.7	Gráfico 130
4200	350	0.8	Gráfico 131
4200	350	0.9	Gráfico 132
4200	210	0.6	Gráfico 133
4200	210	0.7	Gráfico 134
4200	210	0.8	Gráfico 135
4200	210	0.9	Gráfico 136
4200	280	0.6	Gráfico 137
4200	280	0.7	Gráfico 138
4200	280	0.8	Gráfico 139
4200	280	0.9	Gráfico 140
4200	350	0.6	Gráfico 141
4200	350	0.7	Gráfico 142
4200	350	0.8	Gráfico 143
4200	350	0.9	Gráfico 144

	4200	210	0.6	Gráfico 145
	4200	210	0.7	Gráfico 146
	4200	210	0.8	Gráfico 147
	4200	210	0.9	Gráfico 148
	4200	280	0.6	Gráfico 149
	4200	280	0.7	Gráfico 150
	4200	280	0.8	Gráfico 151
	4200	280	0.9	Gráfico 152
	4200	350	0.6	Gráfico 153
	4200	350	0.7	Gráfico 154
	4200	350	0.8	Gráfico 155
	4200	350	0.9	Gráfico 156
	4200	210	0.6	Gráfico 157
	4200	210	0.7	Gráfico 158
	4200	210	0.8	Gráfico 159
	4200	210	0.9	Gráfico 160
	4200	280	0.6	Gráfico 161
	4200	280	0.7	Gráfico 162
	4200	280	0.8	Gráfico 163
	4200	280	0.9	Gráfico 164
	4200	350	0.6	Gráfico 165
	4200	350	0.7	Gráfico 166
	4200	350	0.8	Gráfico 167
	4200	350	0.9	Gráfico 168
	4200	210	0.6	Gráfico 169
	4200	210	0.7	Gráfico 170
	4200	210	0.8	Gráfico 171
	4200	210	0.9	Gráfico 172
	4200	280	0.6	Gráfico 173
	4200	280	0.7	Gráfico 174
	4200	280	0.8	Gráfico 175
	4200	280	0.9	Gráfico 176
	4200	350	0.6	Gráfico 177
	4200	350	0.7	Gráfico 178
	4200	350	0.8	Gráfico 179
	4200	350	0.9	Gráfico 180
	4200	210	0.6	Gráfico 181
	4200	210	0.7	Gráfico 182
	4200	210	0.8	Gráfico 183
	4200	210	0.9	Gráfico 184
	4200	280	0.6	Gráfico 185
	4200	280	0.7	Gráfico 186
	4200	280	0.8	Gráfico 187
	4200	280	0.9	Gráfico 188
	4200	350	0.6	Gráfico 189
	4200	350	0.7	Gráfico 190
	4200	350	0.8	Gráfico 191
	4200	350	0.9	Gráfico 192

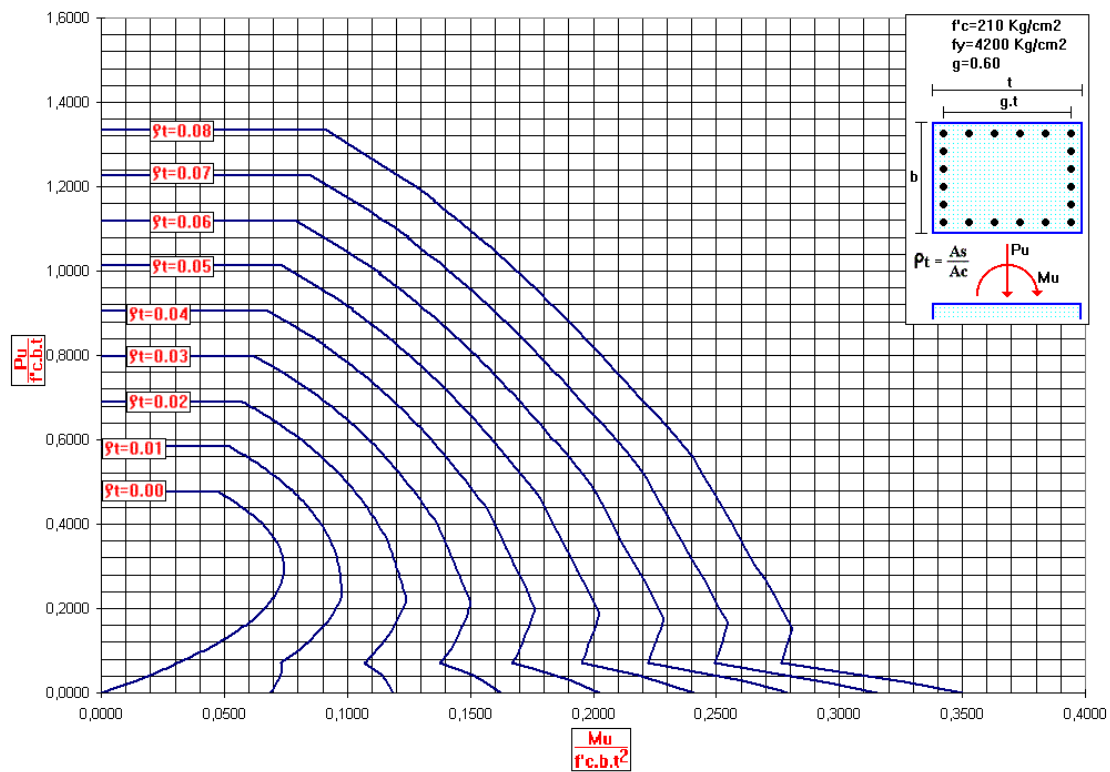


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

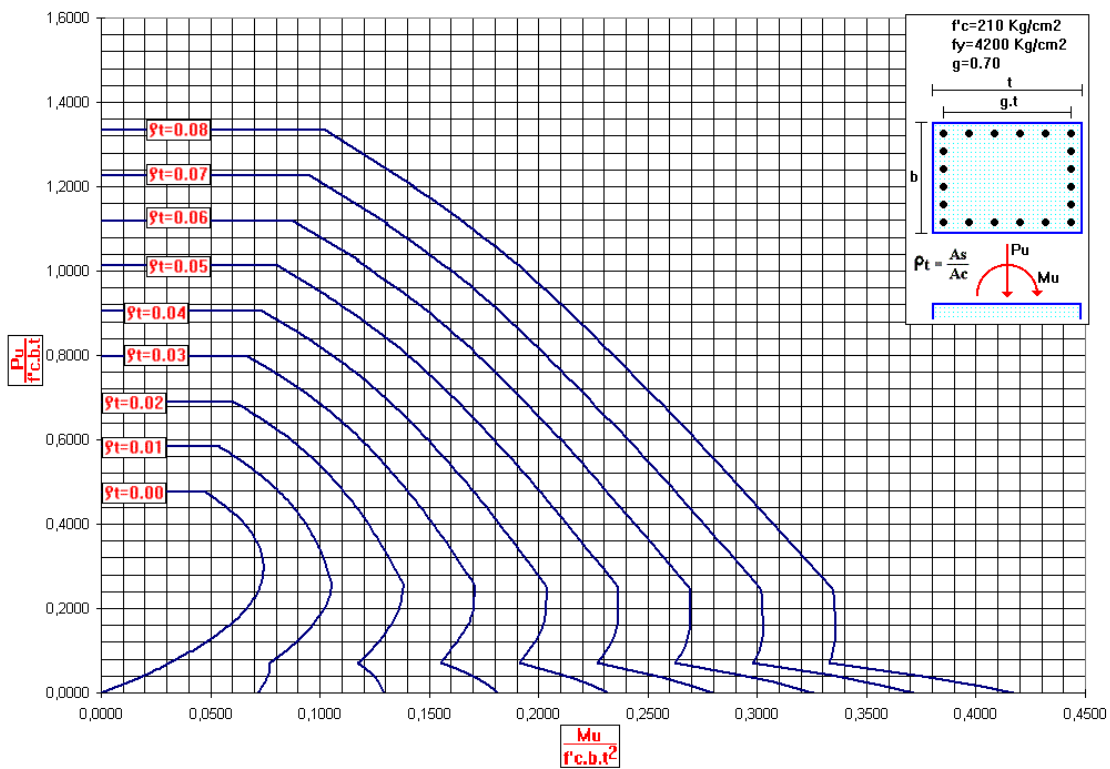
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 1)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 2)



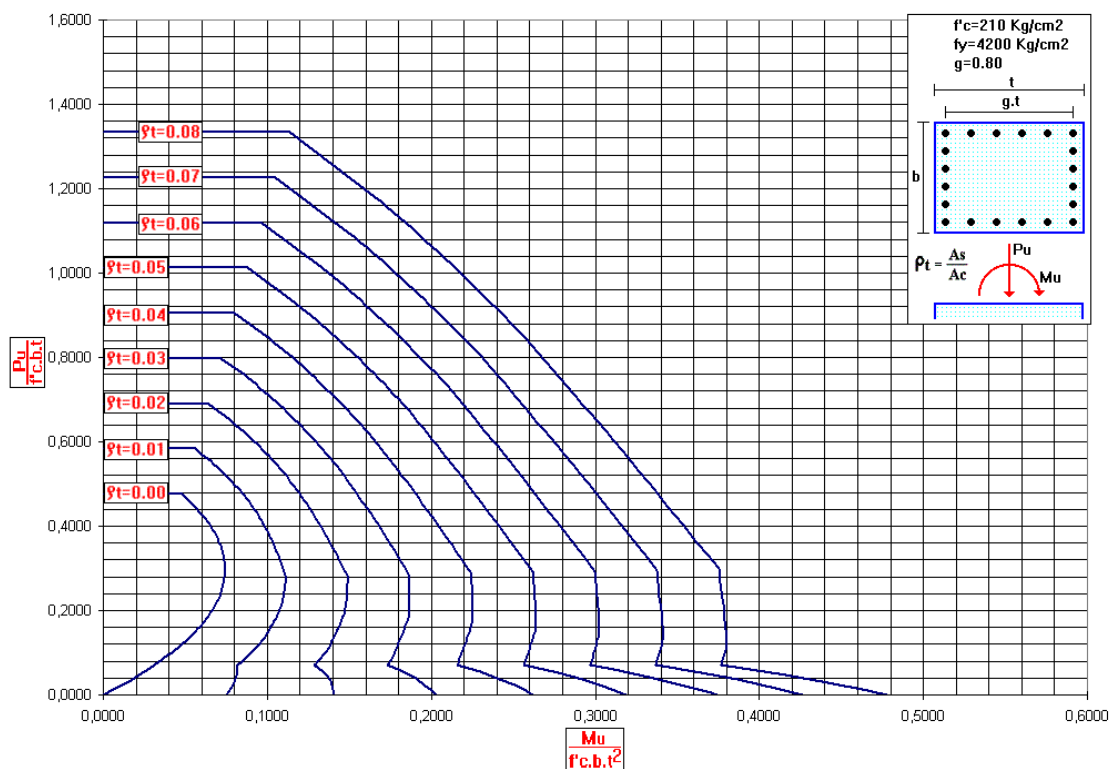


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

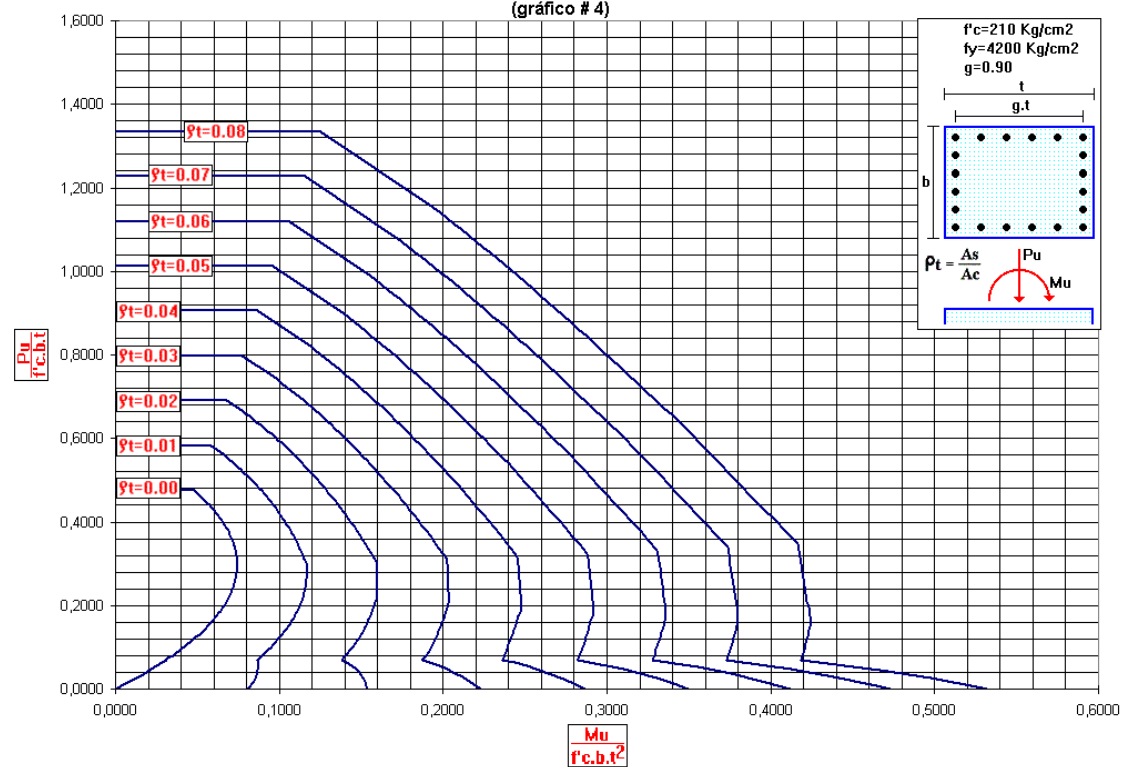
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 3)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 4)



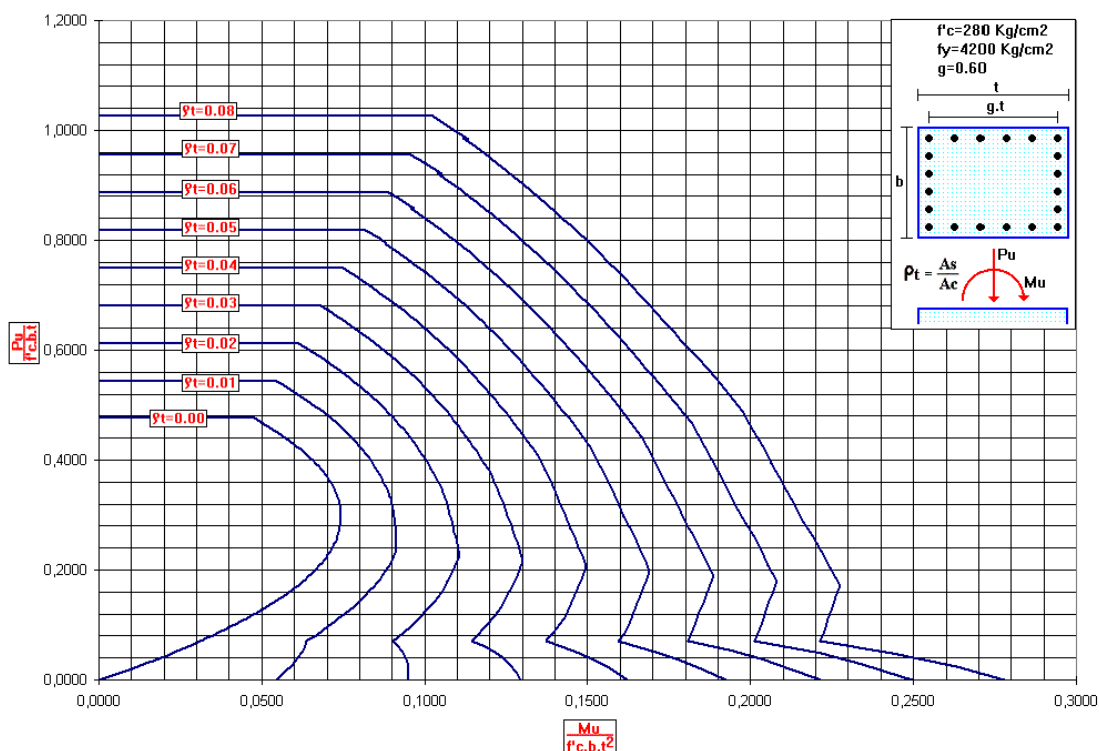


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

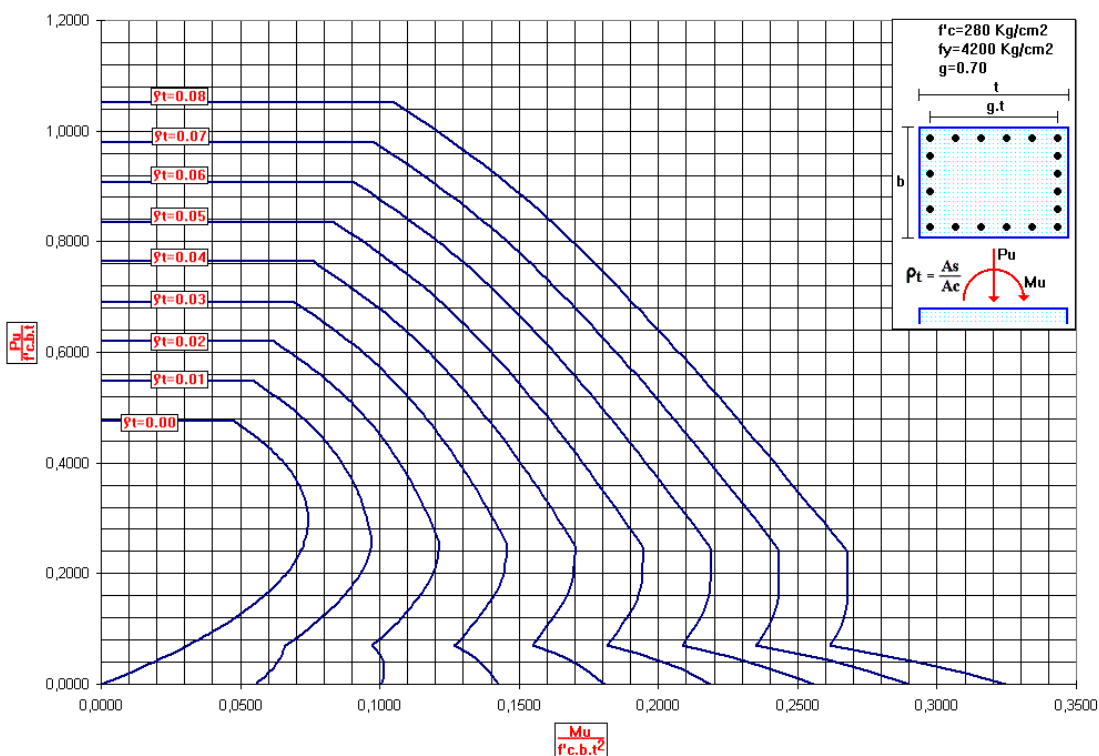
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 5)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 6)



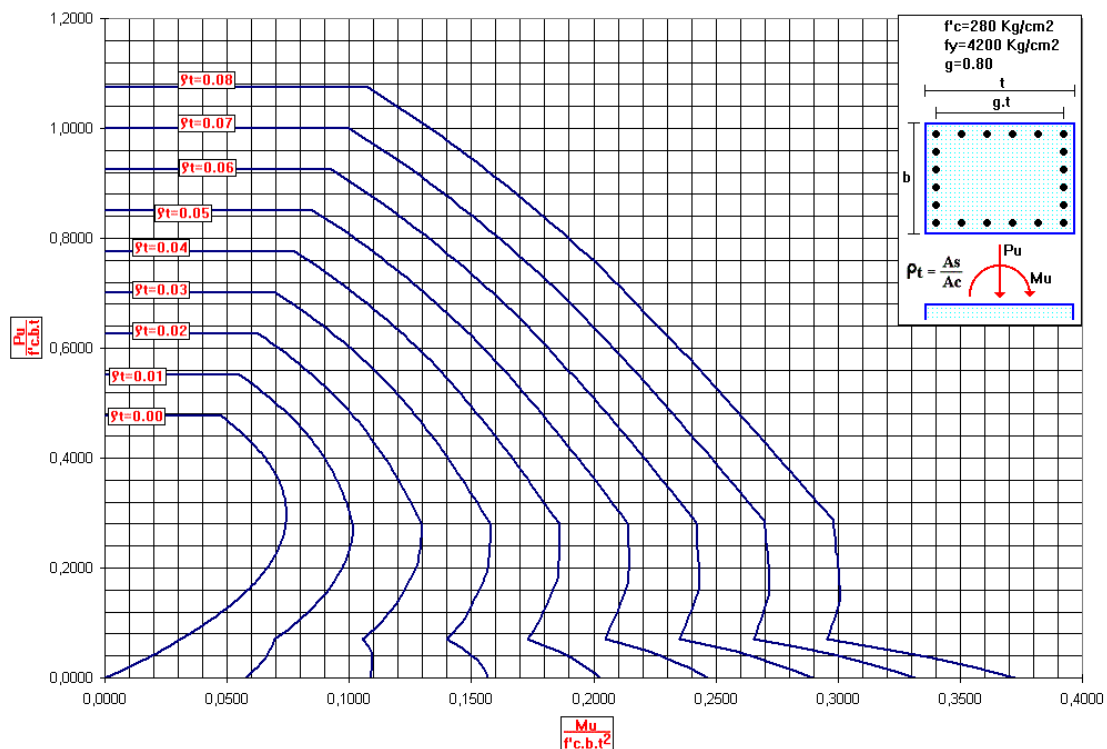


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

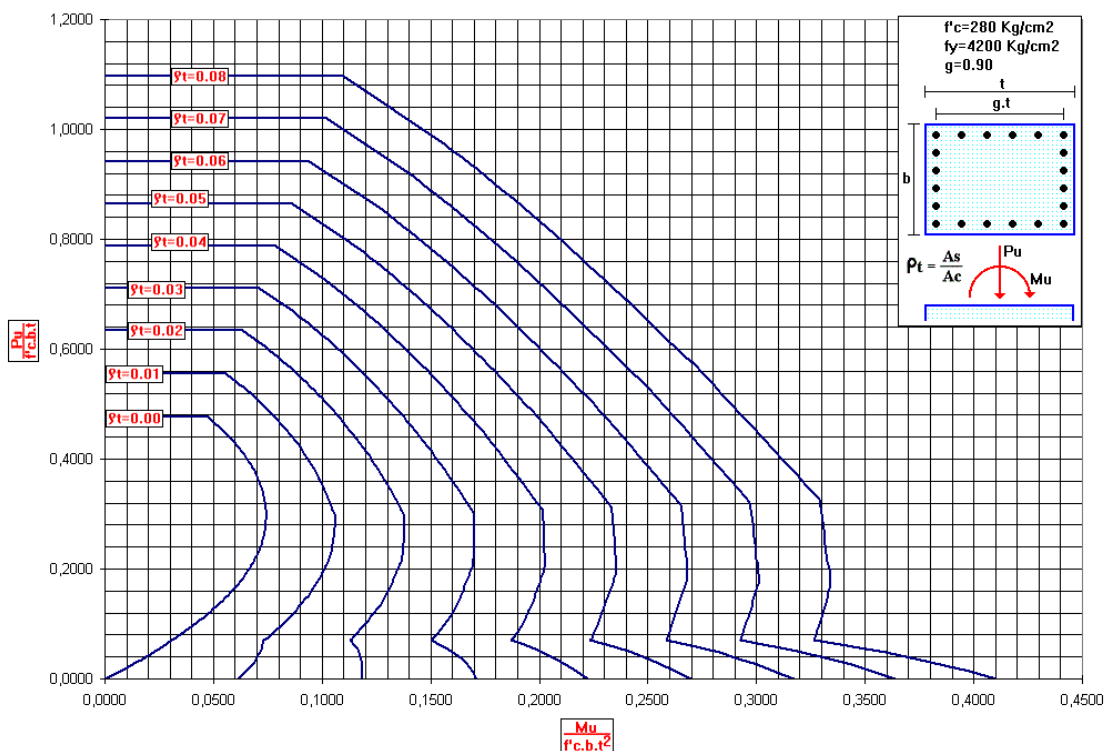
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 7)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 8)



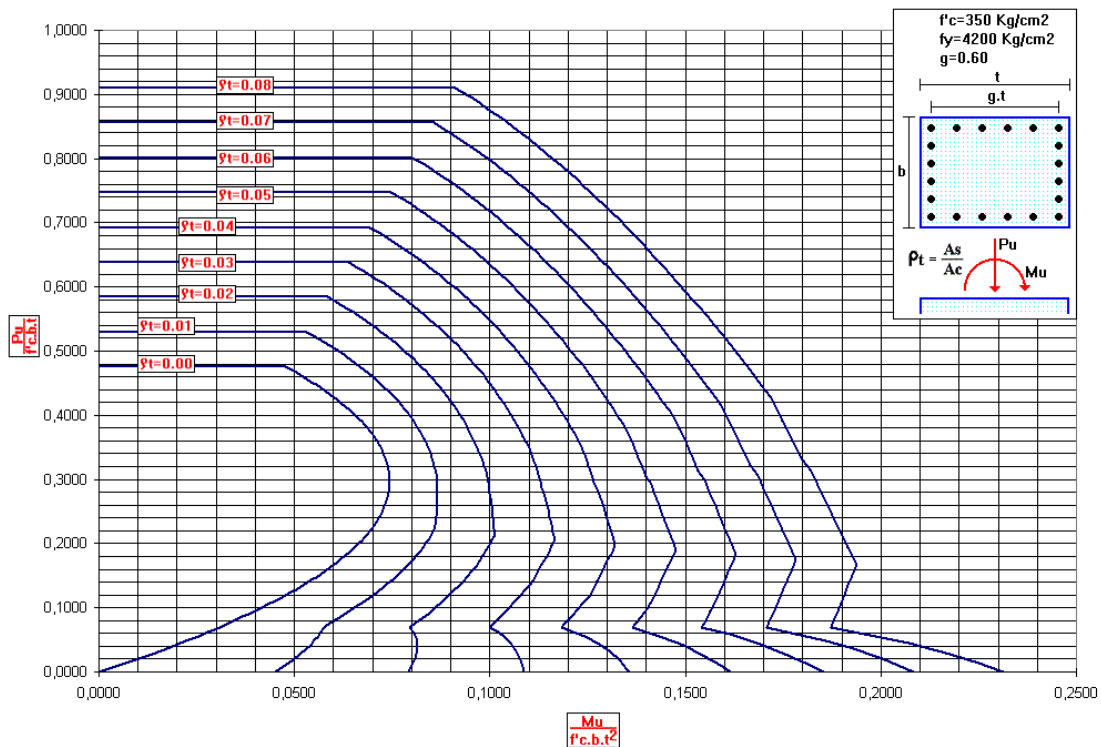


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

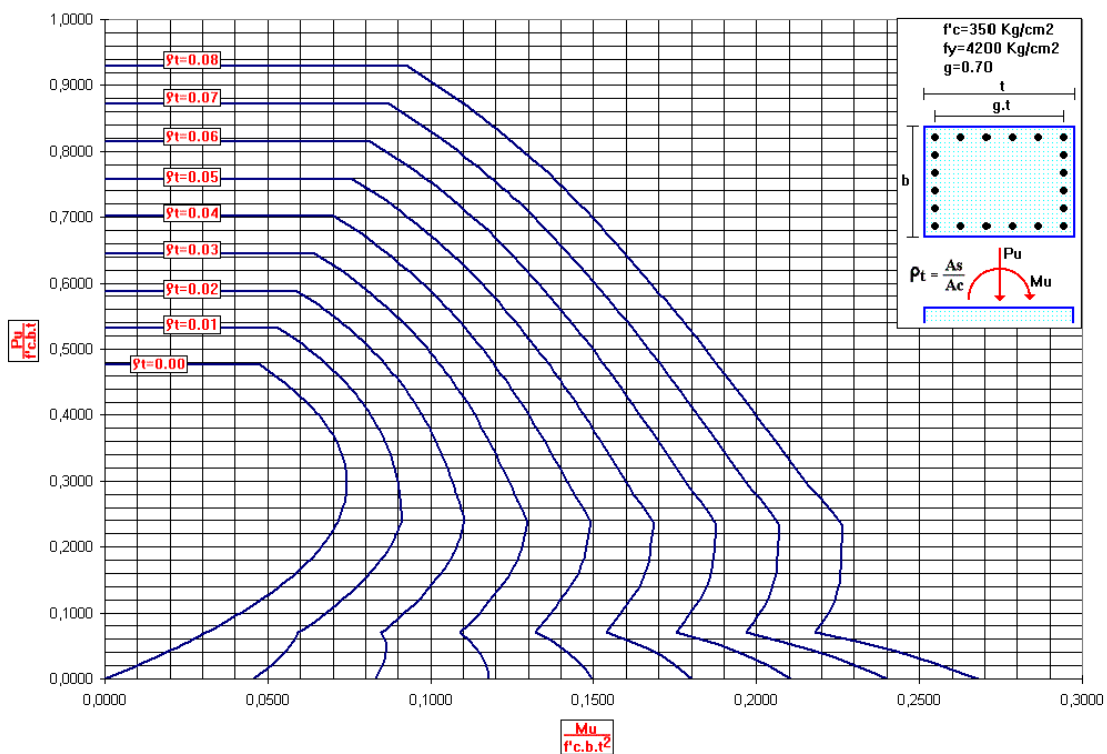
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 9)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 10)



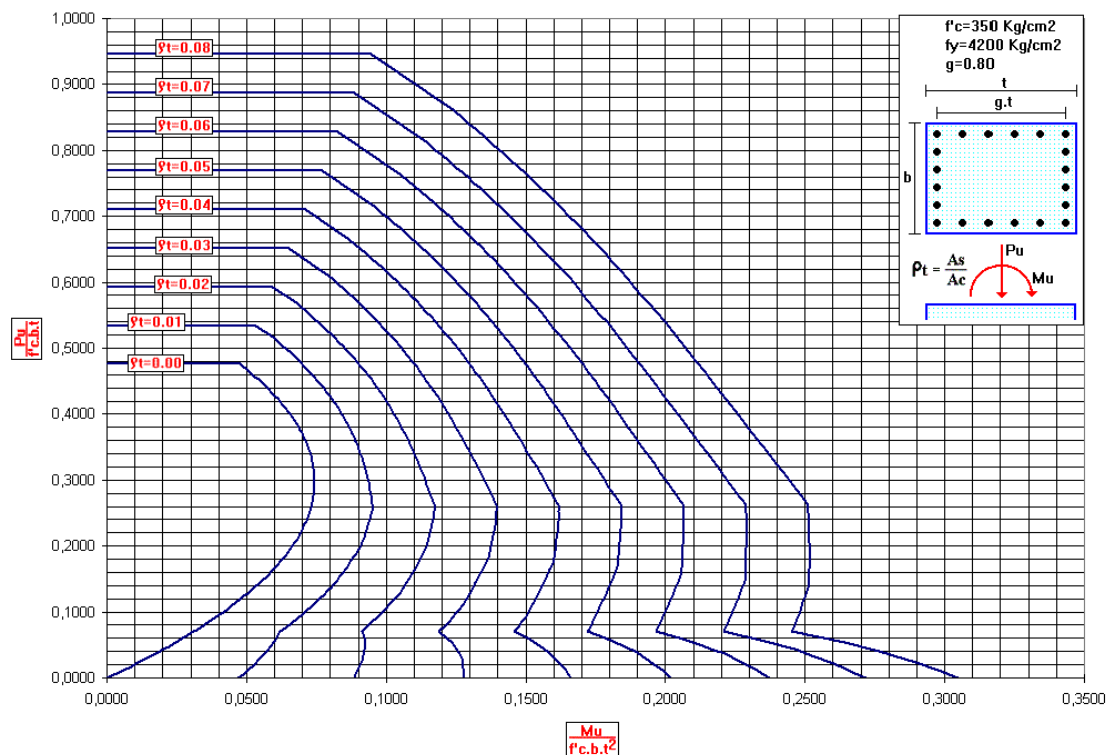


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

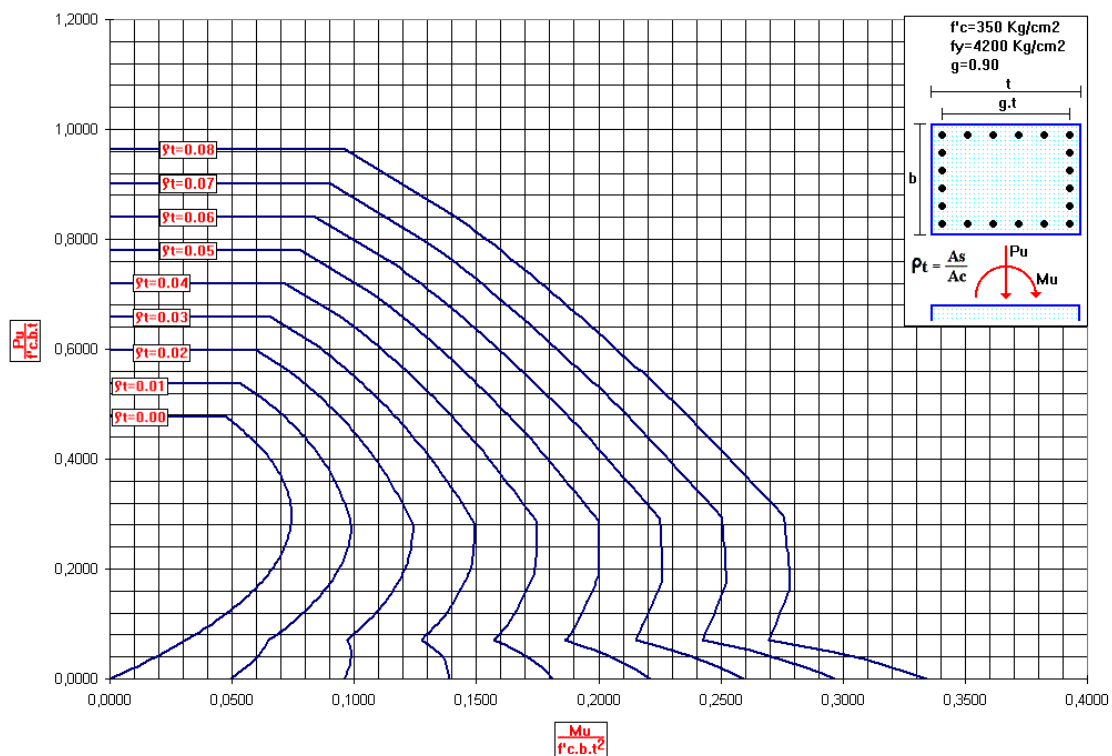
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 11)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 12)



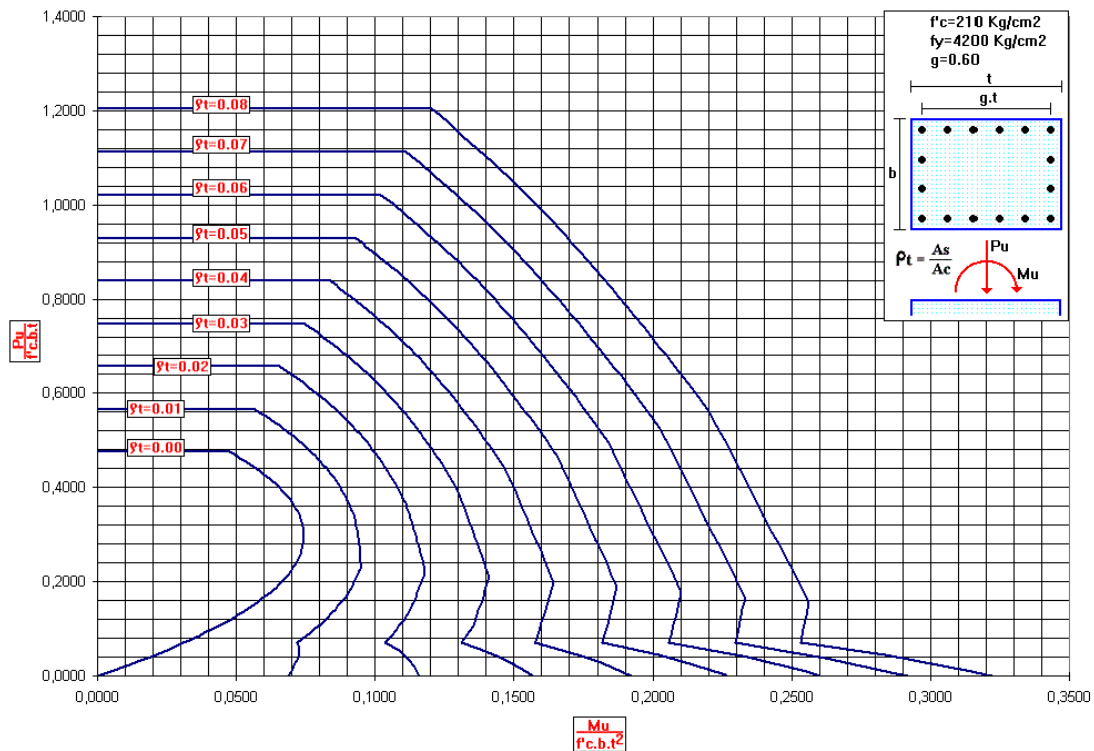


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

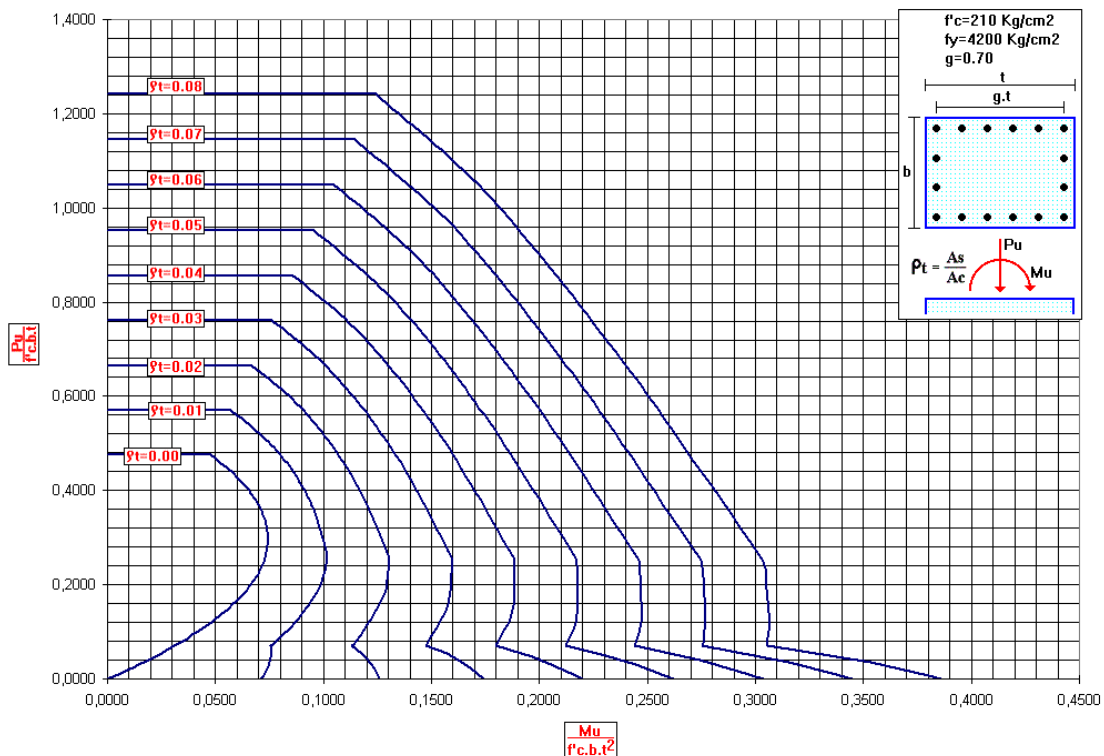
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 13)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 14)





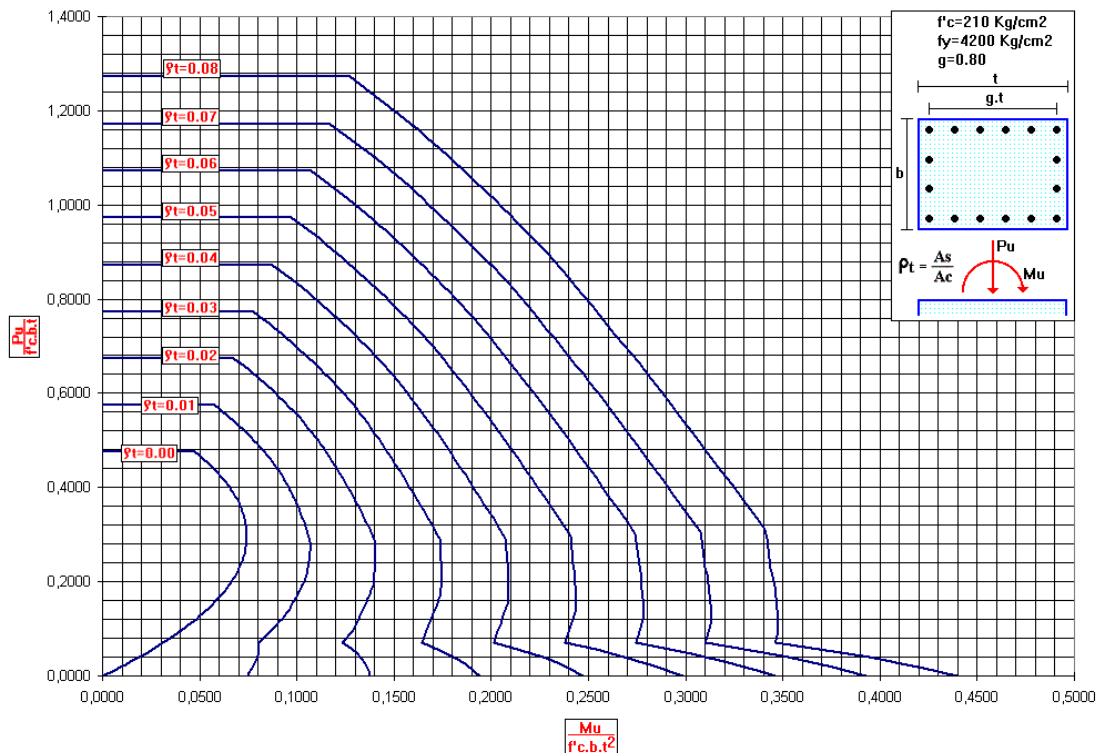
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

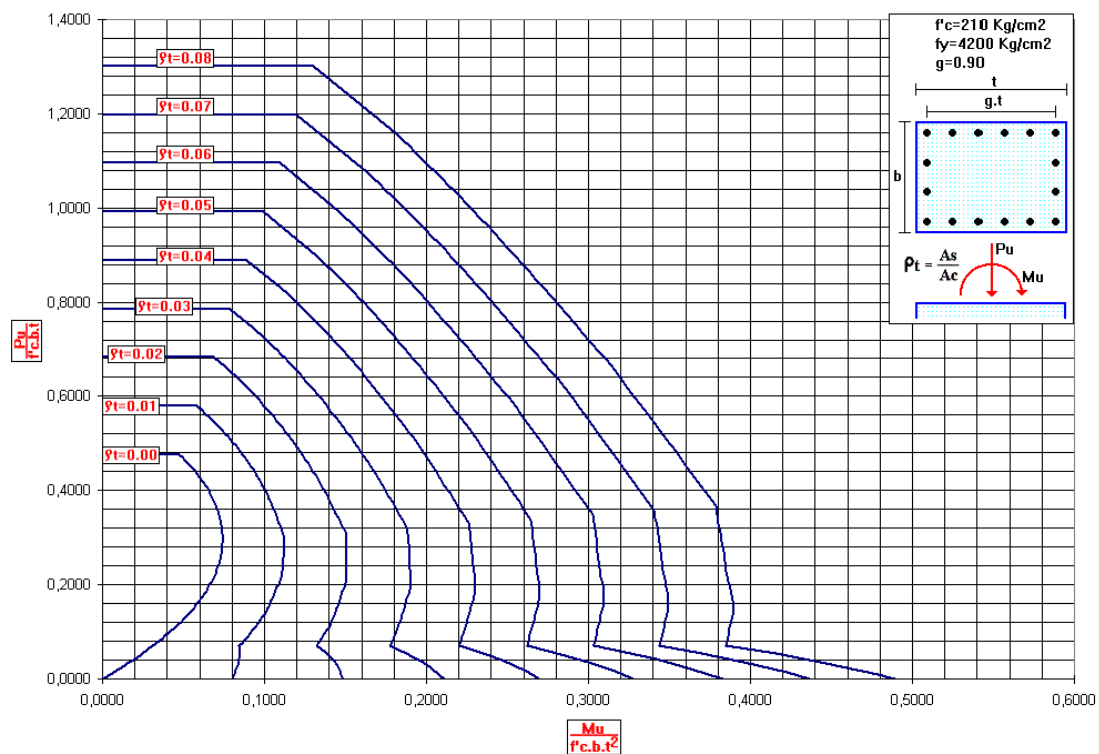
DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 15)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 16)



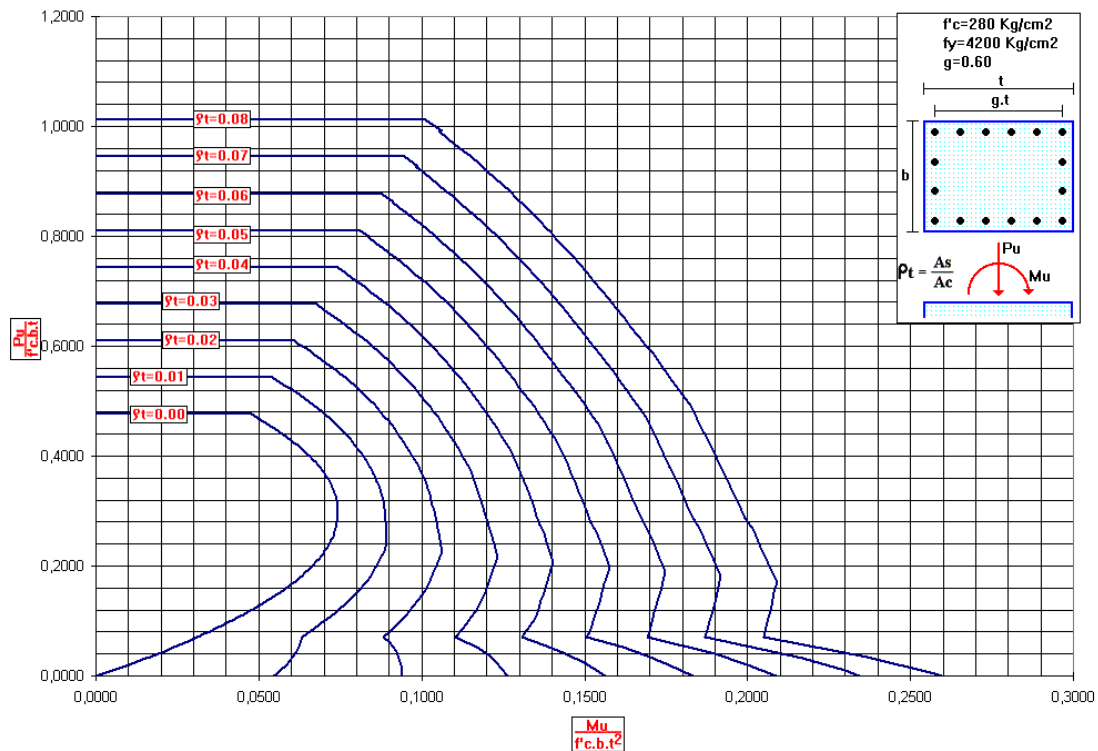


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

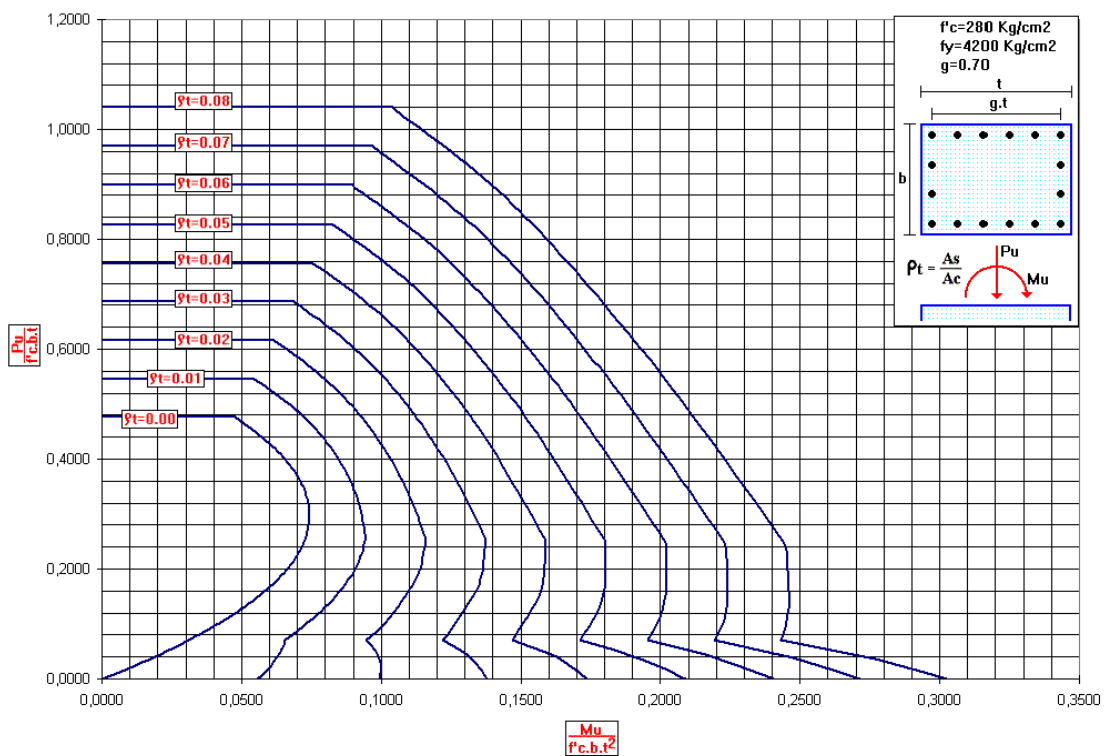
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 17)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 18)



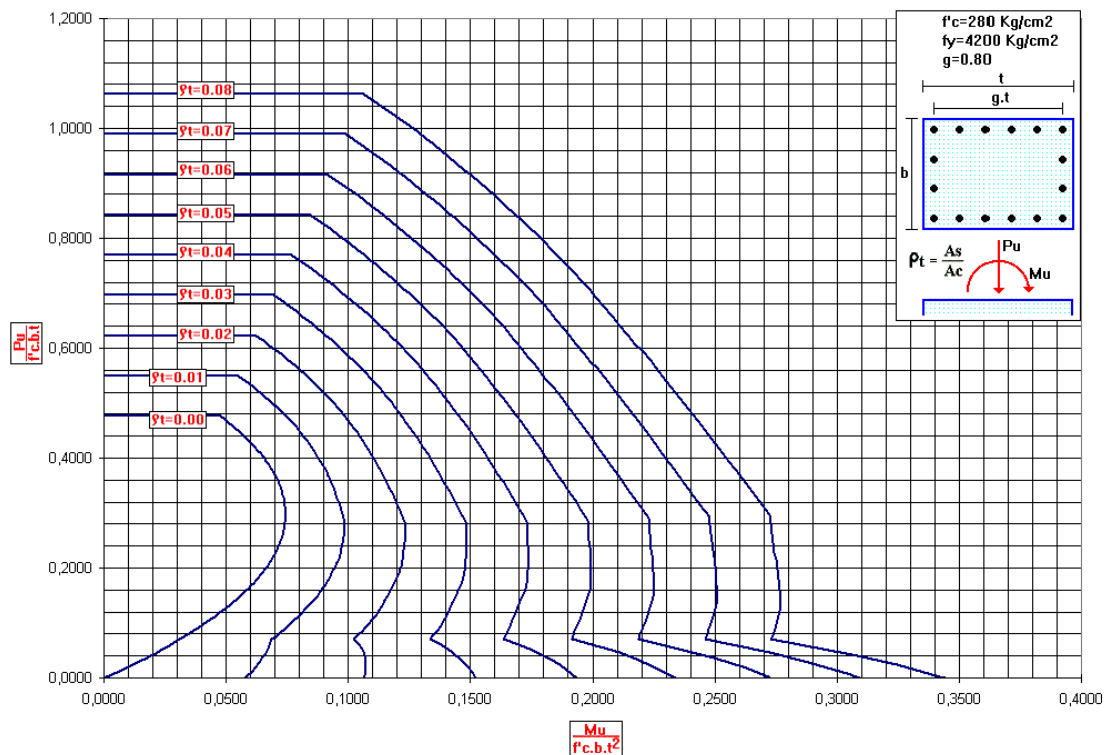


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

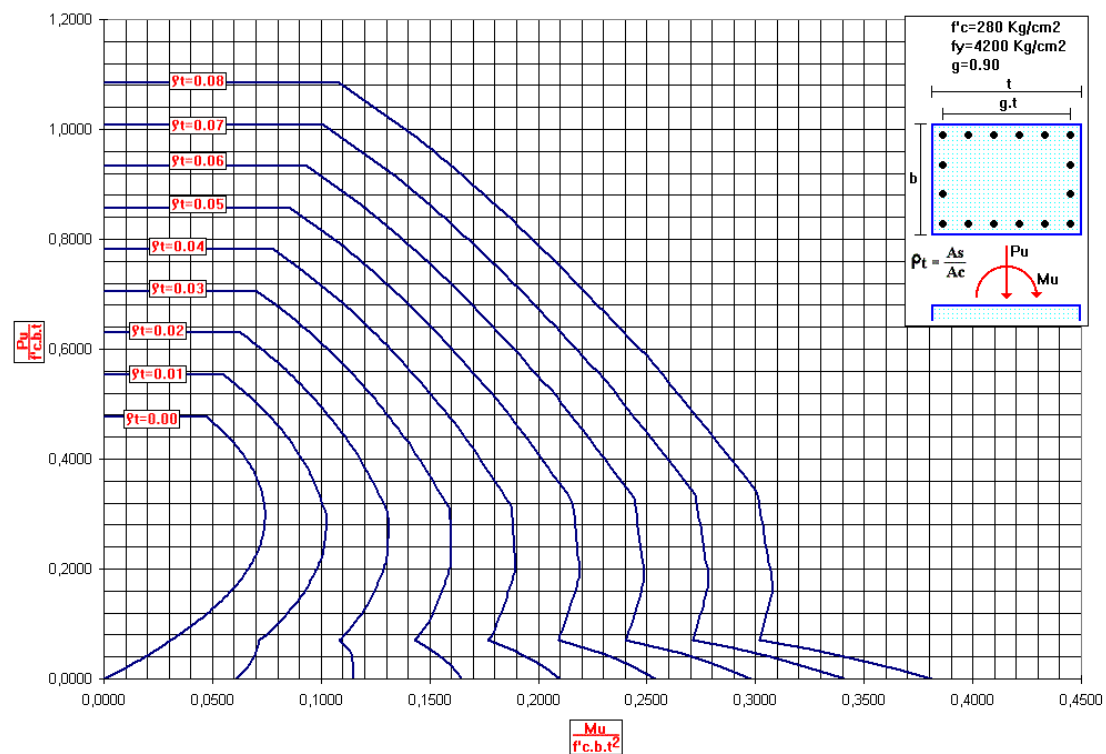
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 19)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 20)



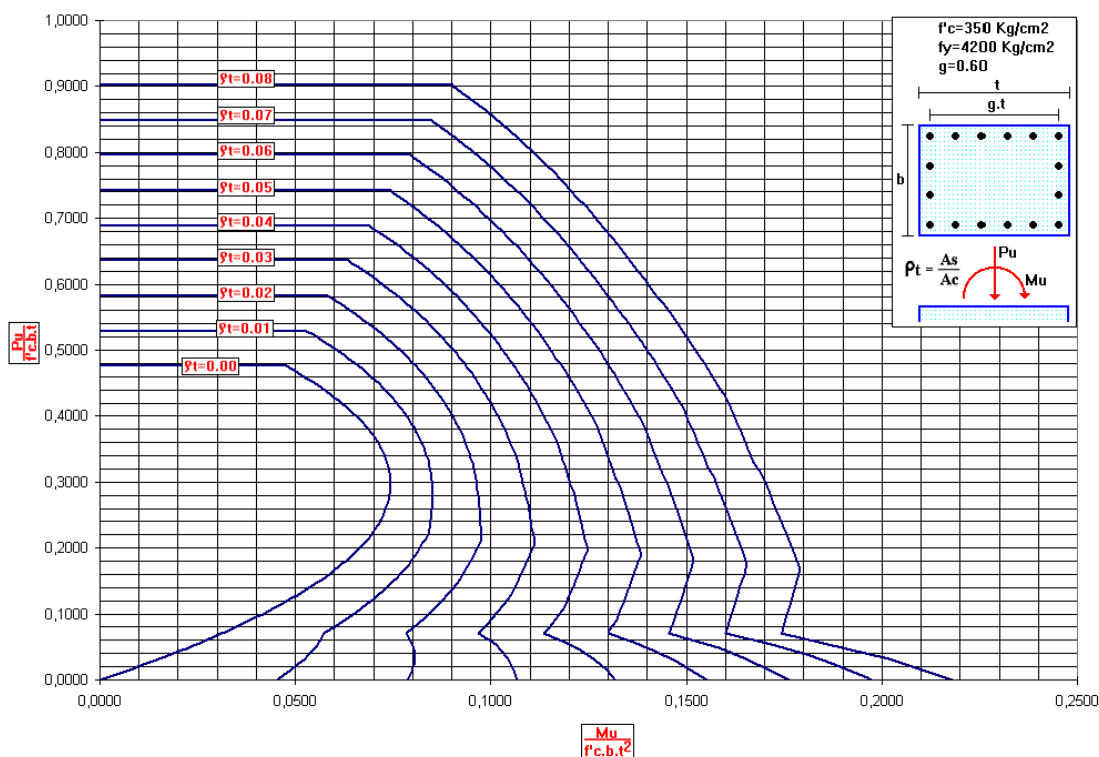


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

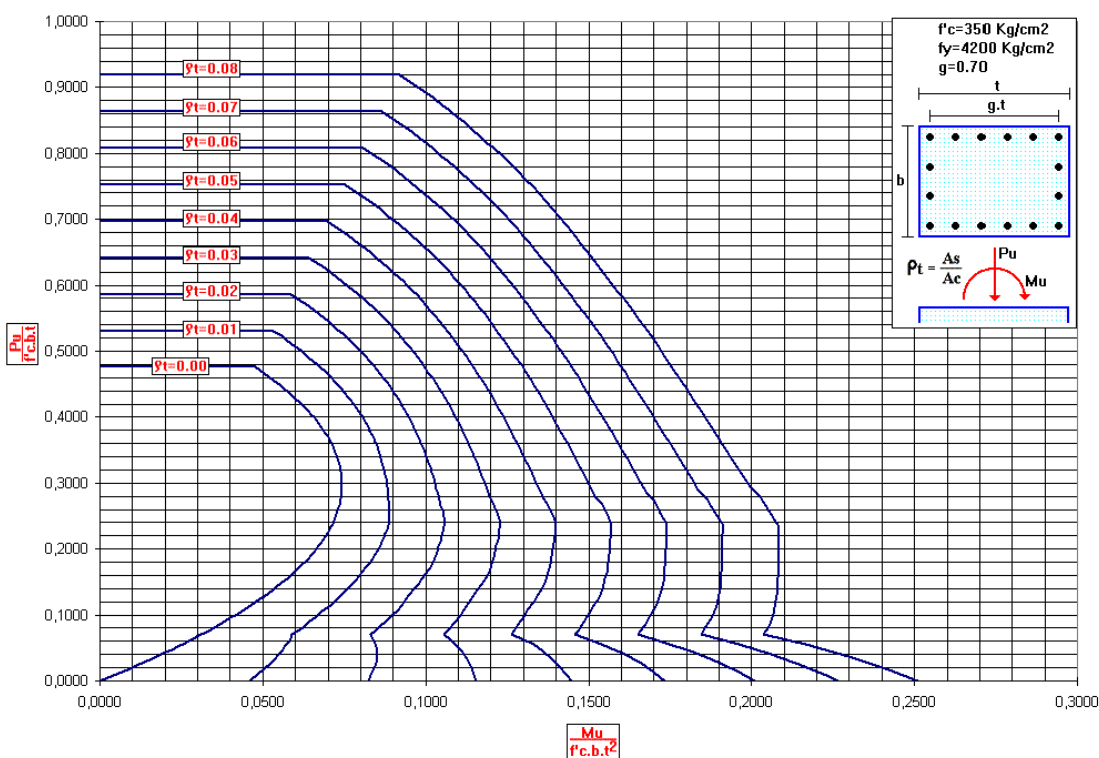
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 21)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 22)



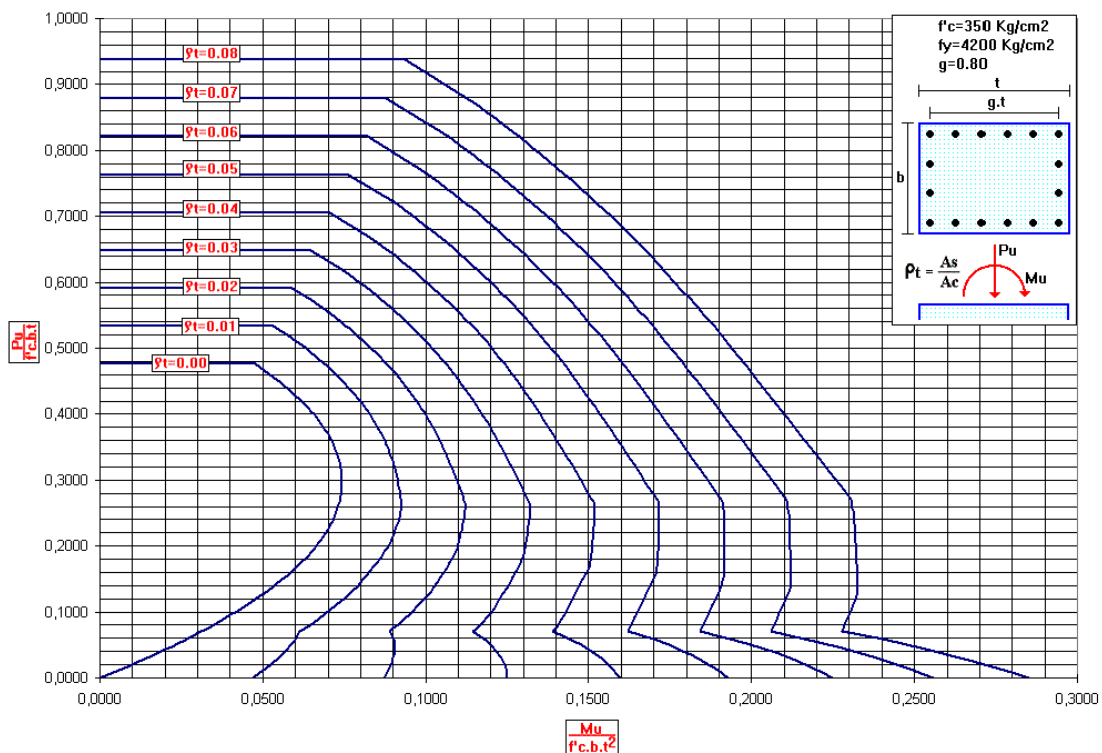


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

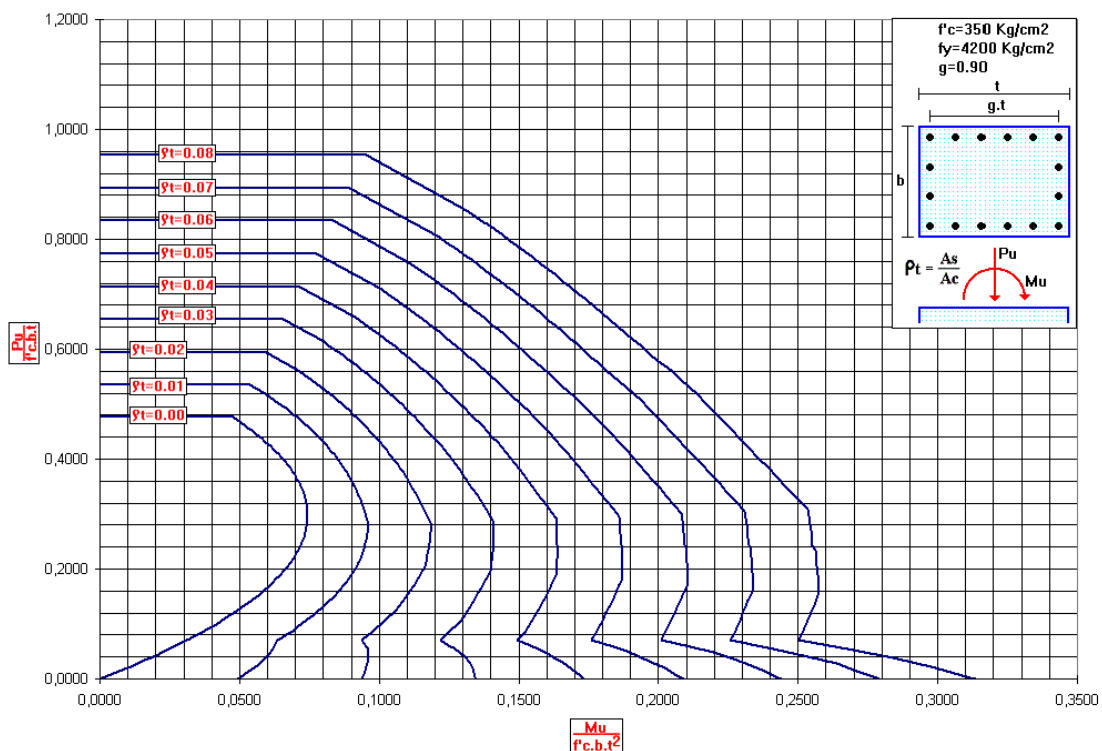
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 23)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 24)



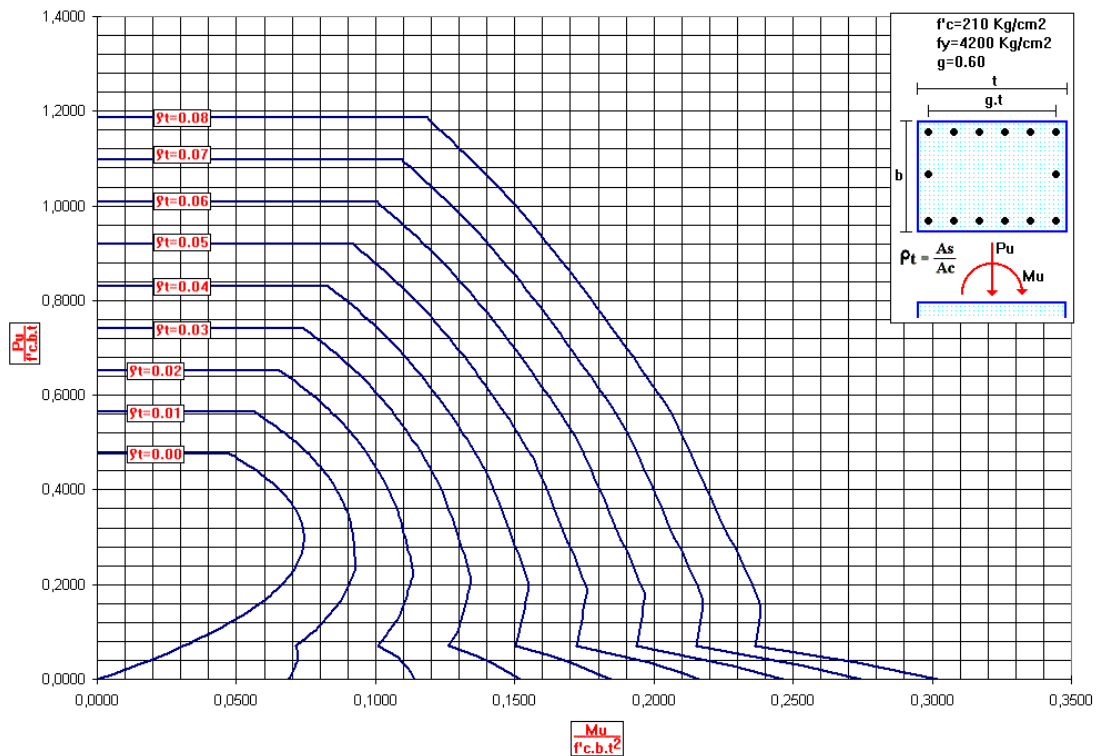


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

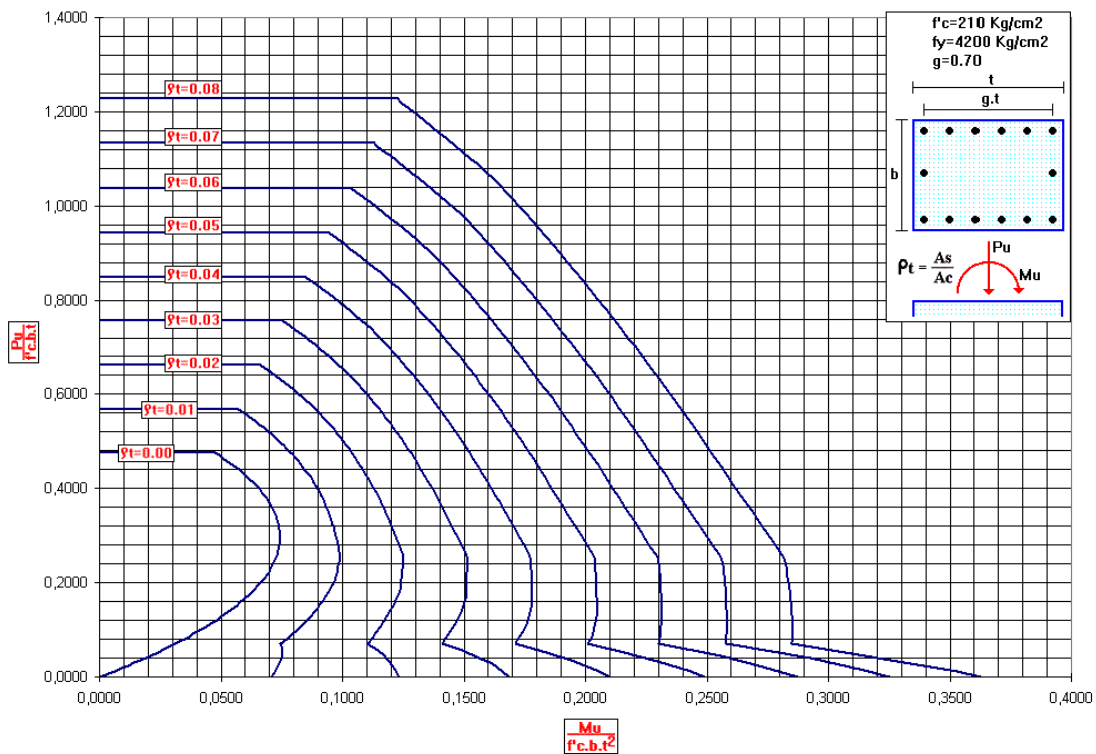
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 25)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 26)



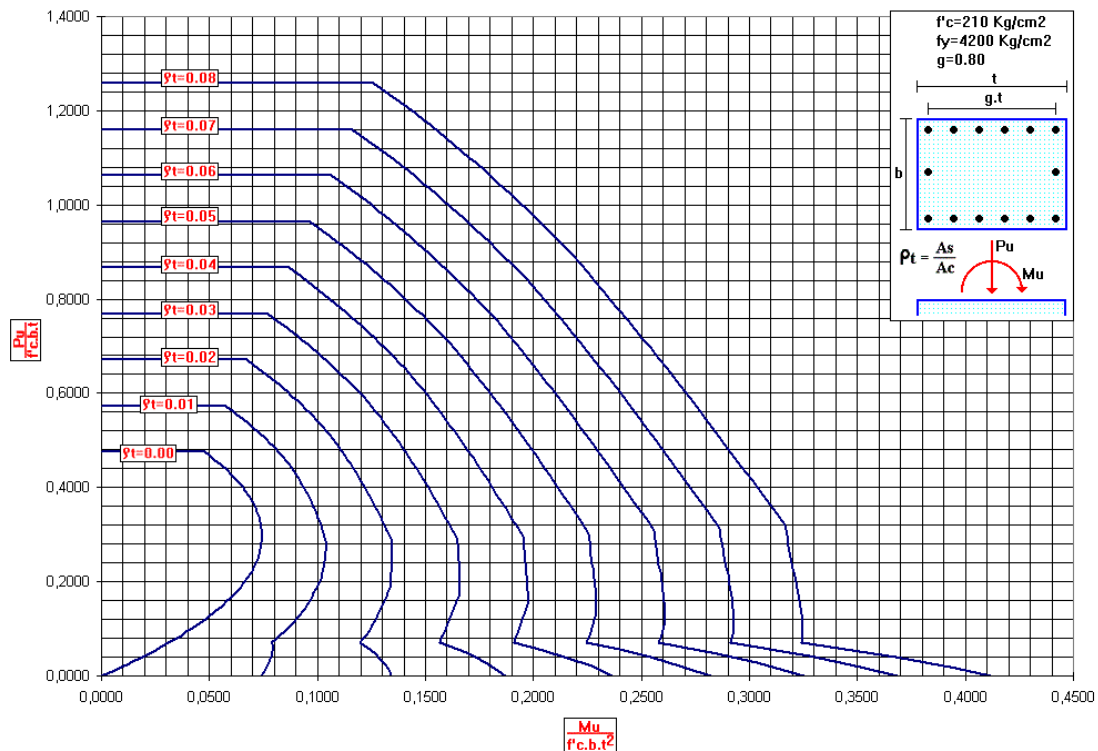


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

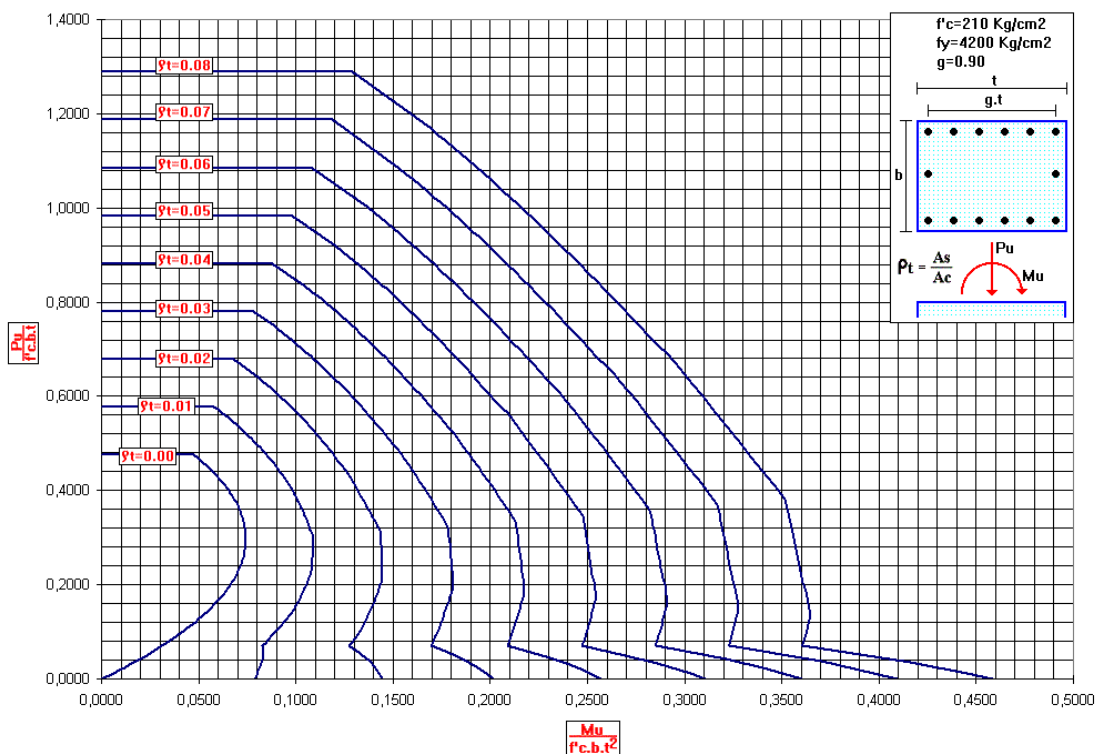
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 27)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 28)





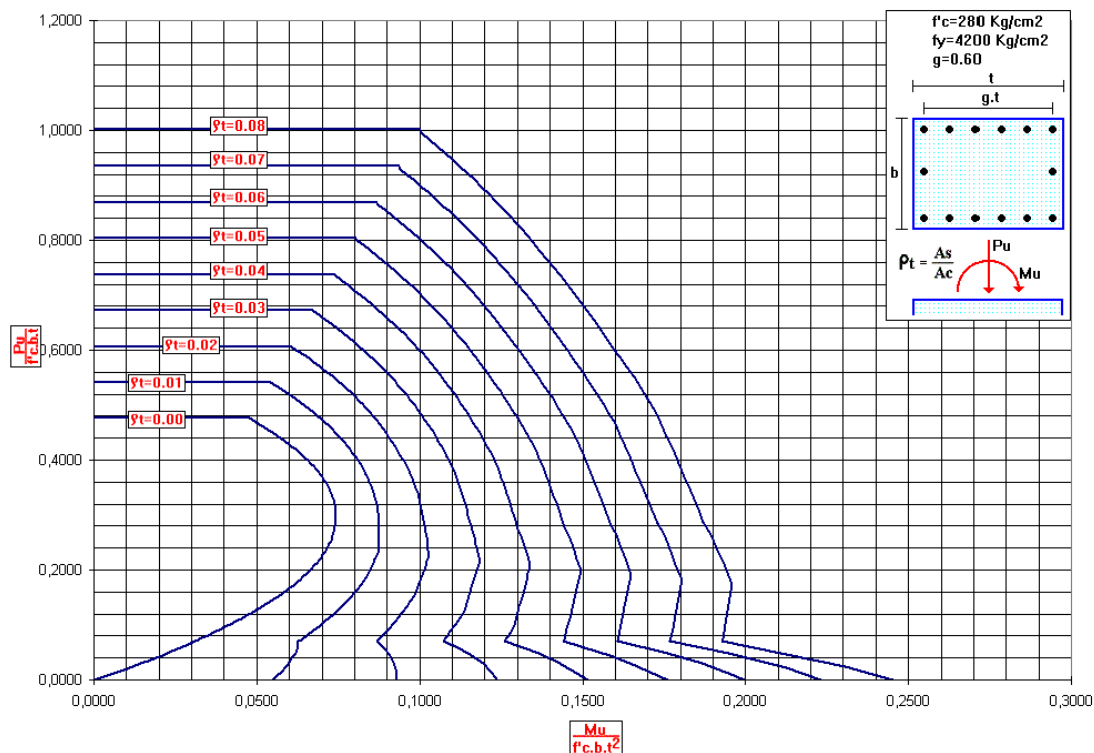
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

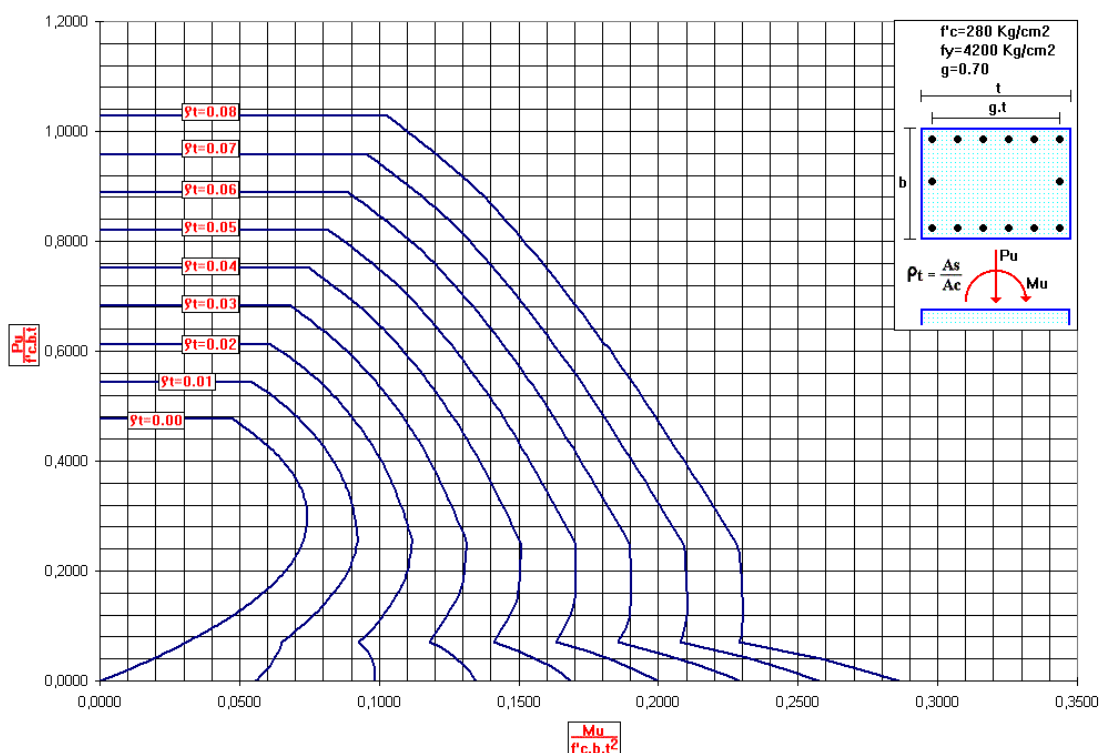
DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 29)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 30)



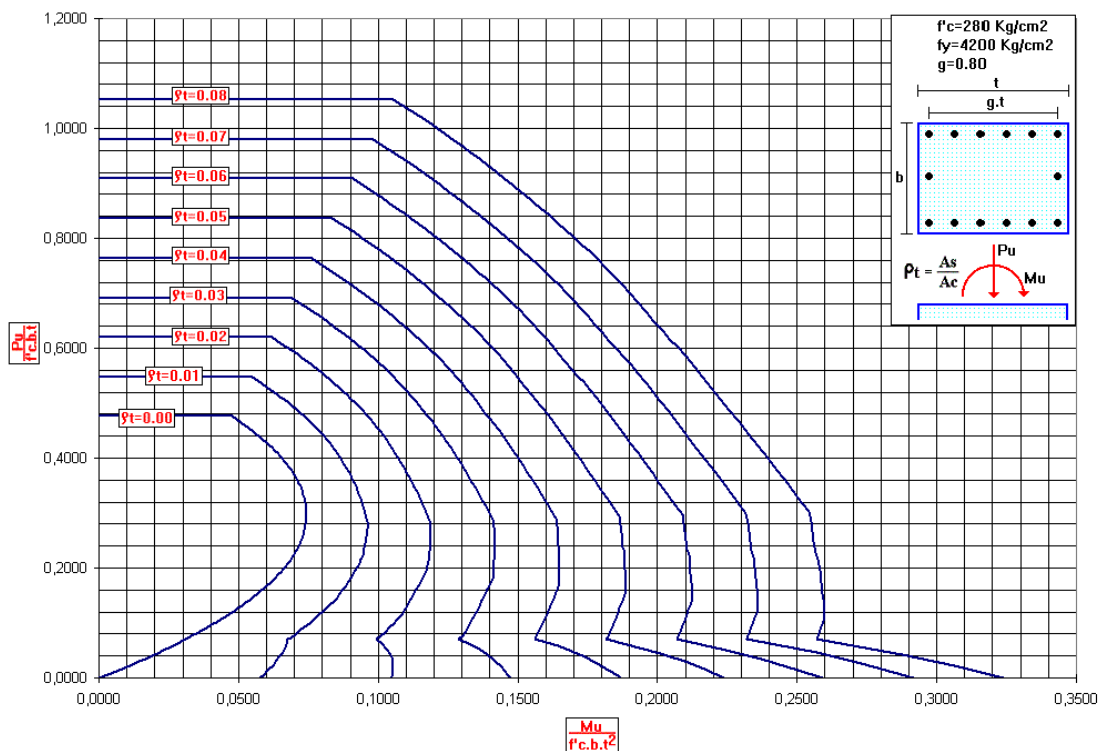


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

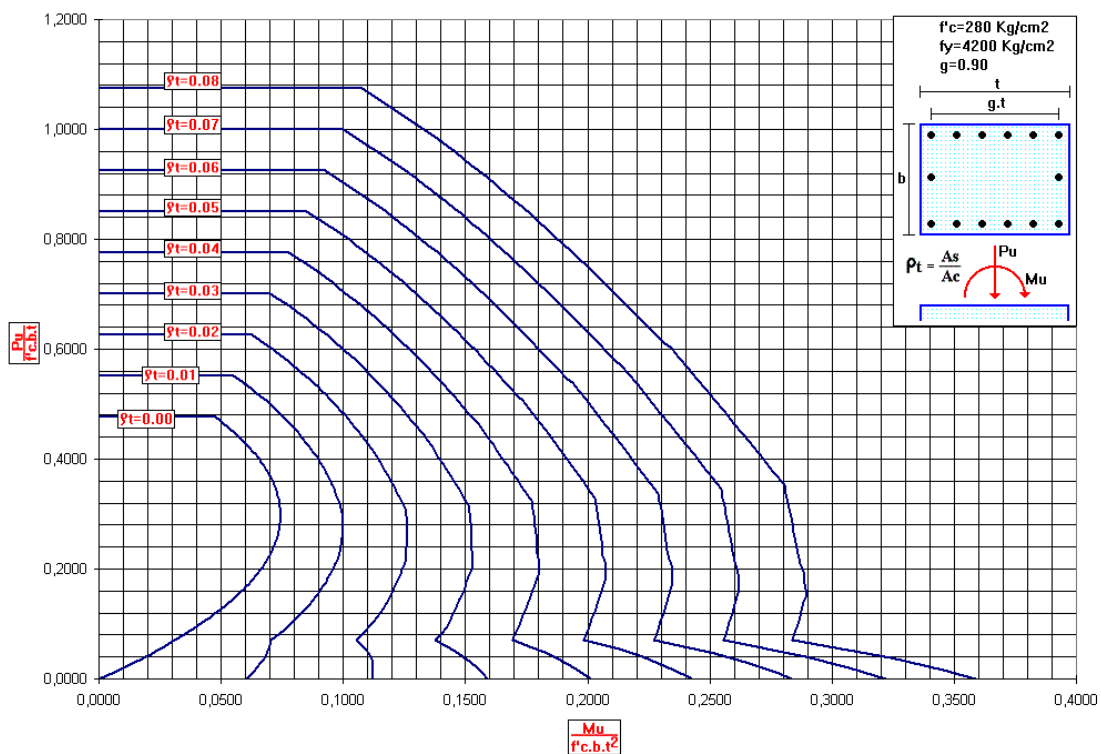
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 31)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 32)



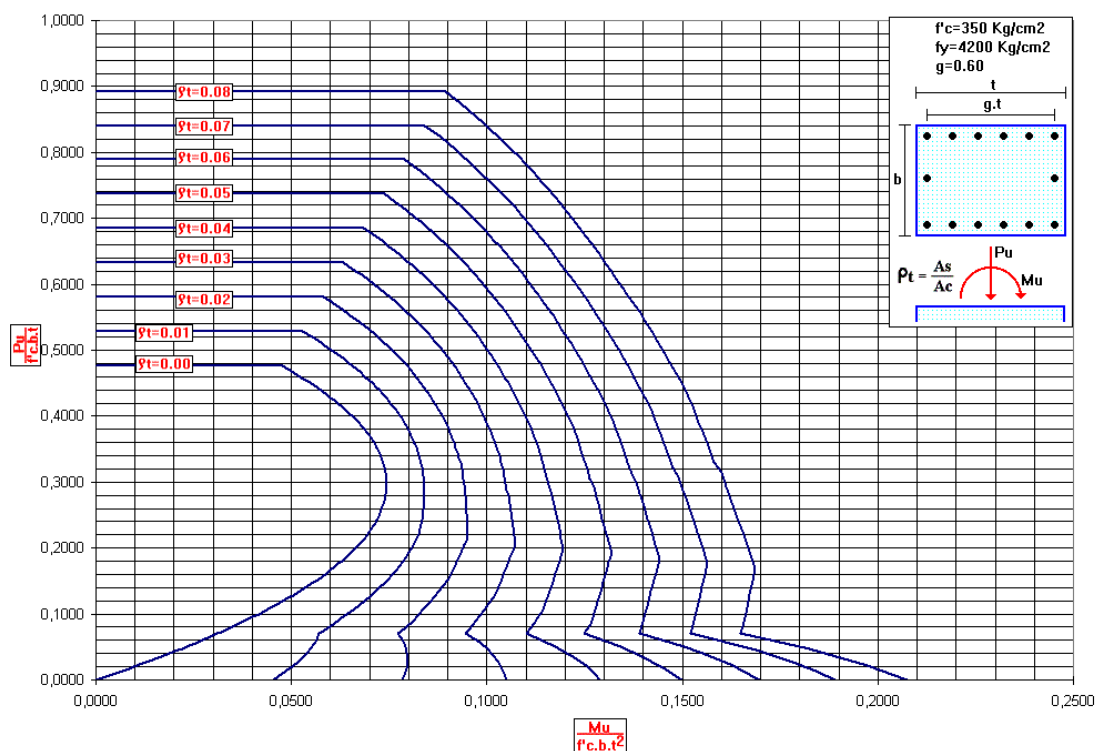


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

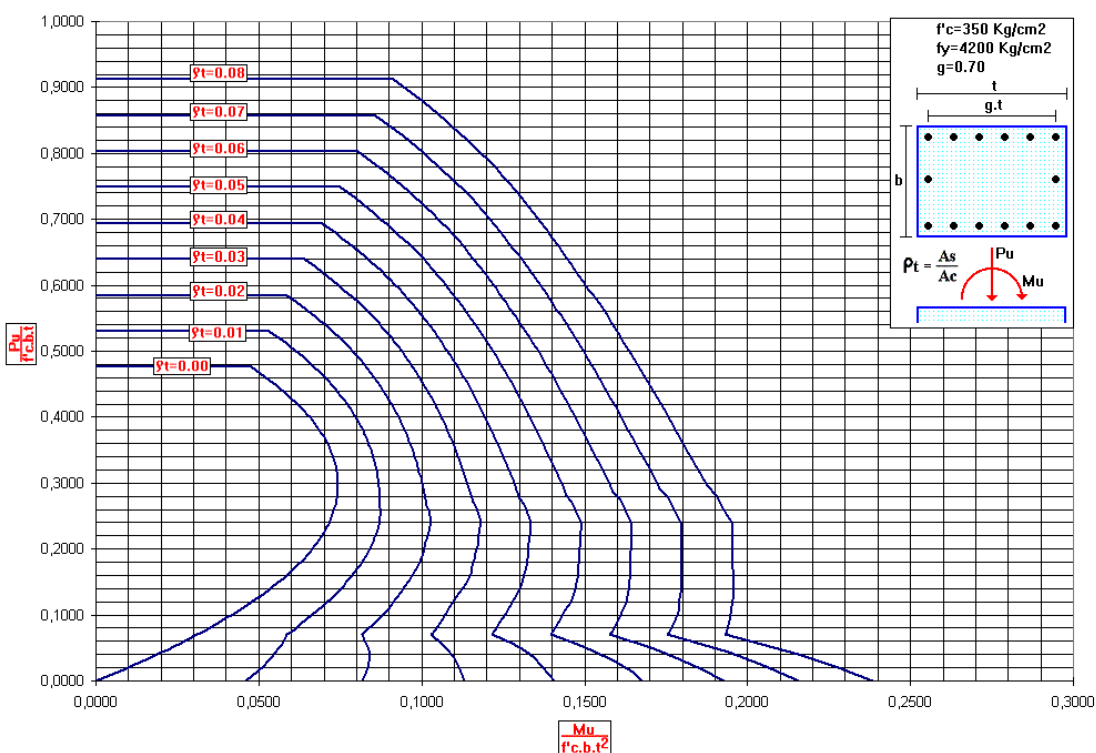
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 33)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 34)



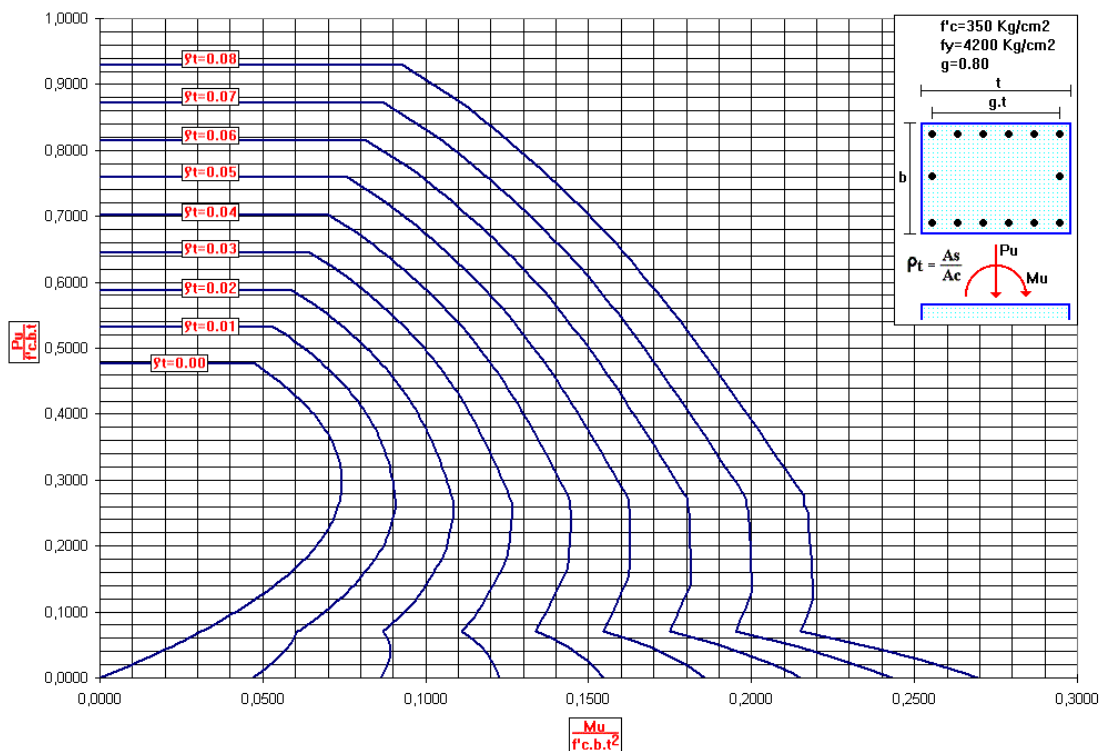


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

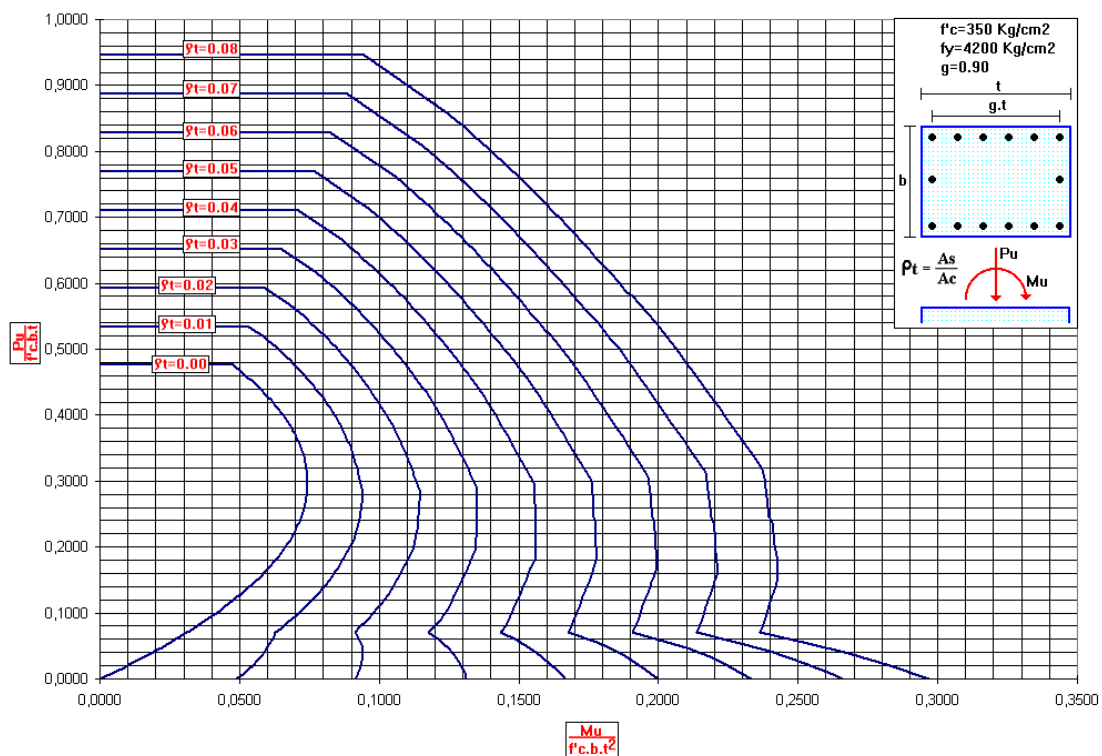
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 35)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 36)



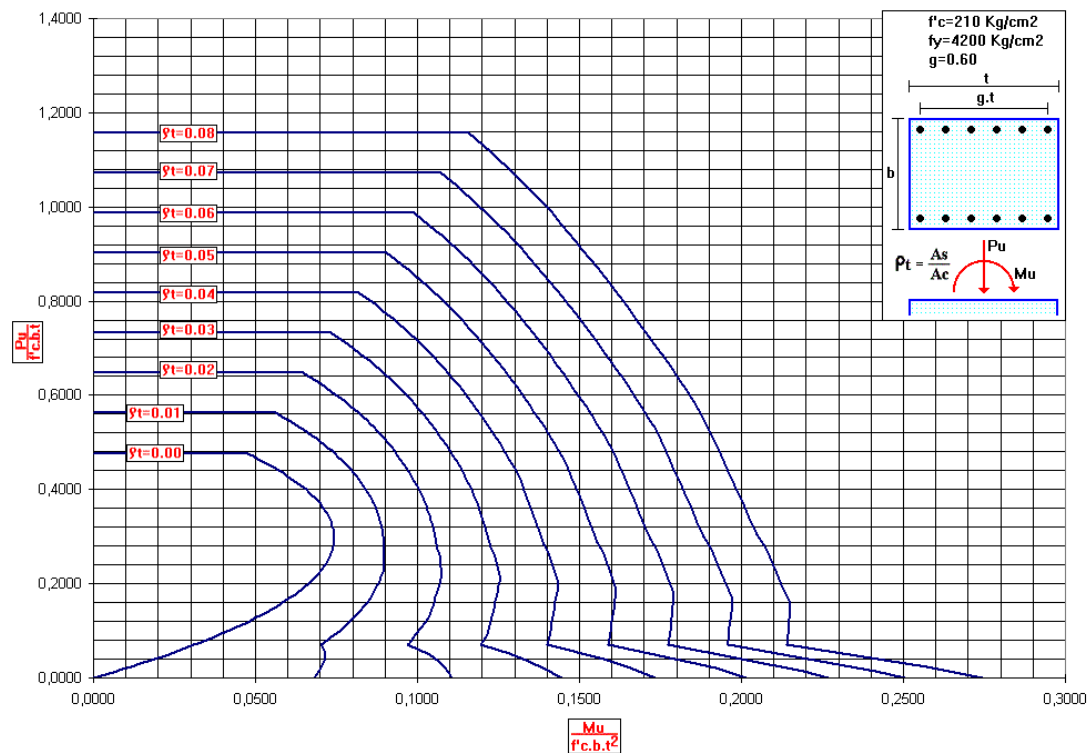


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

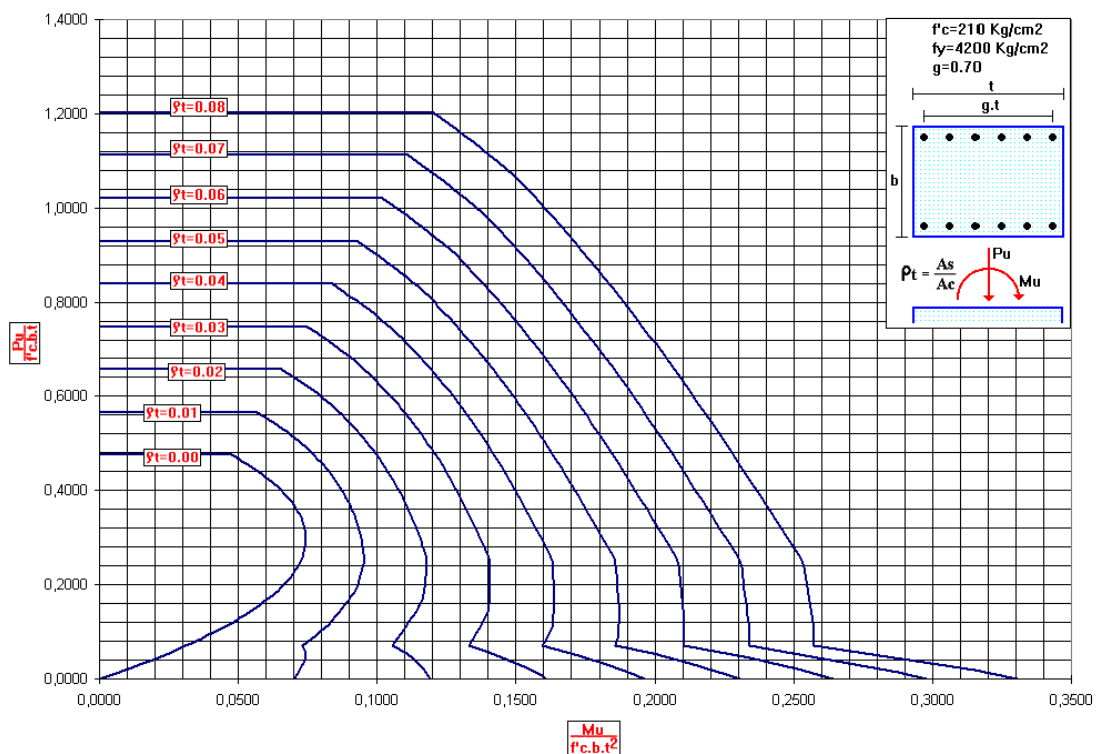
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 37)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 38)



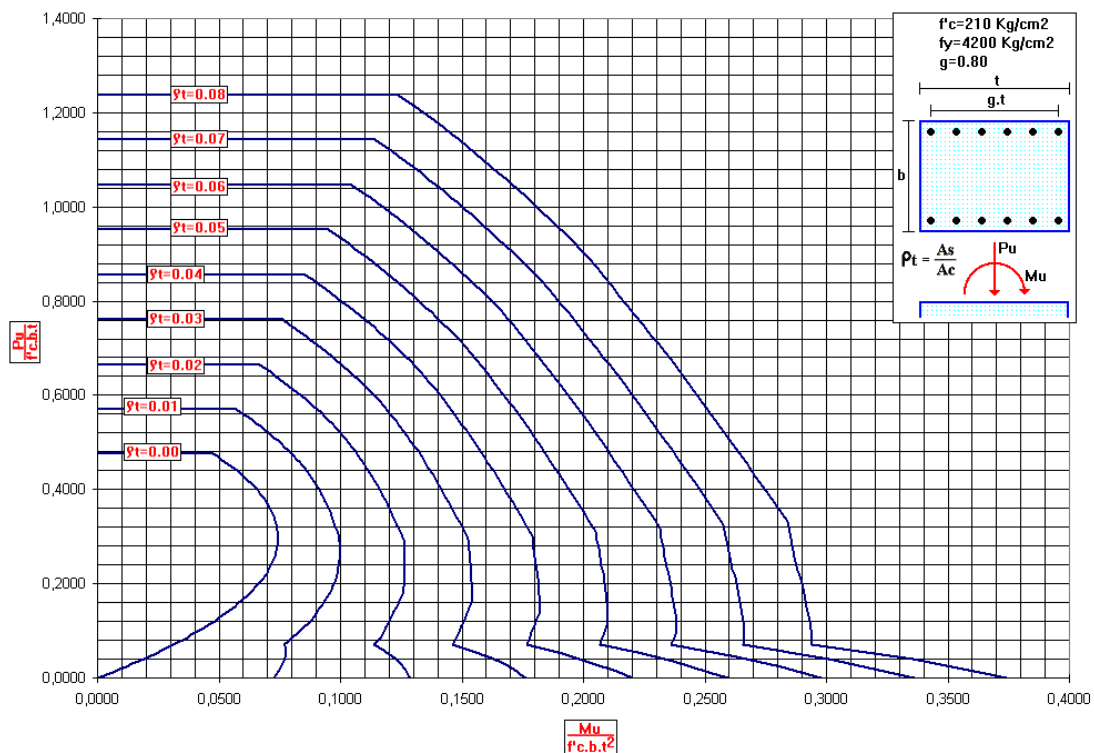


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

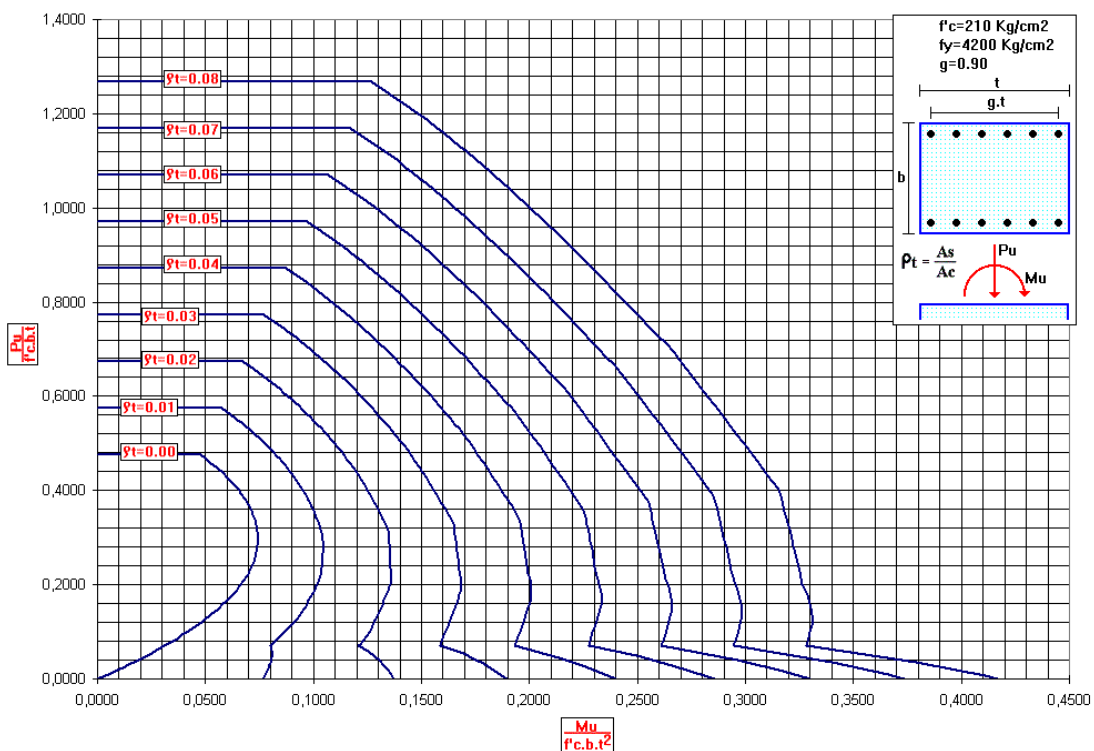
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 39)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 40)



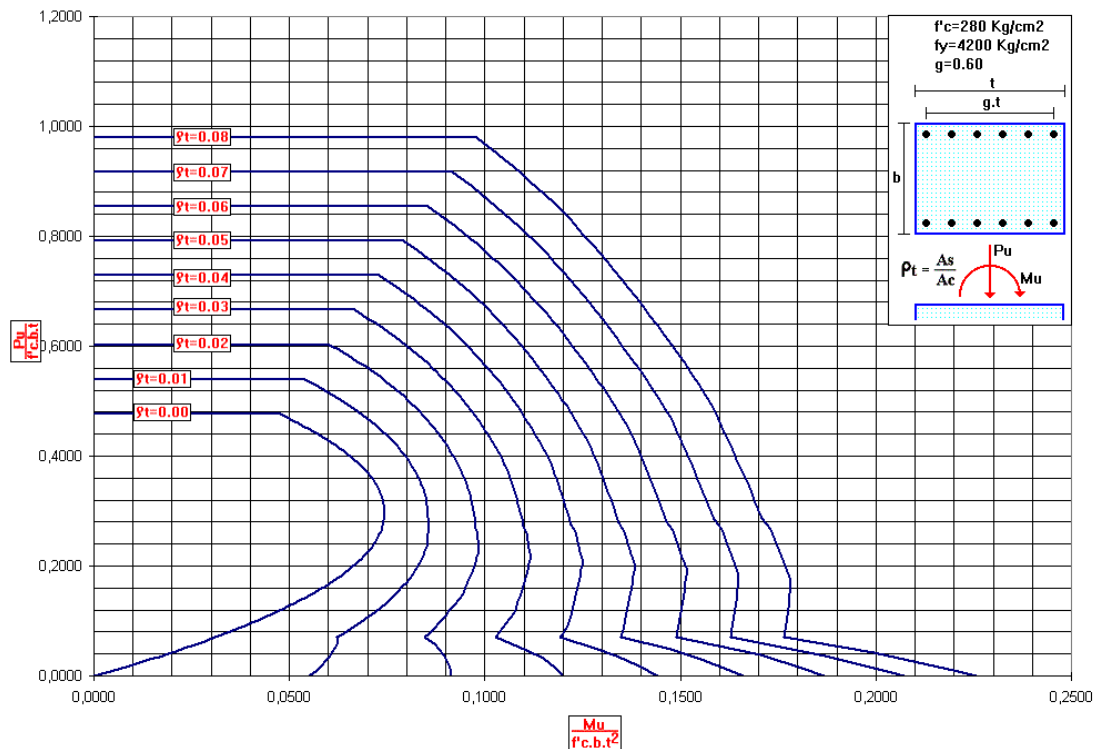


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

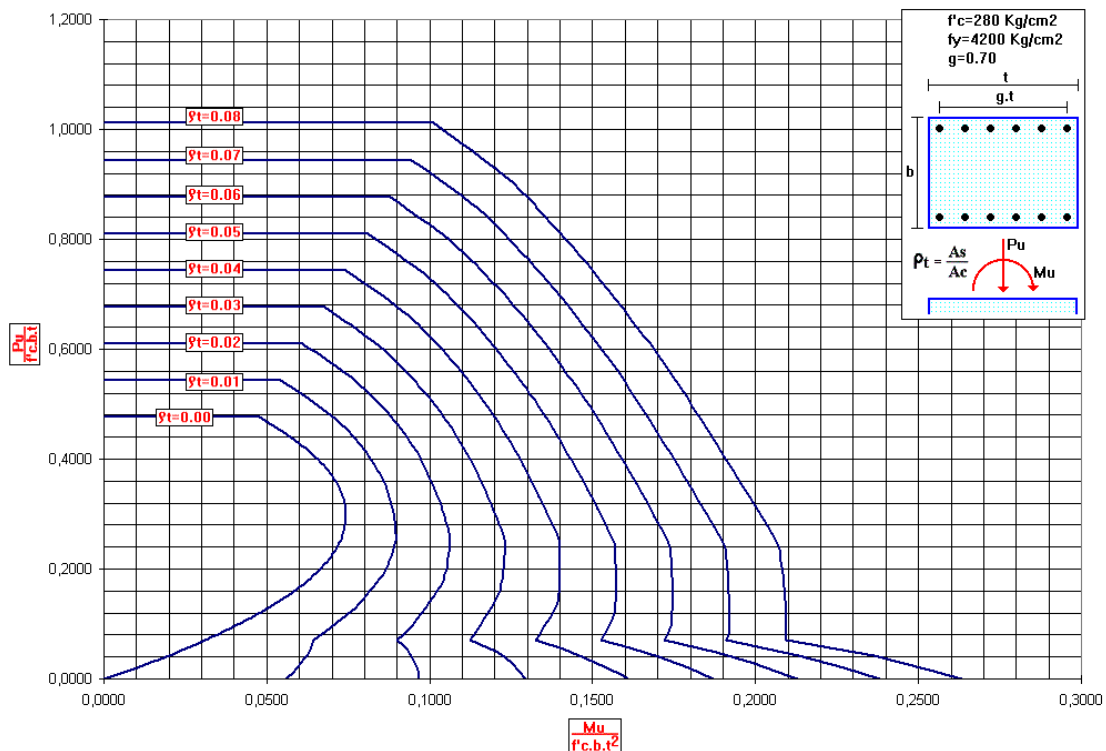
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 41)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 42)





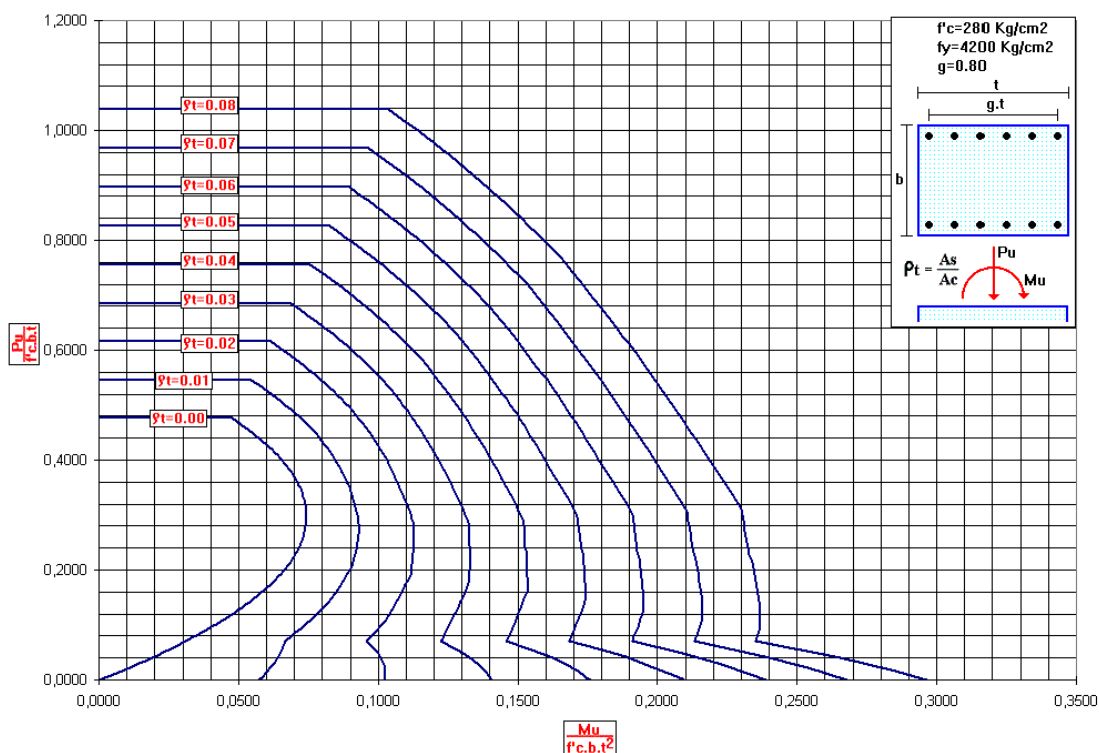
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

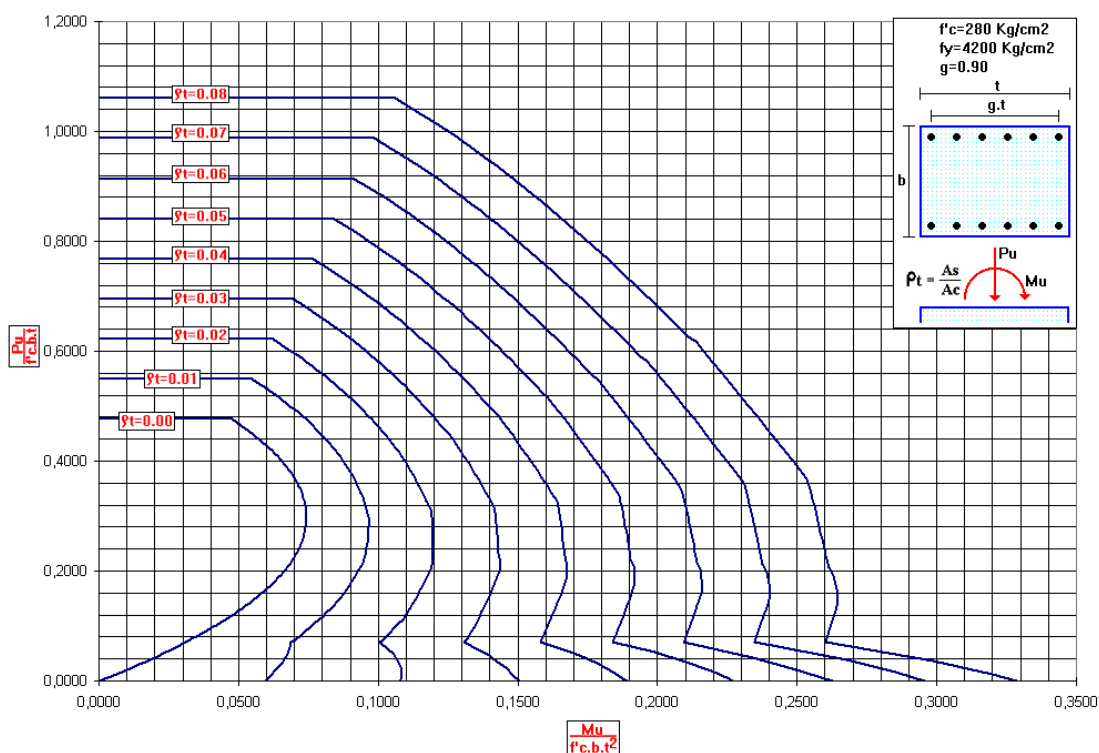
DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 43)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 44)



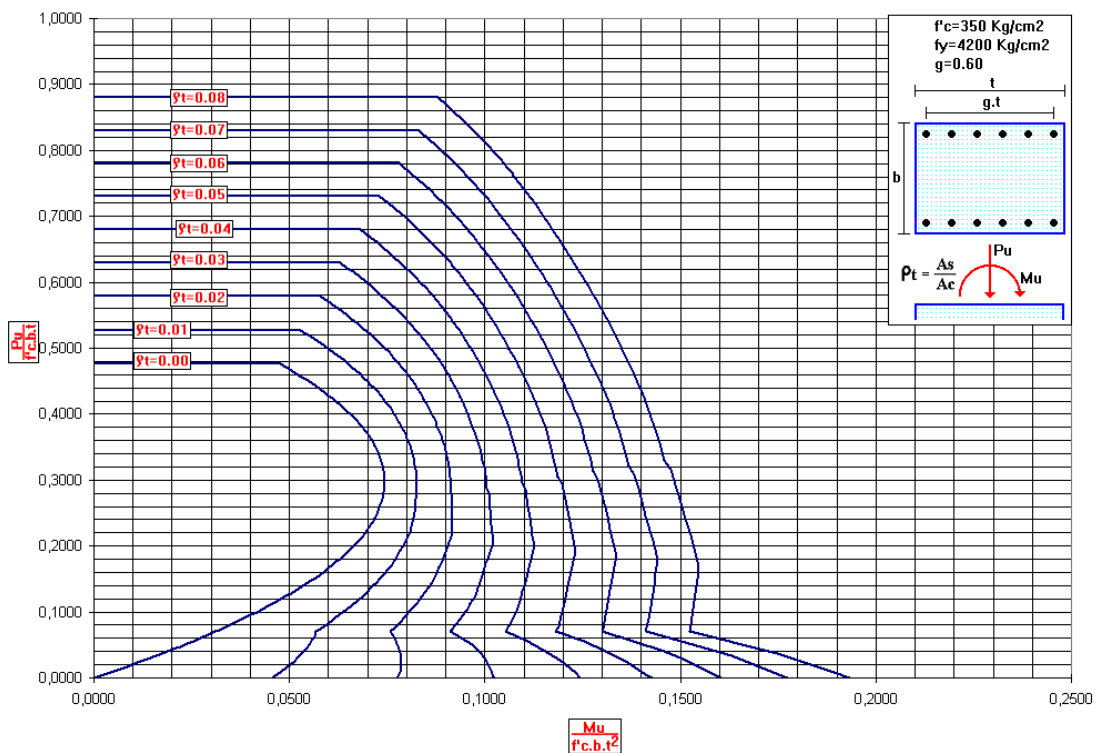


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

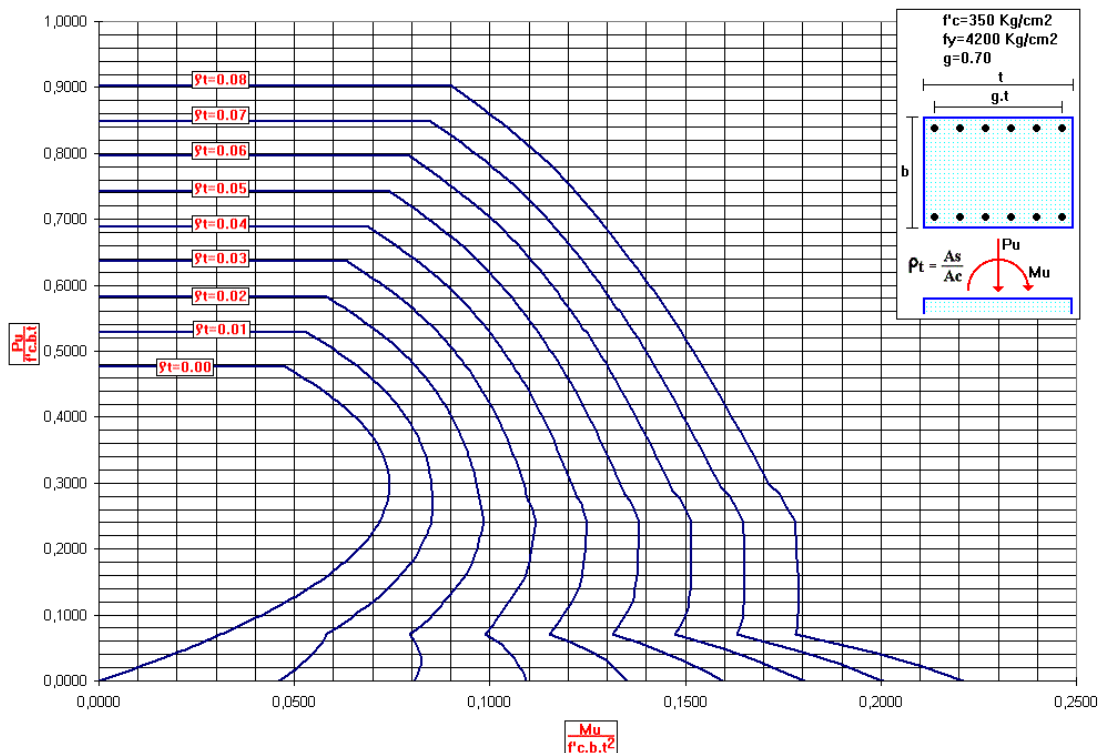
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 45)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 46)



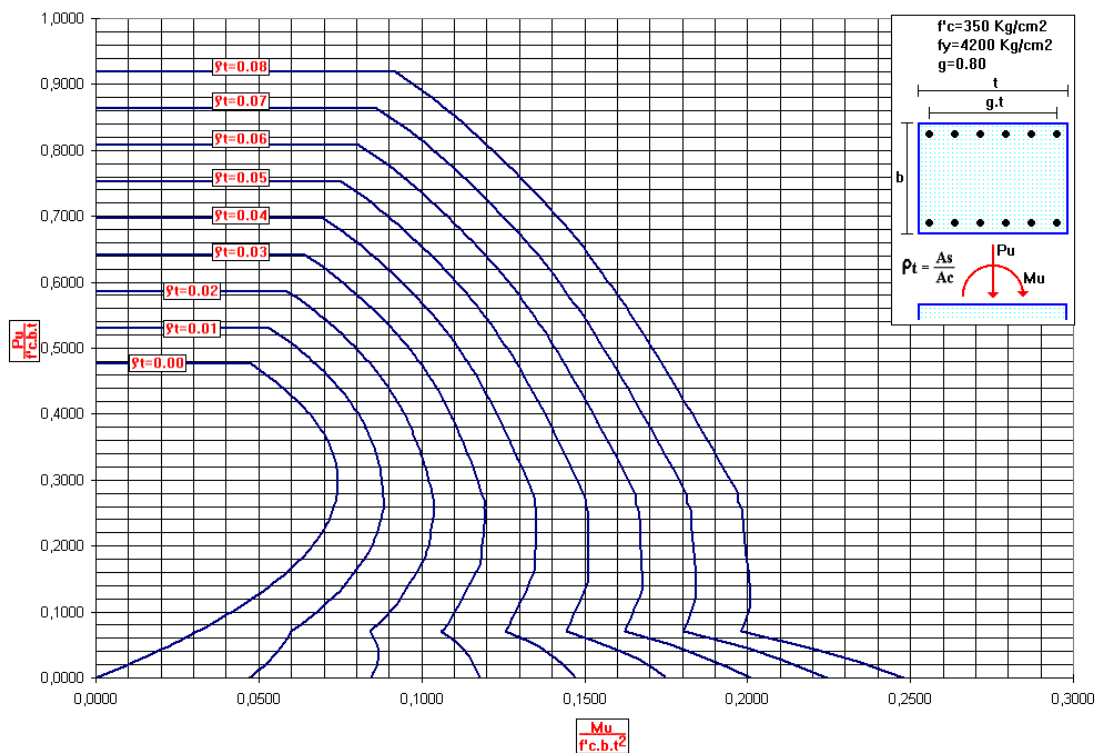


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

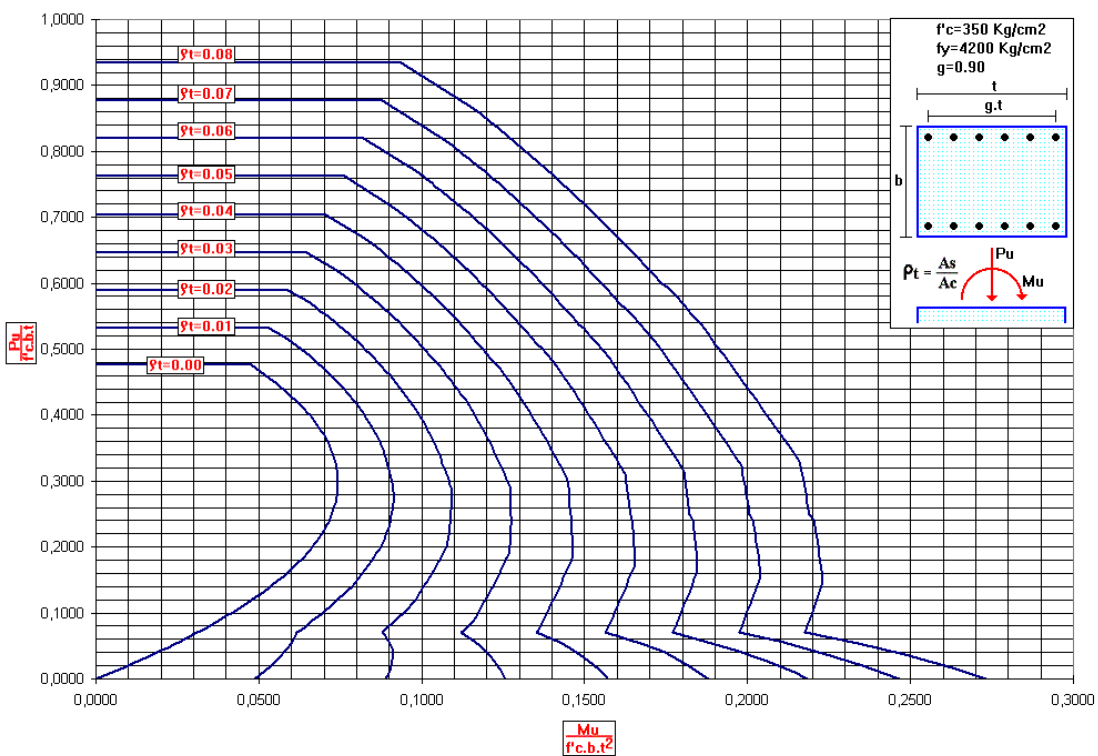
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 47)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 48)



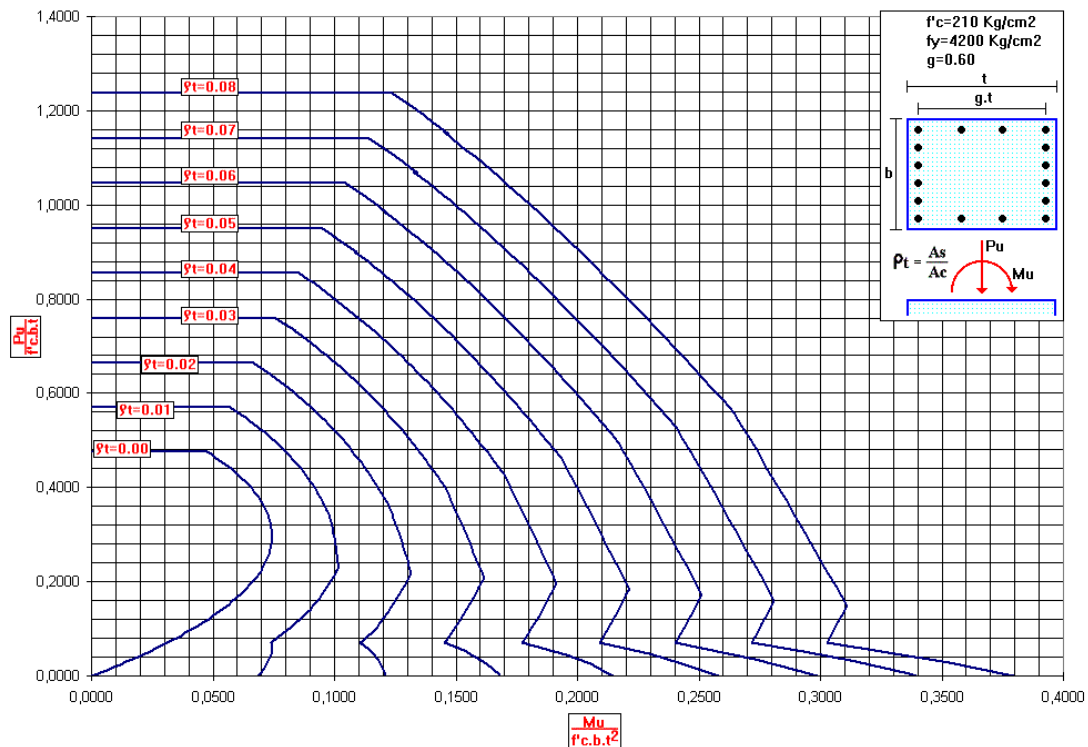


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

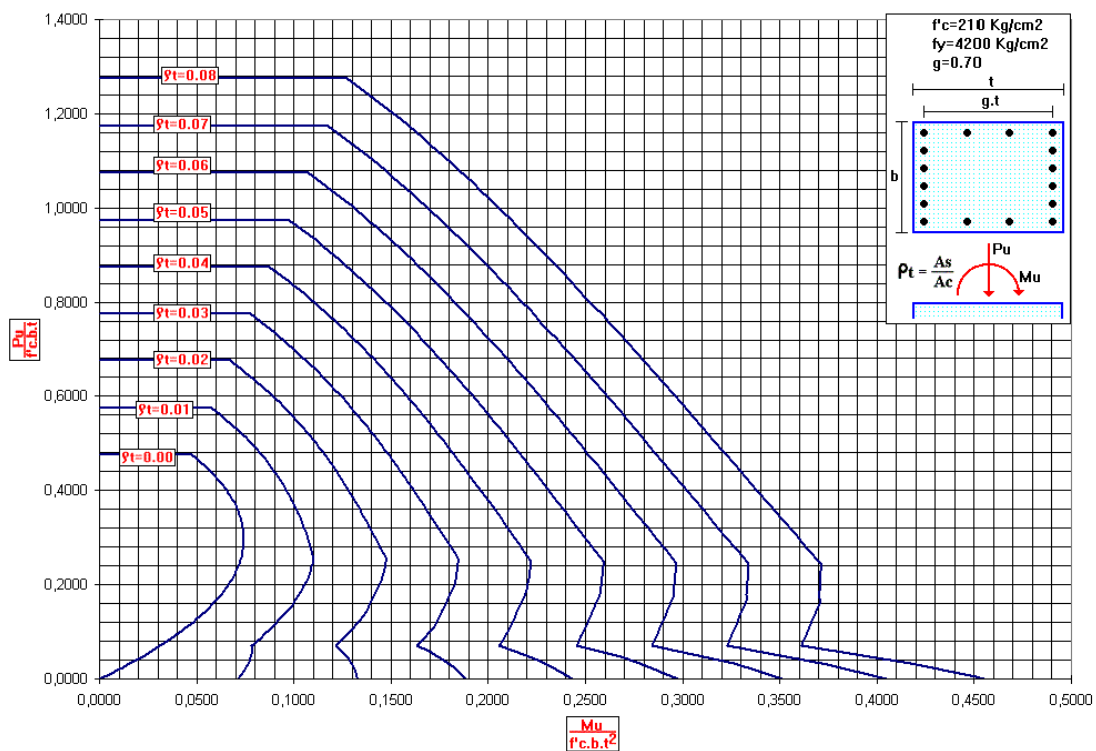
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 49)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 50)



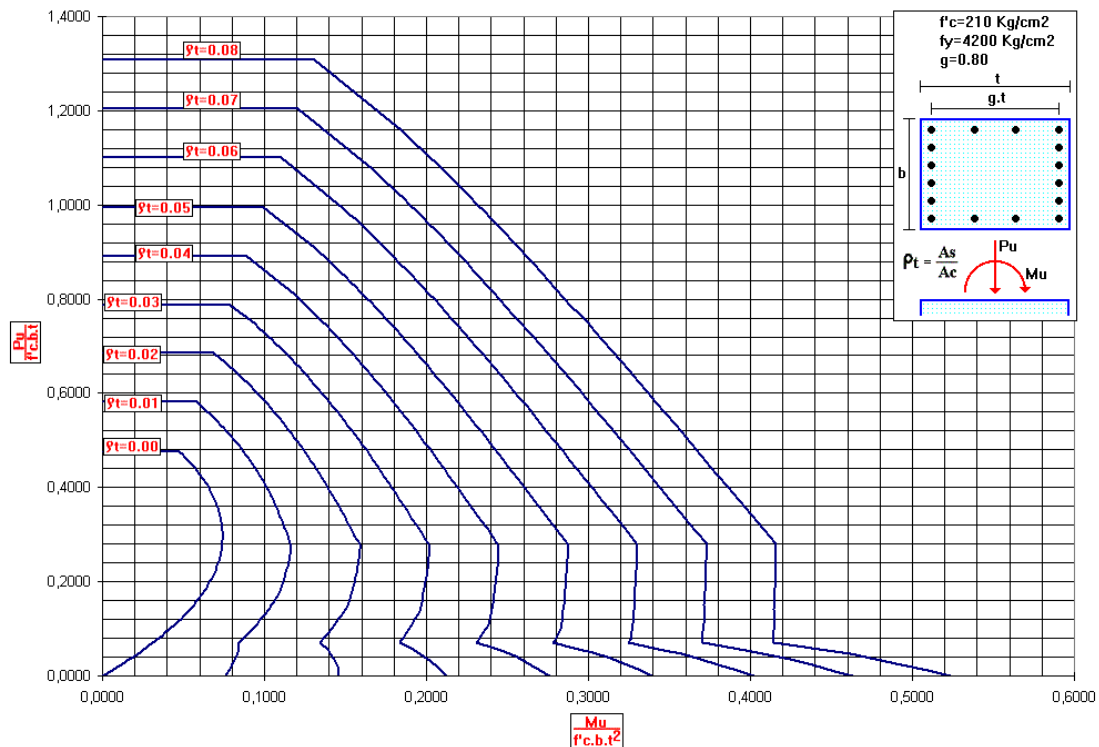


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

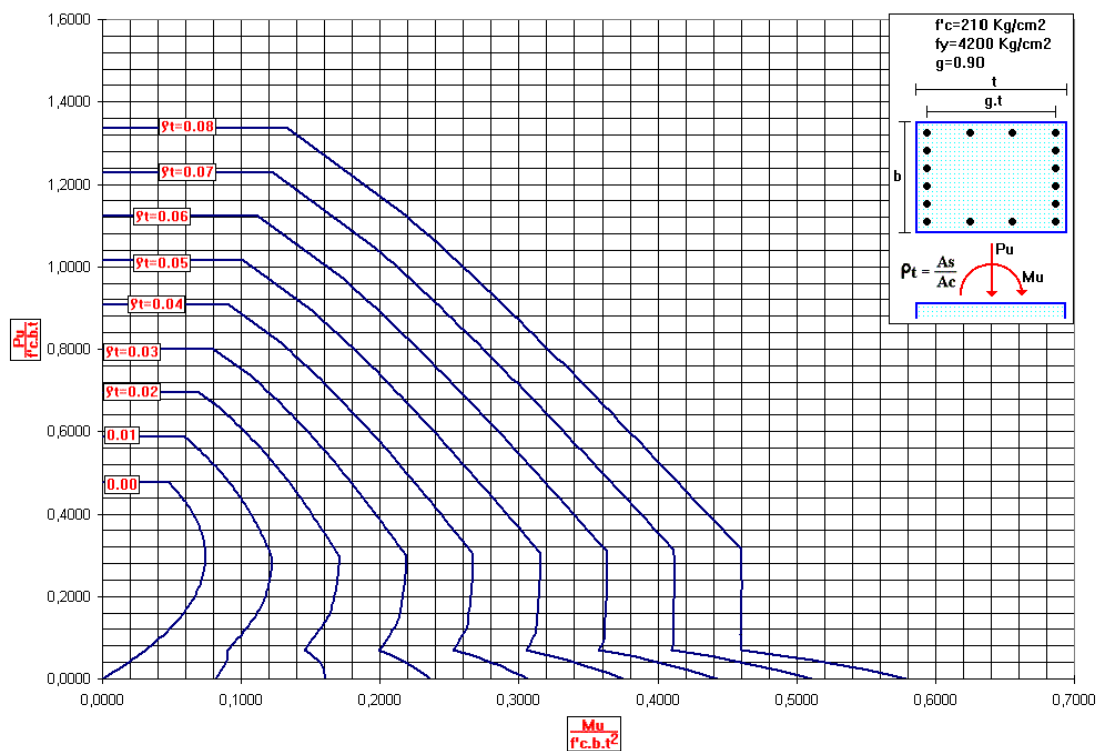
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 51)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 52)



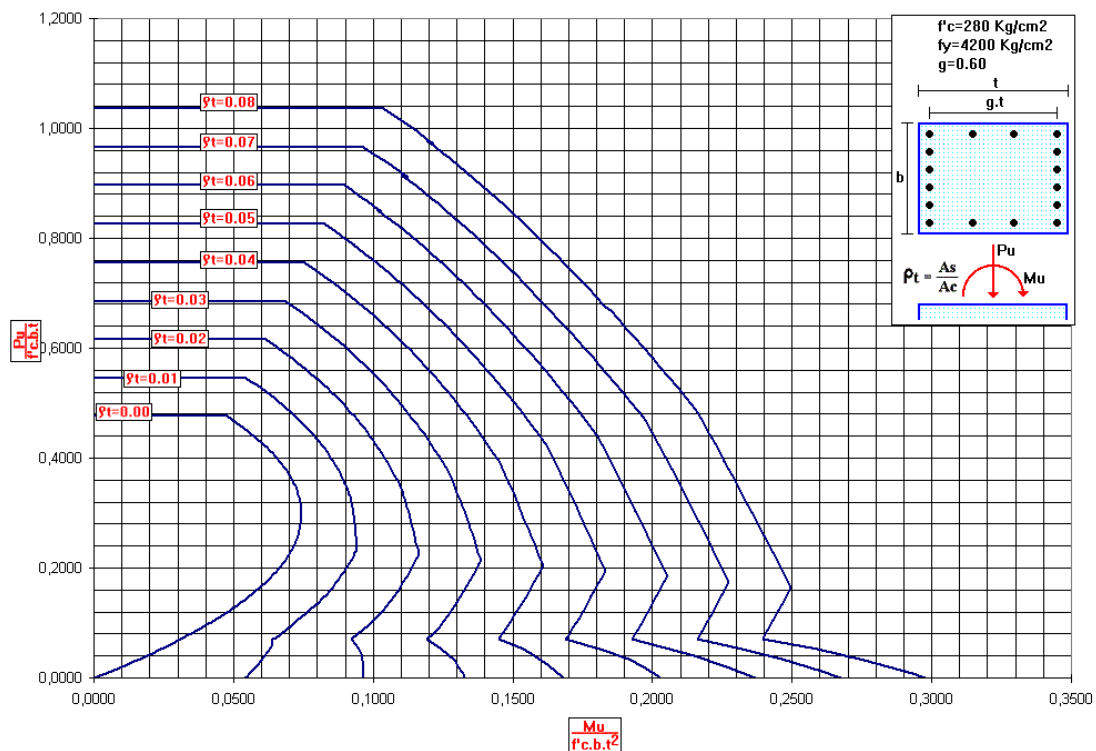


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

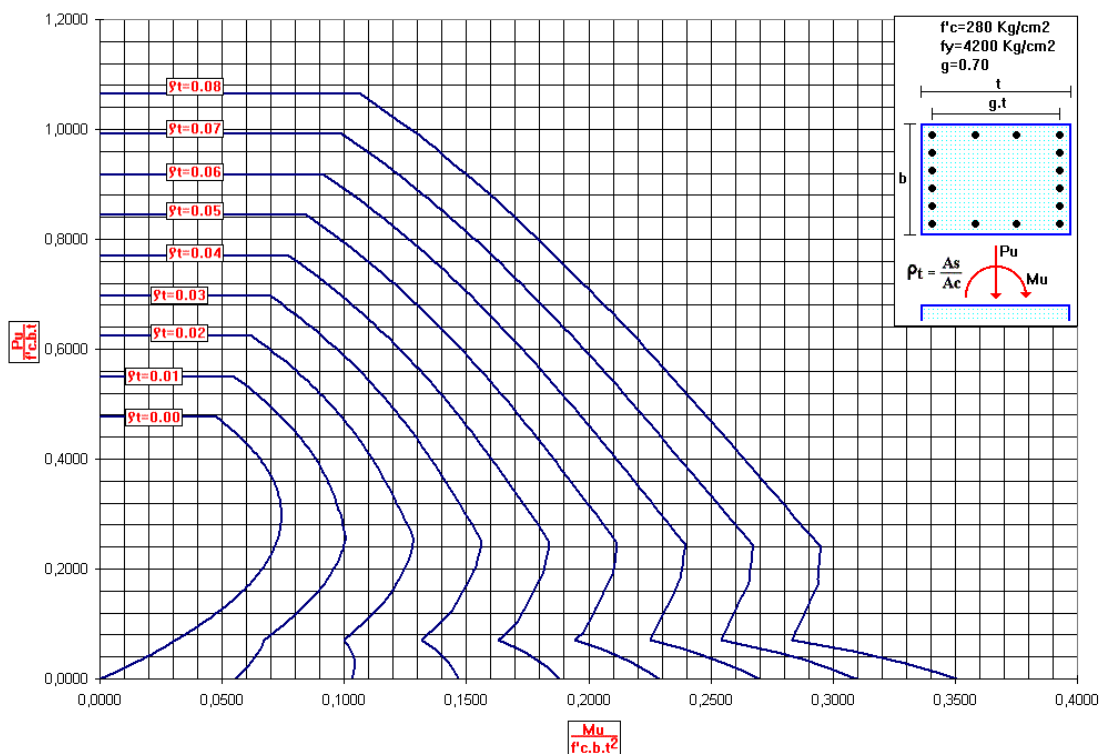
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 53)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 54)



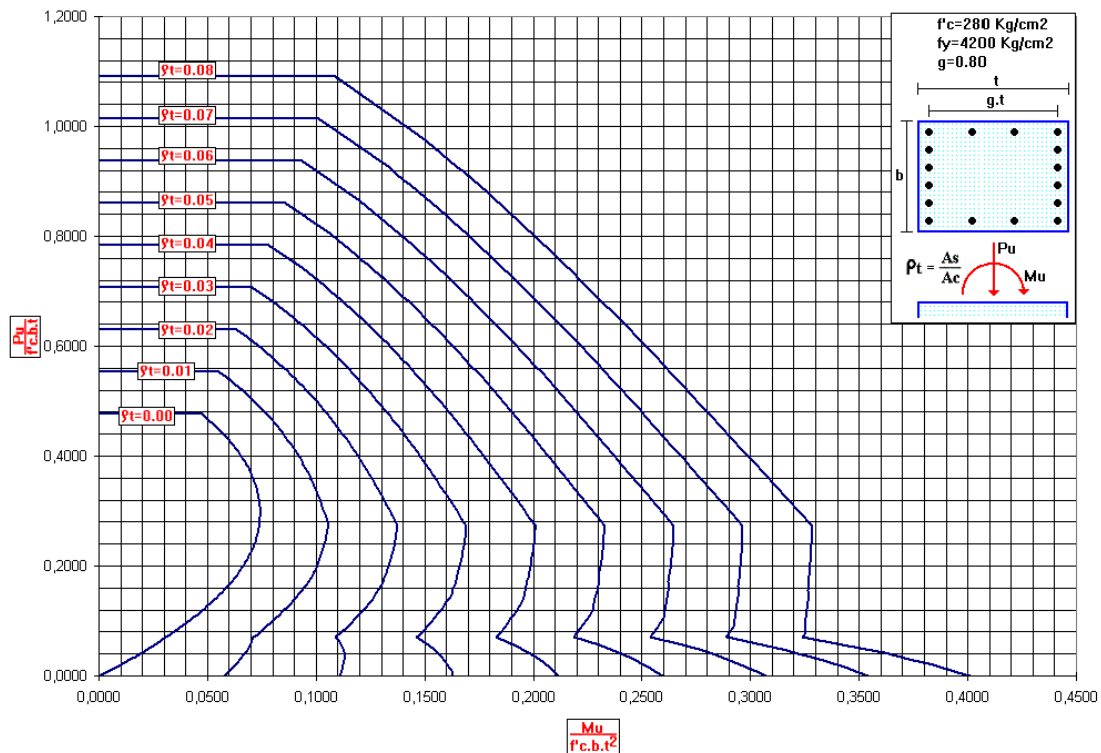


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

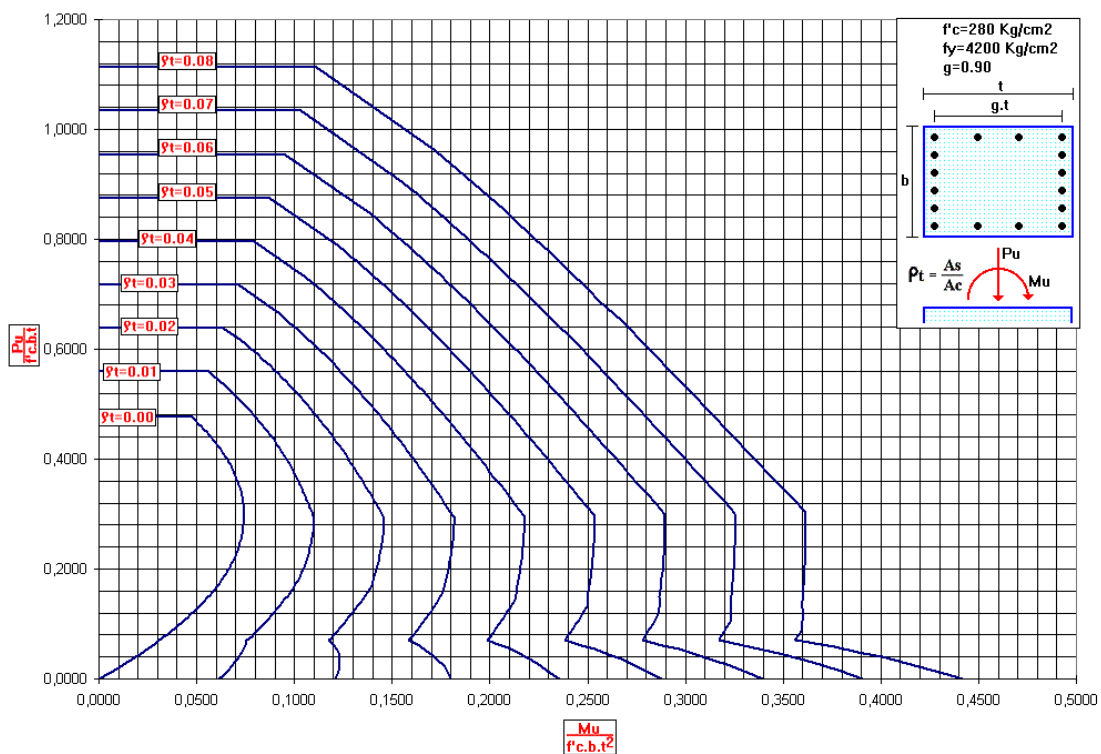
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 55)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 56)



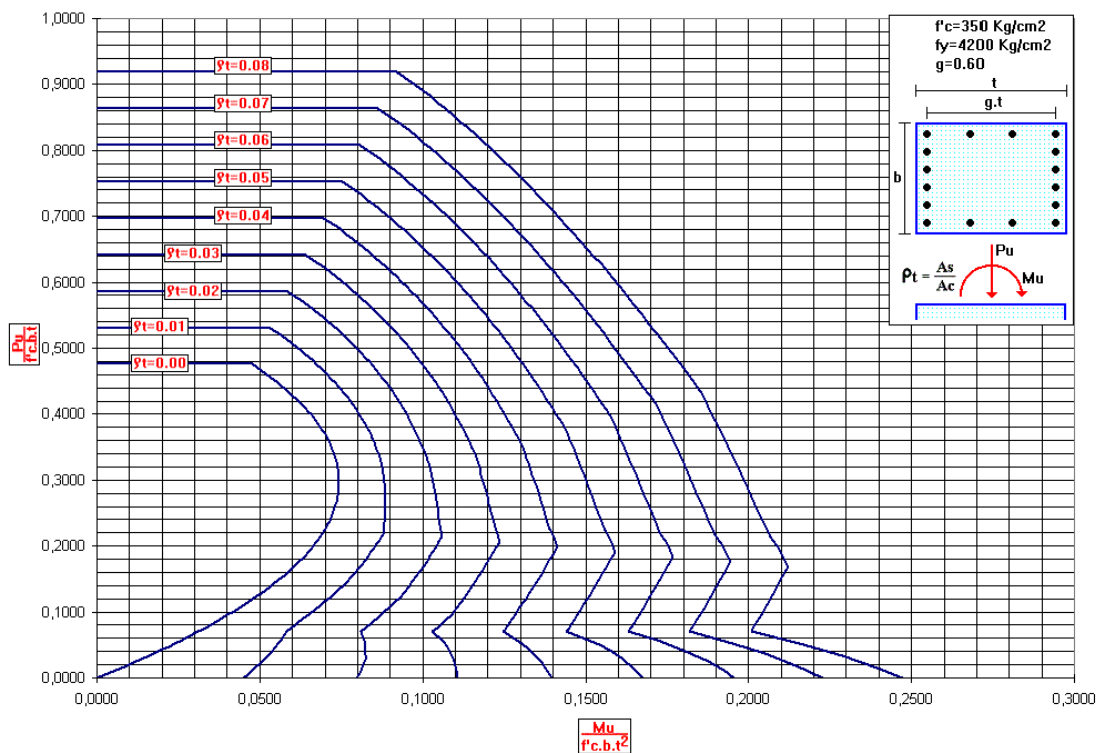


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

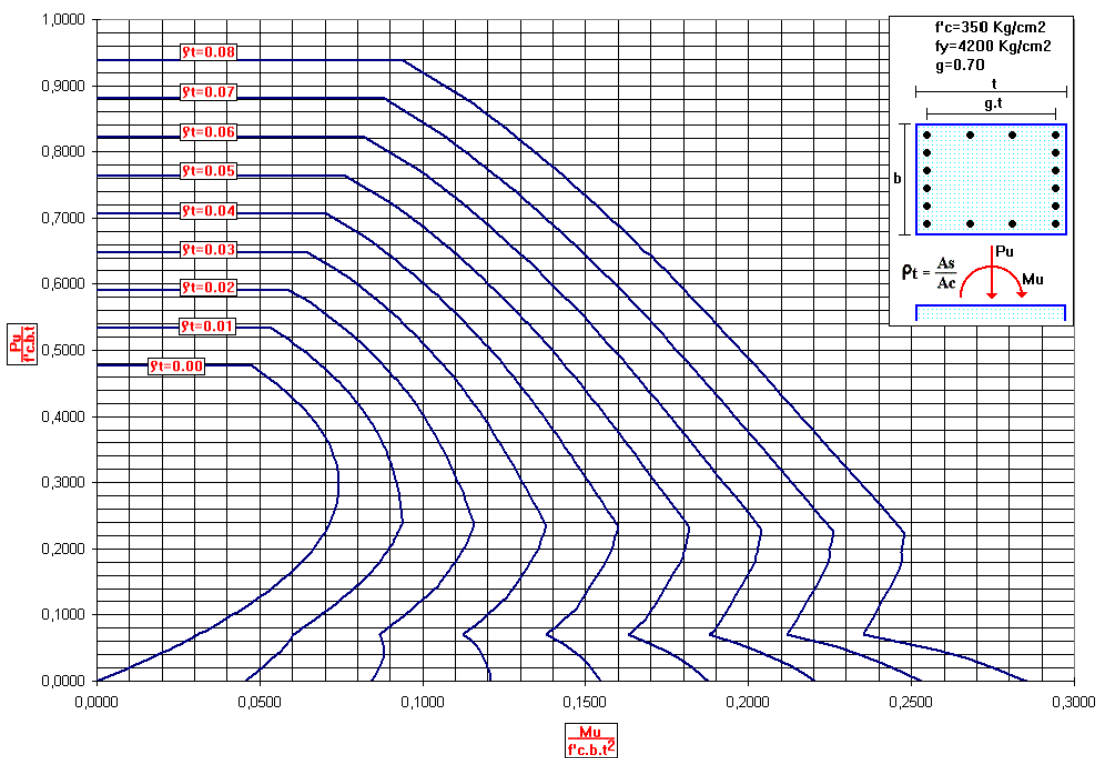
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 57)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 58)



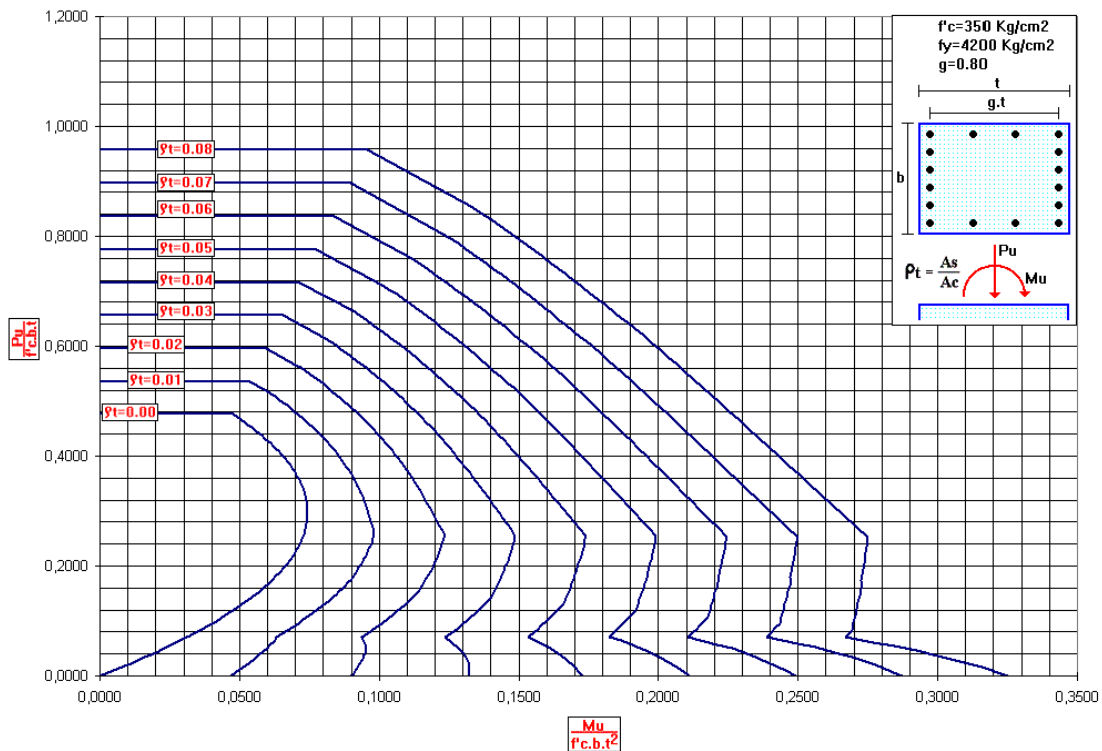


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

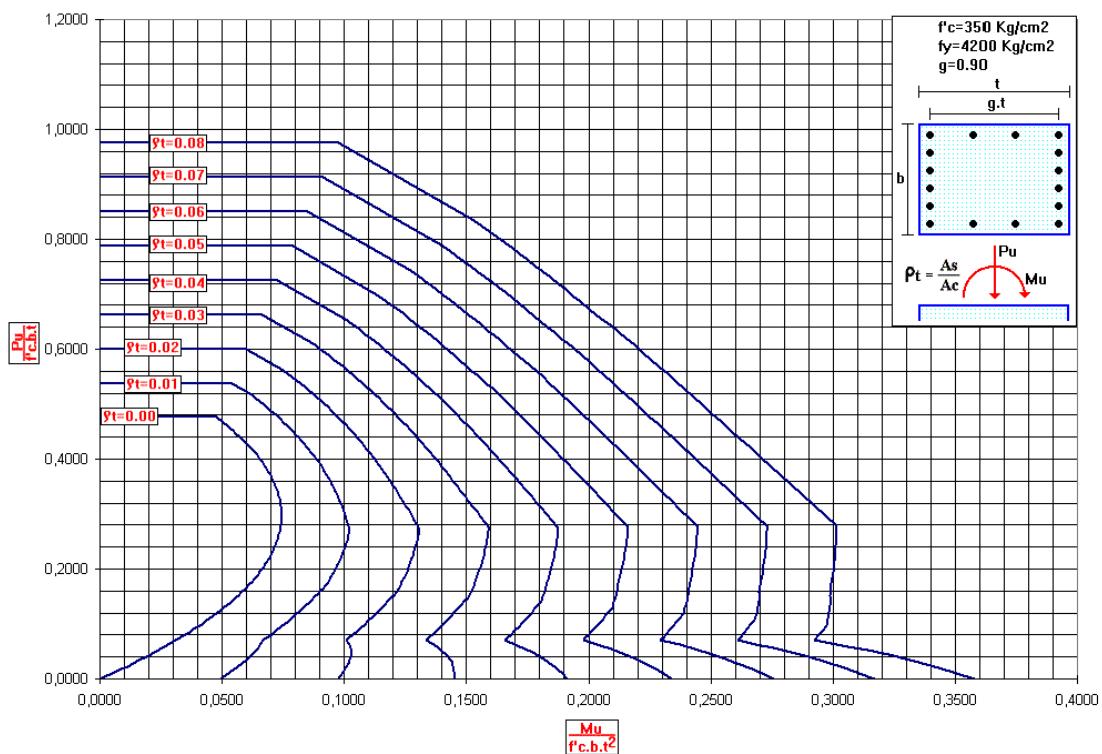
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 59)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 60)



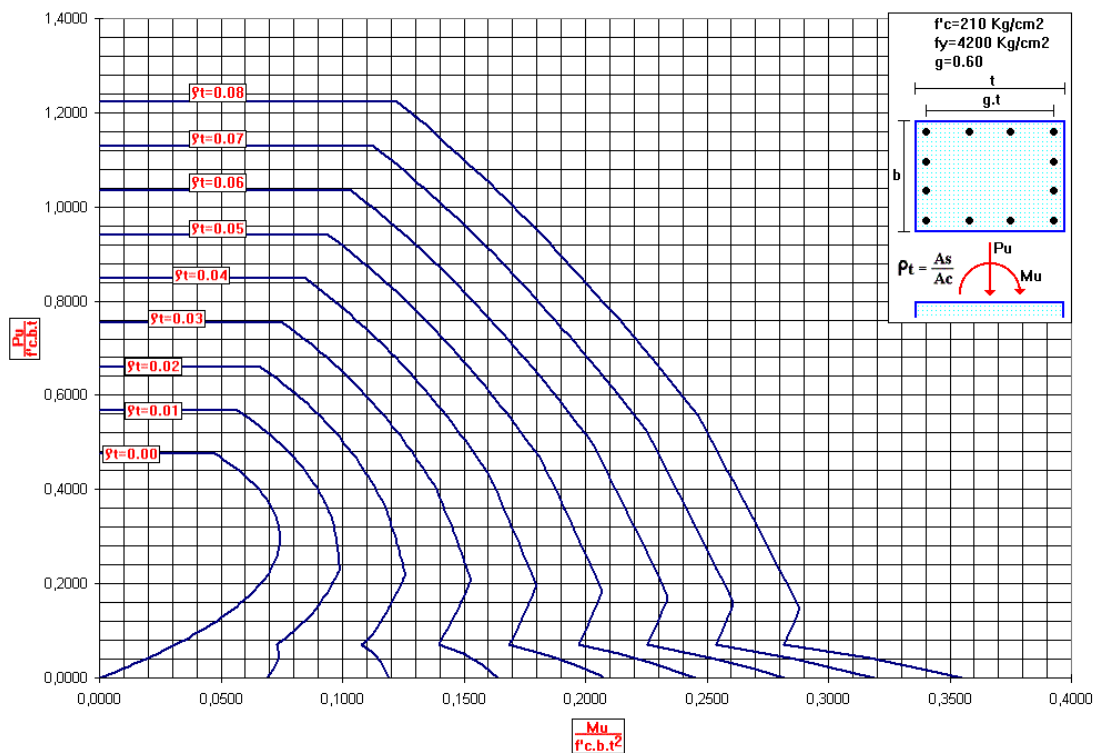


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

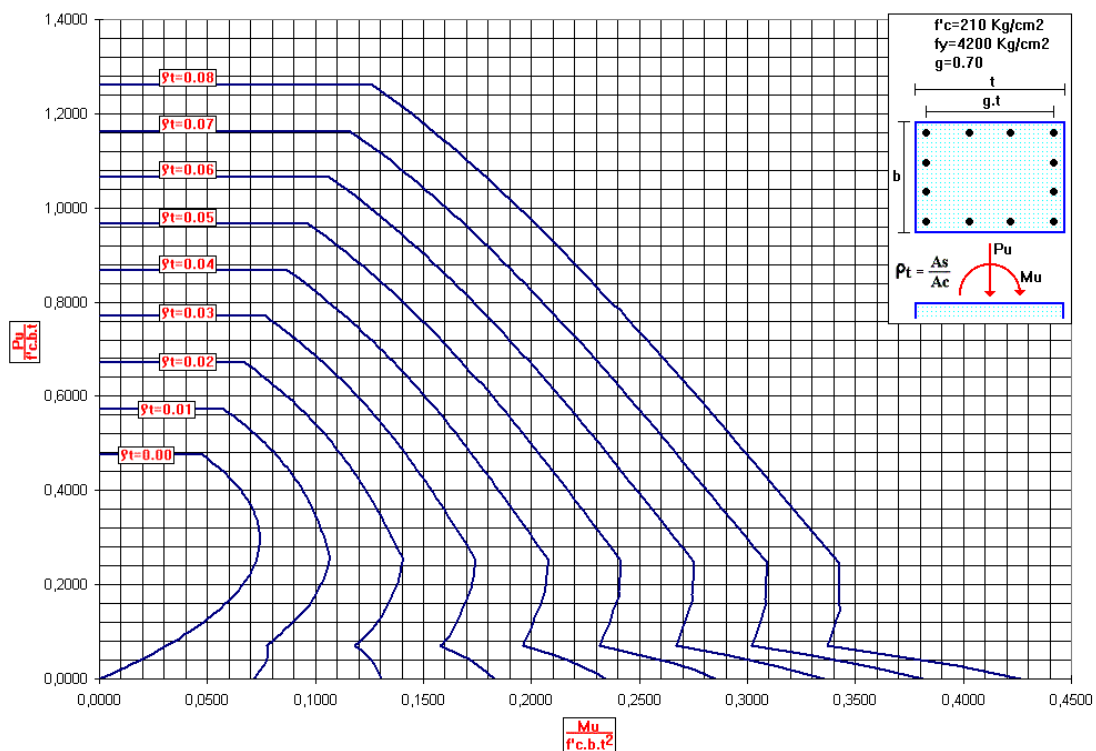
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 61)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 62)



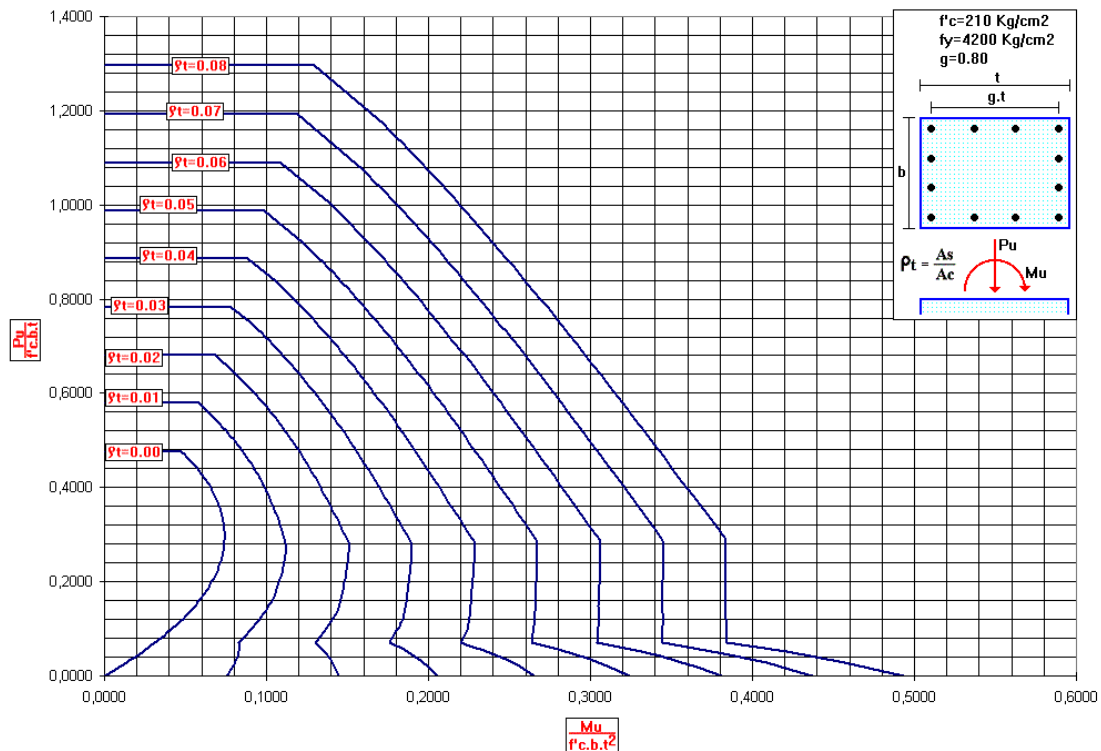


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

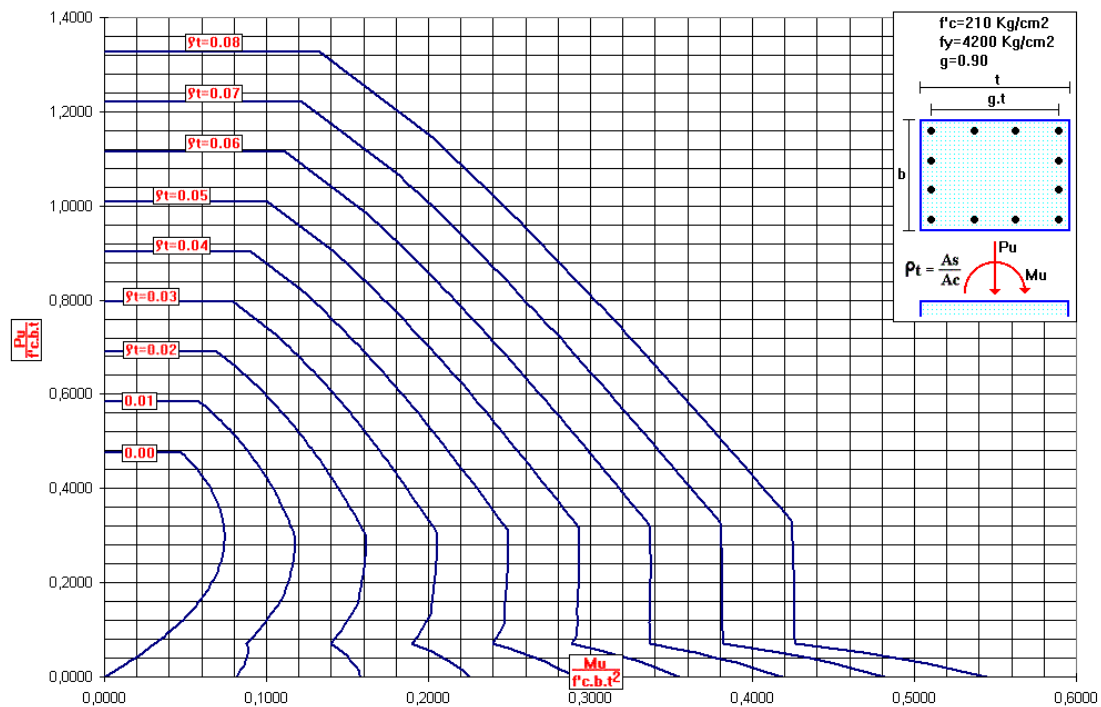
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 63)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 64)



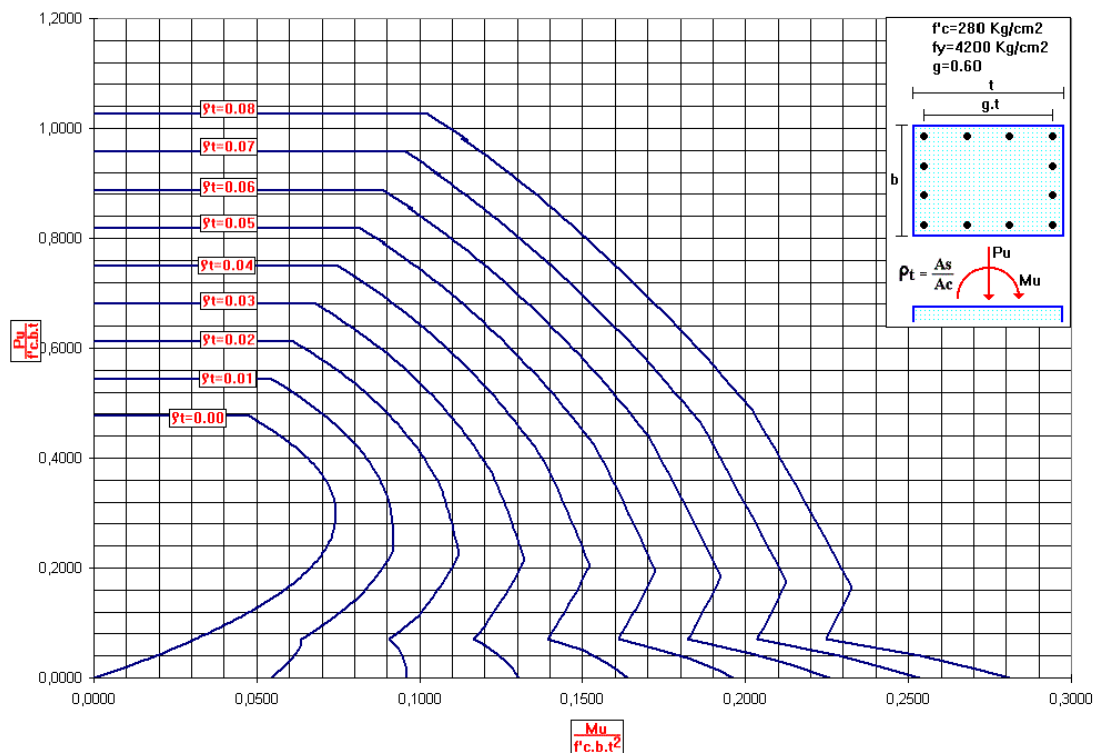


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

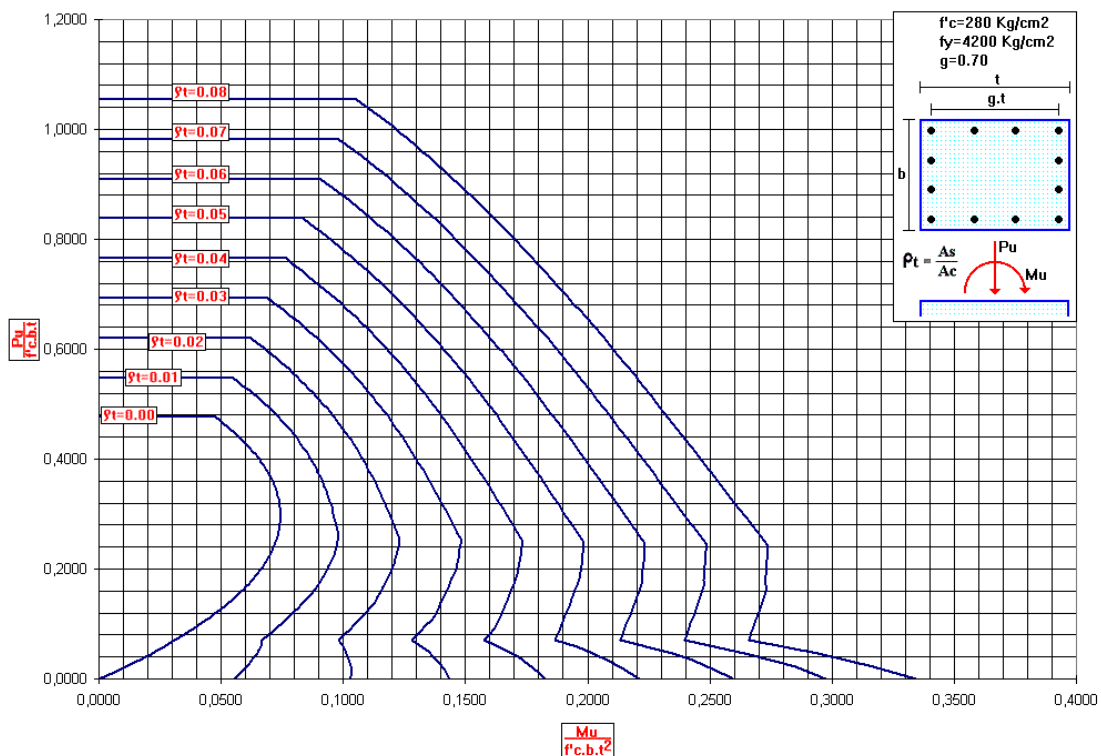
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 65)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 66)



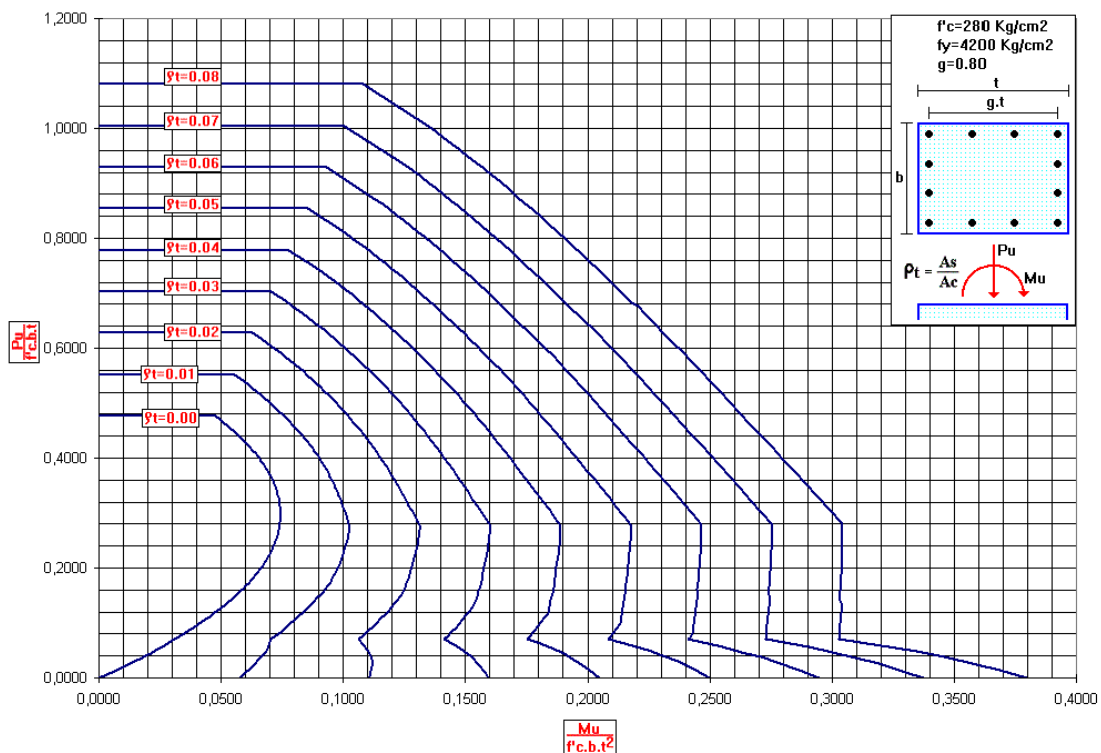


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

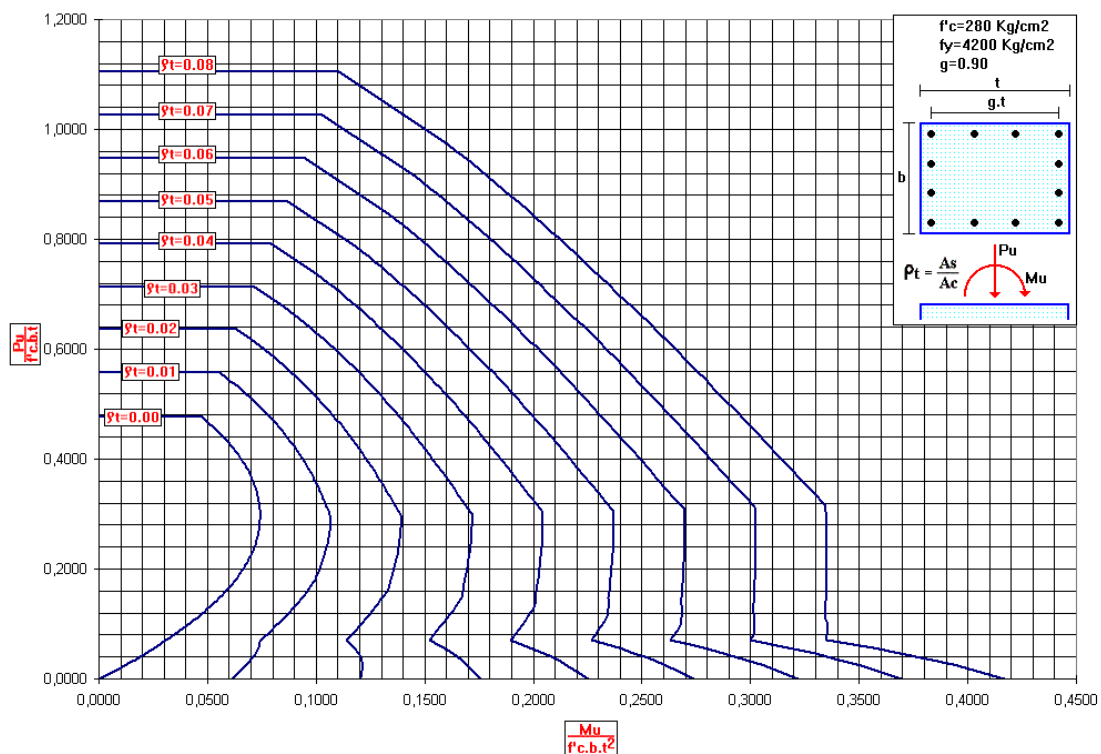
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 67)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 68)



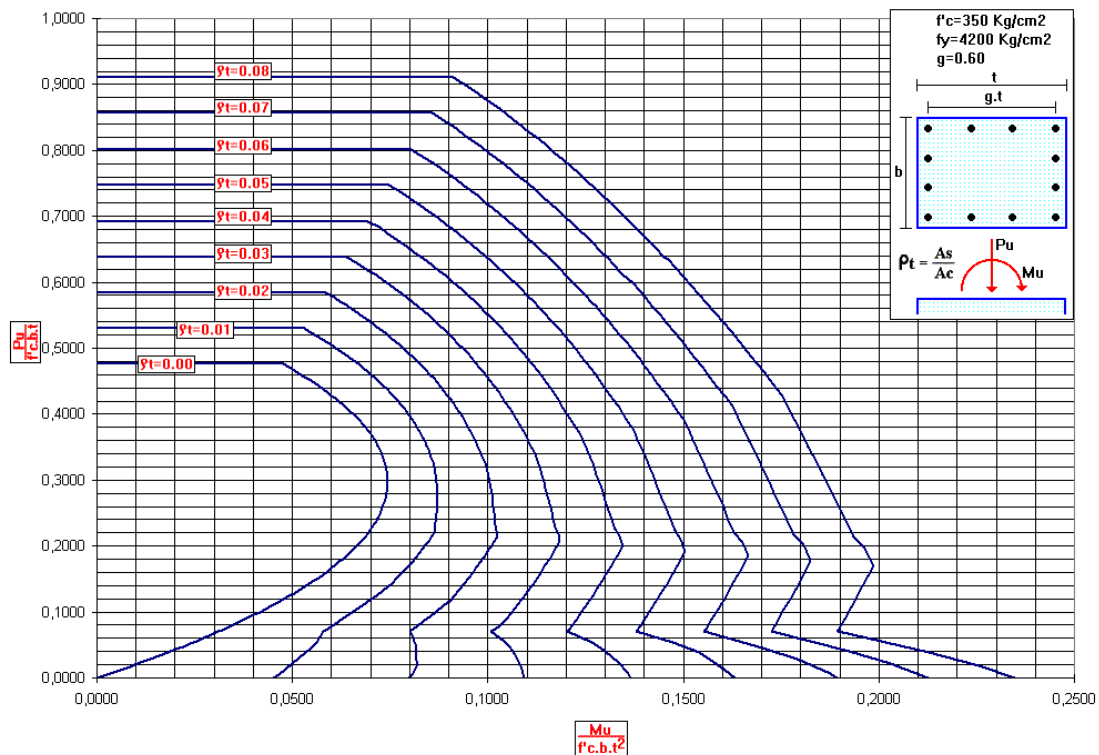


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

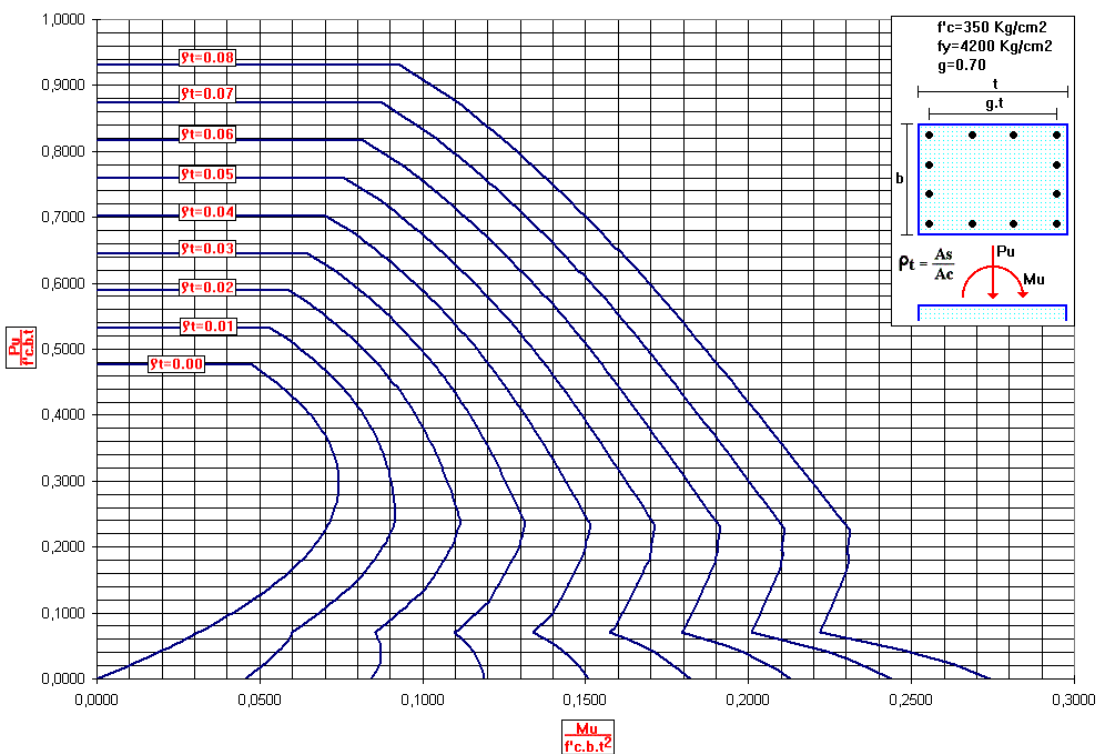
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 69)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 70)



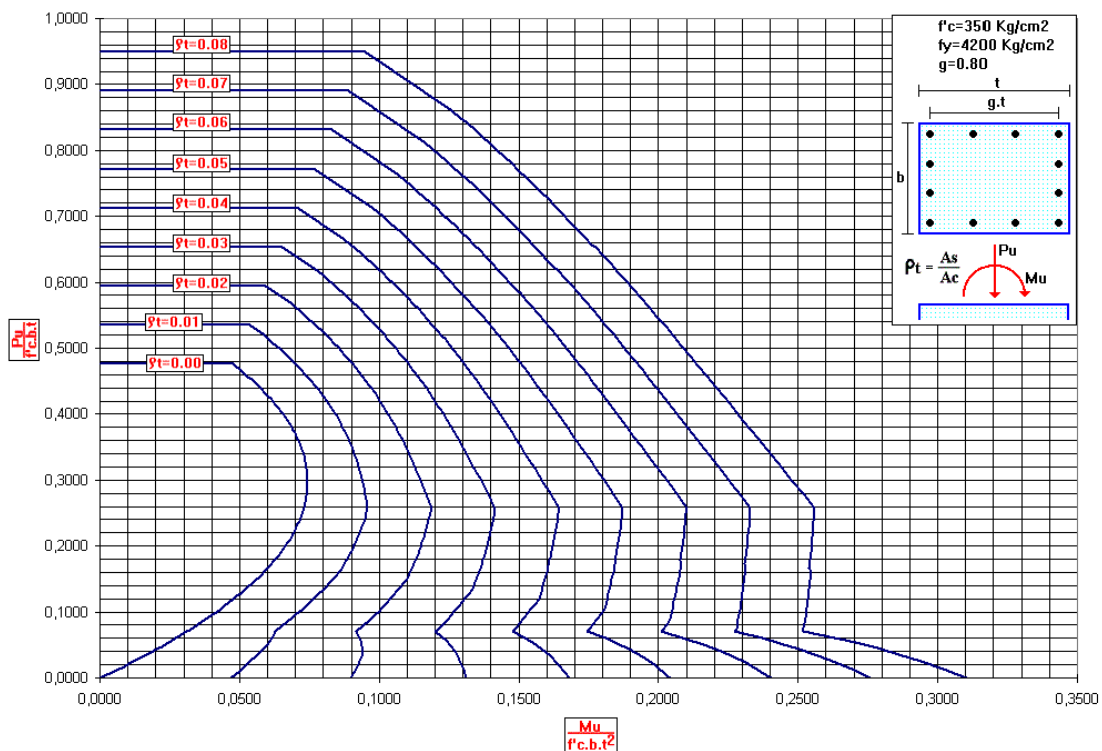


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

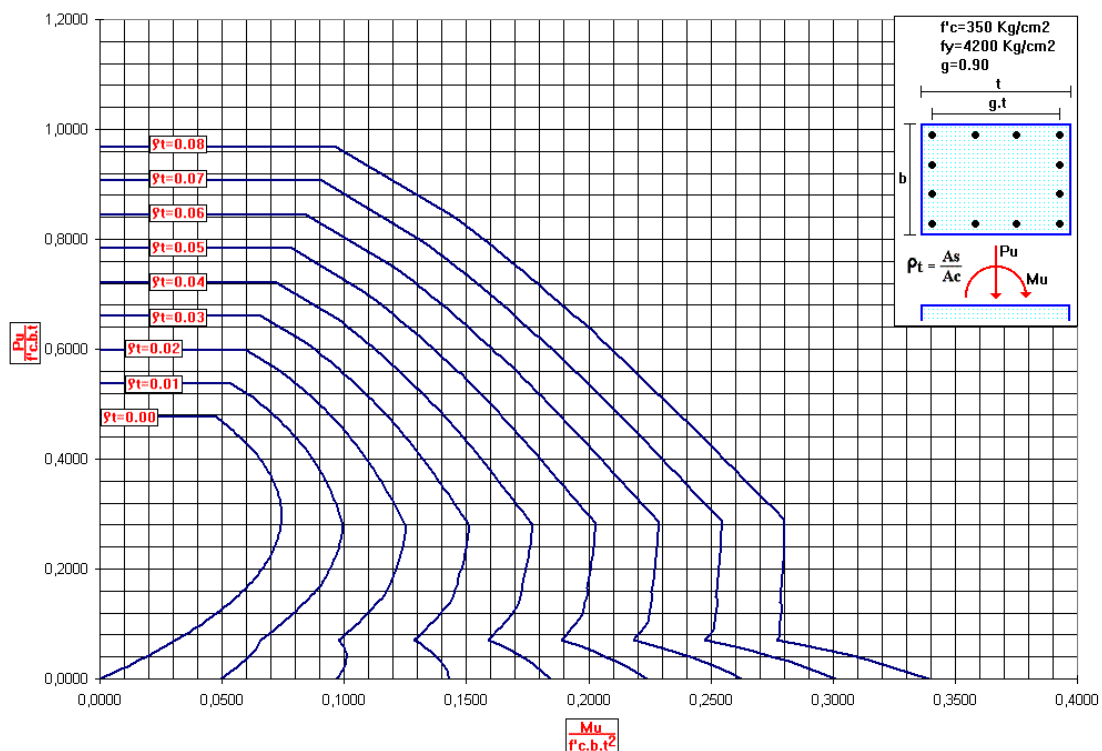
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 71)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 72)



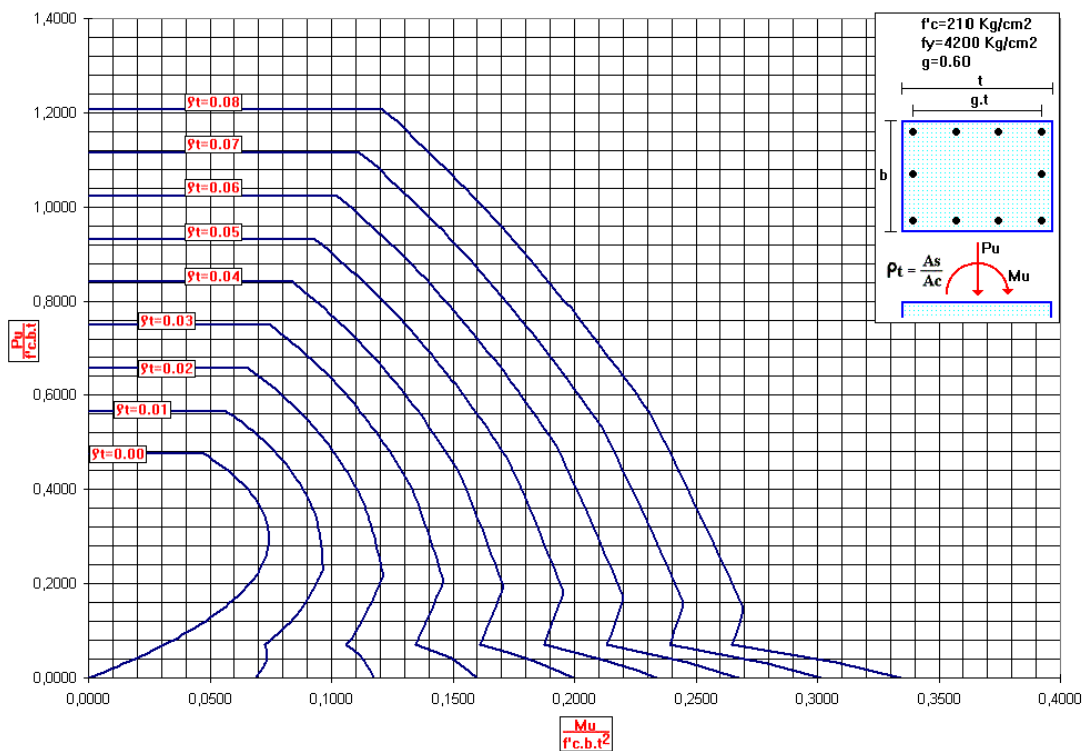


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

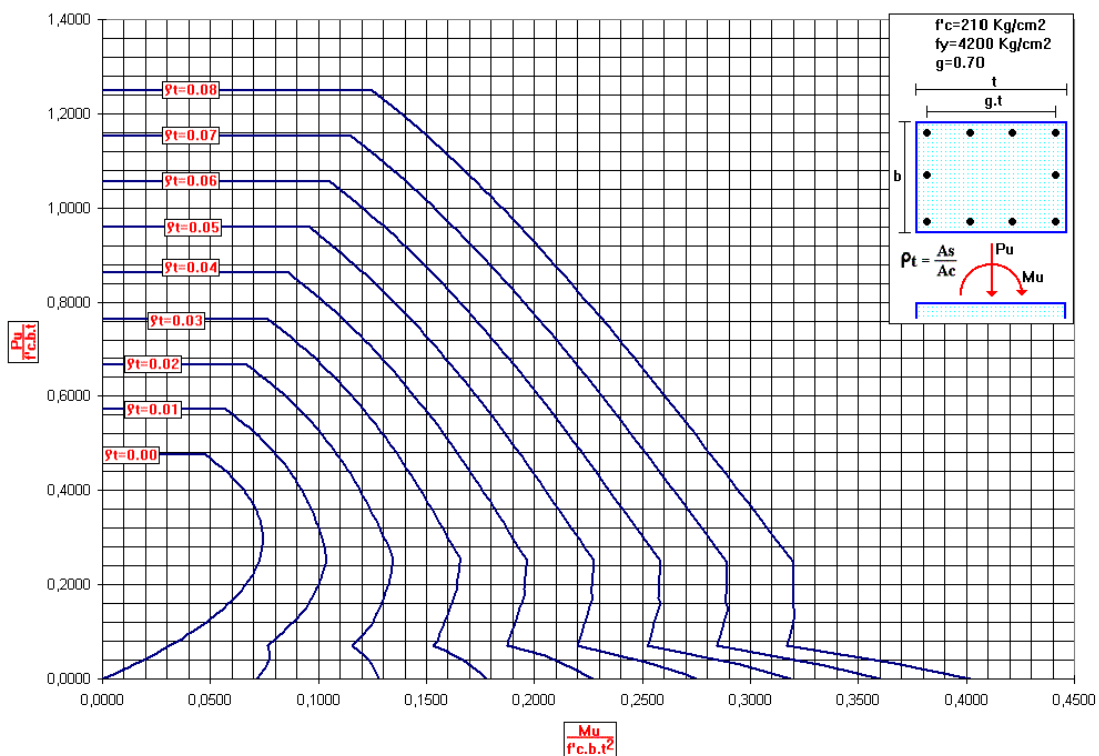
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 73)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 74)



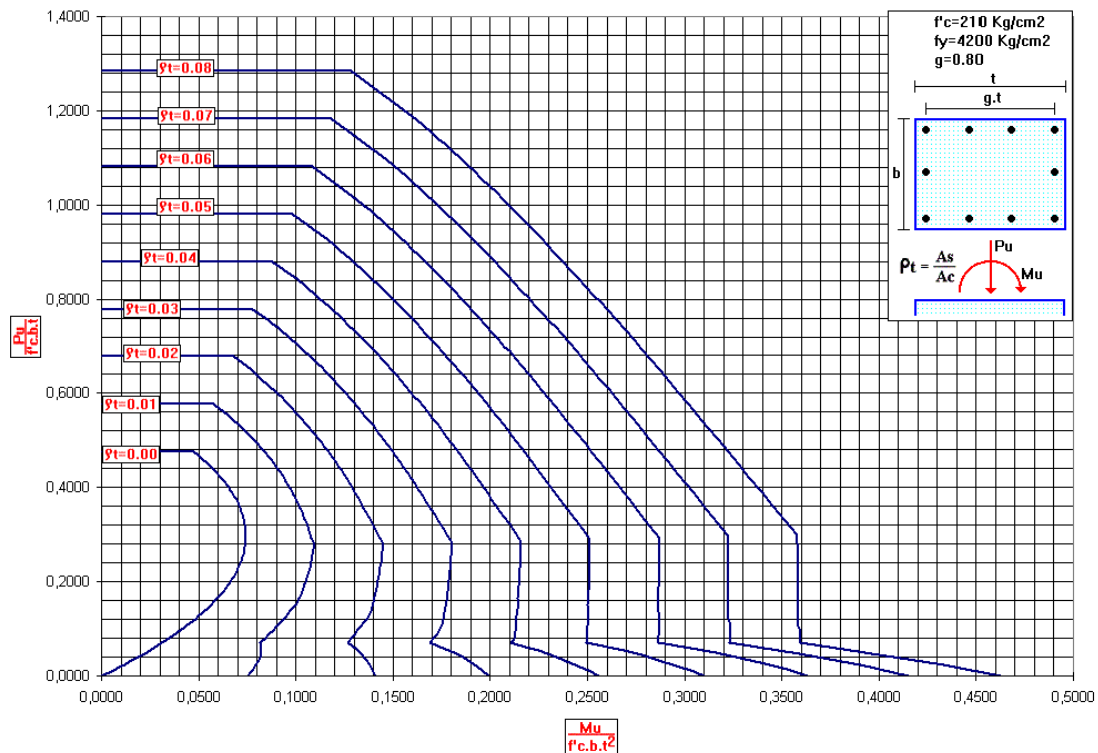


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

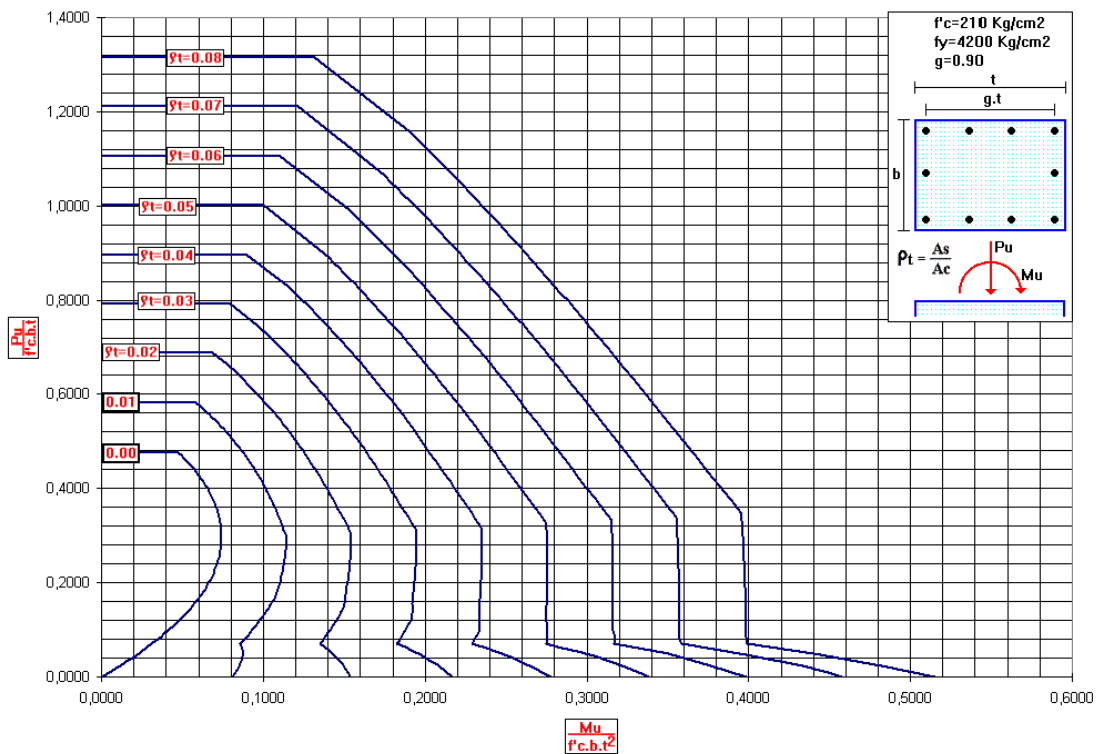
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 75)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 76)



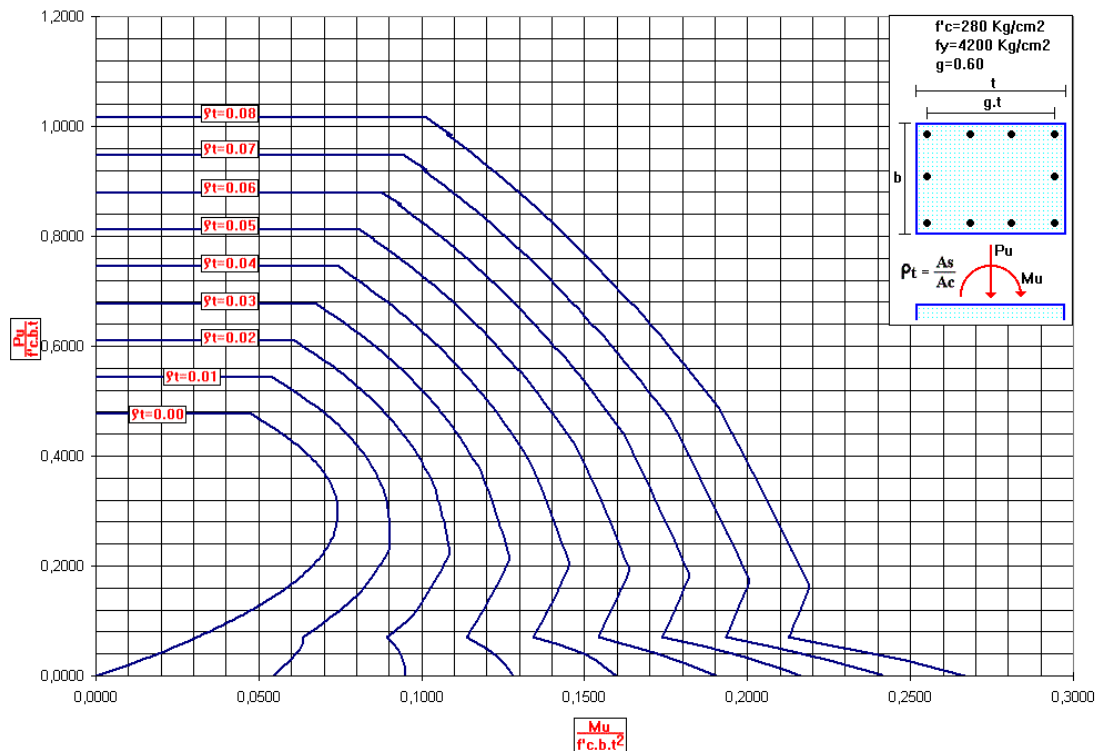


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

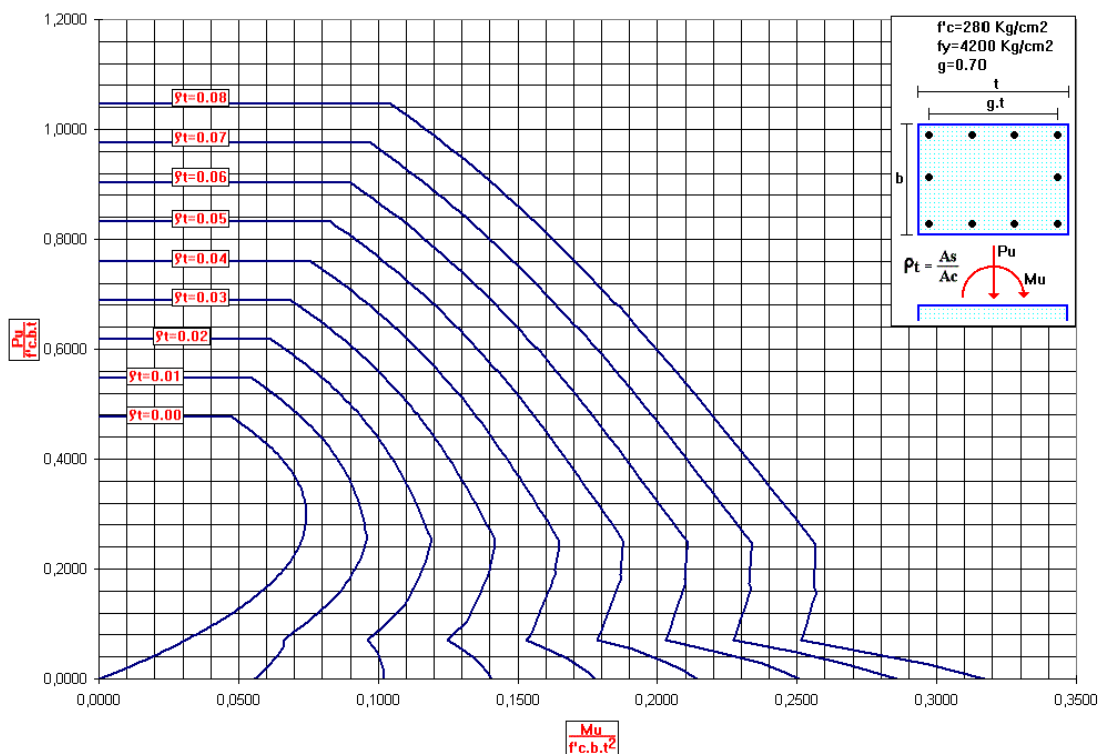
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 77)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 78)



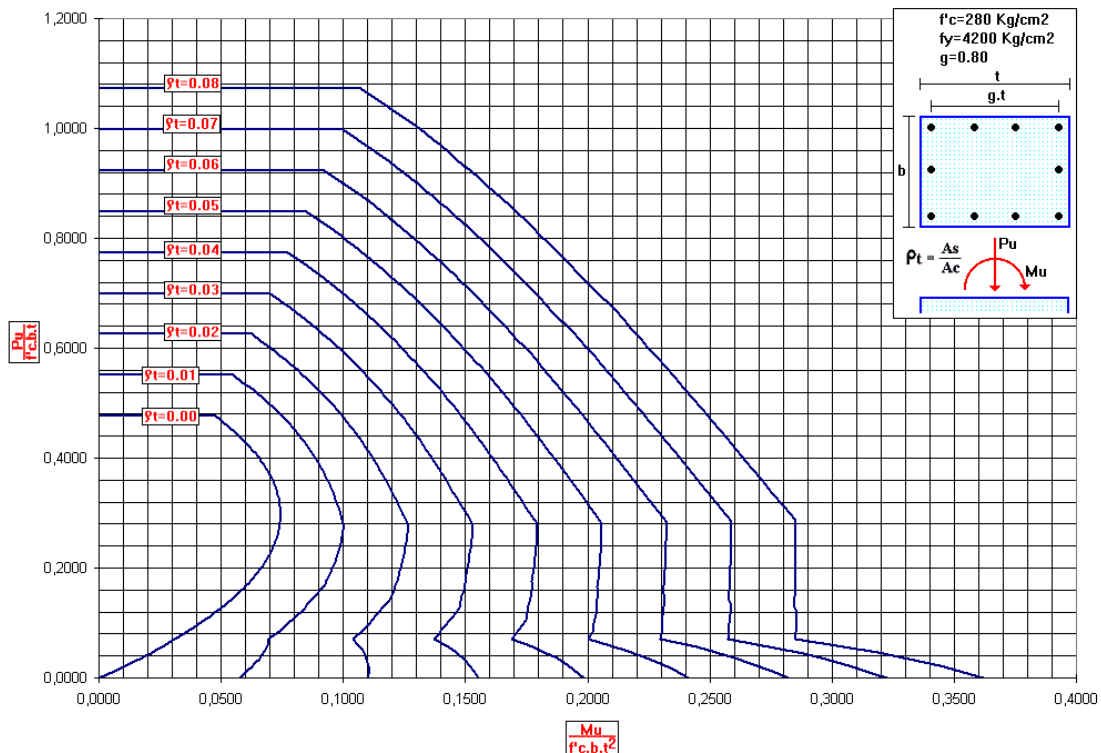


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

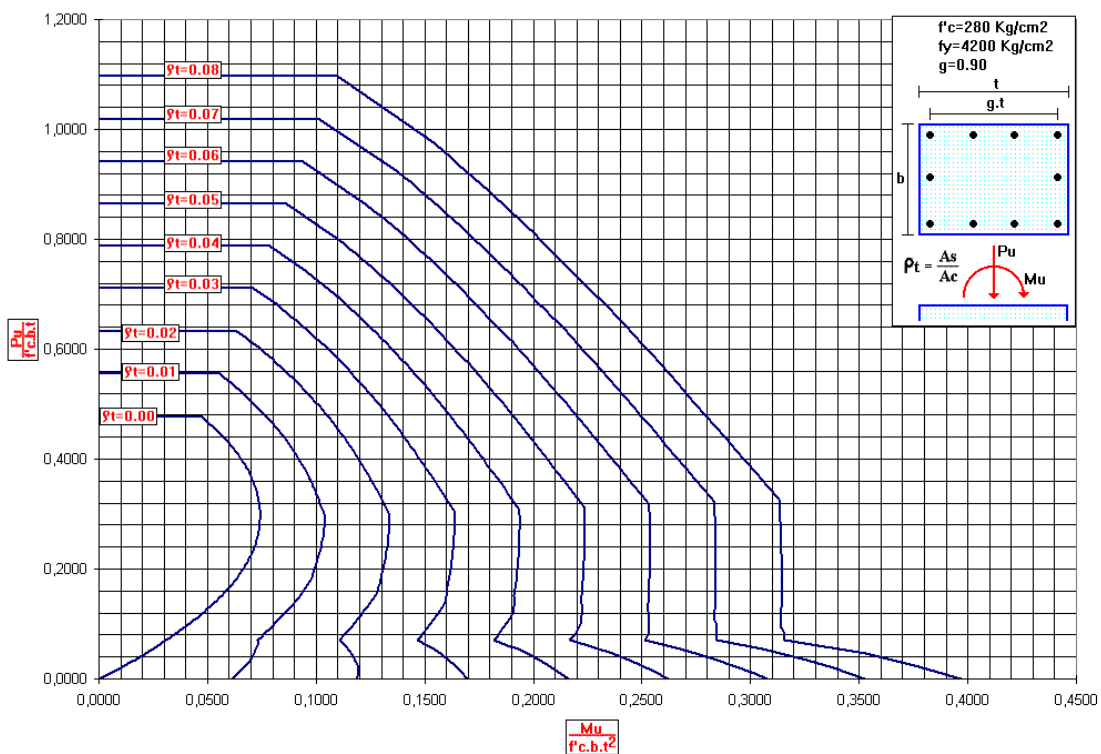
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 79)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 80)



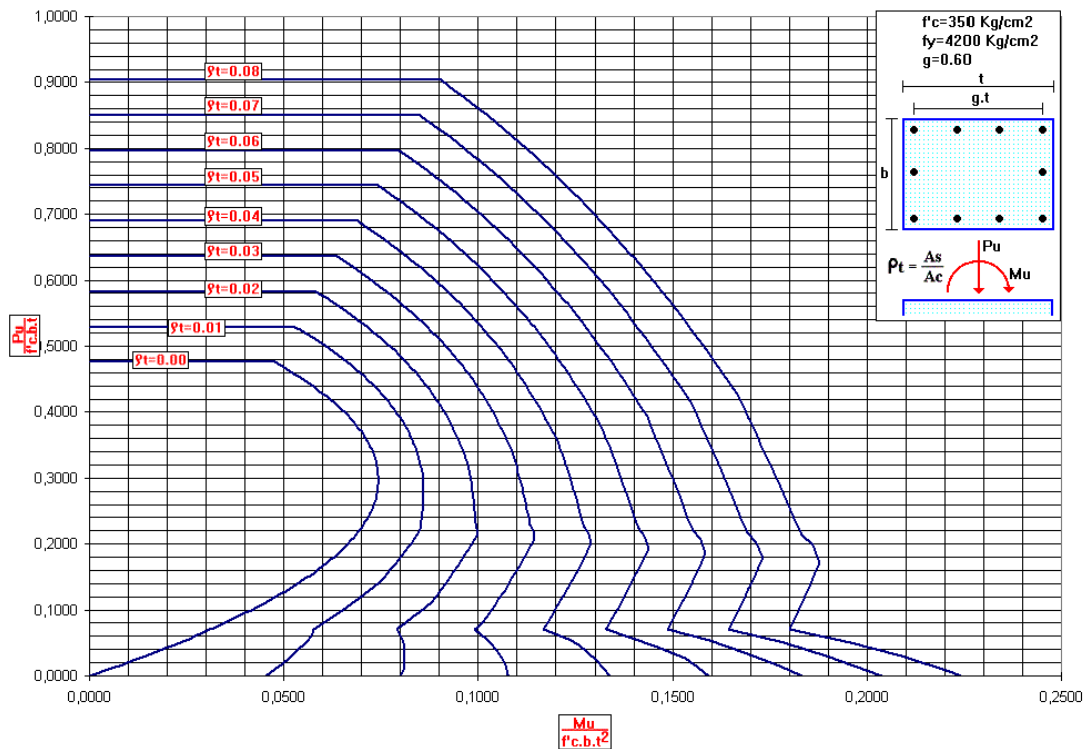


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

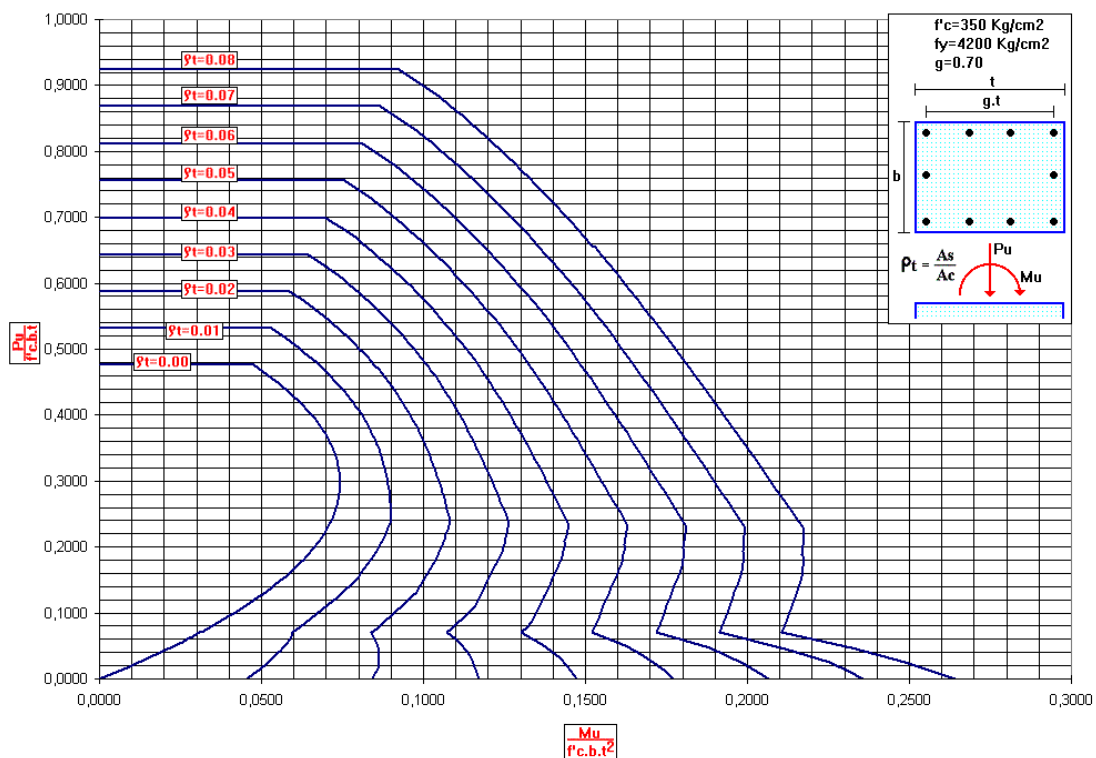
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 81)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 82)



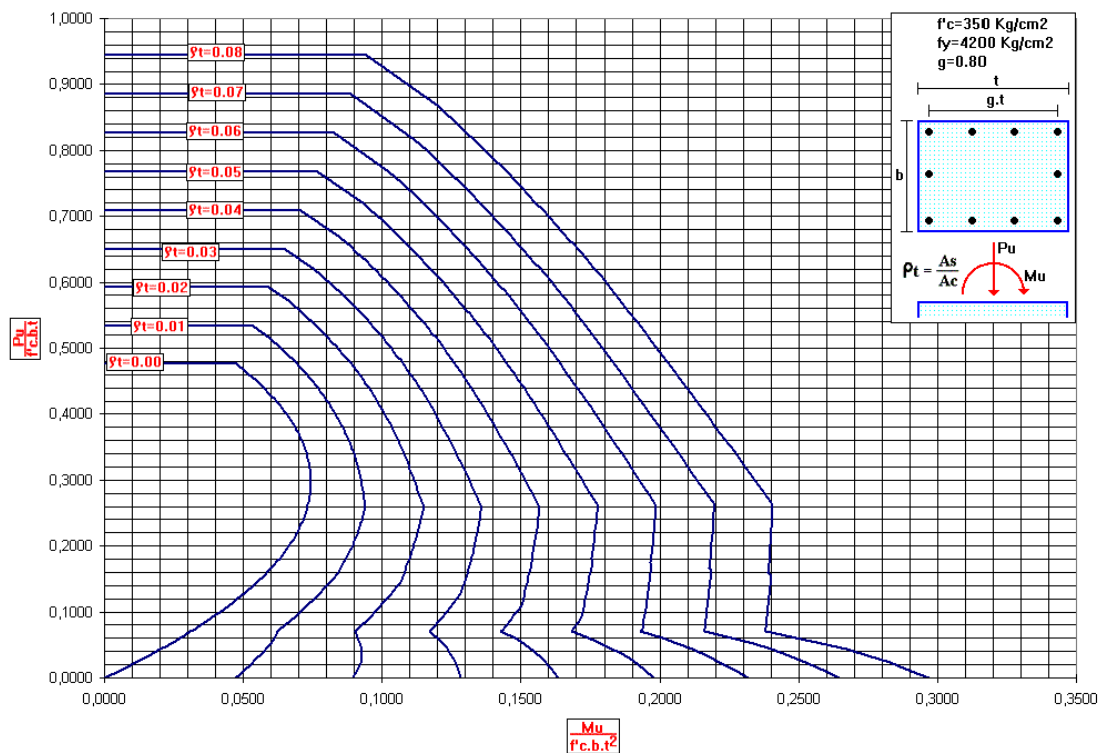


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

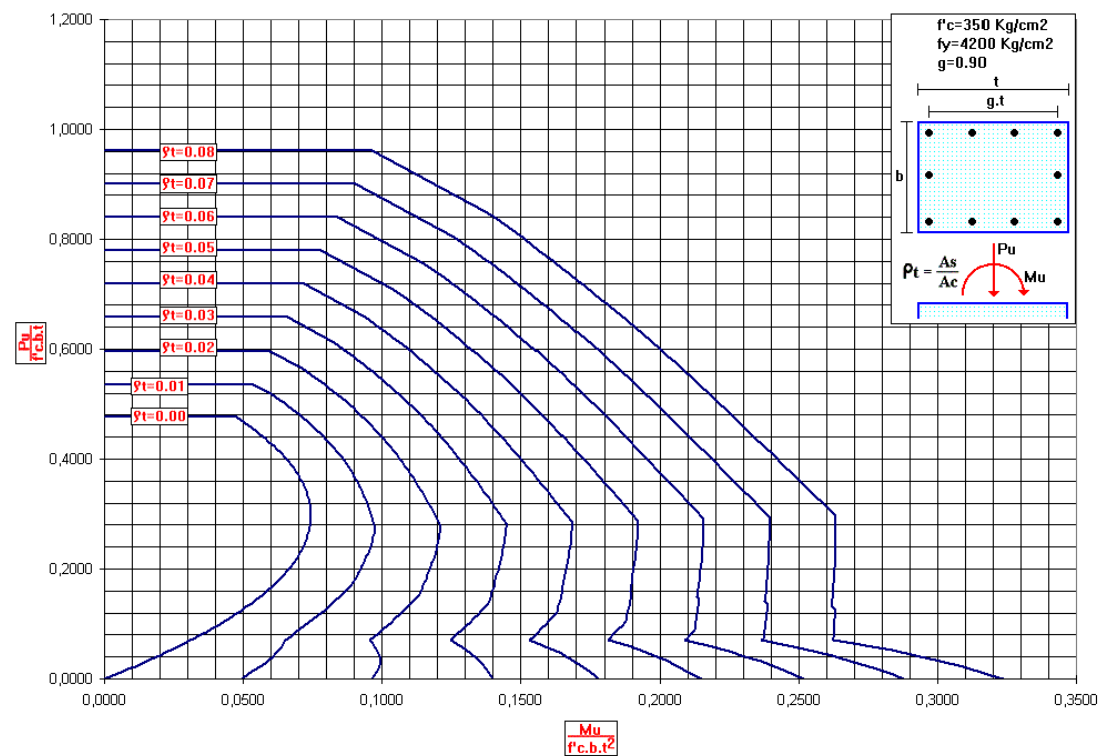
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 83)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 84)





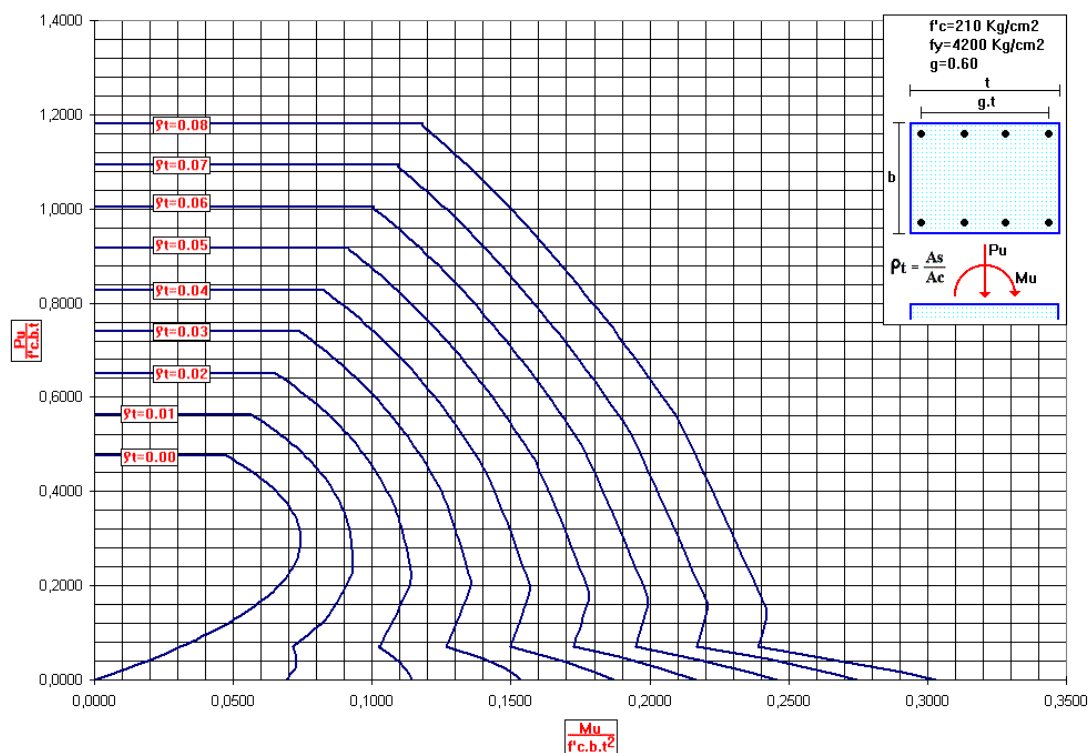
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

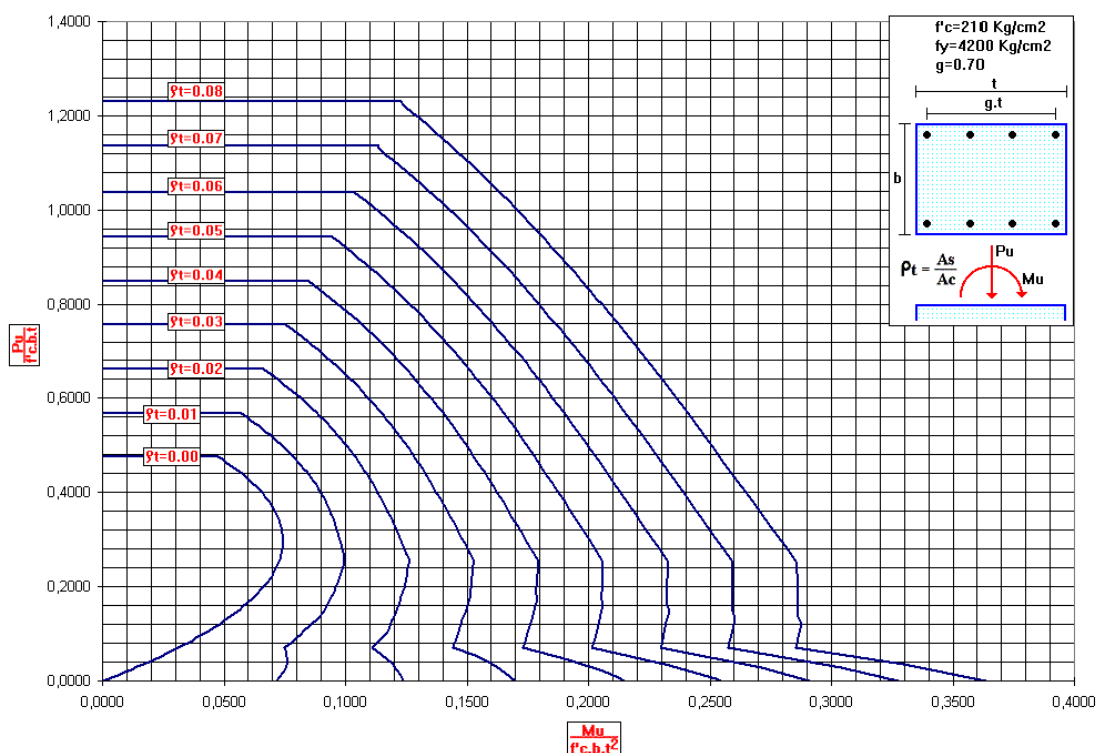
DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 85)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 86)



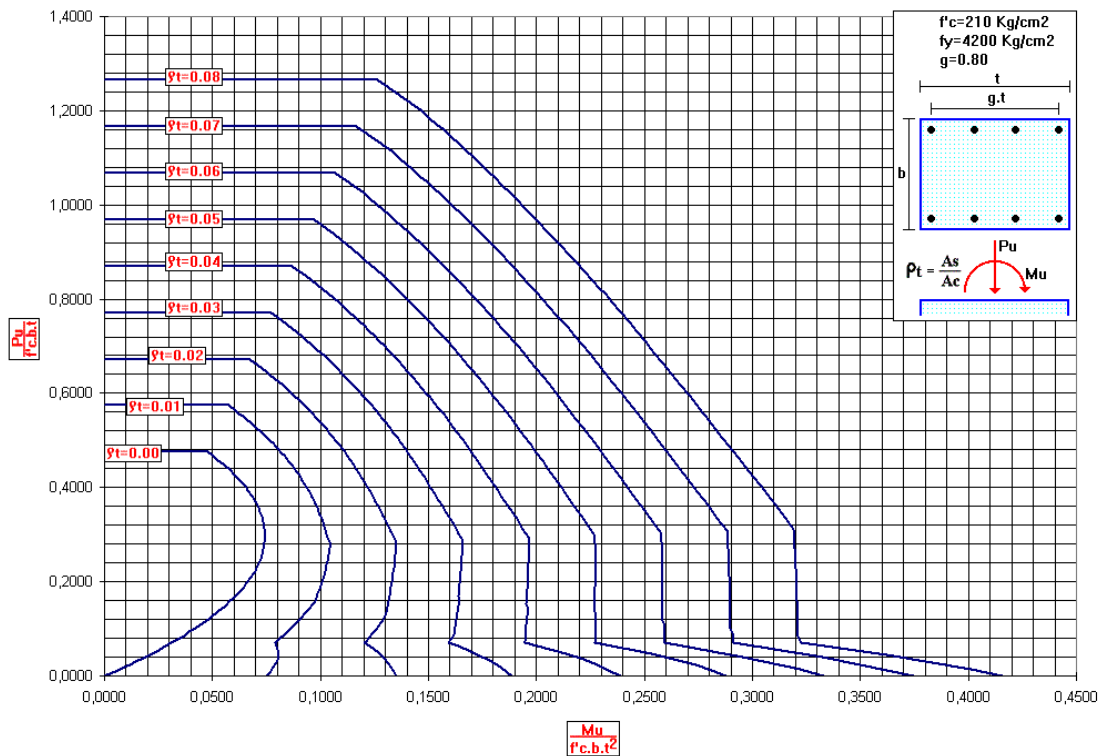


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

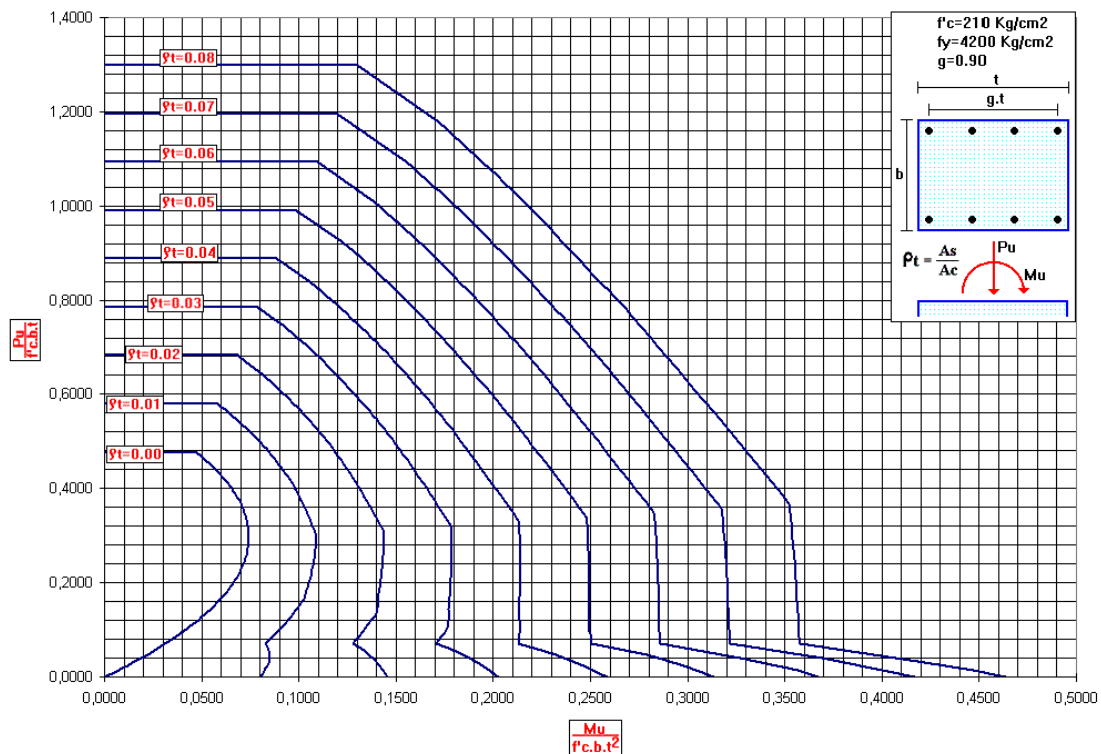
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 87)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 88)



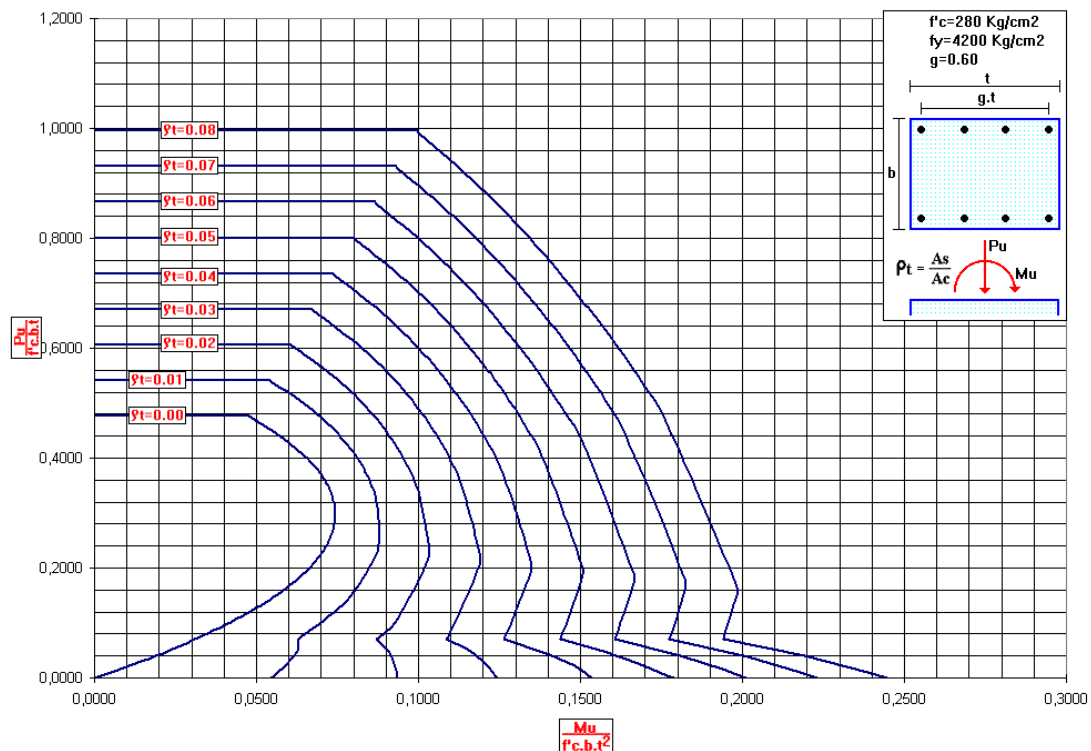


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

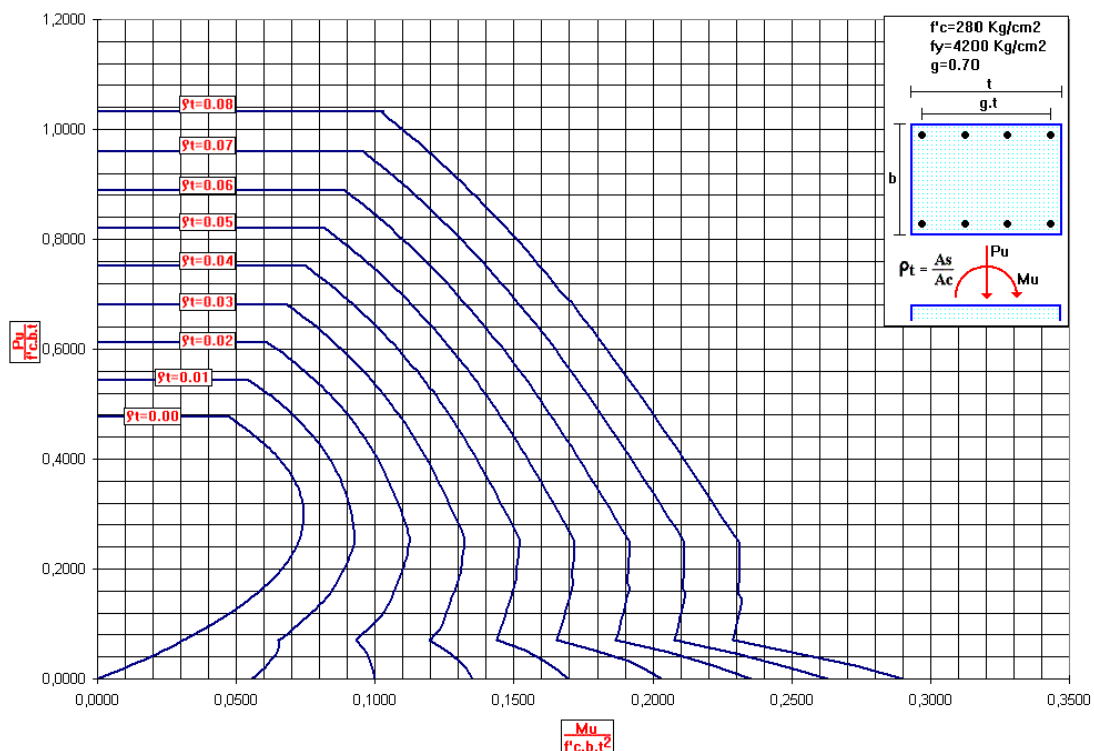
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 89)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 90)



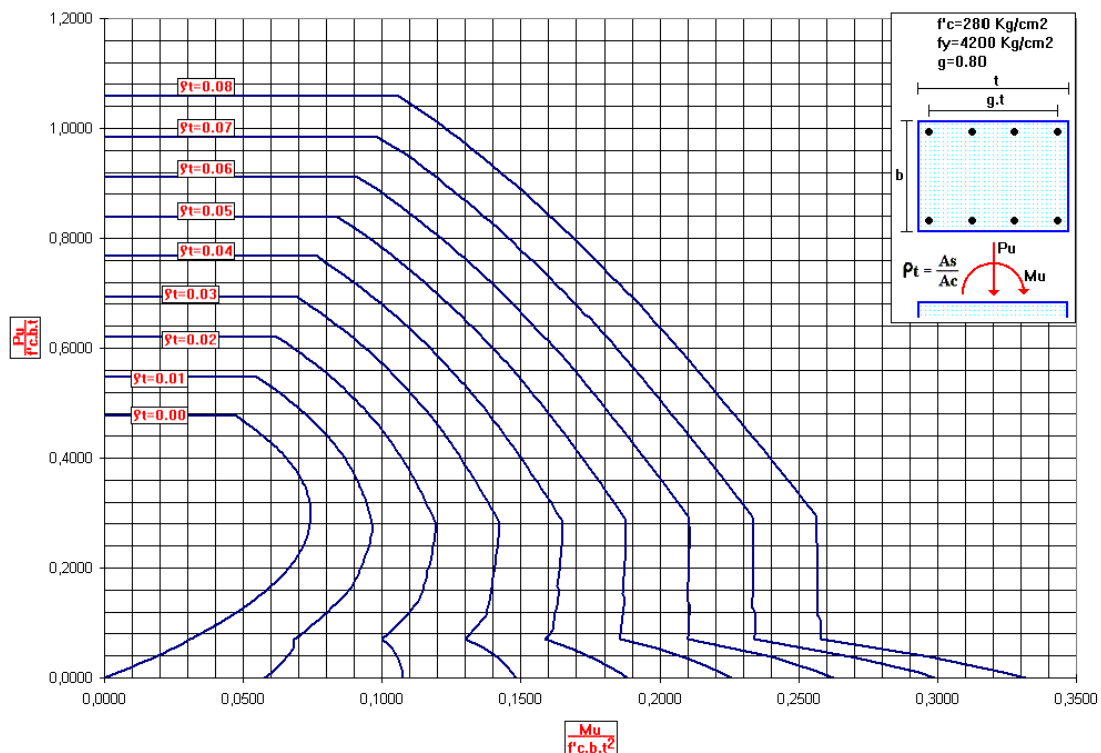


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

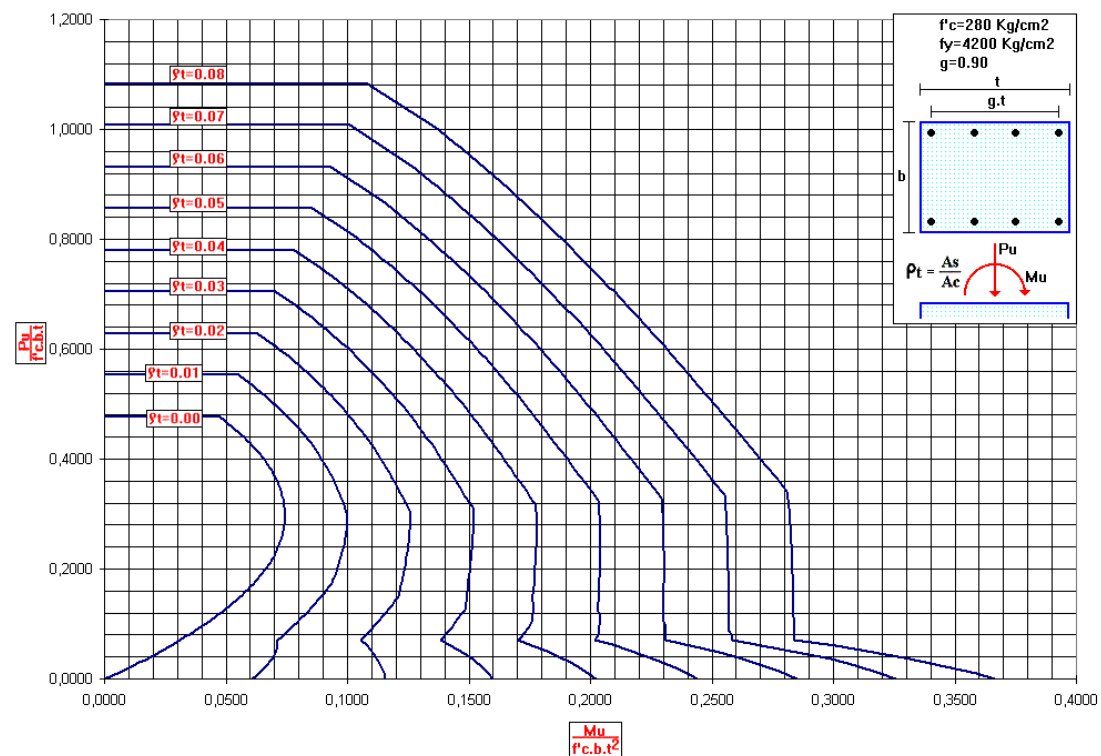
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 91)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 92)



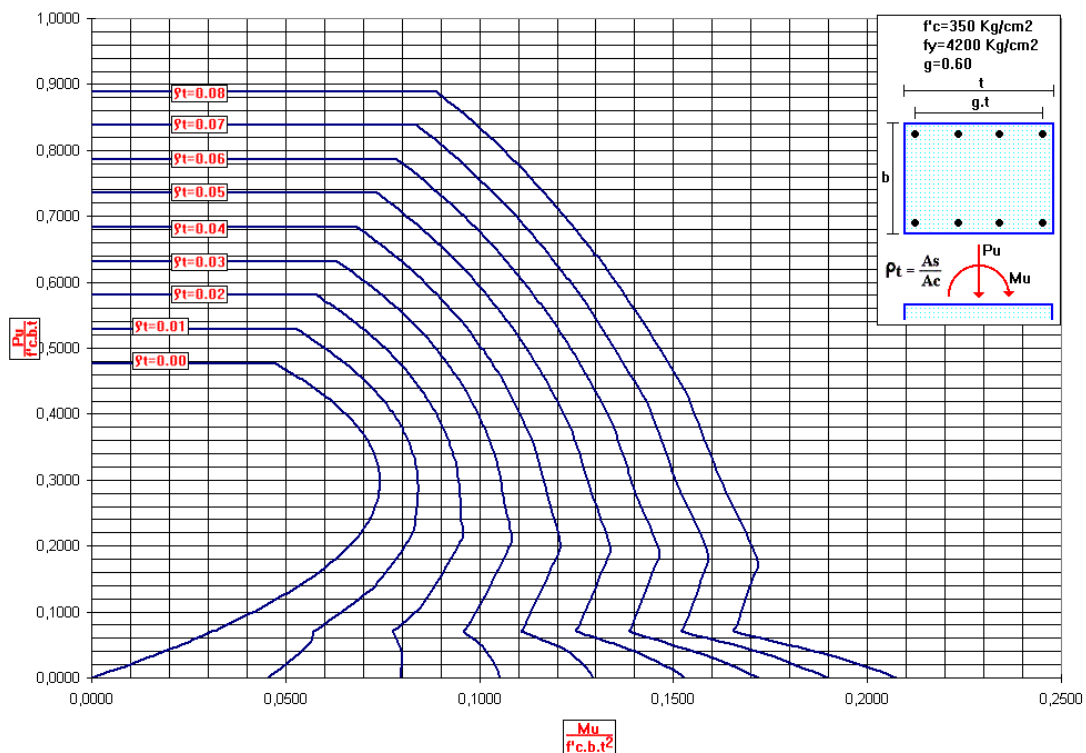


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

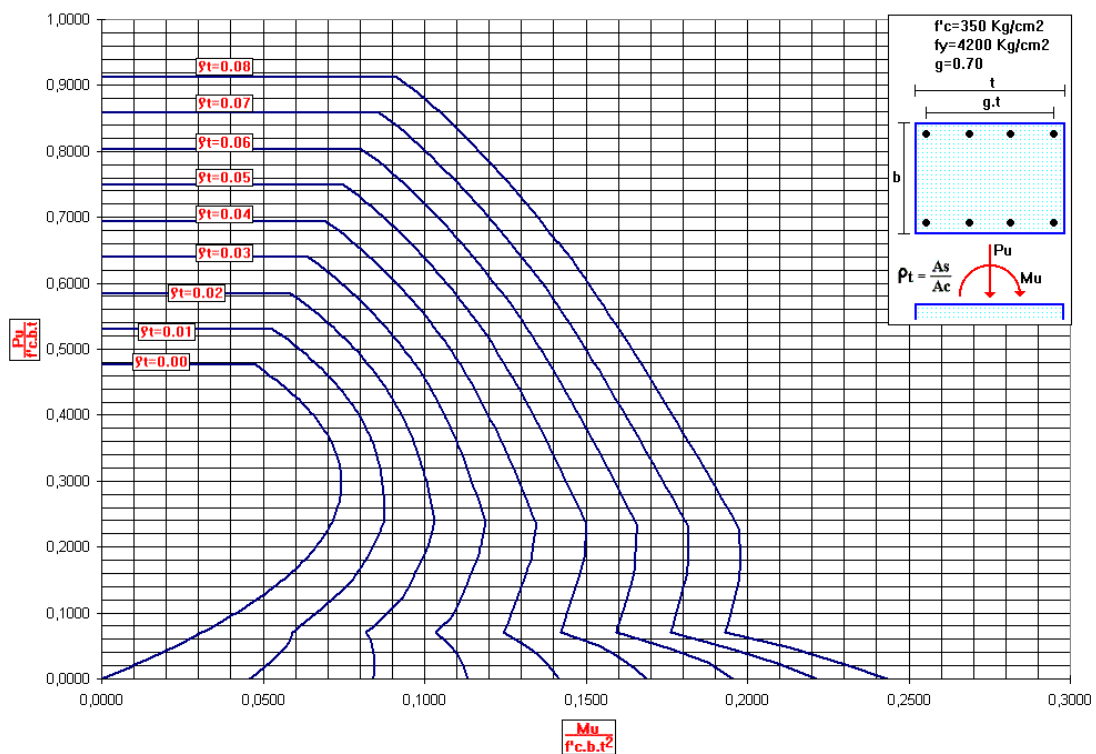
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 93)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 94)





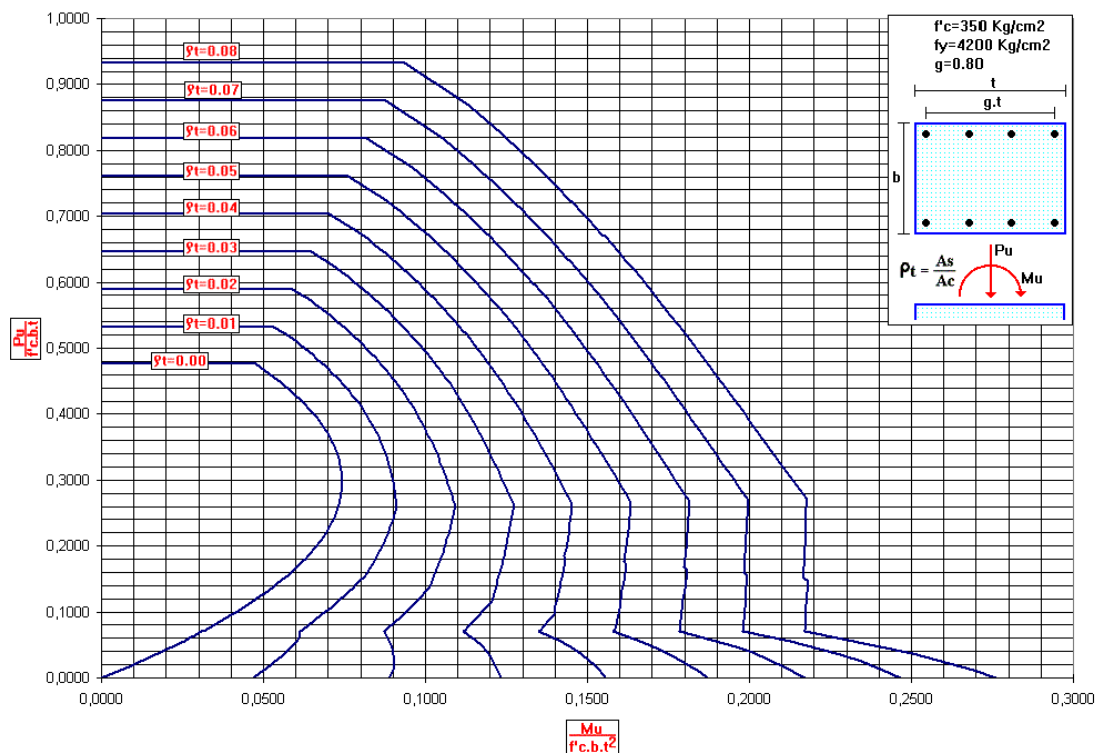
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

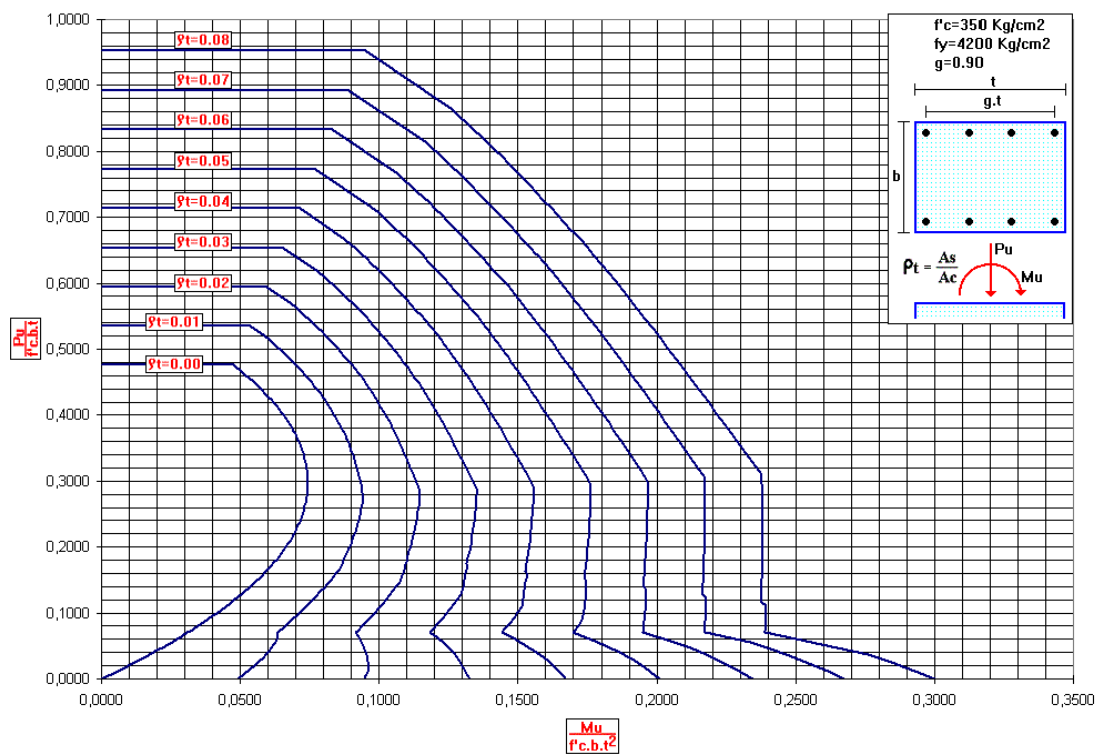
DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

gráfico # 95)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 96)



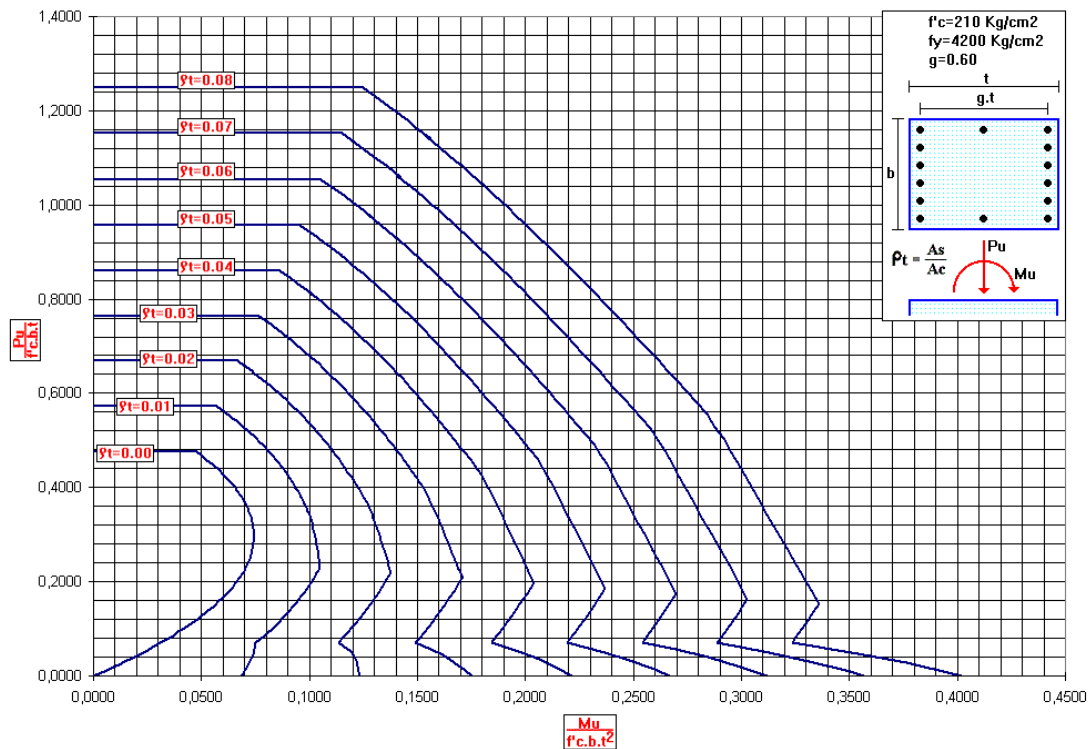


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

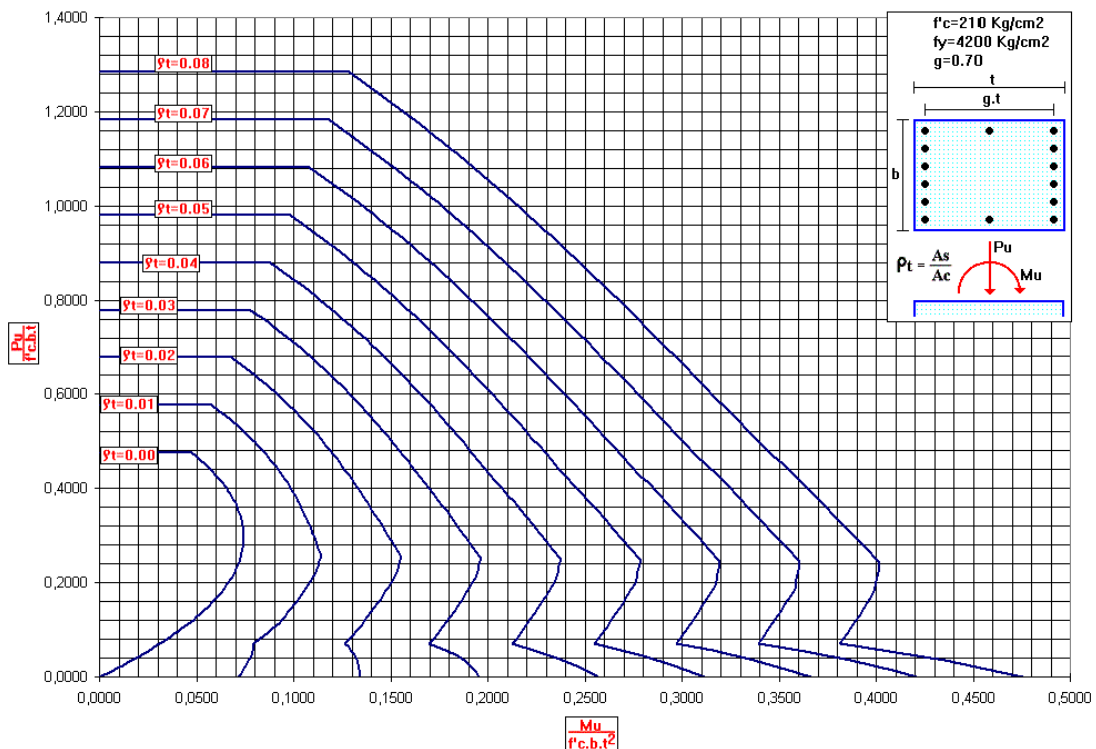
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 97)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 98)



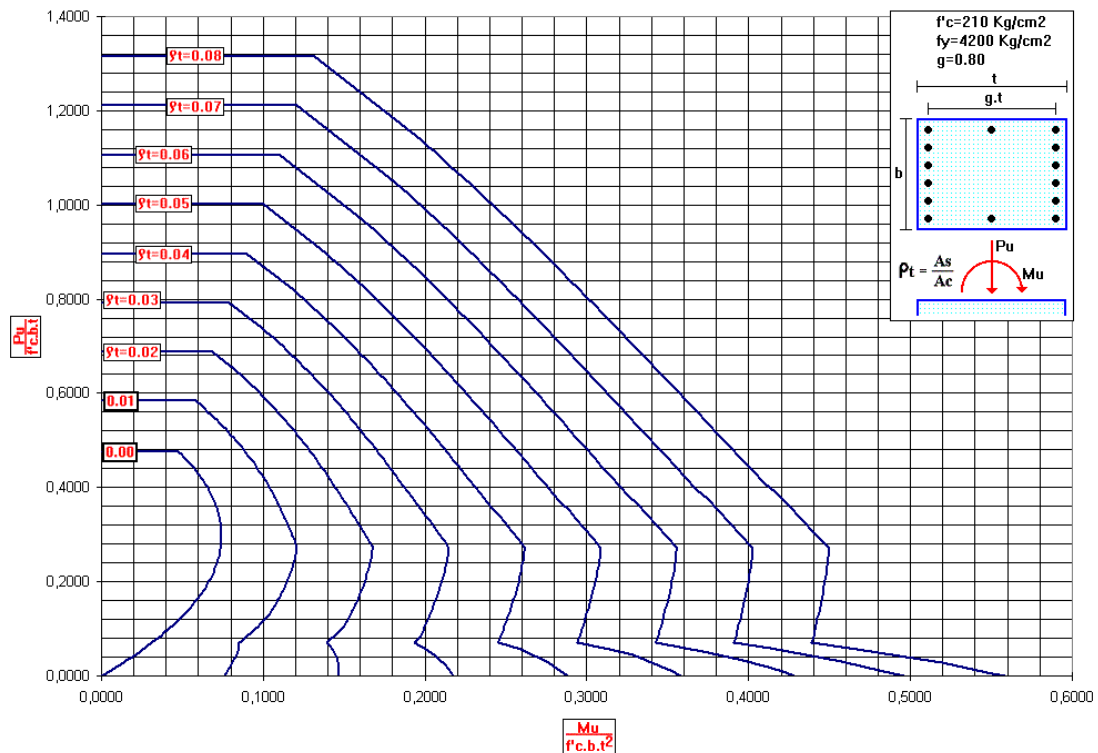


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

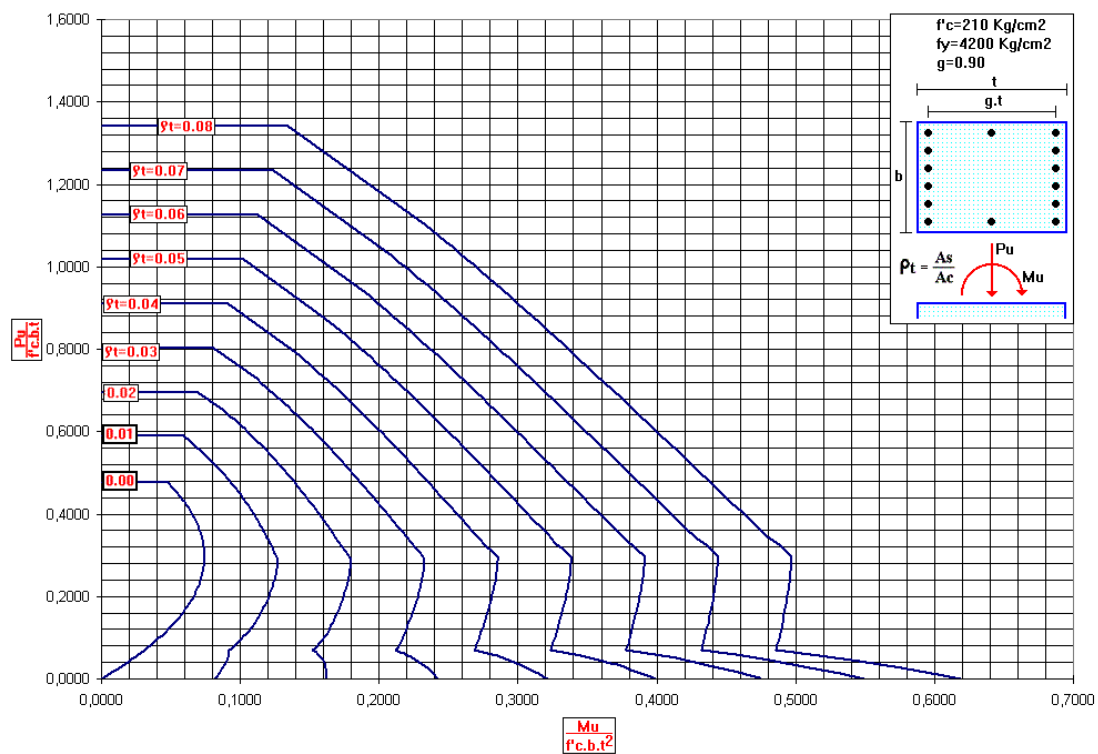
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 99)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 100)



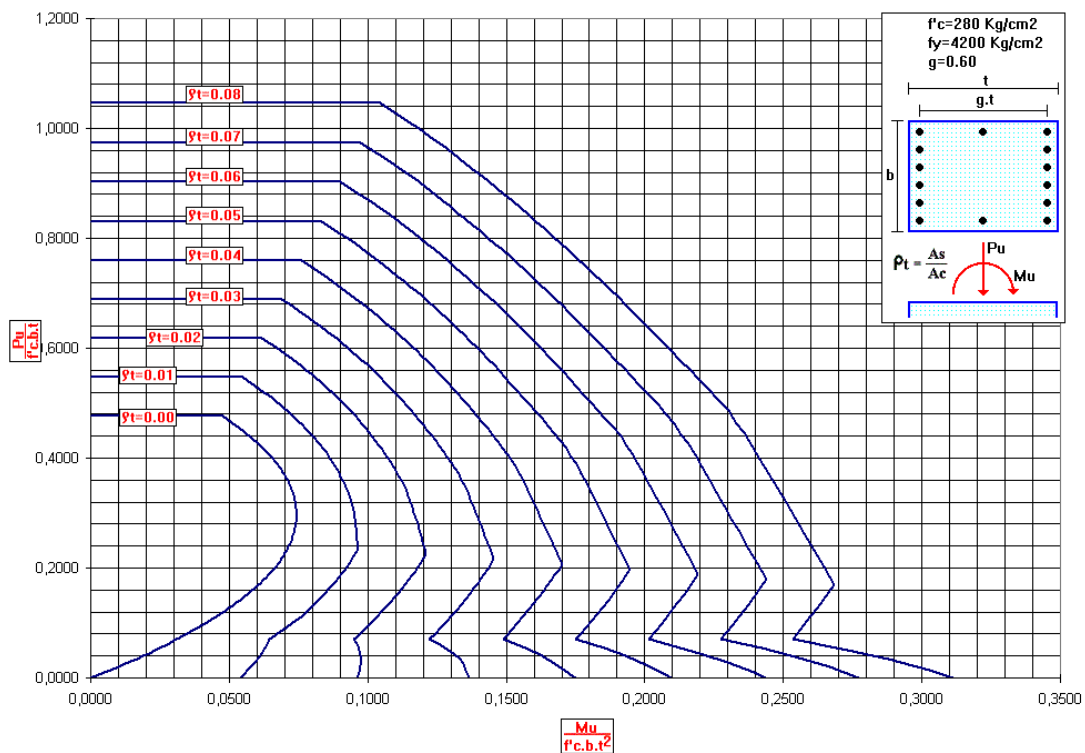


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

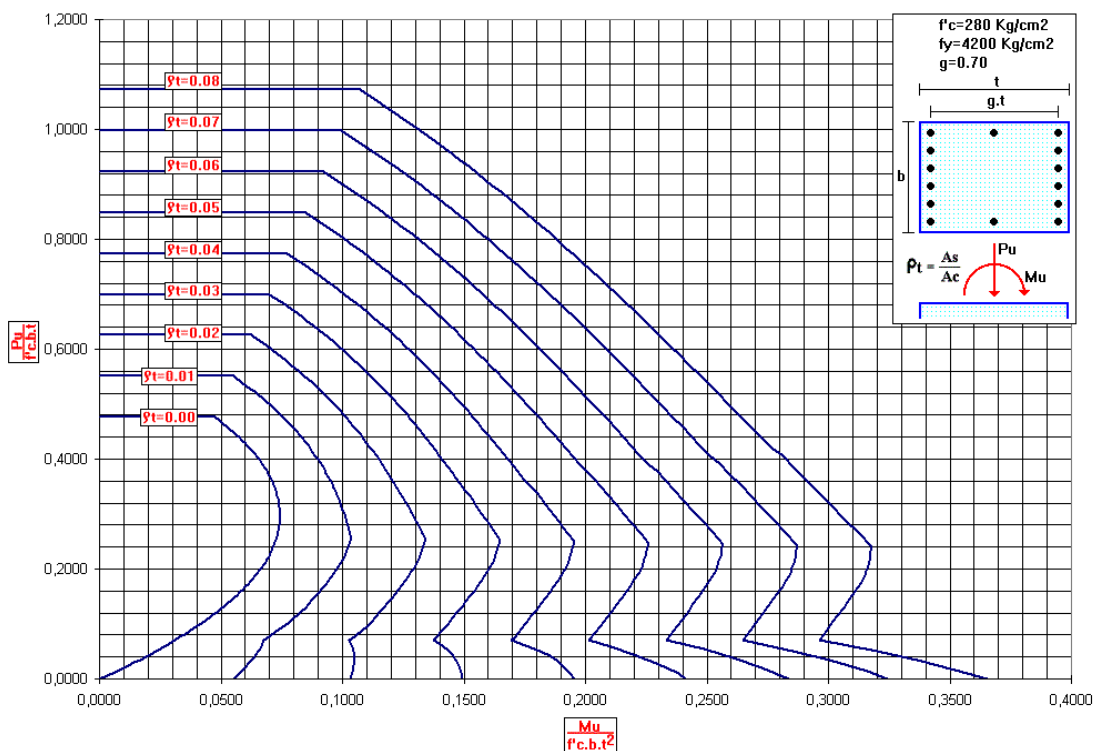
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 101)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 102)



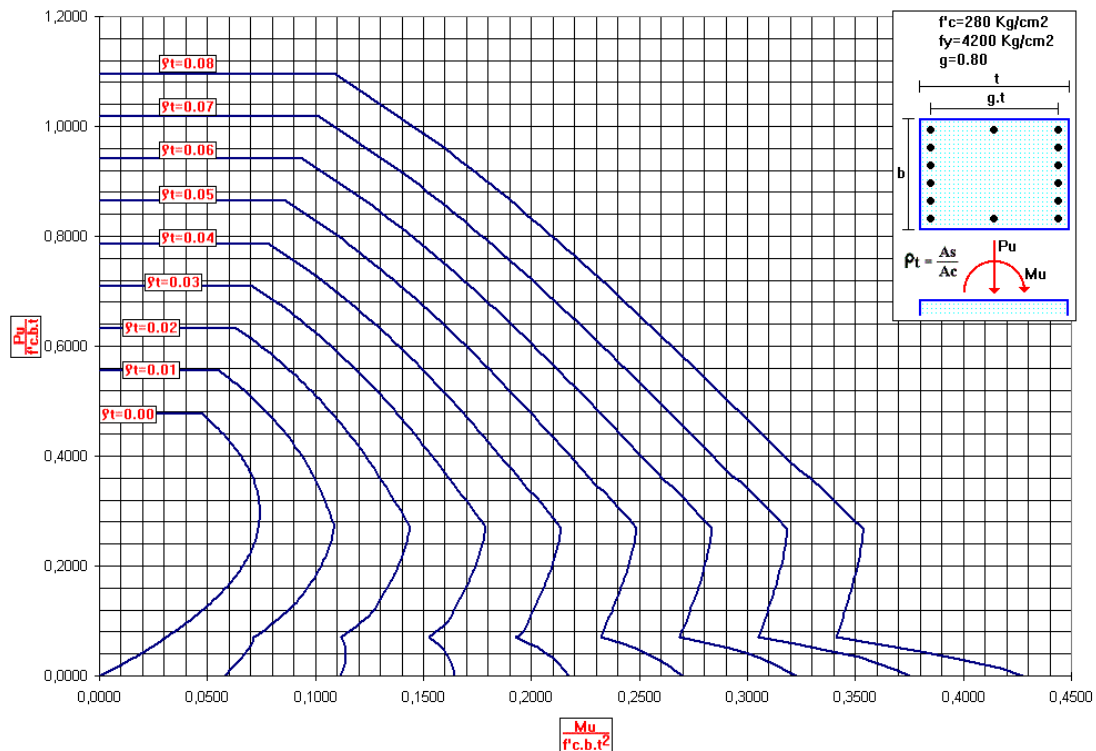


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

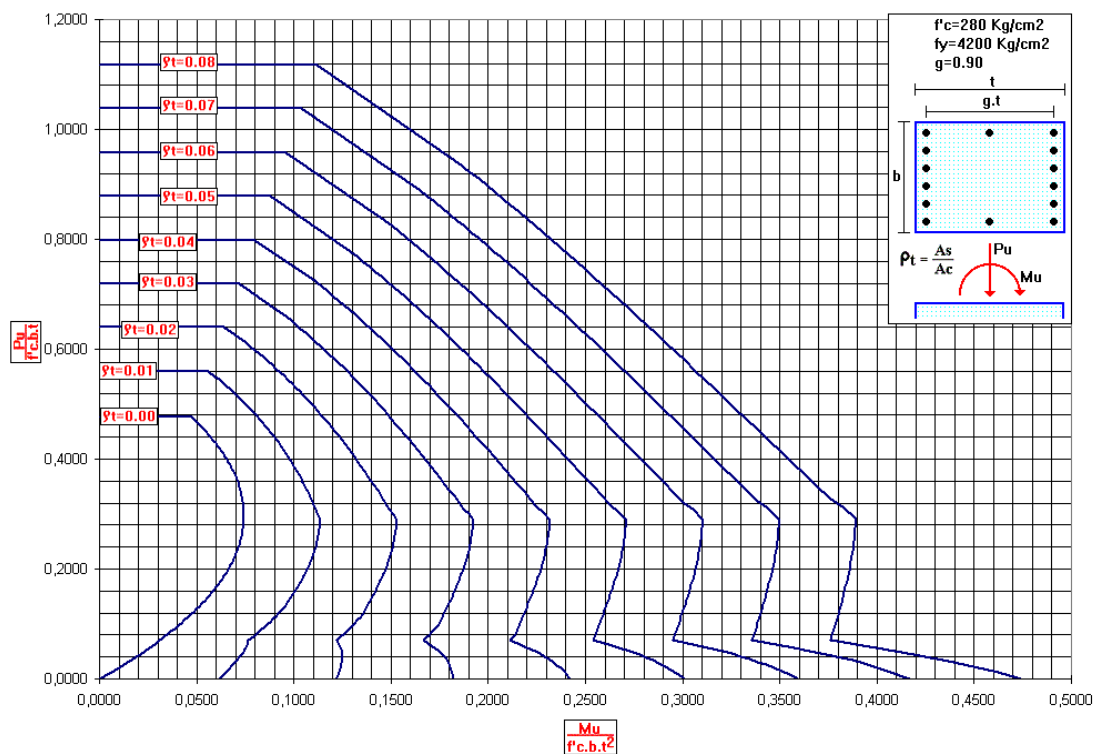
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 103)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 104)



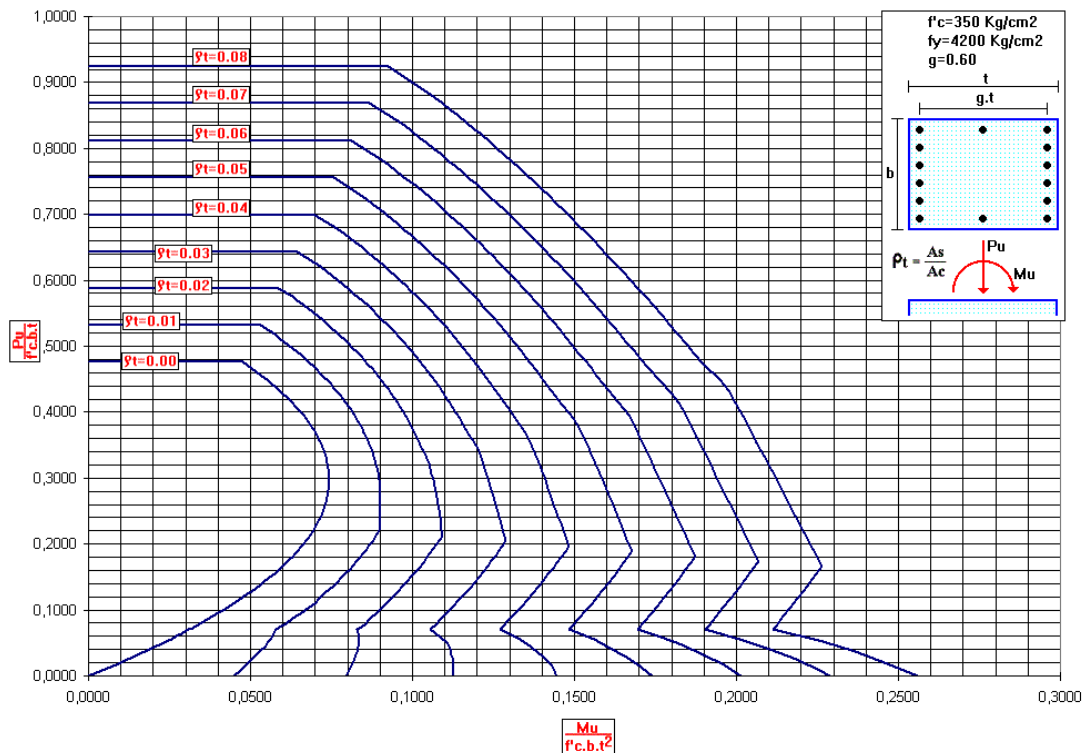


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

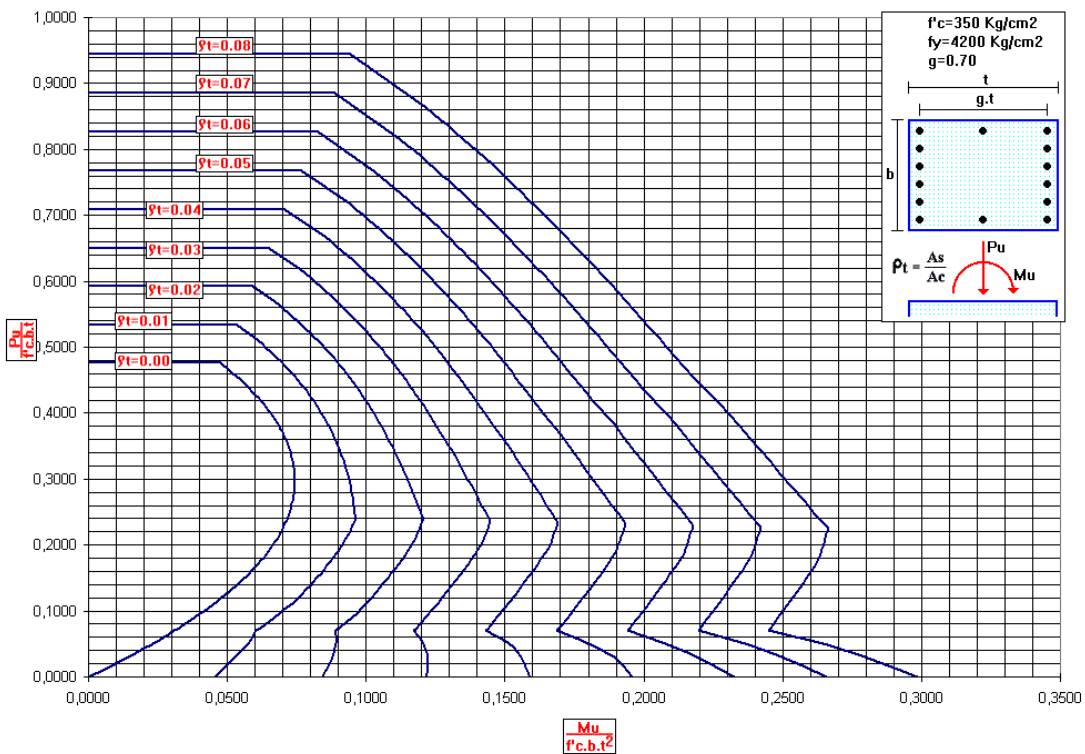
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 105)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 106)



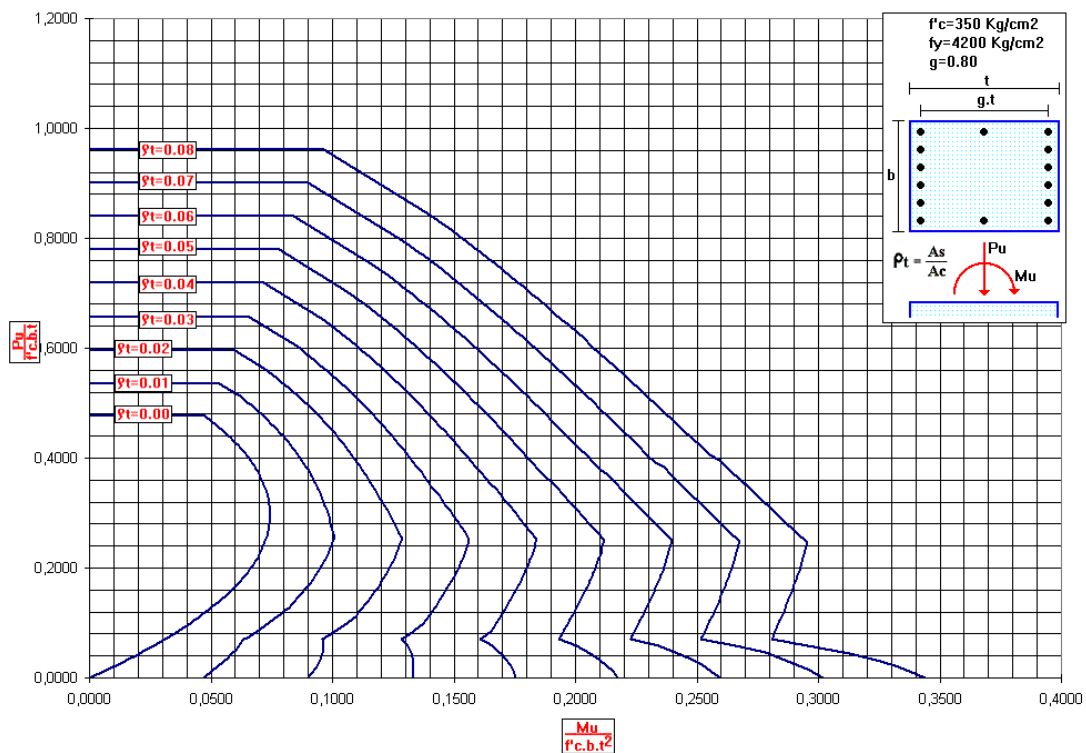


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

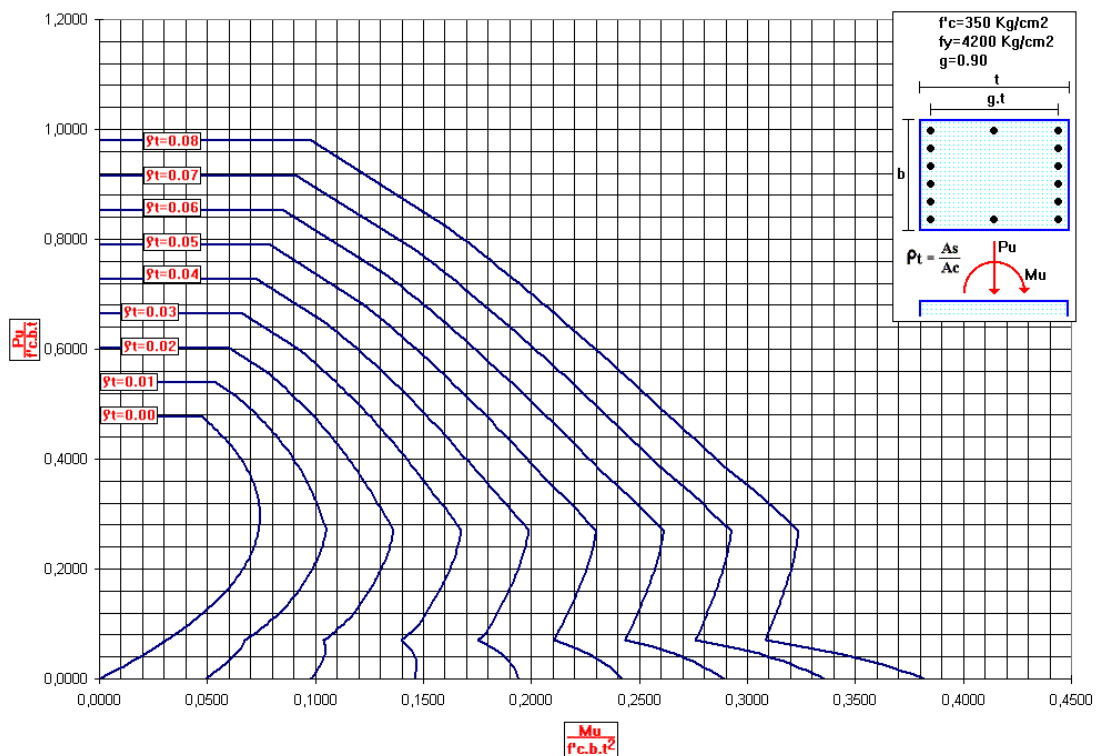
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 107)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 108)



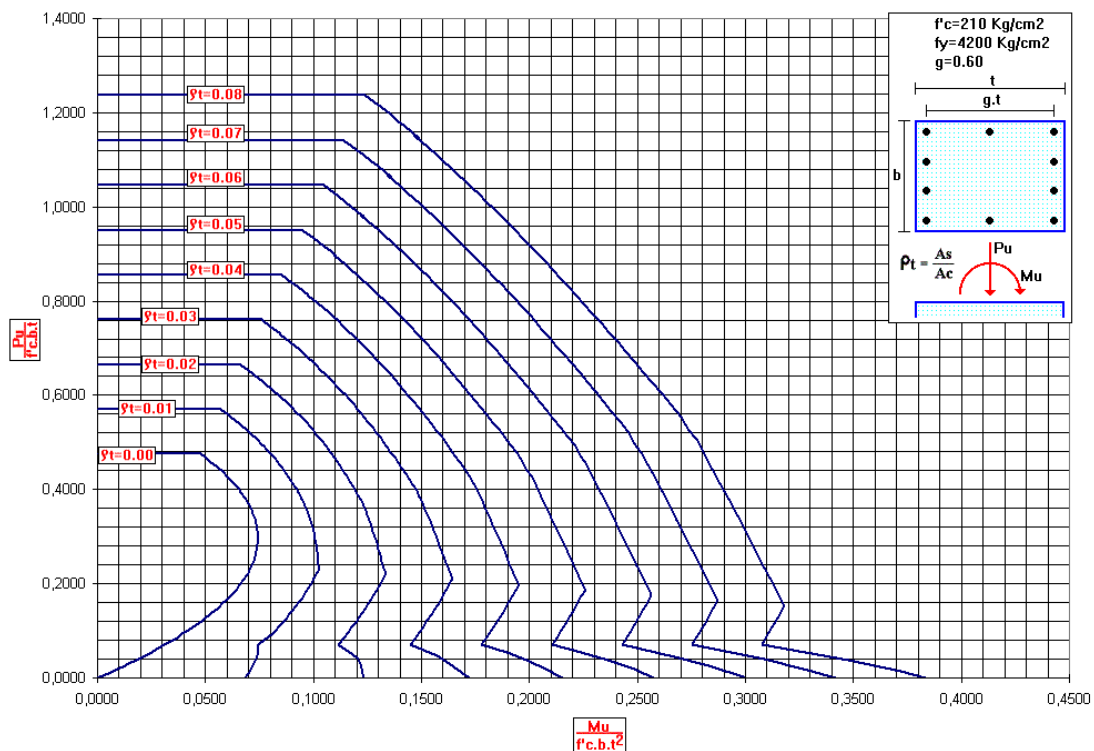


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

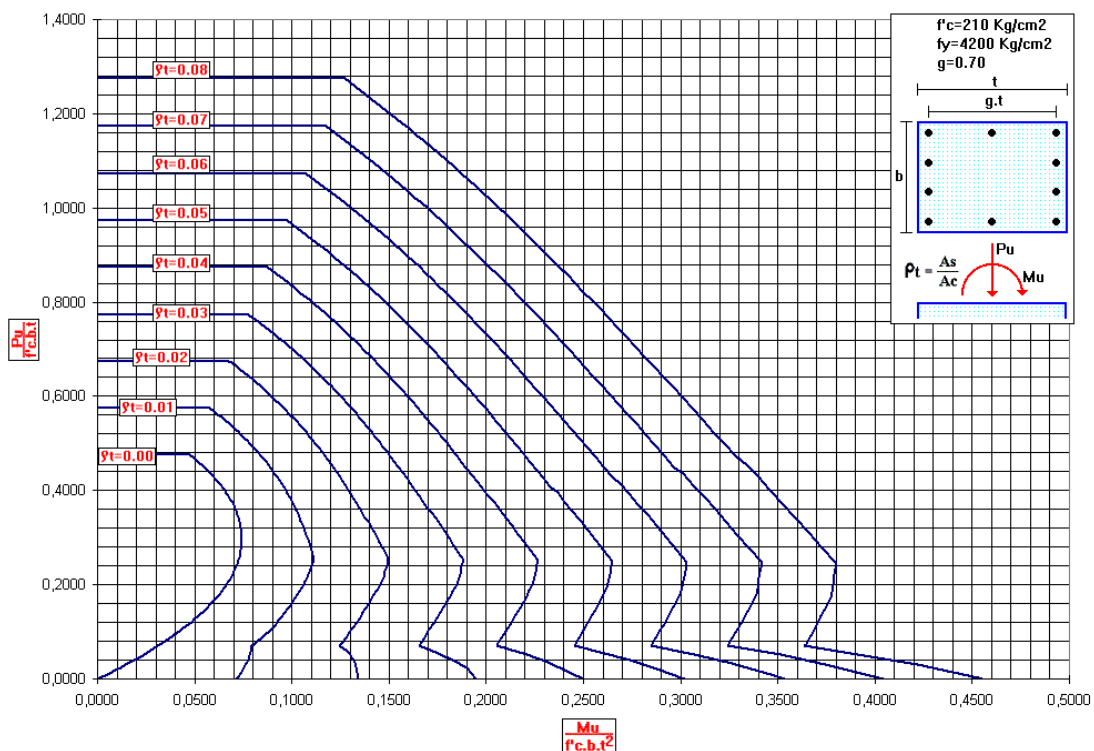
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 109)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 110)



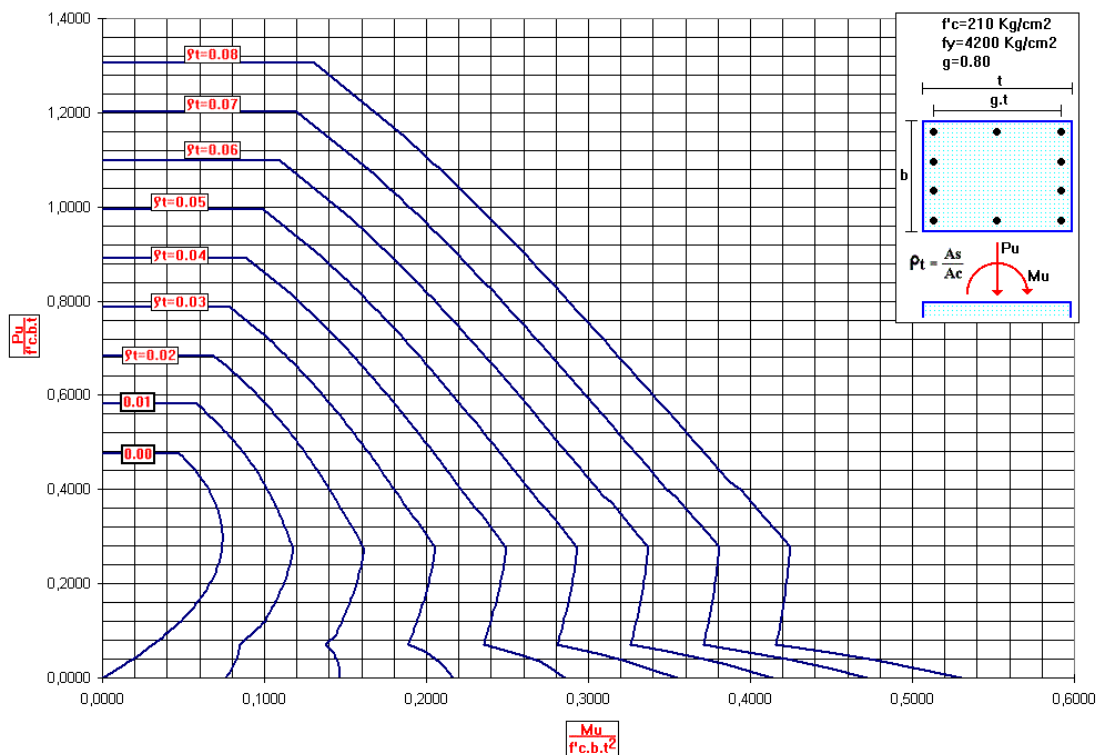


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

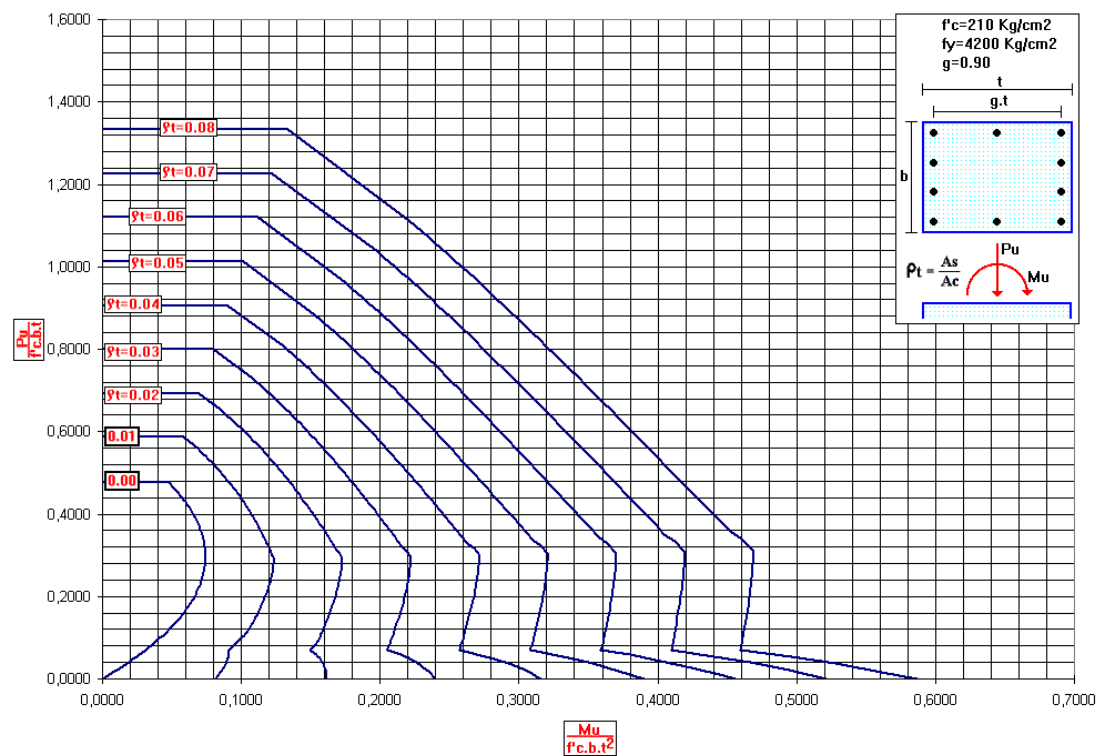
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 111)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 112)



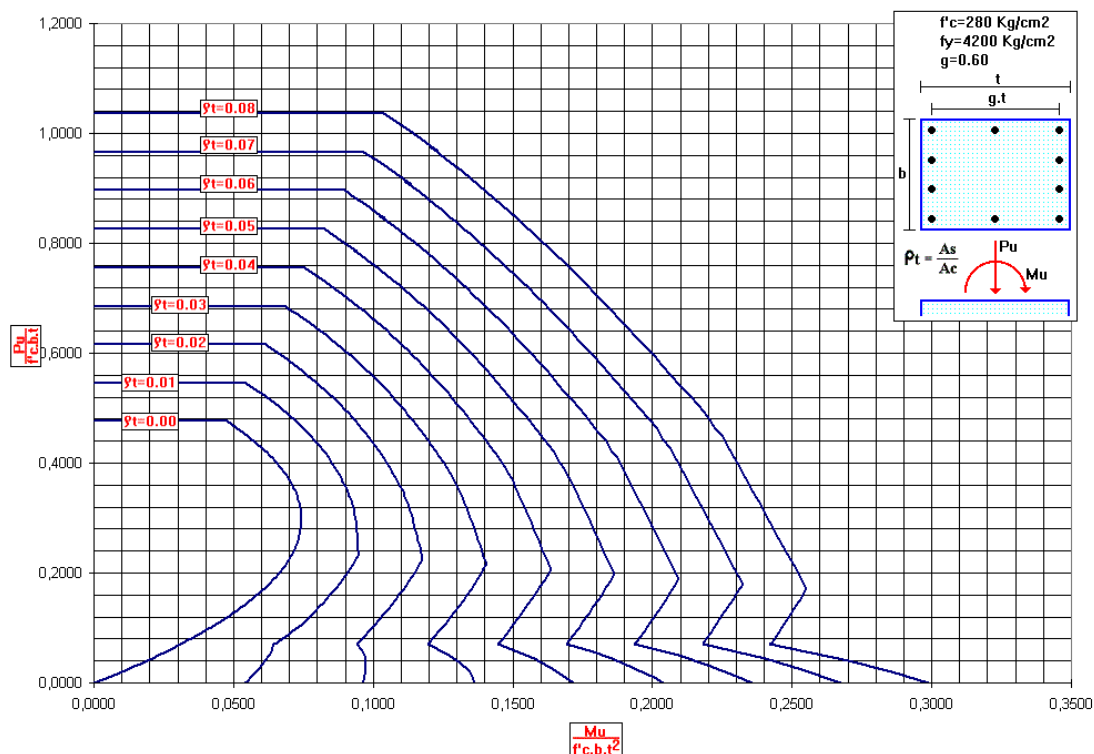


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

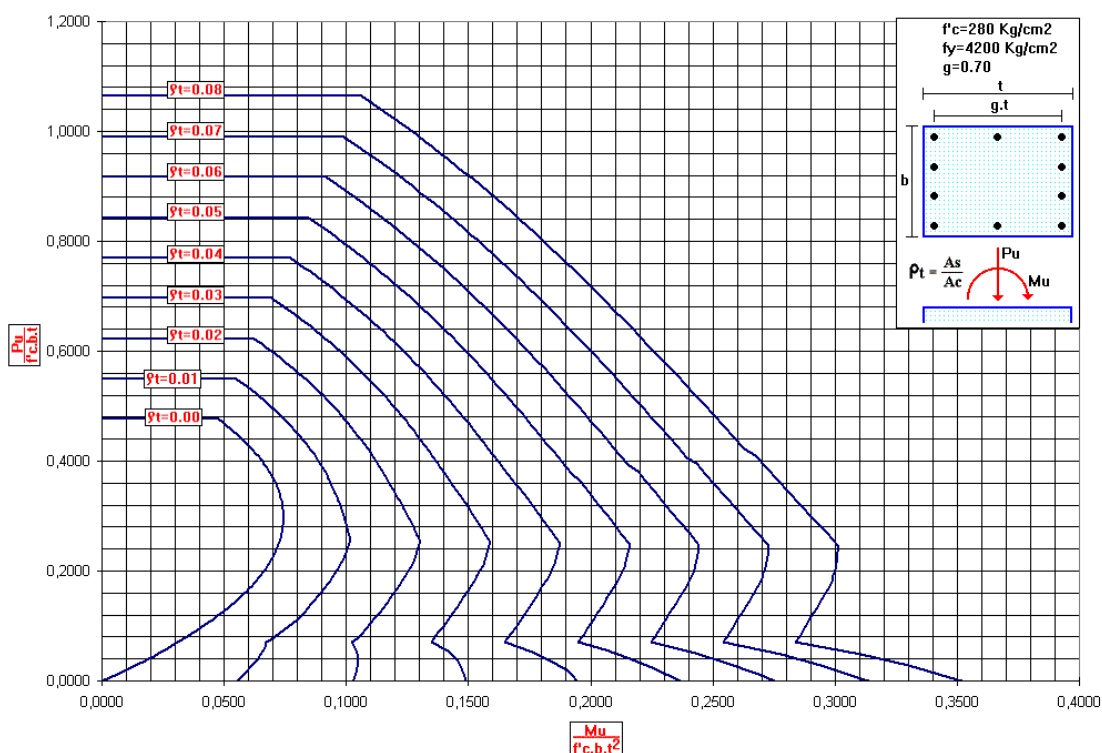
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 113)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 114)



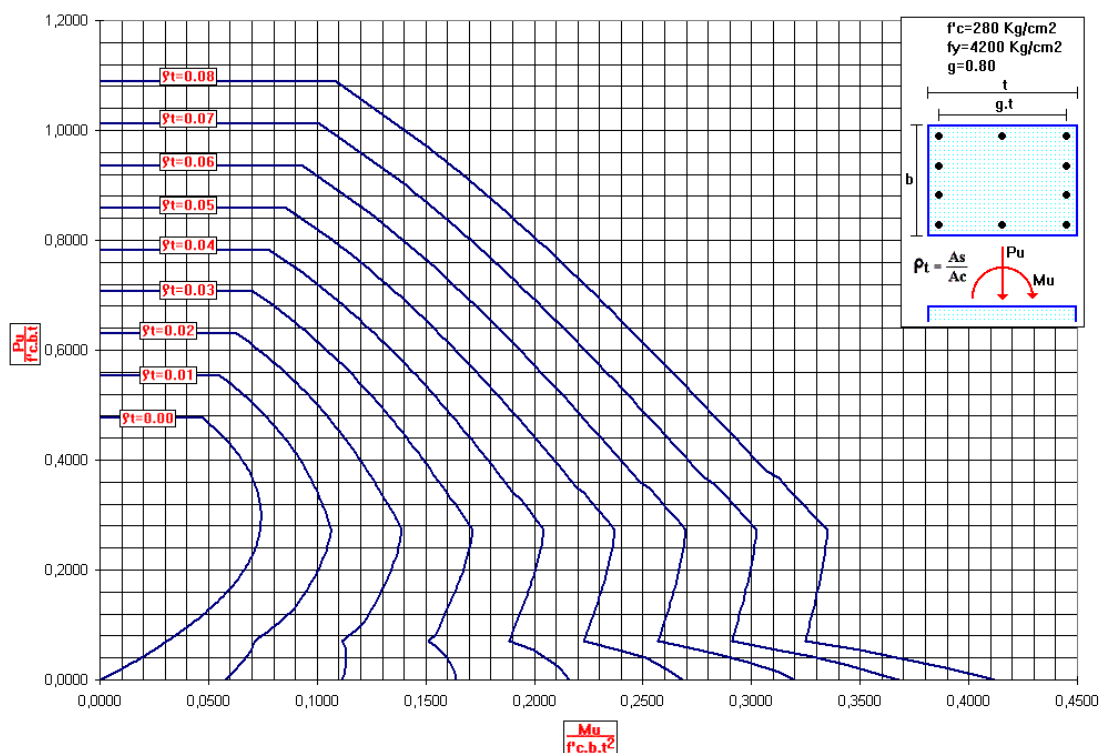


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

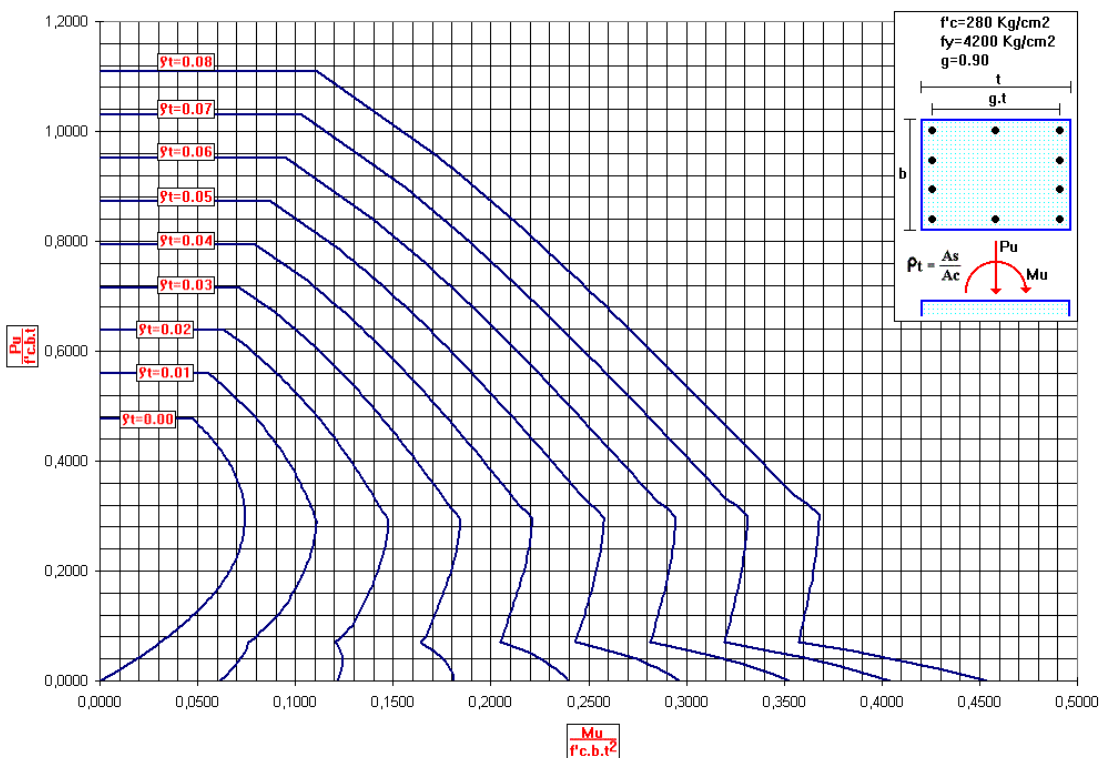
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 115)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 116)



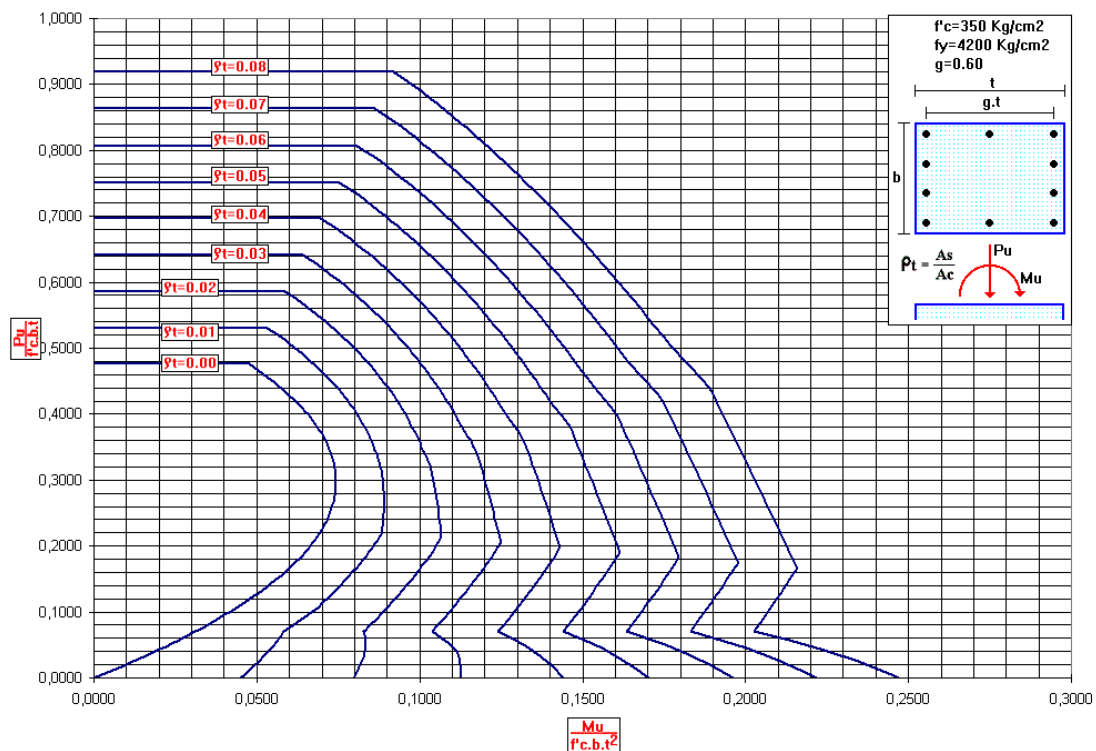


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

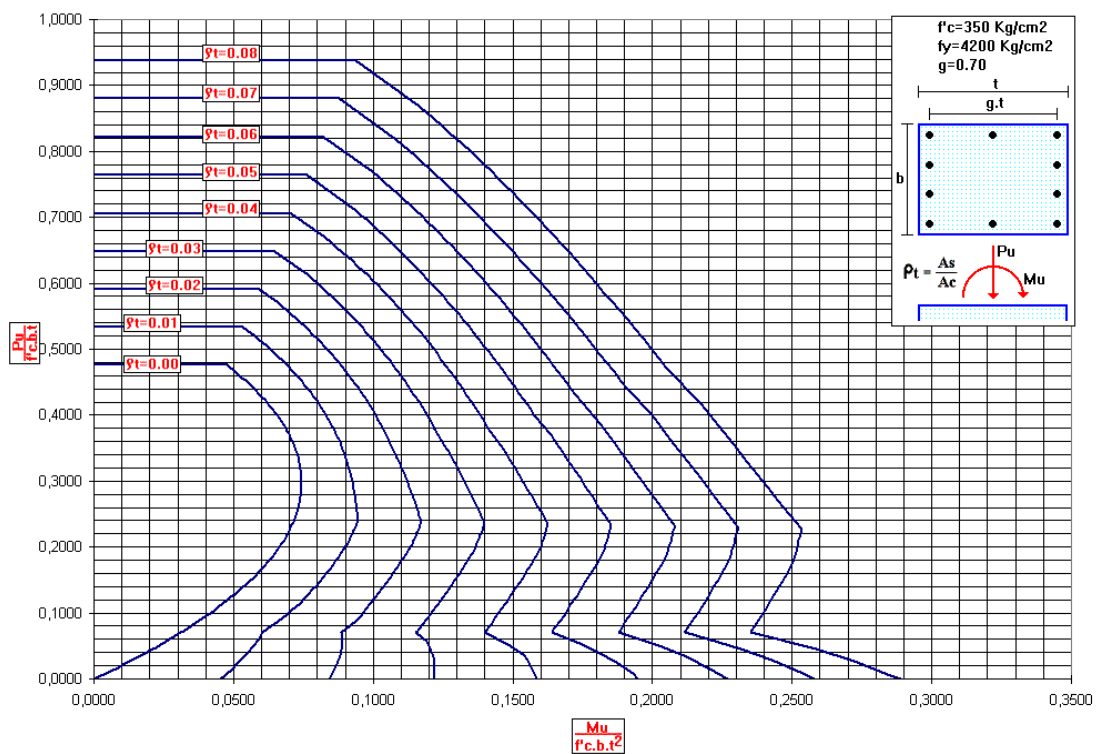
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 117)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 118)



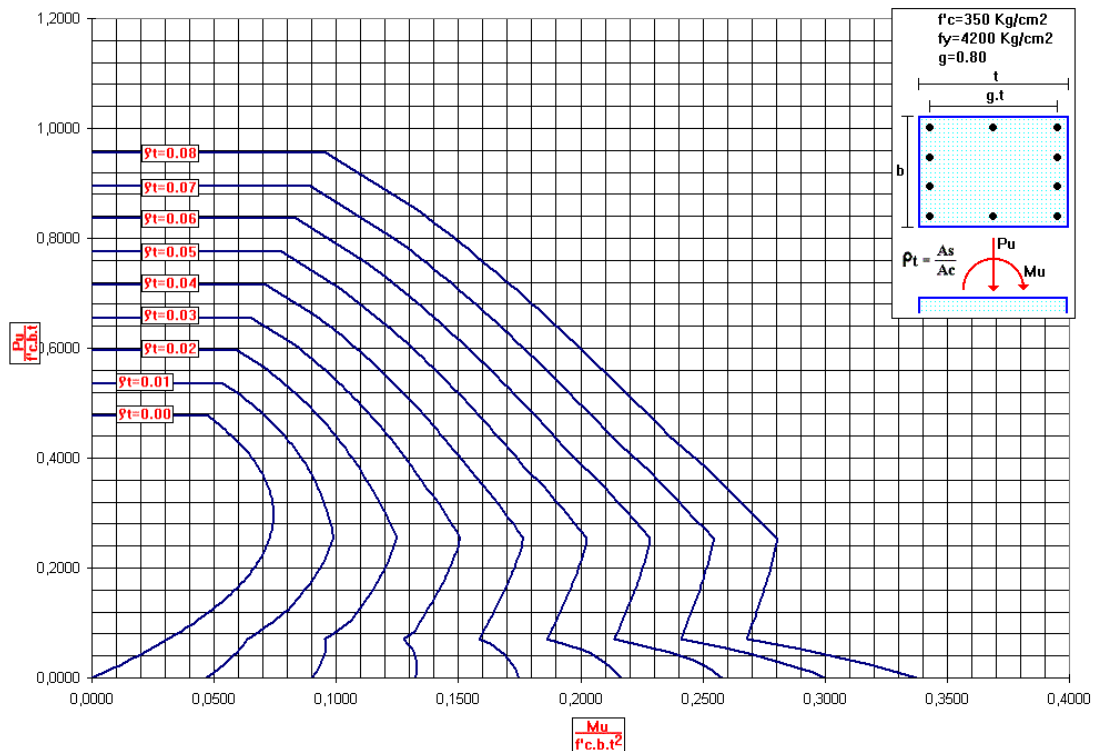


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

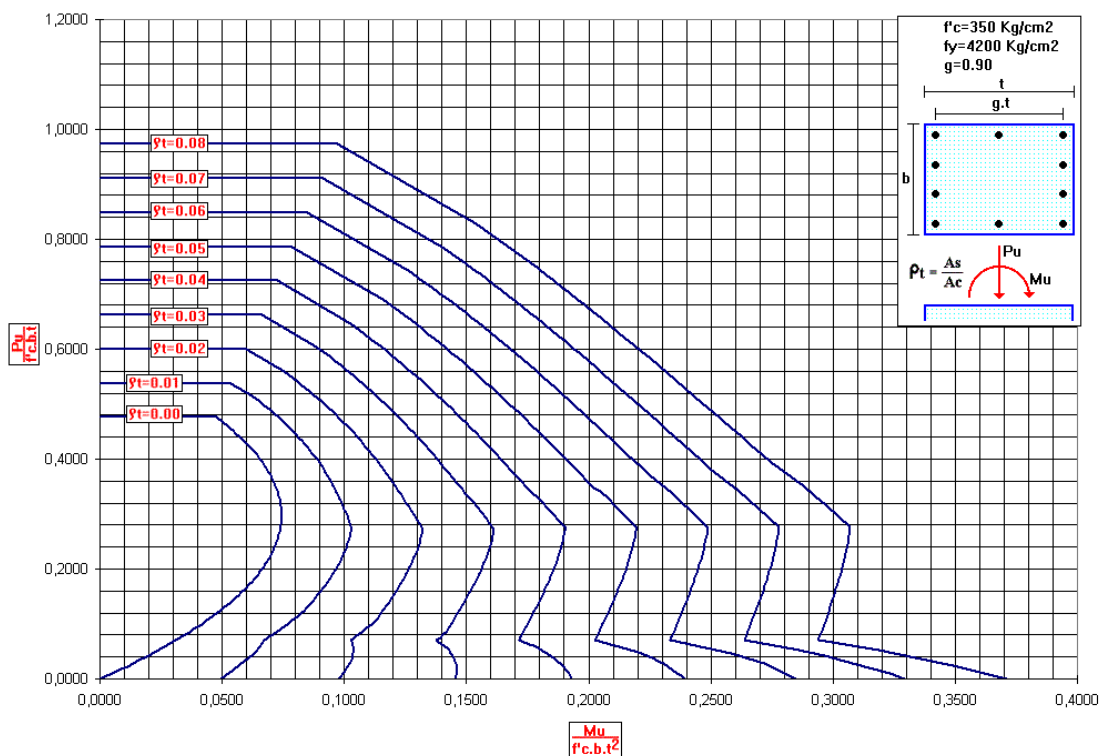
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 119)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 120)



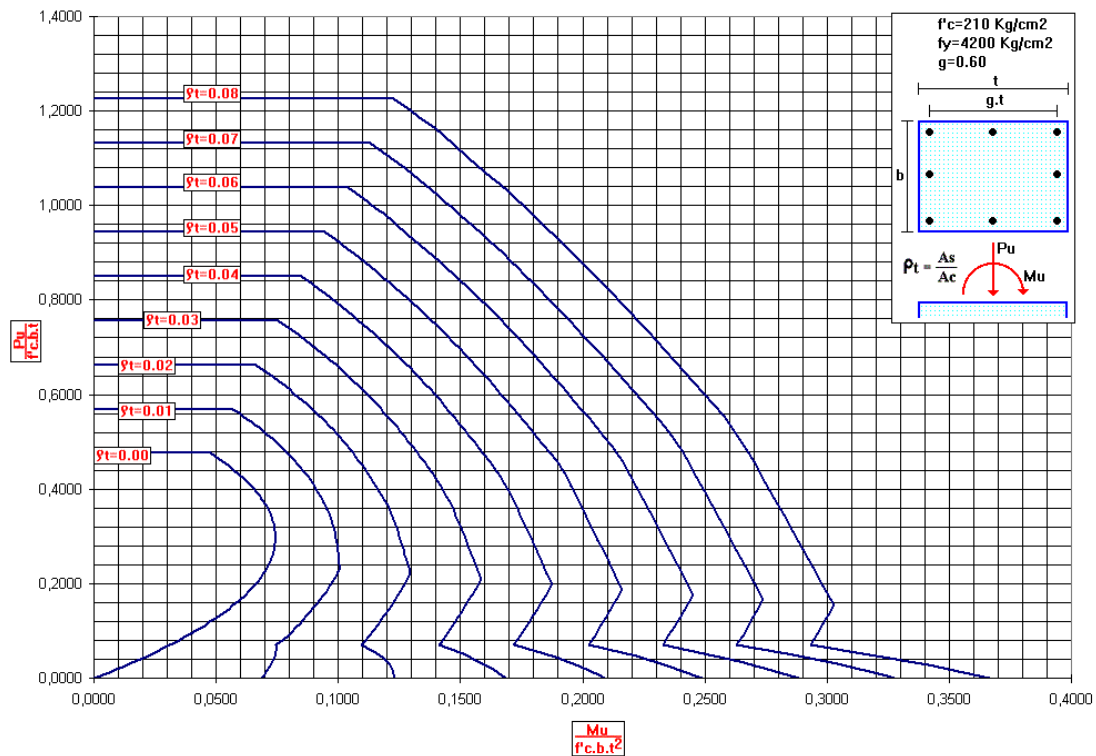


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

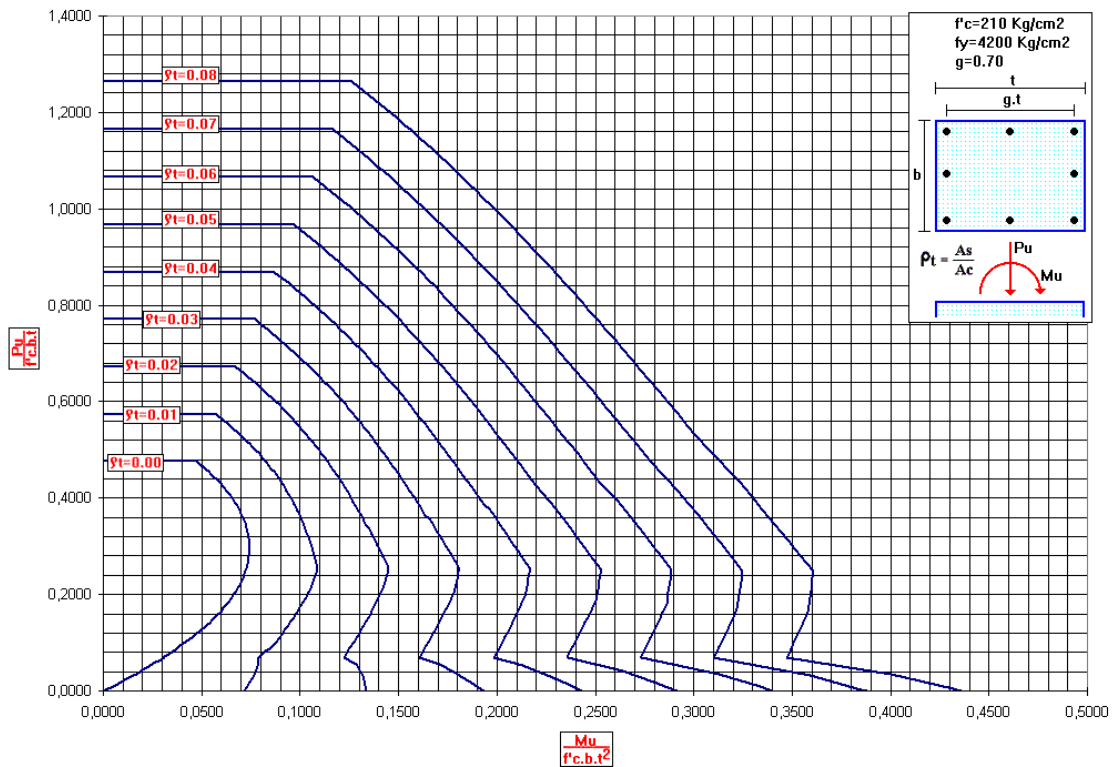
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 121)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 122)



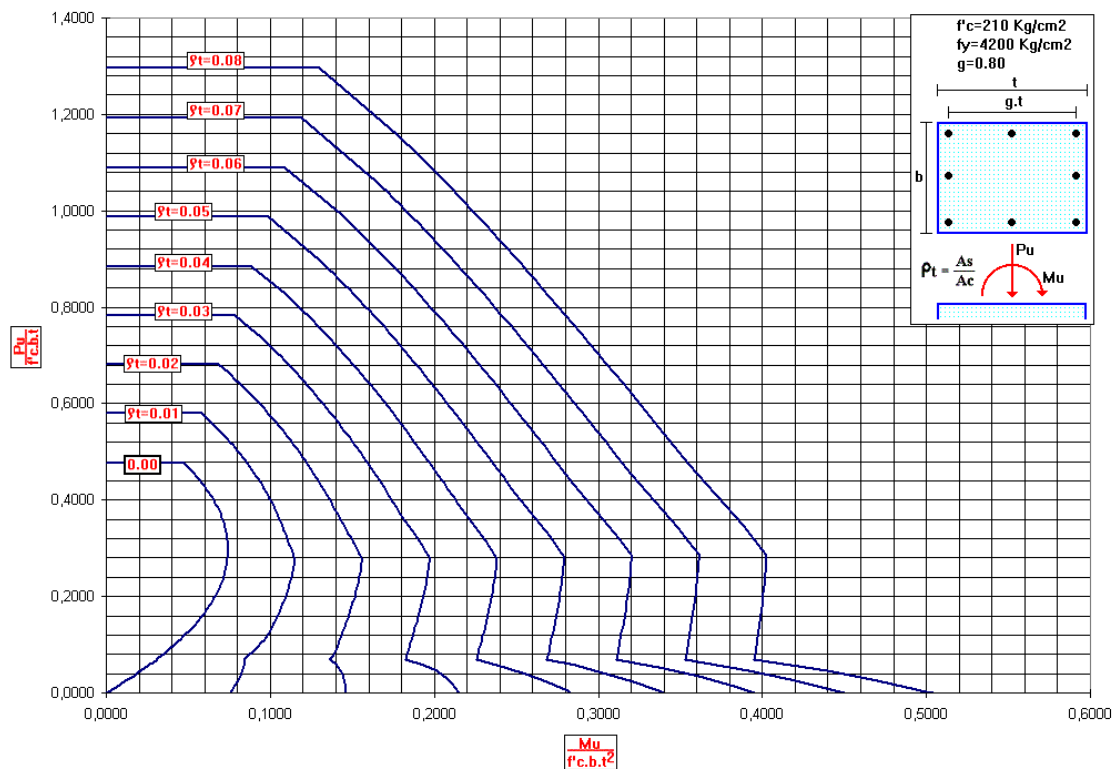


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

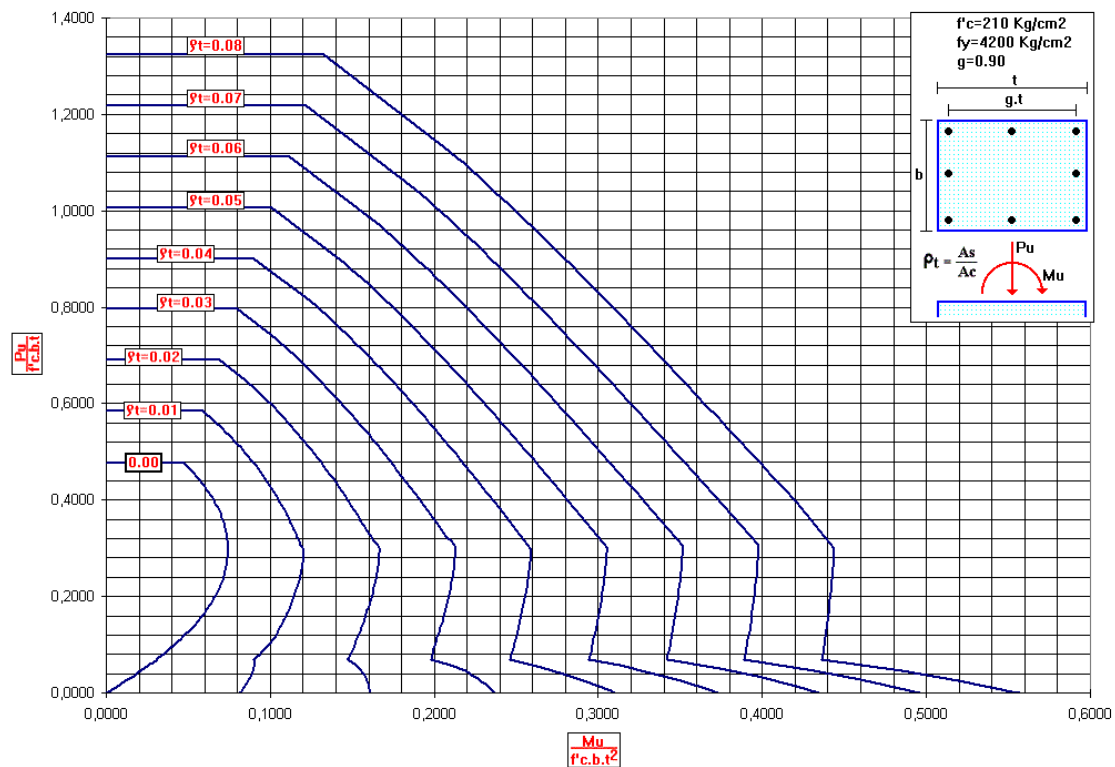
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 123)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 124)



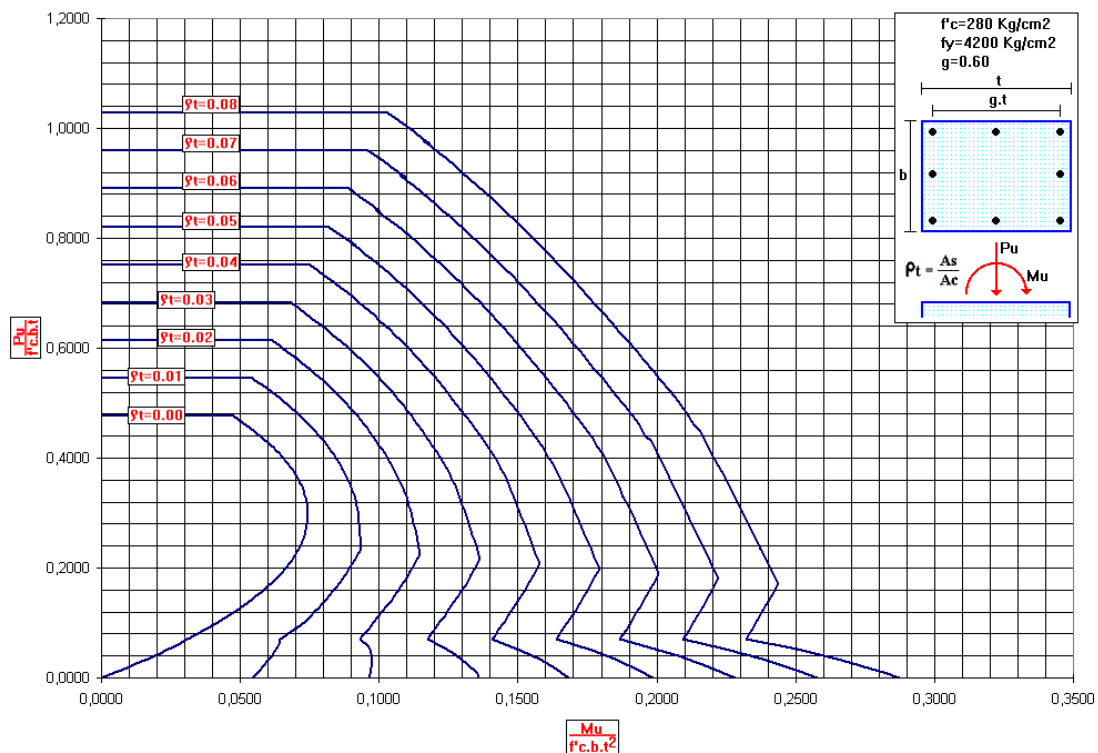


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

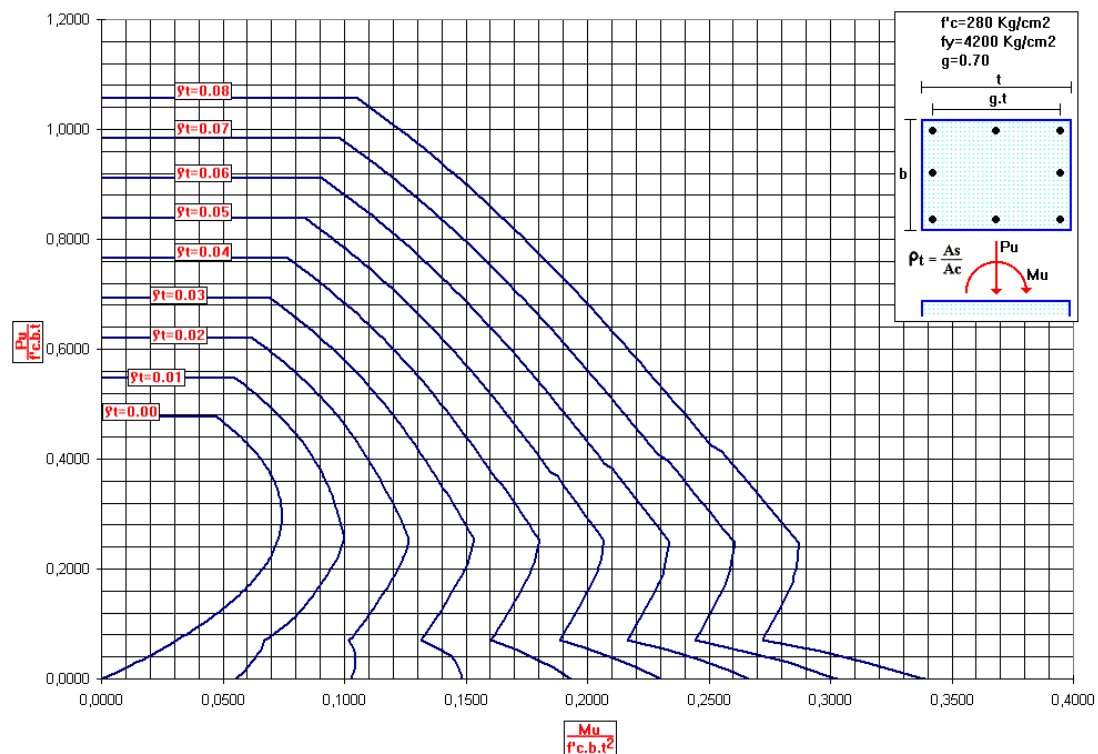
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 125)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 126)



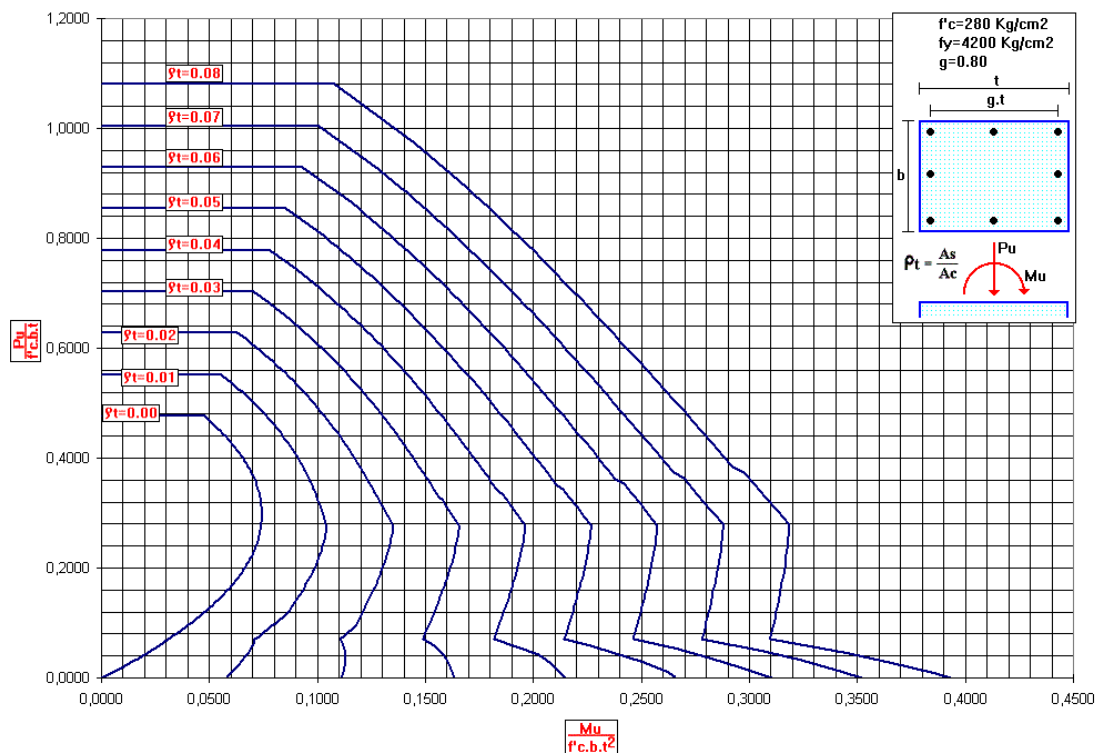


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

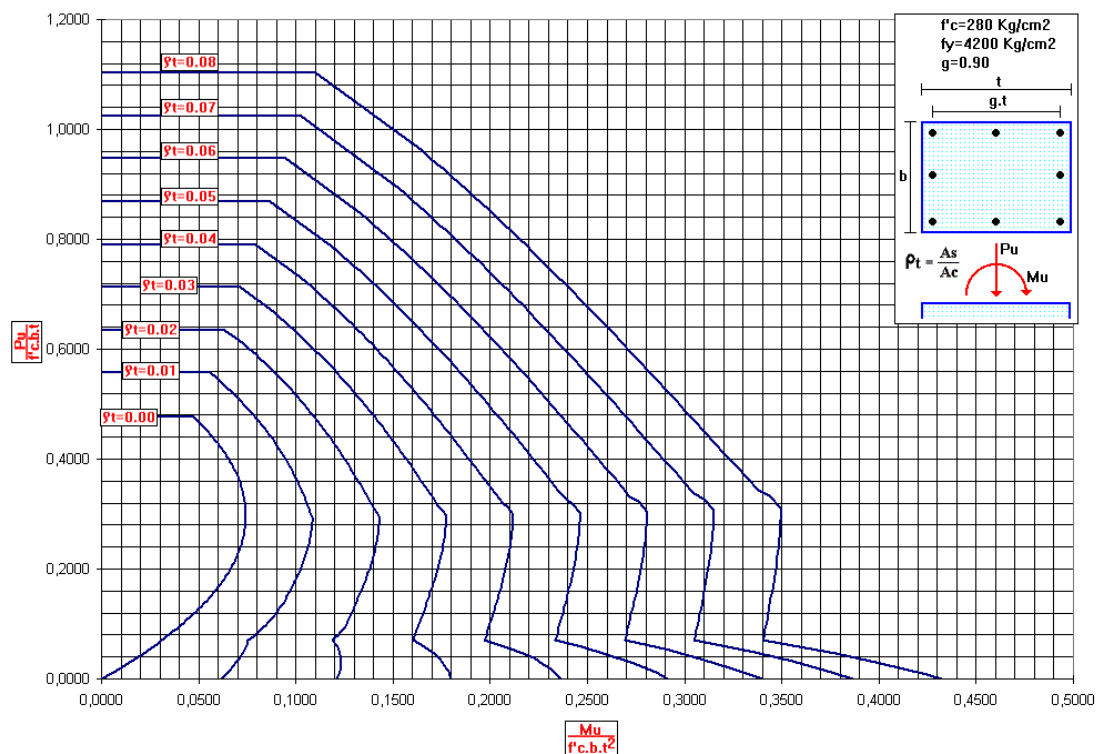
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 127)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 128)



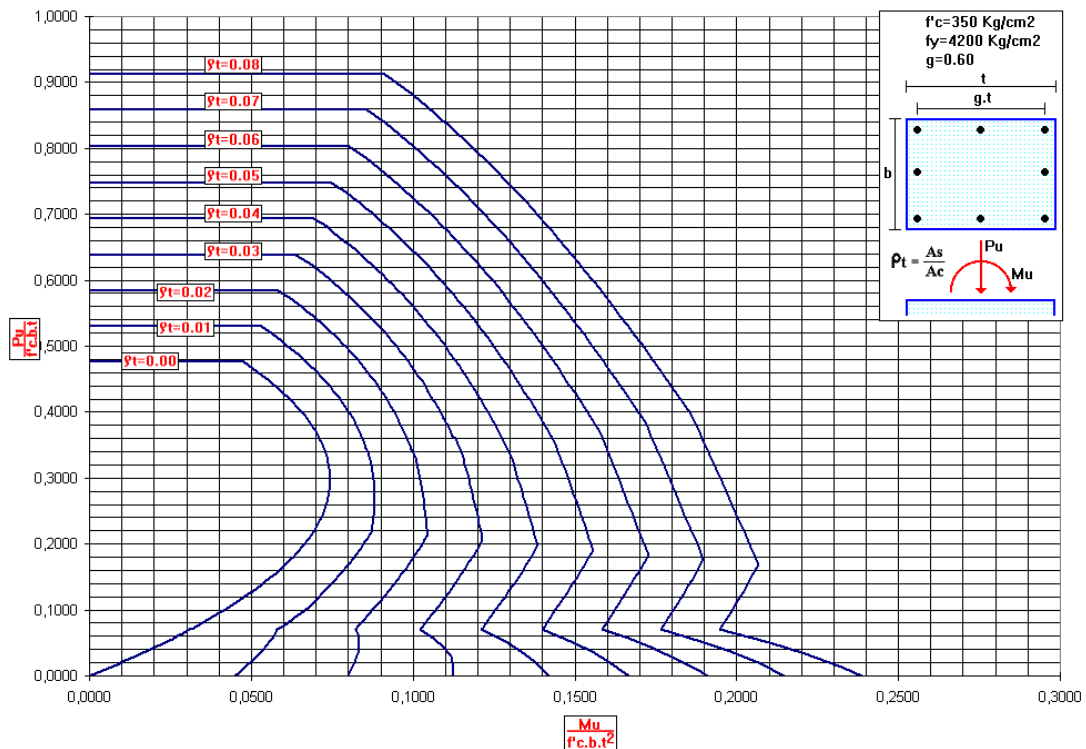


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

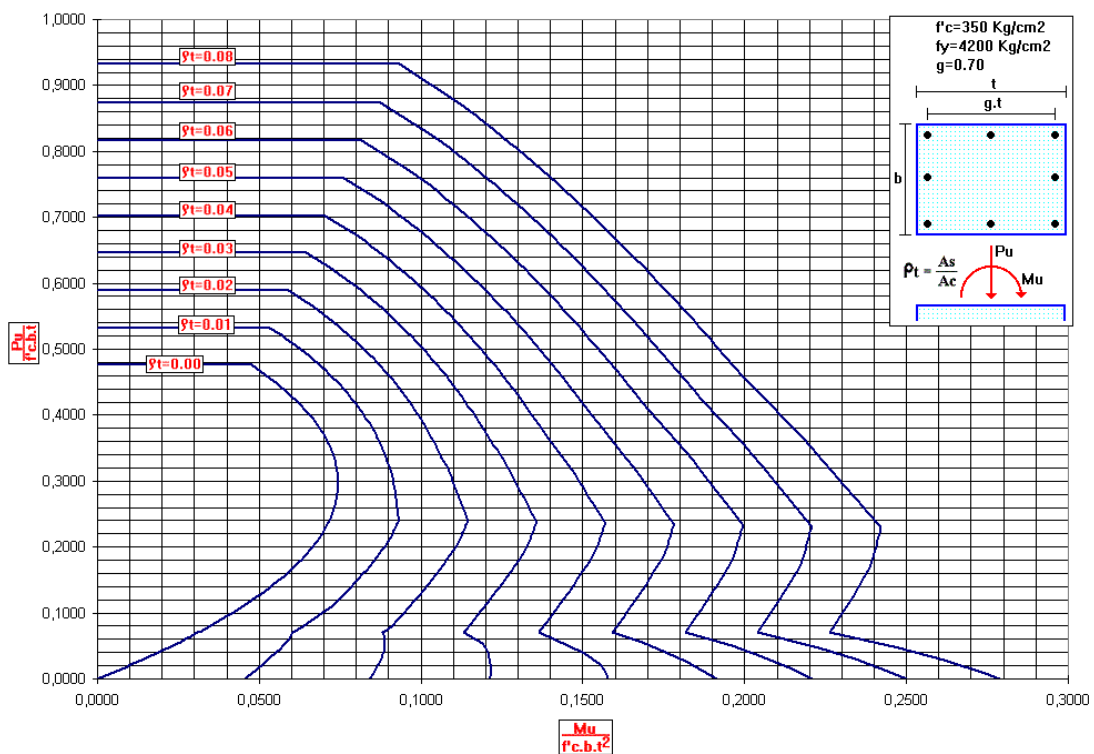
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 129)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 130)



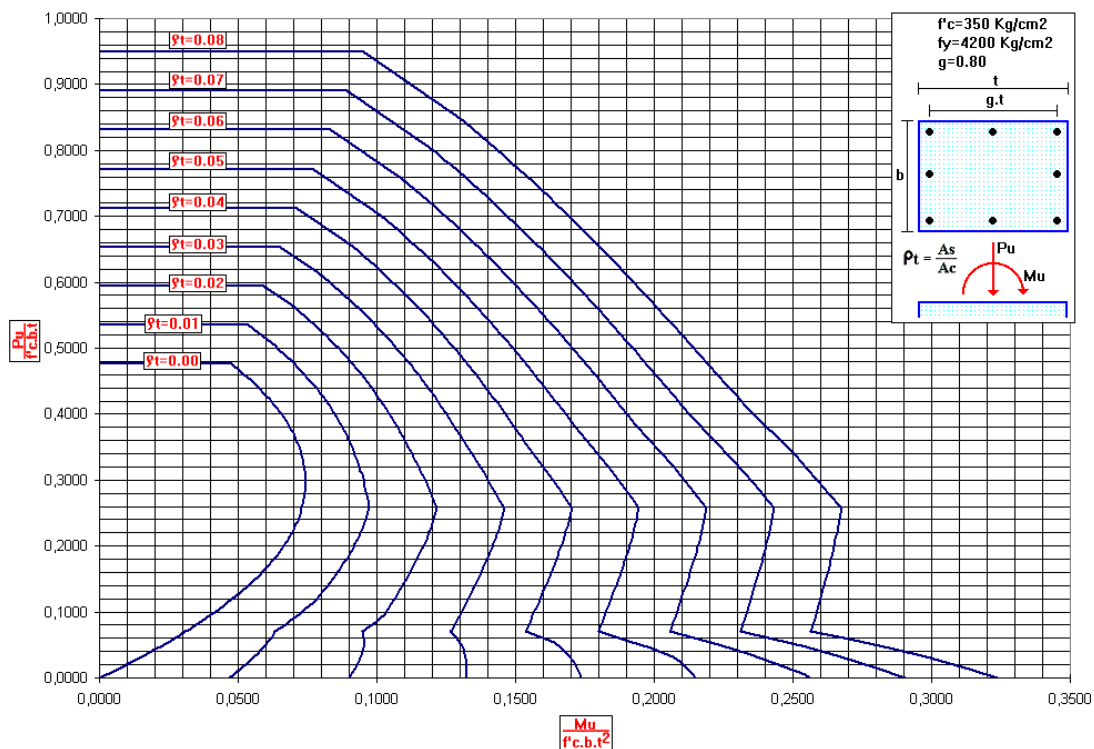


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

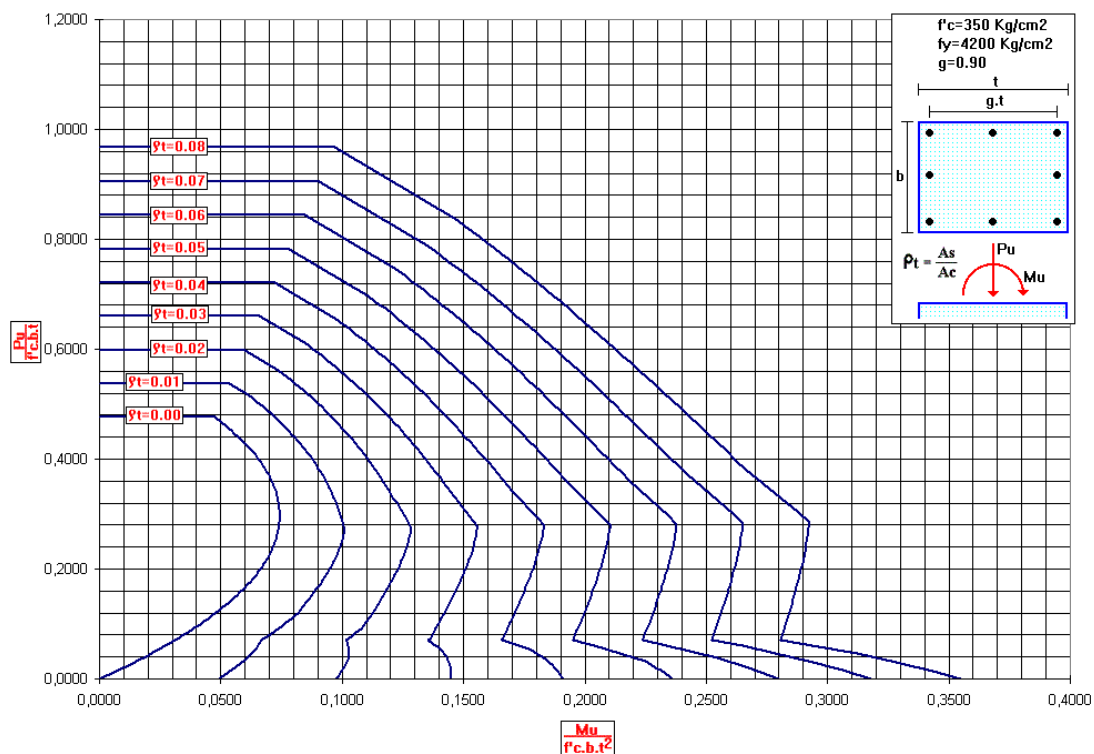
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 131)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 132)



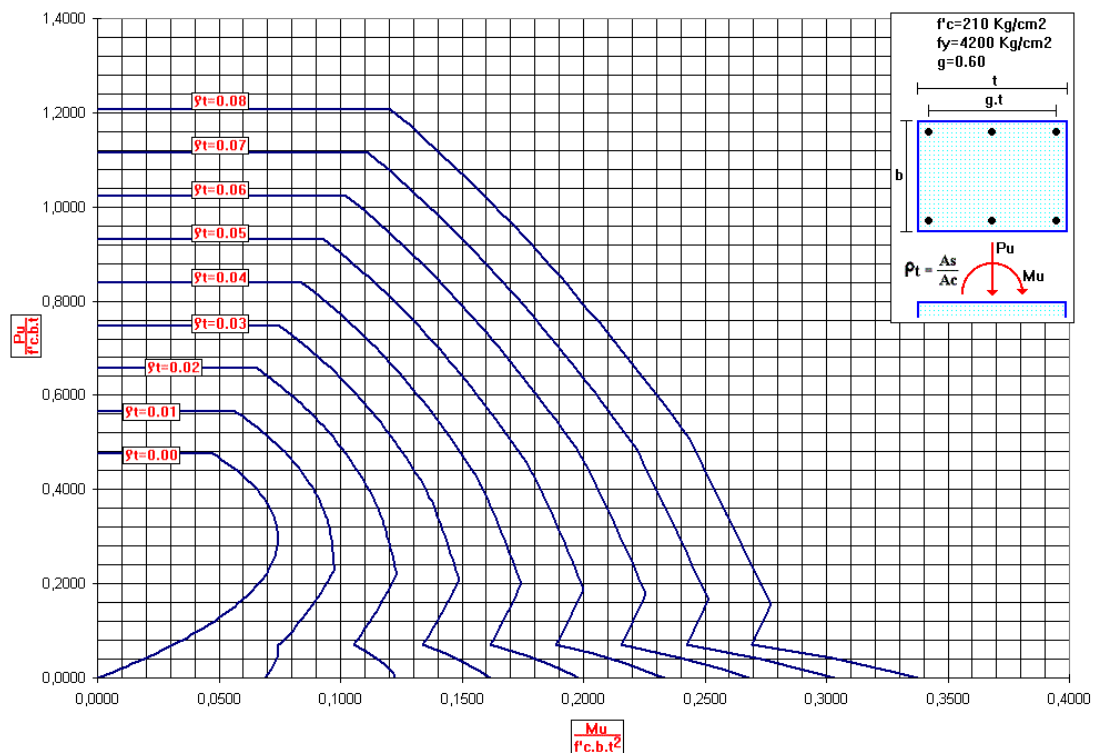


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

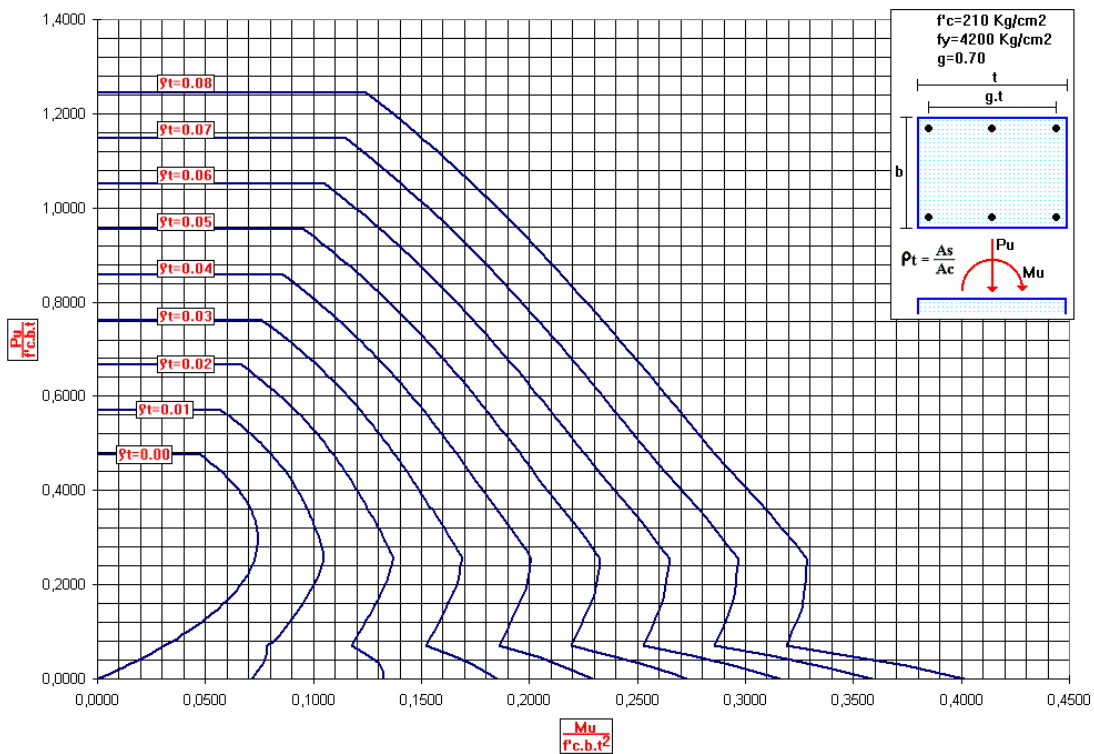
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 133)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 134)



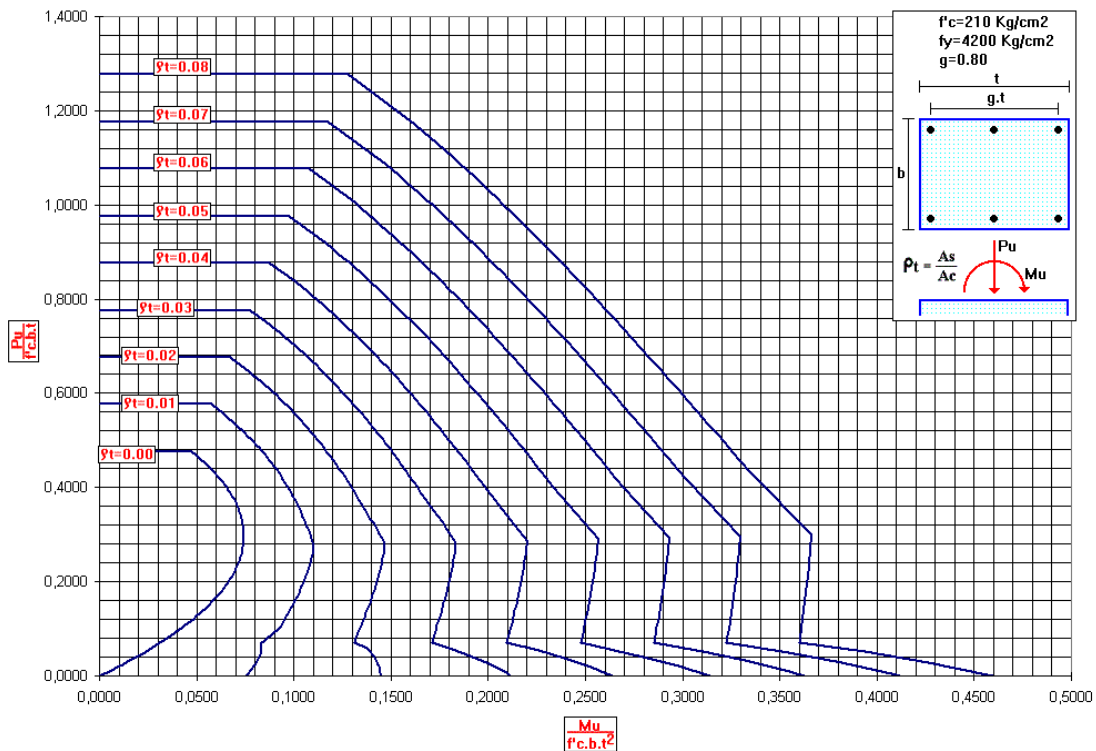


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

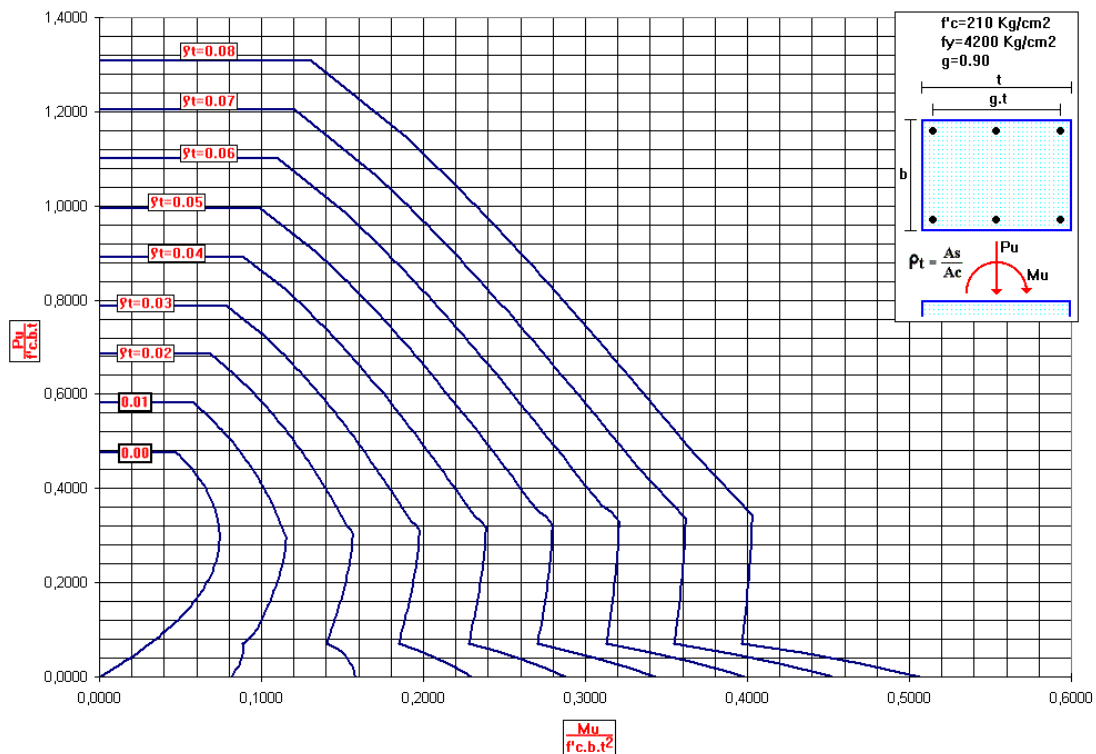
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 135)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 136)



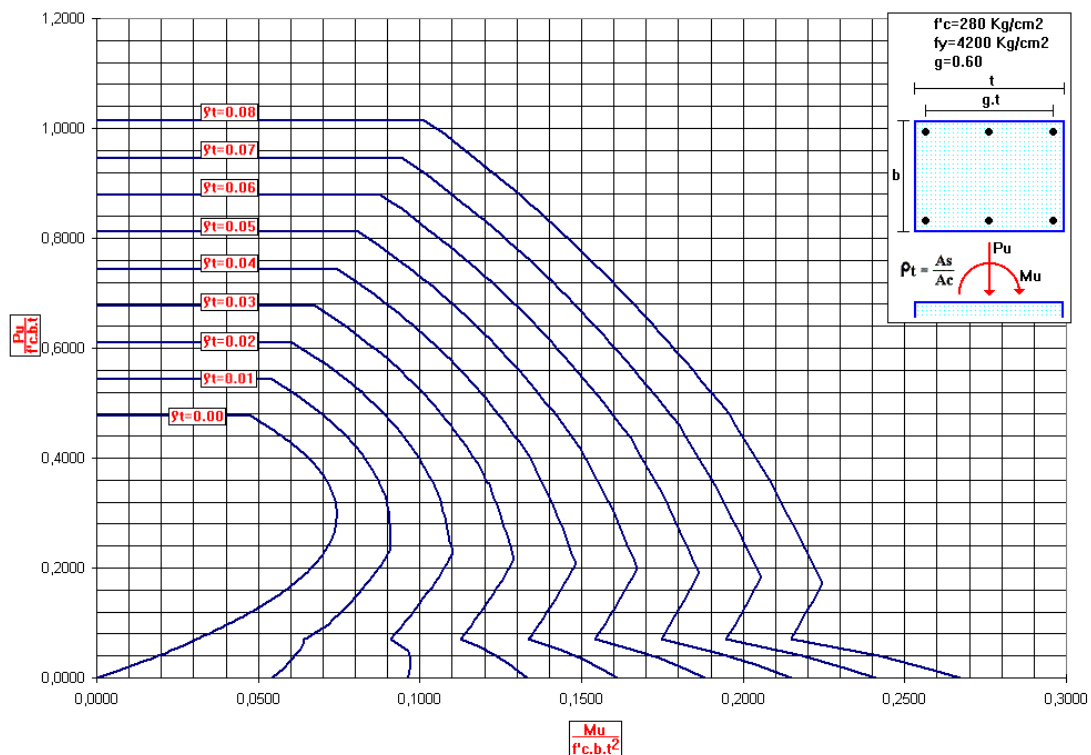


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

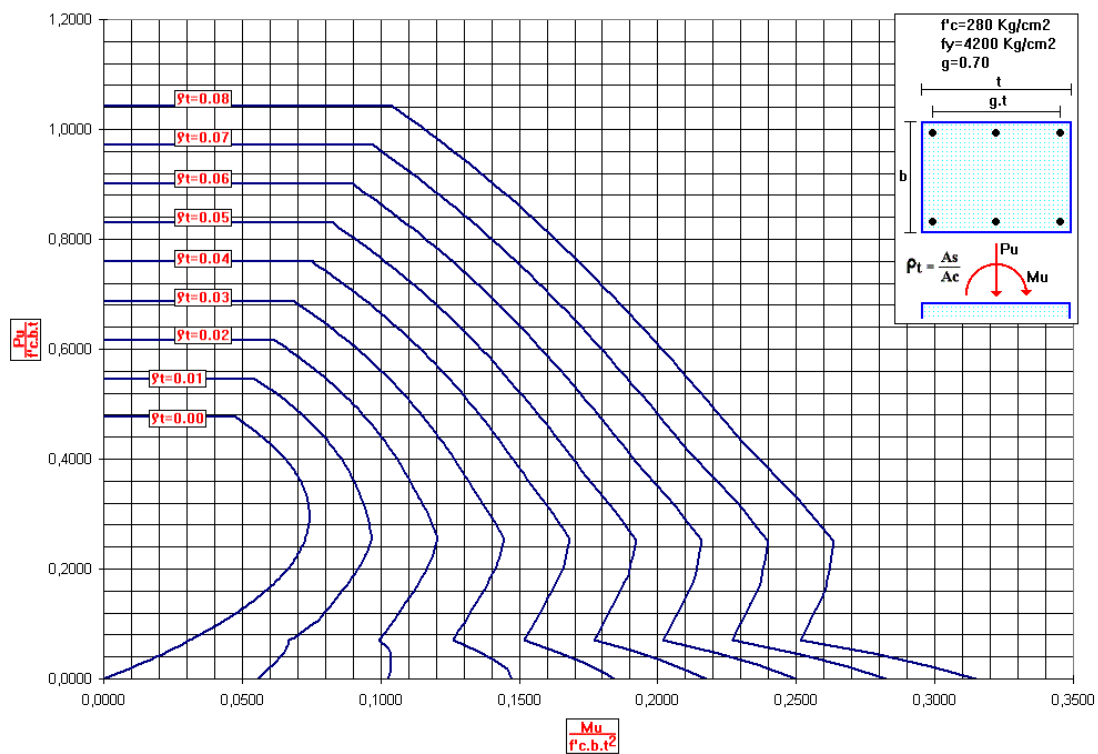
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 137)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 138)



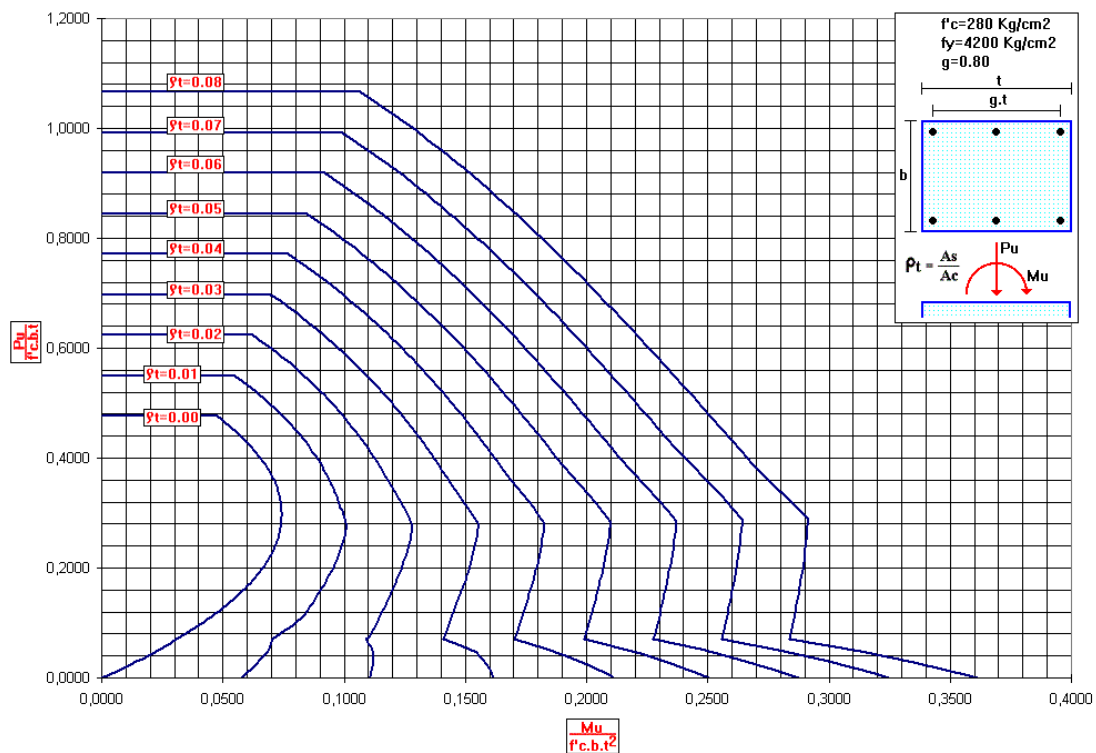


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

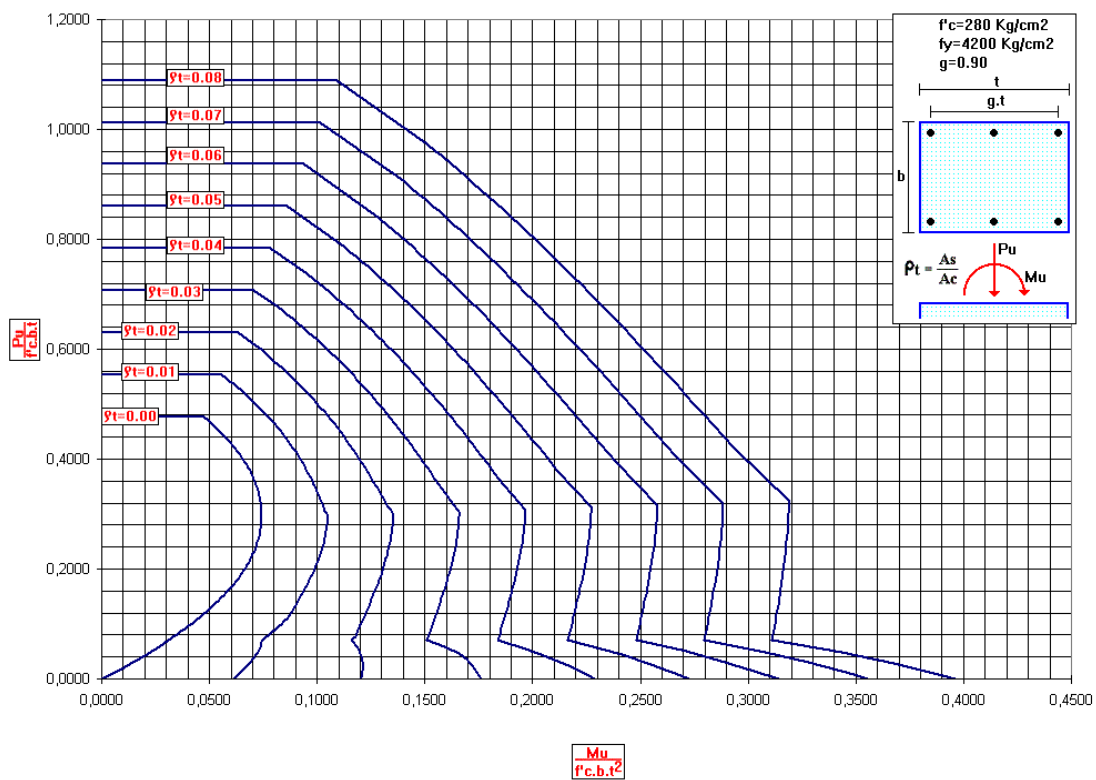
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 139)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 140)



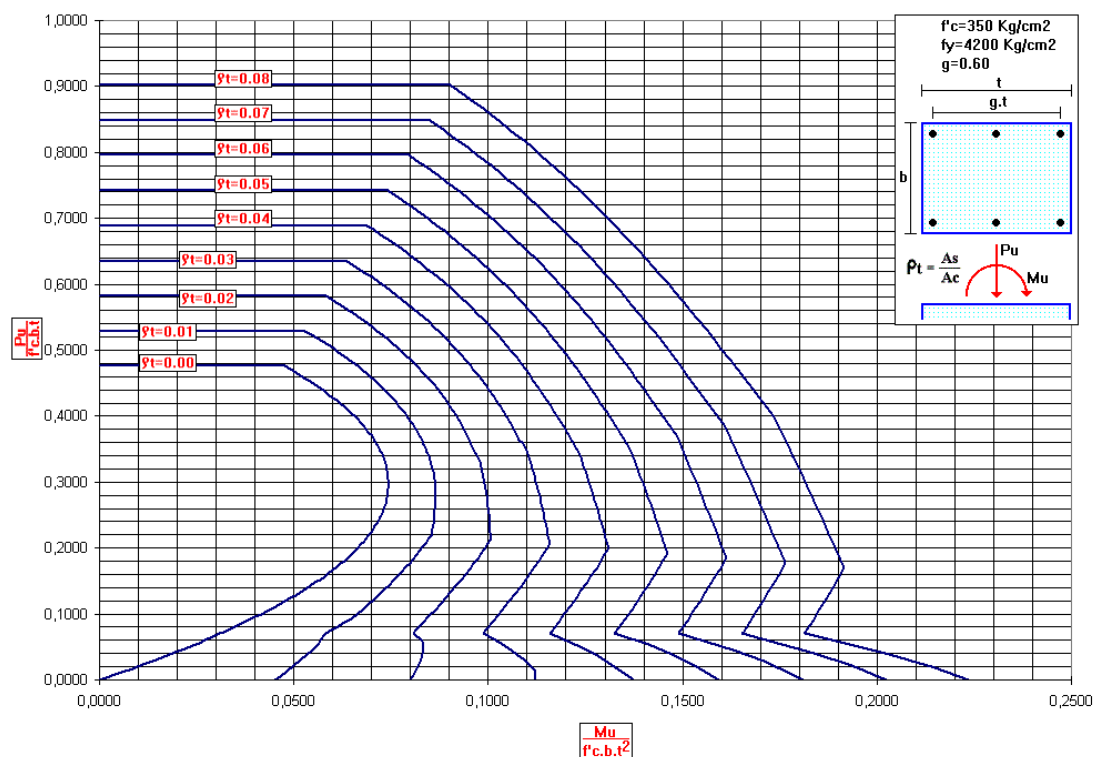


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

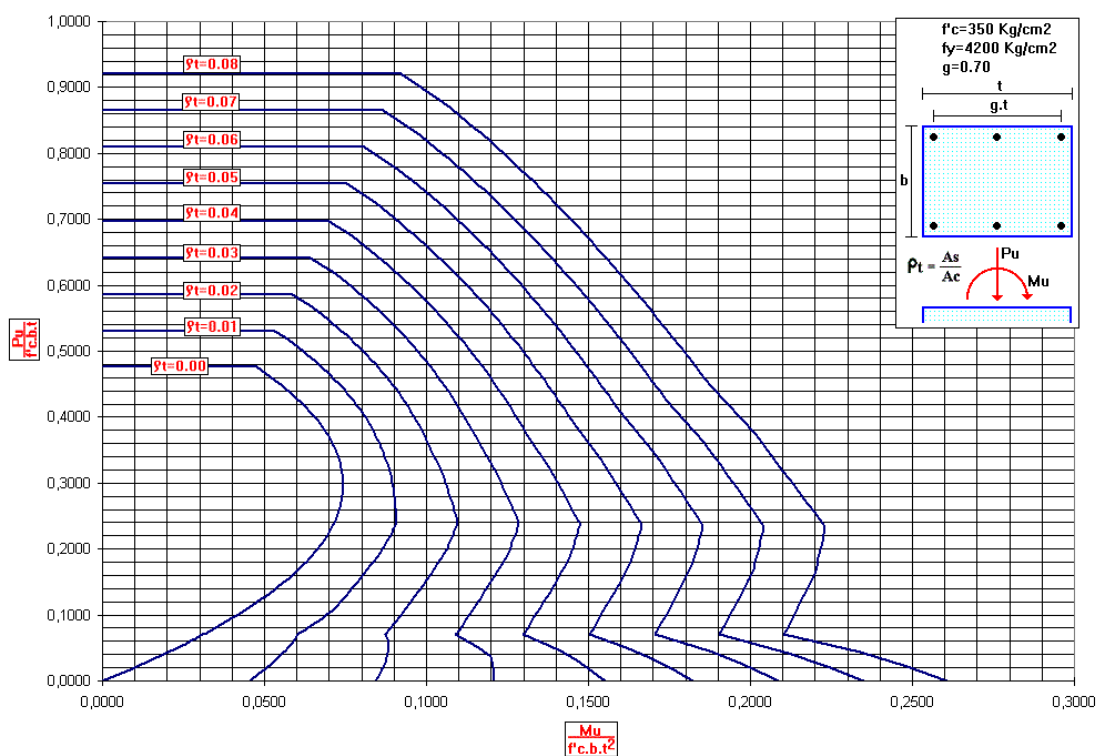
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 141)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 142)



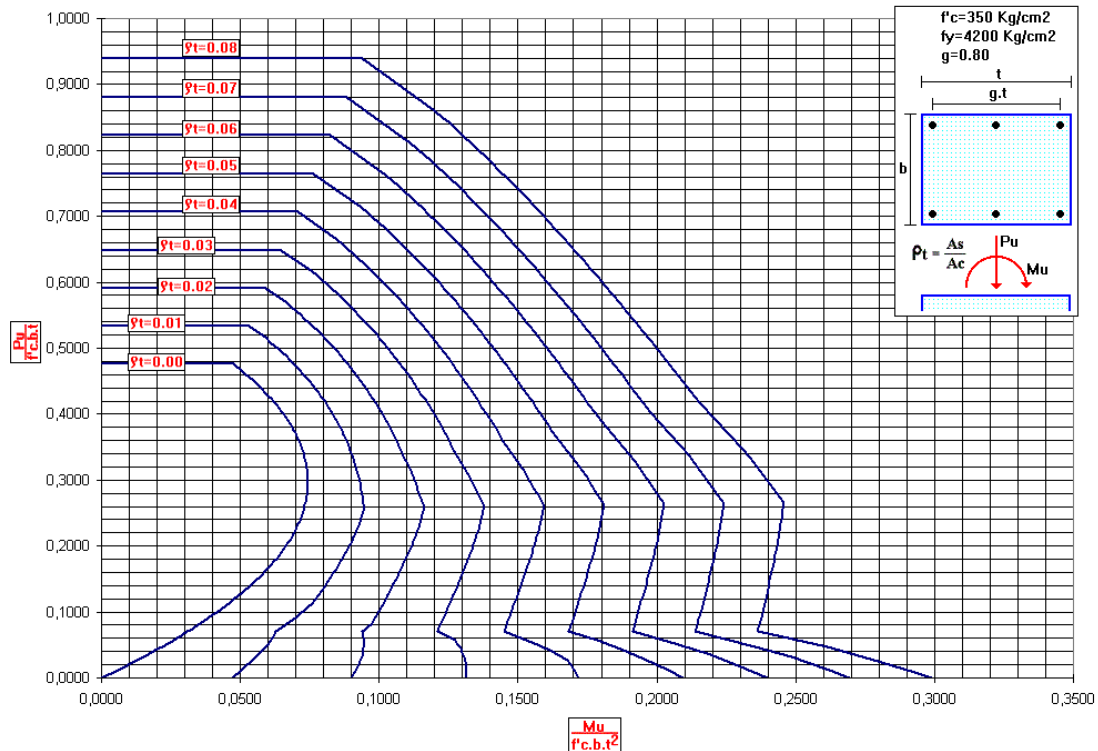


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

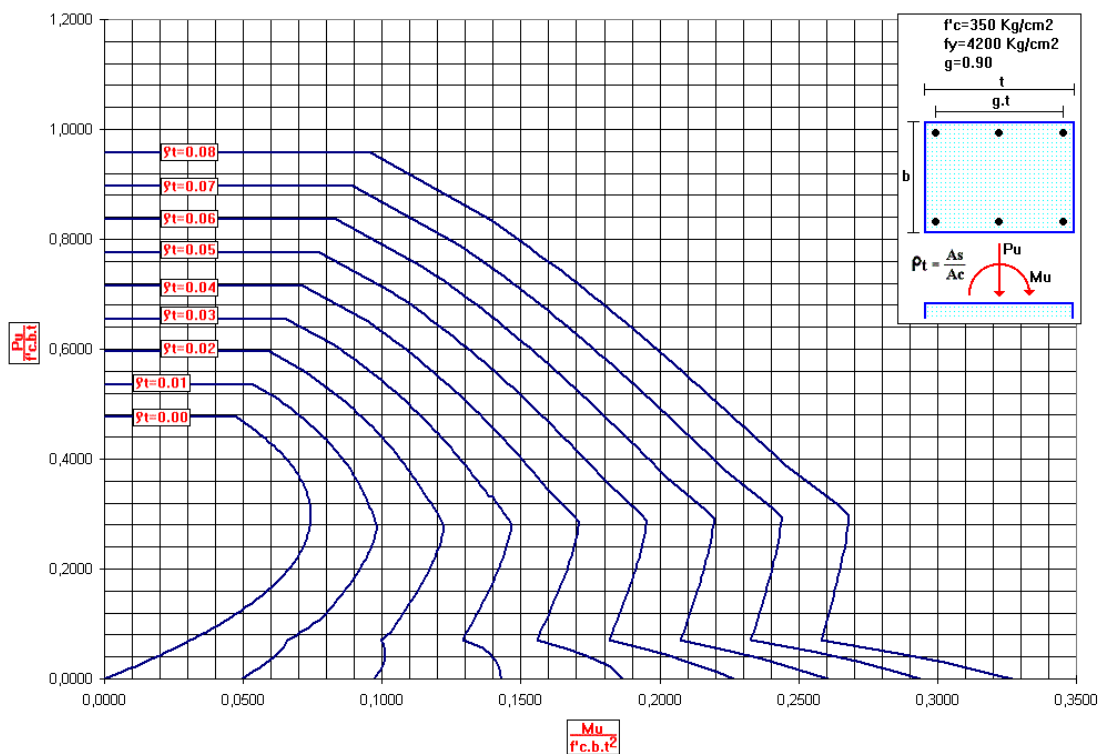
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 143)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 144)



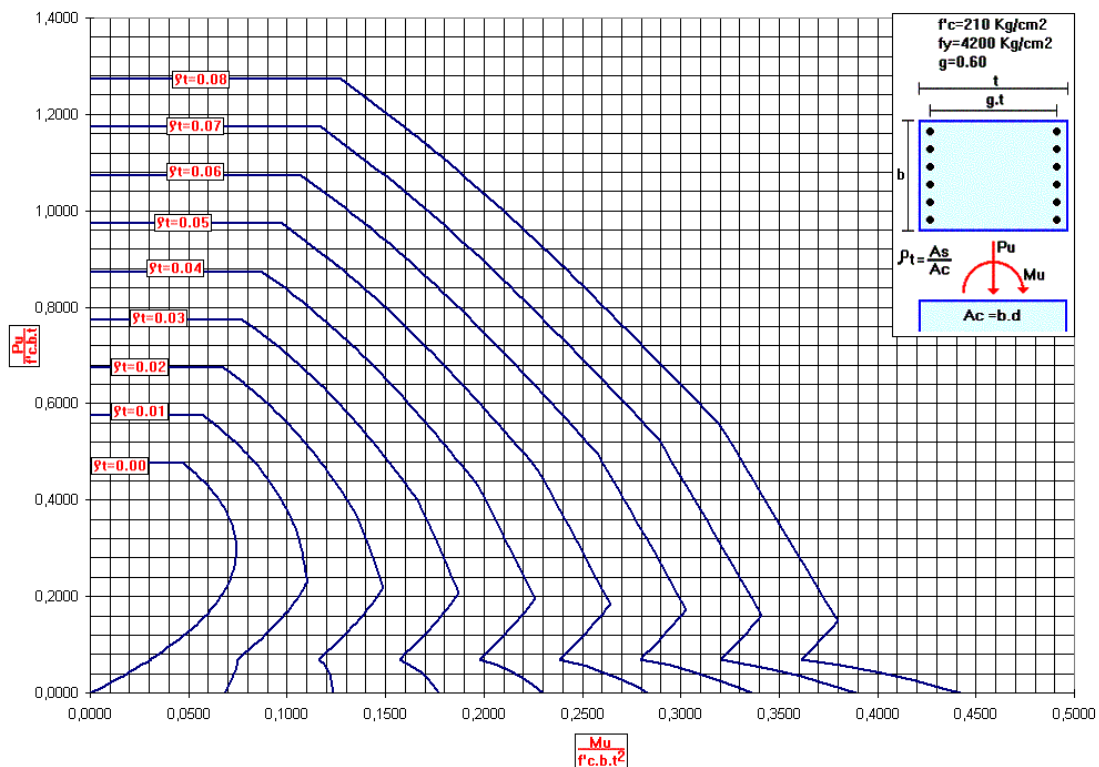


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

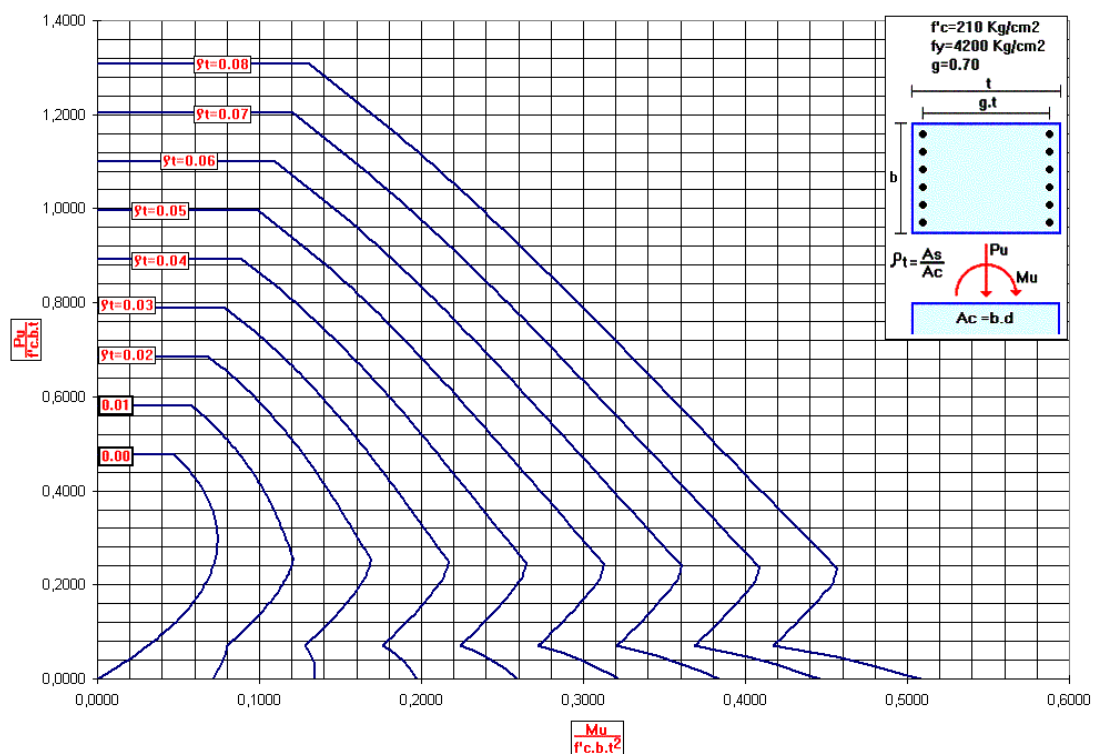
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 145)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 146)



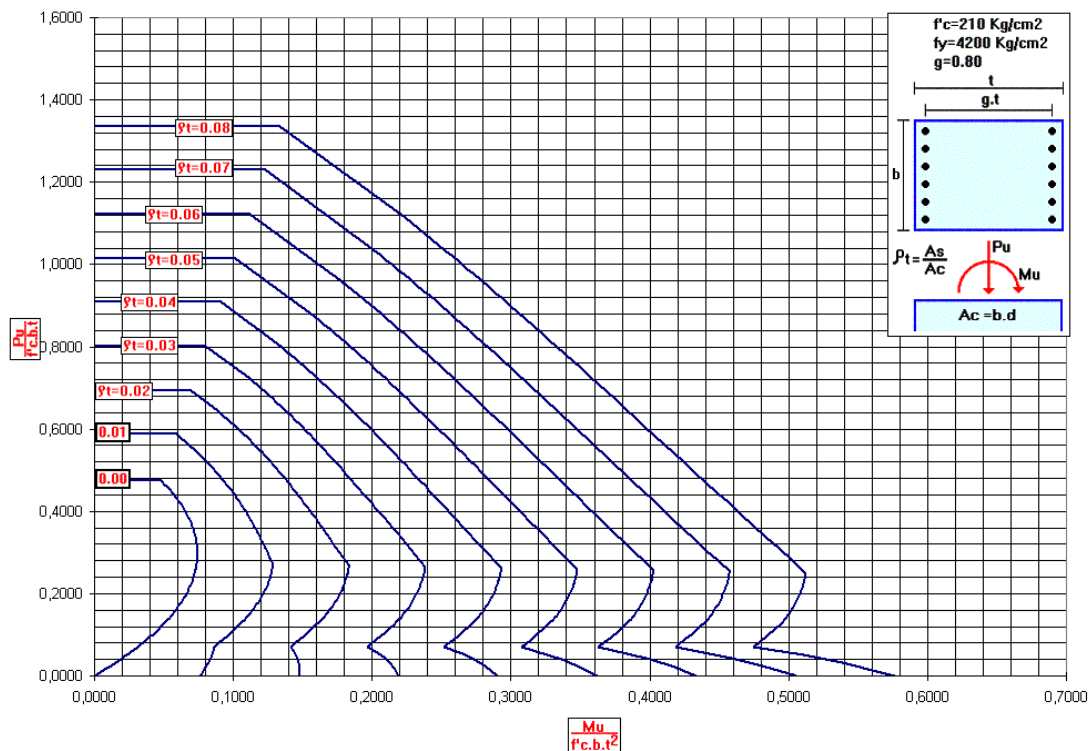


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

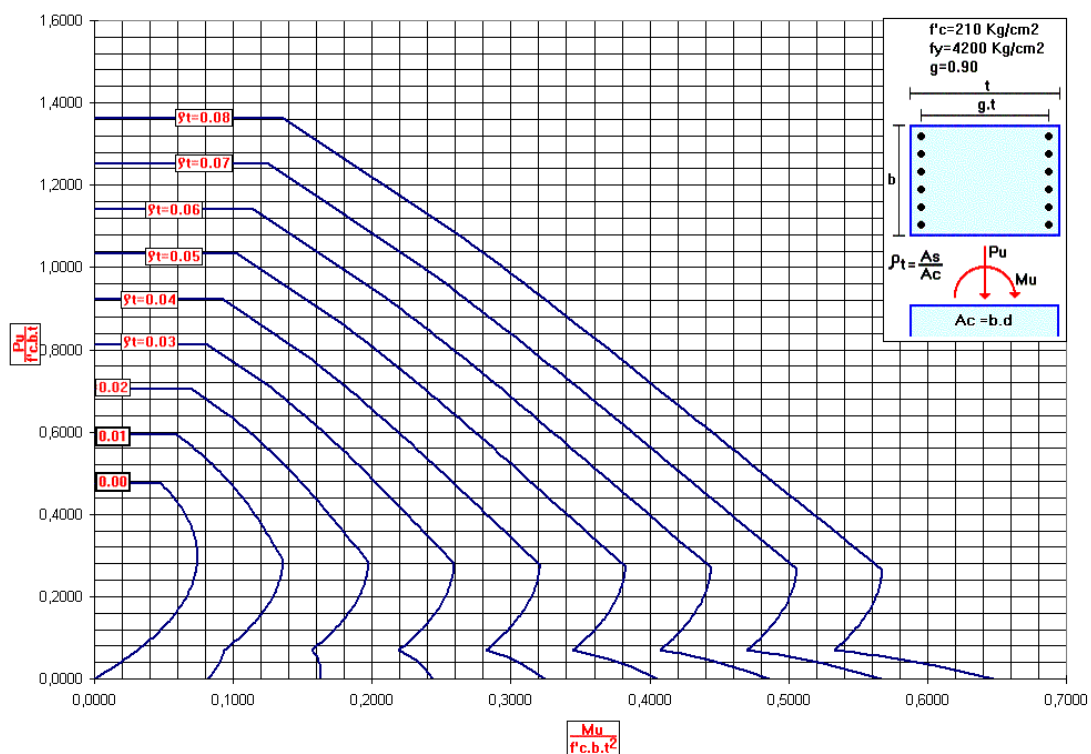
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 147)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 148)



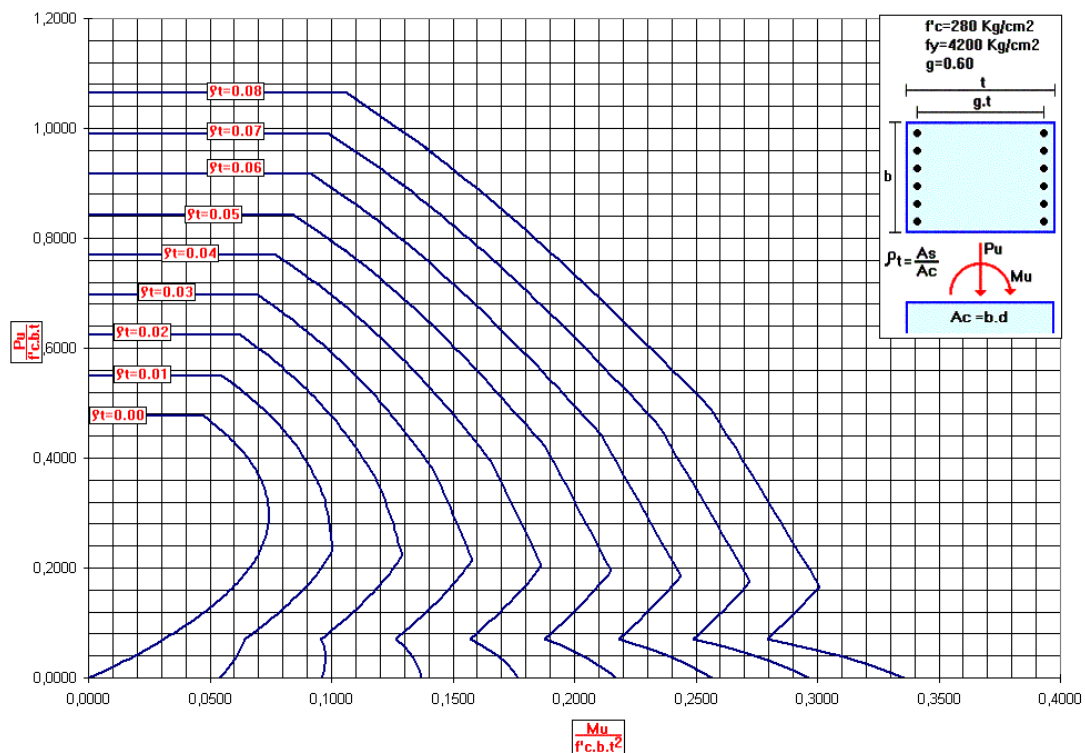


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

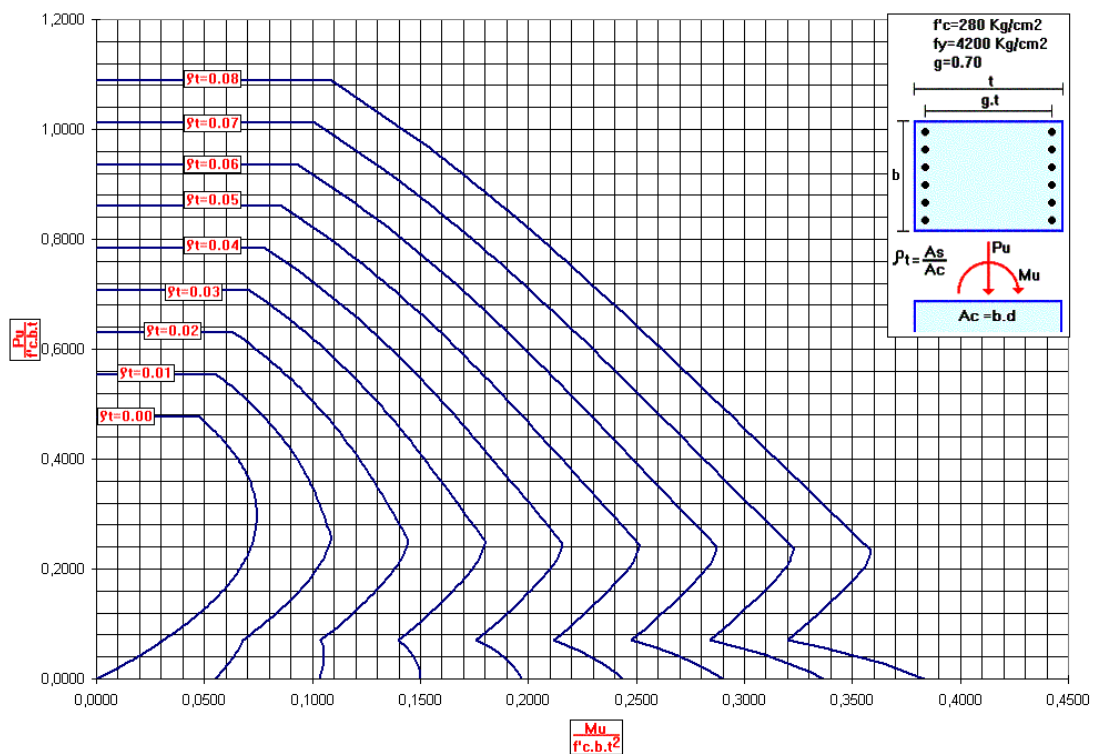
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 149)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 150)



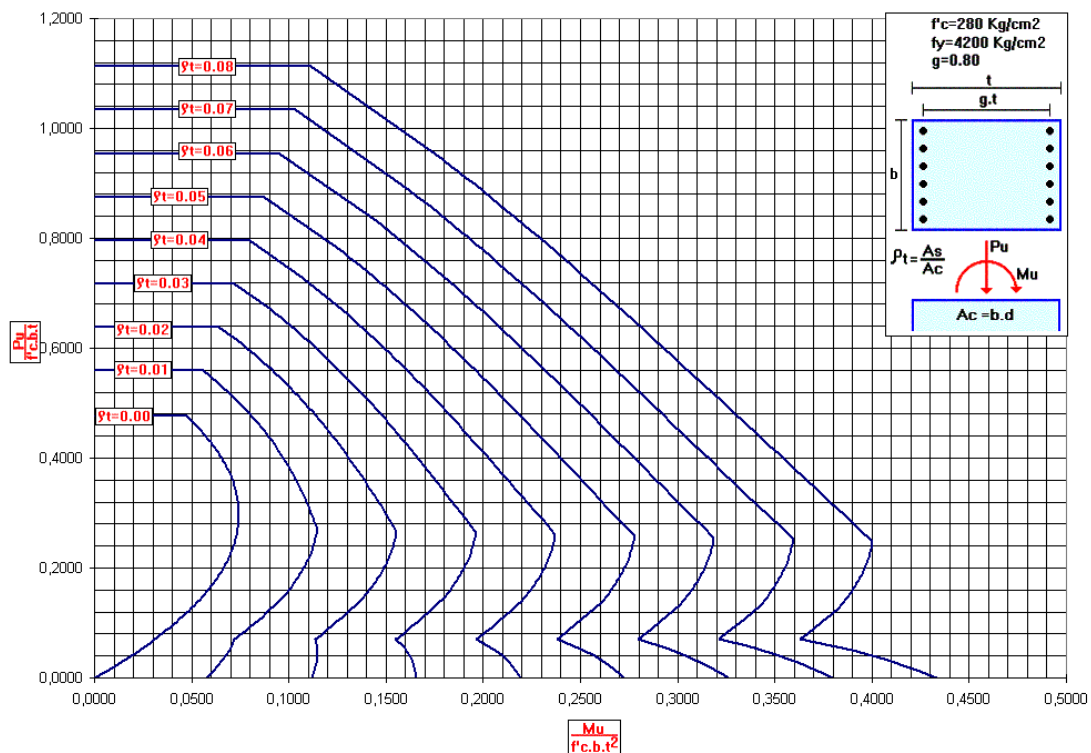


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

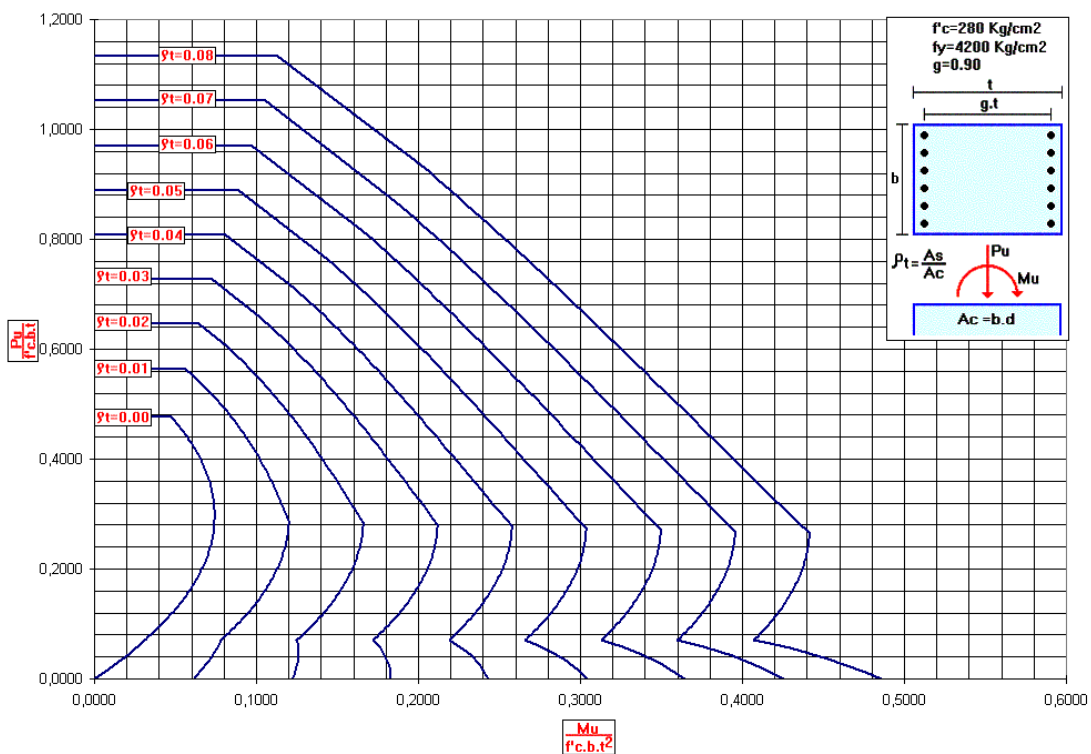
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 151)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 152)



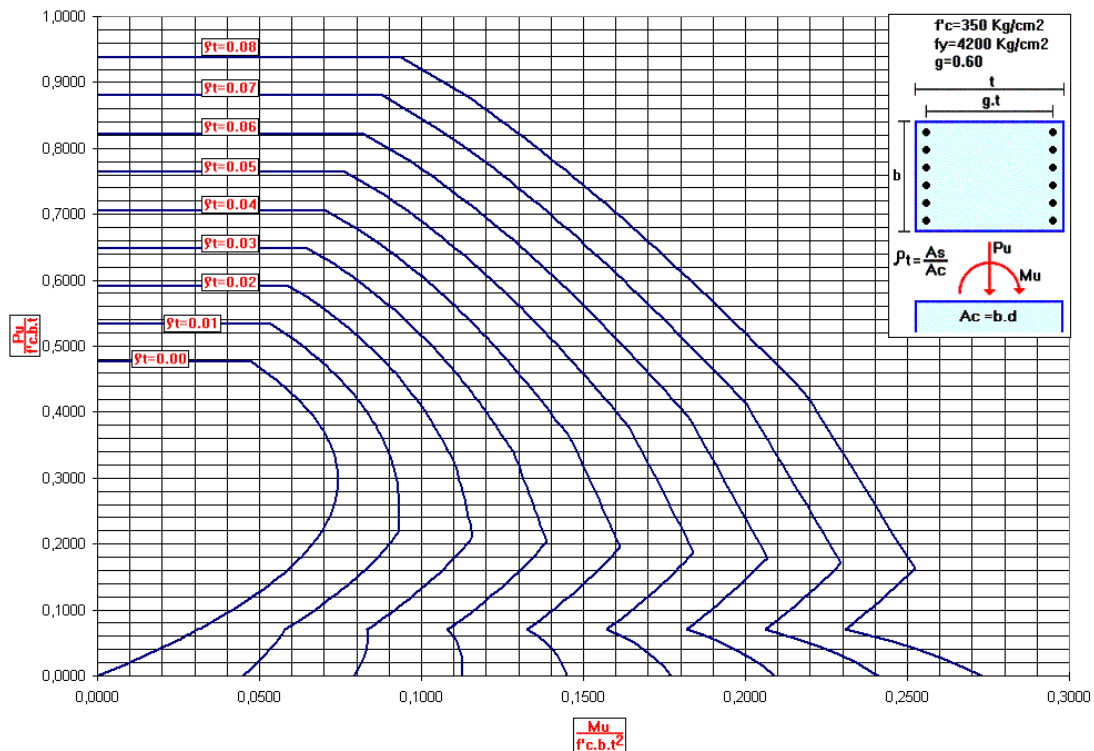


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

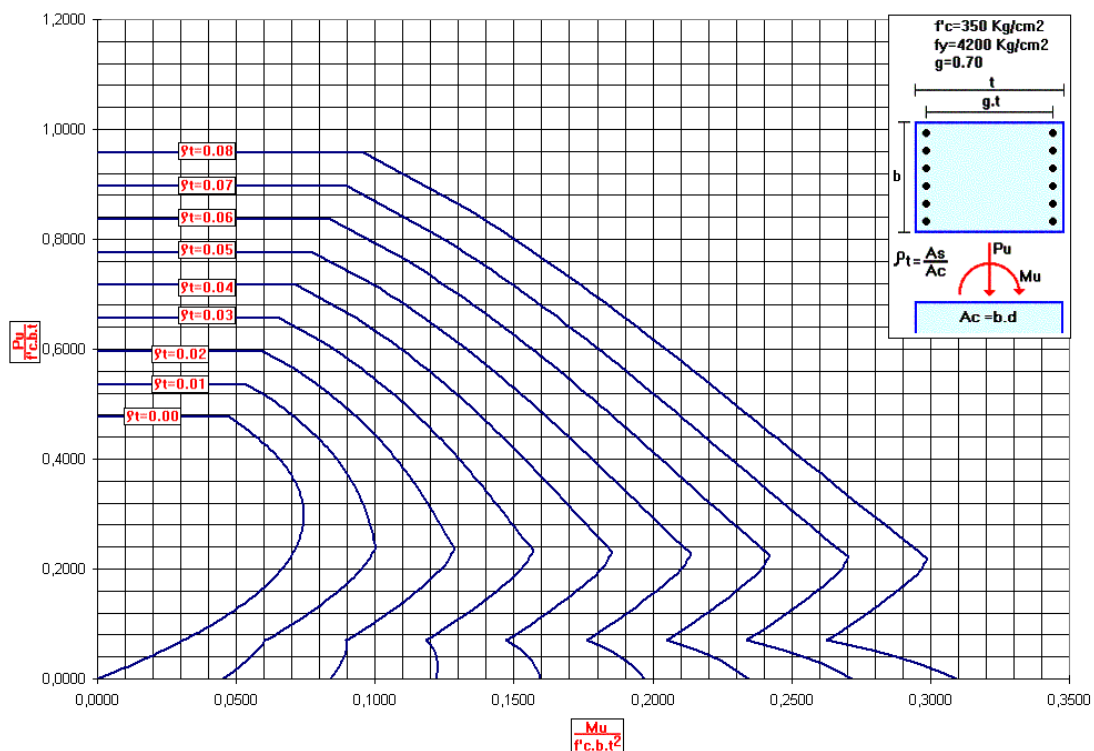
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 153)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 154)



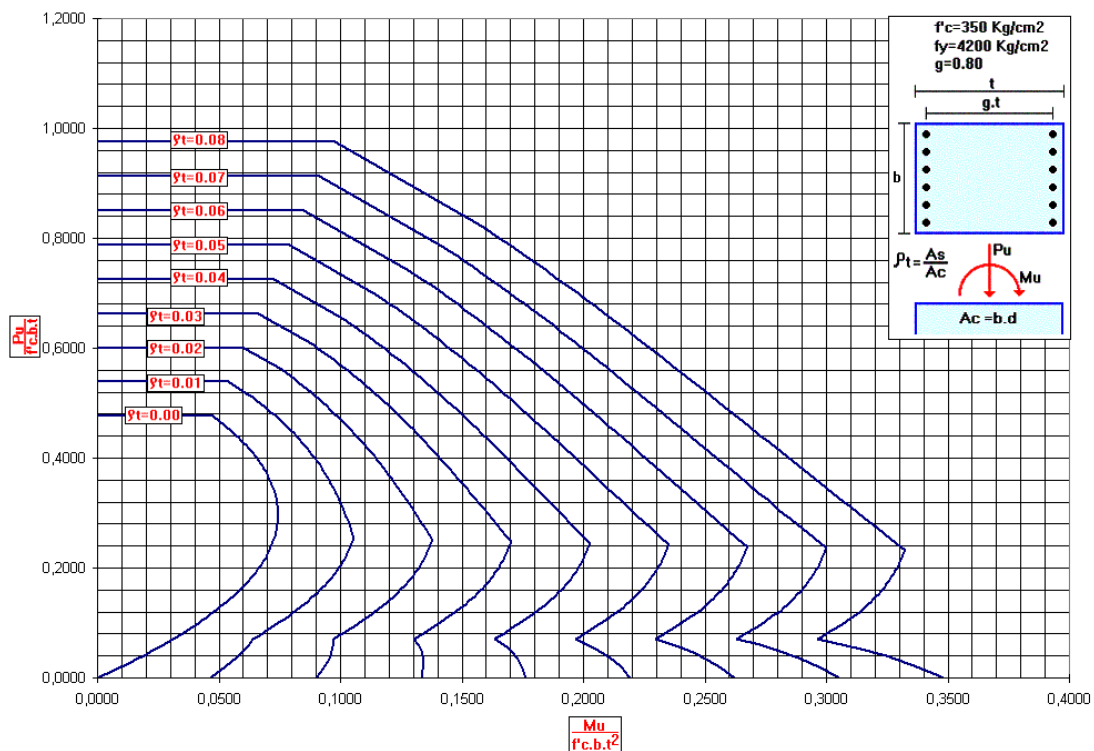


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

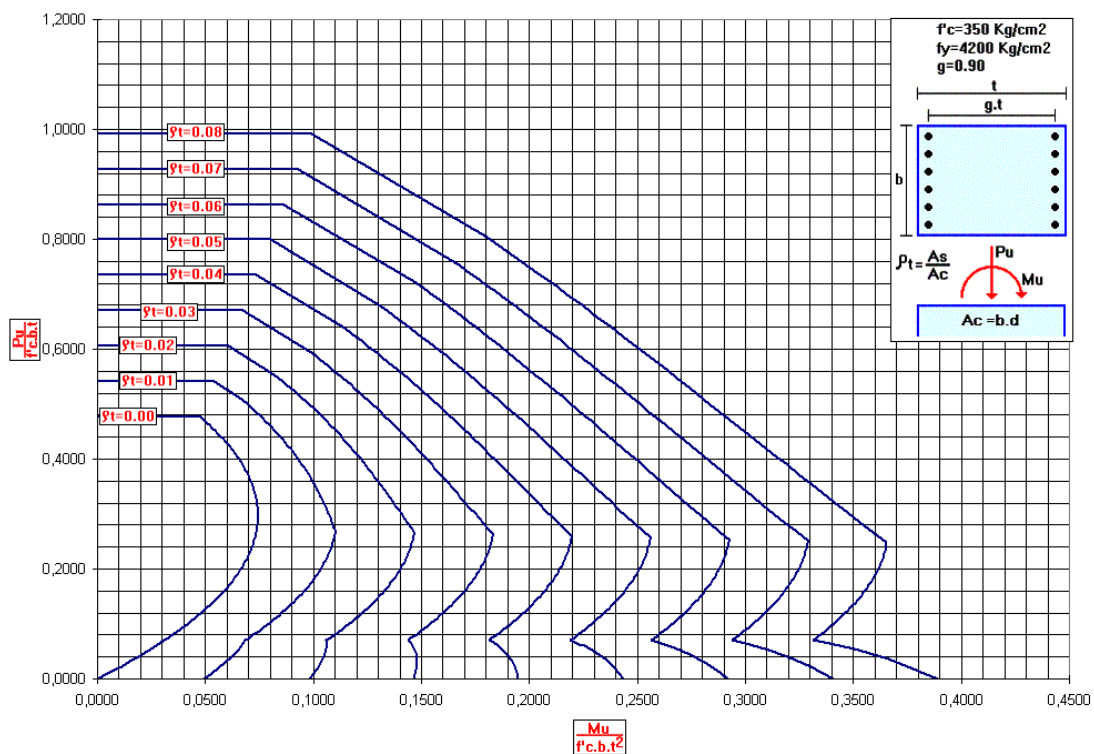
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 155)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 156)



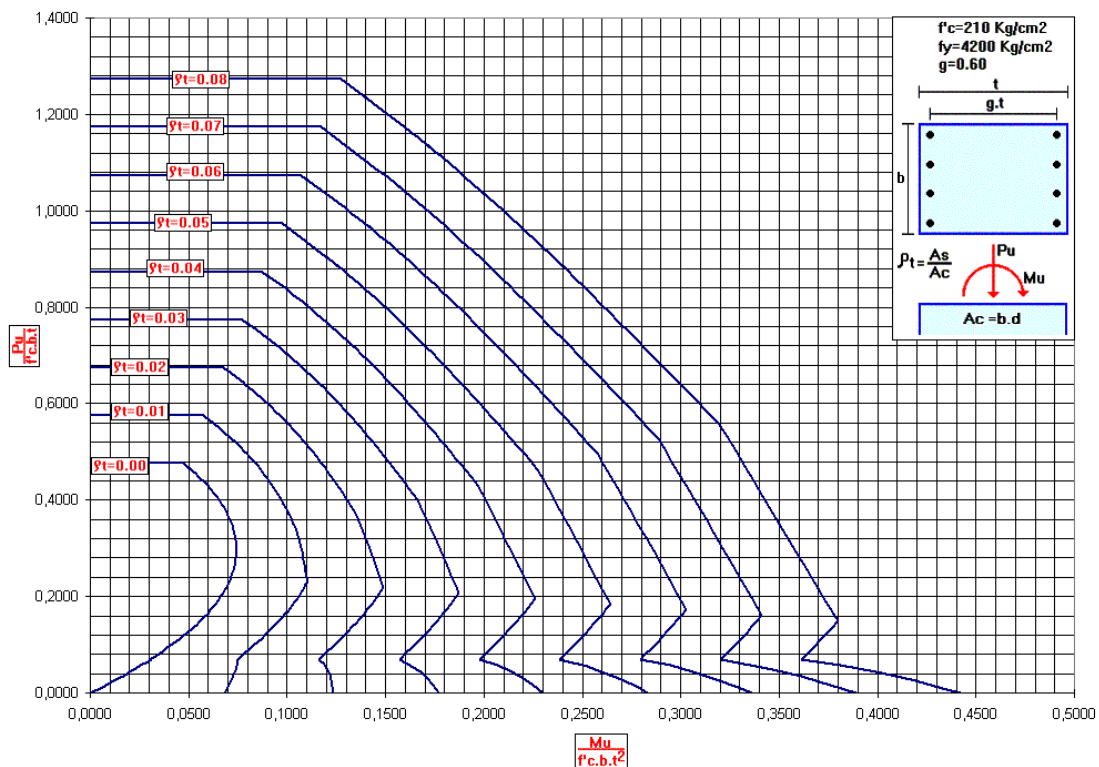


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

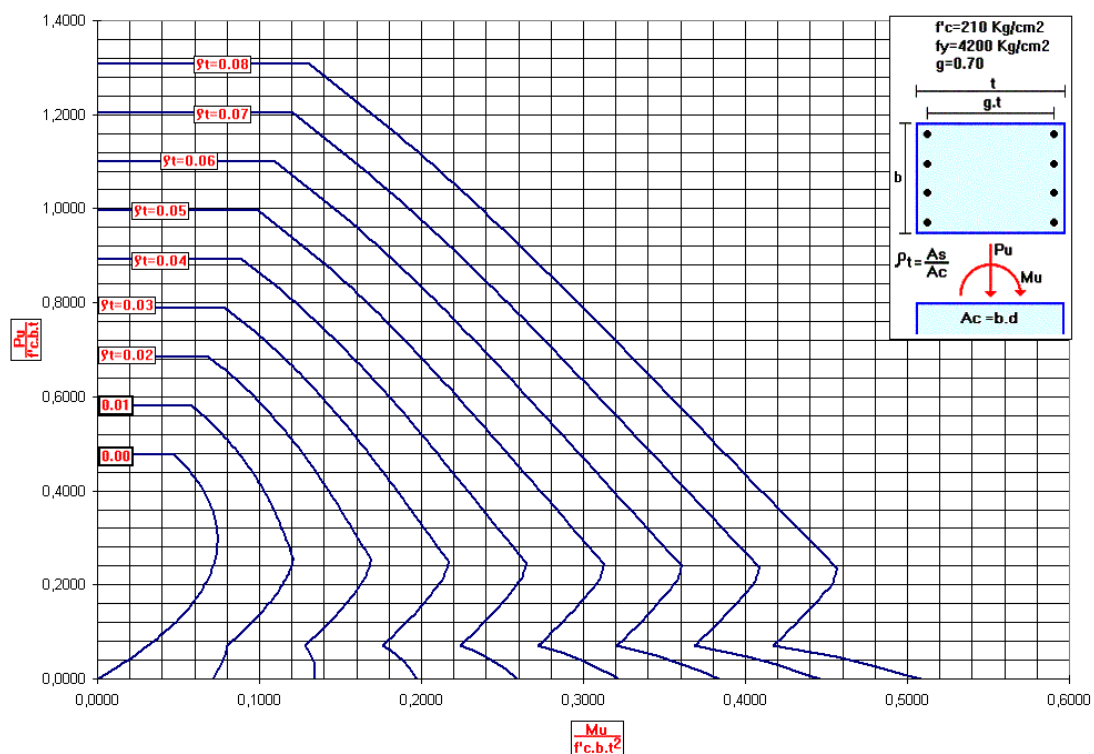
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 157)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 158)



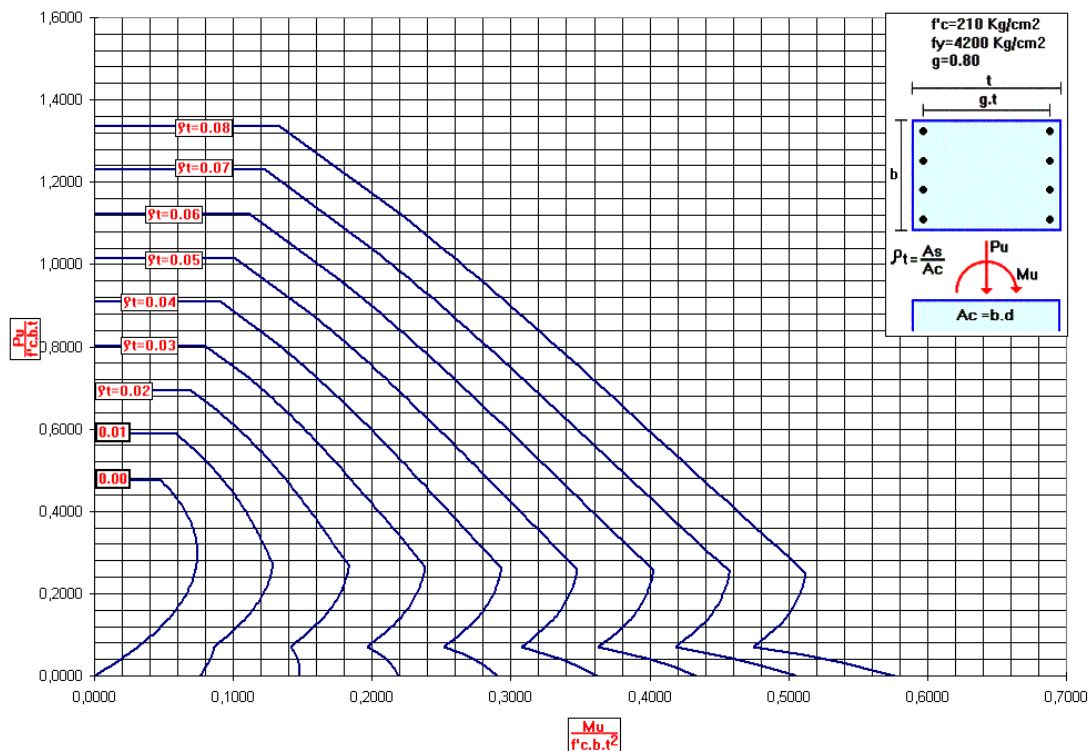


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

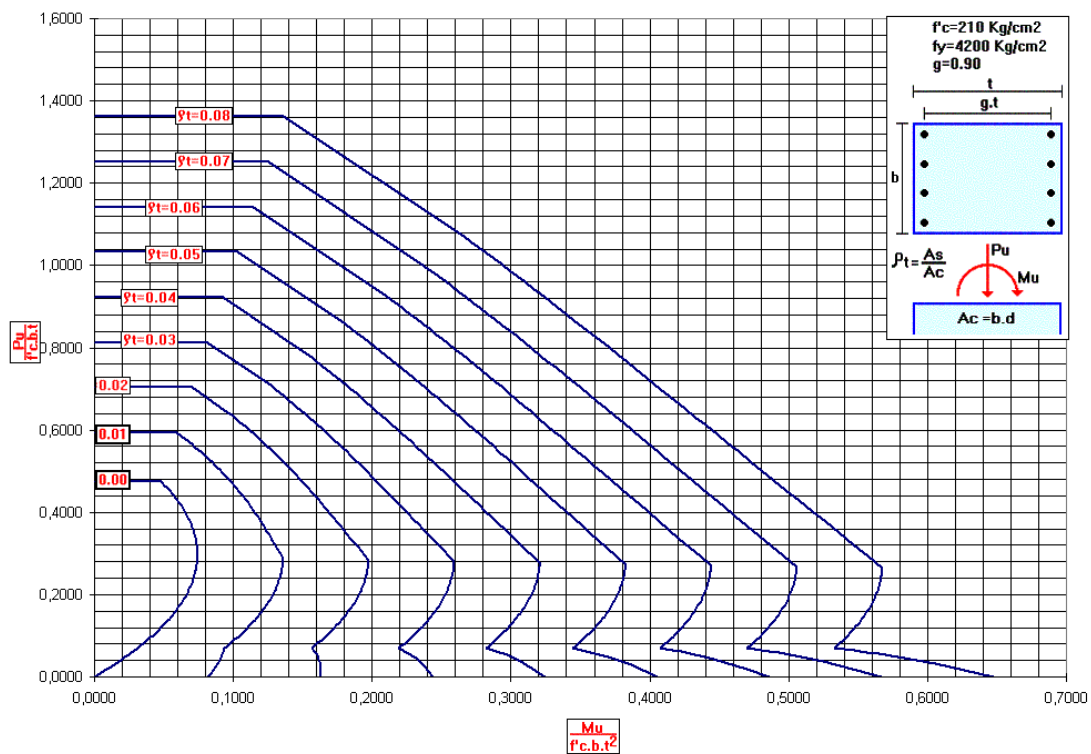
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 159)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 160)



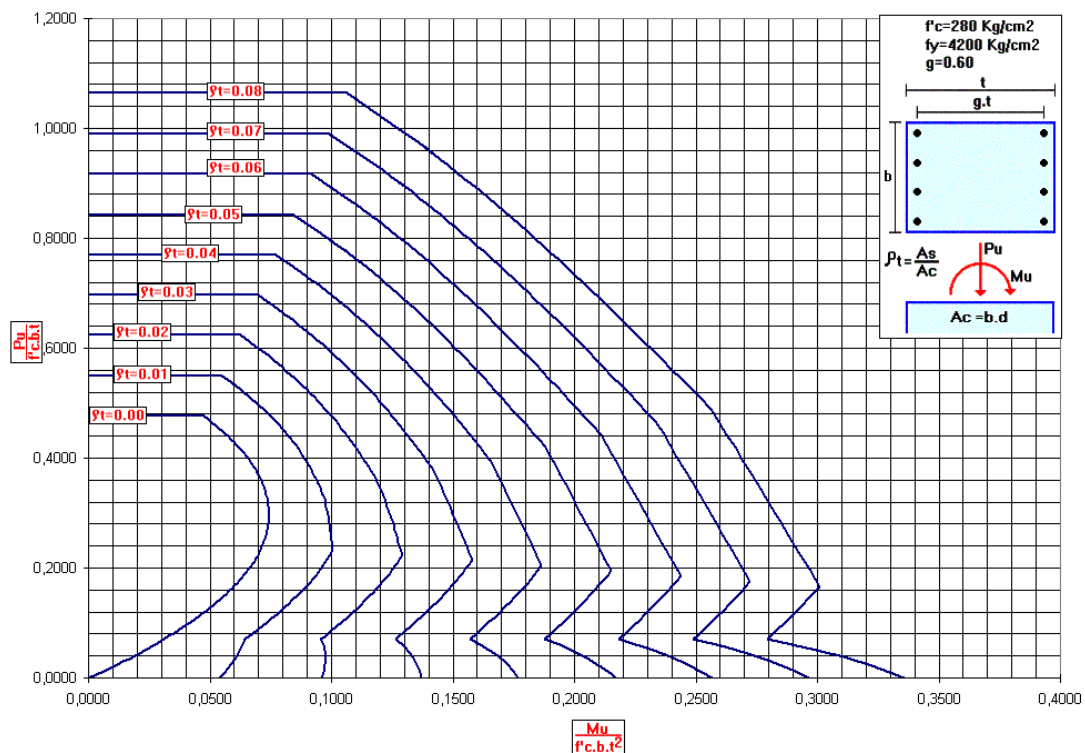


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

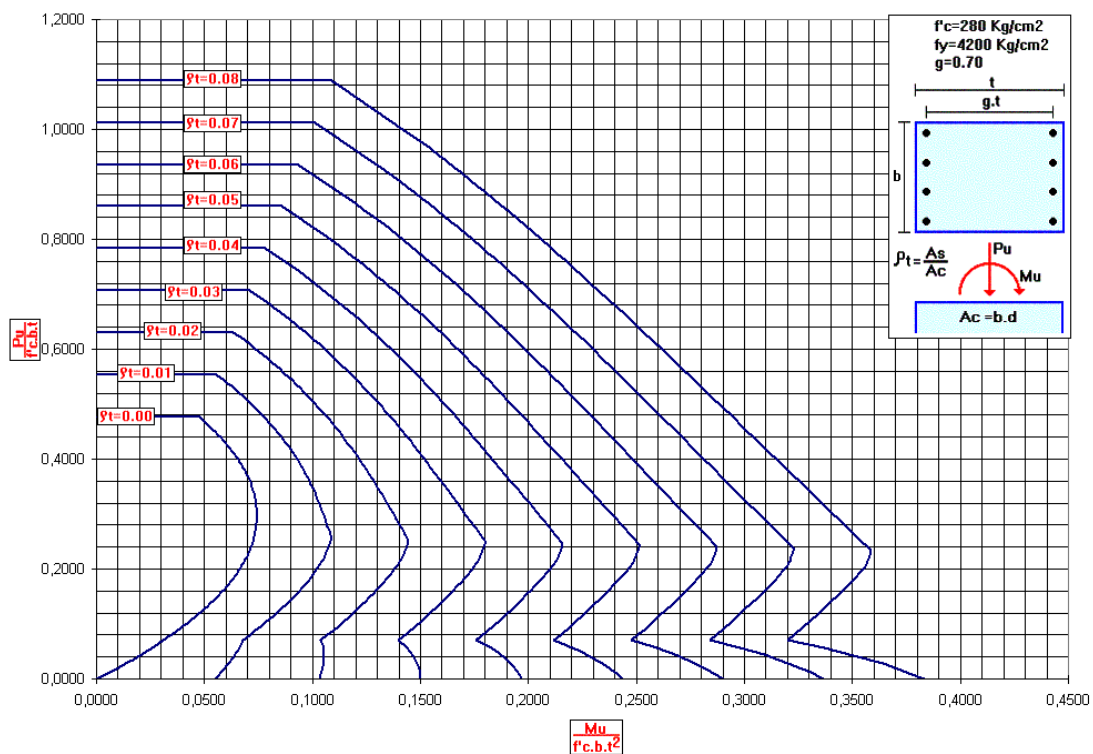
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 161)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 162)



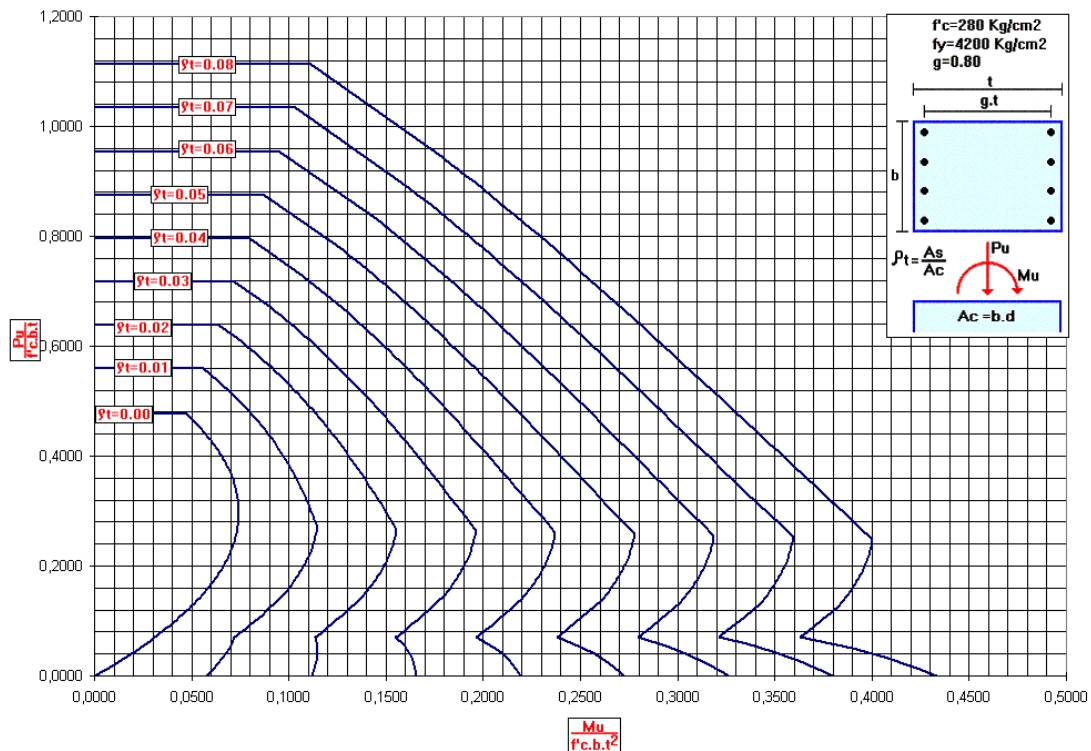


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

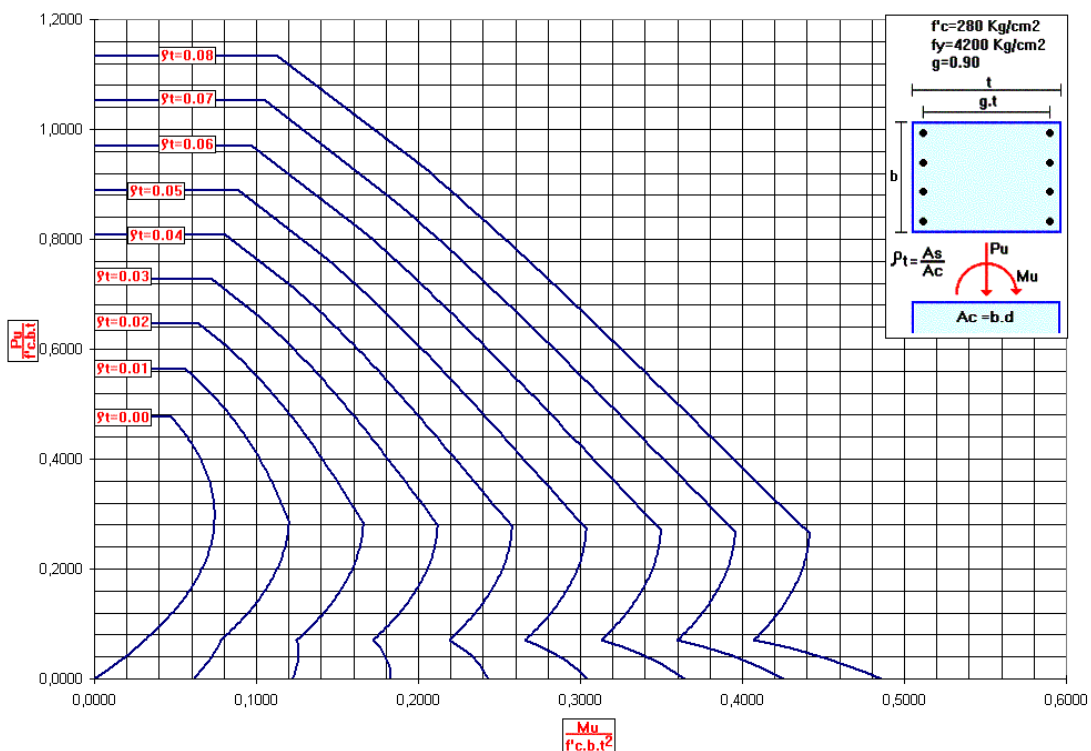
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 163)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 164)



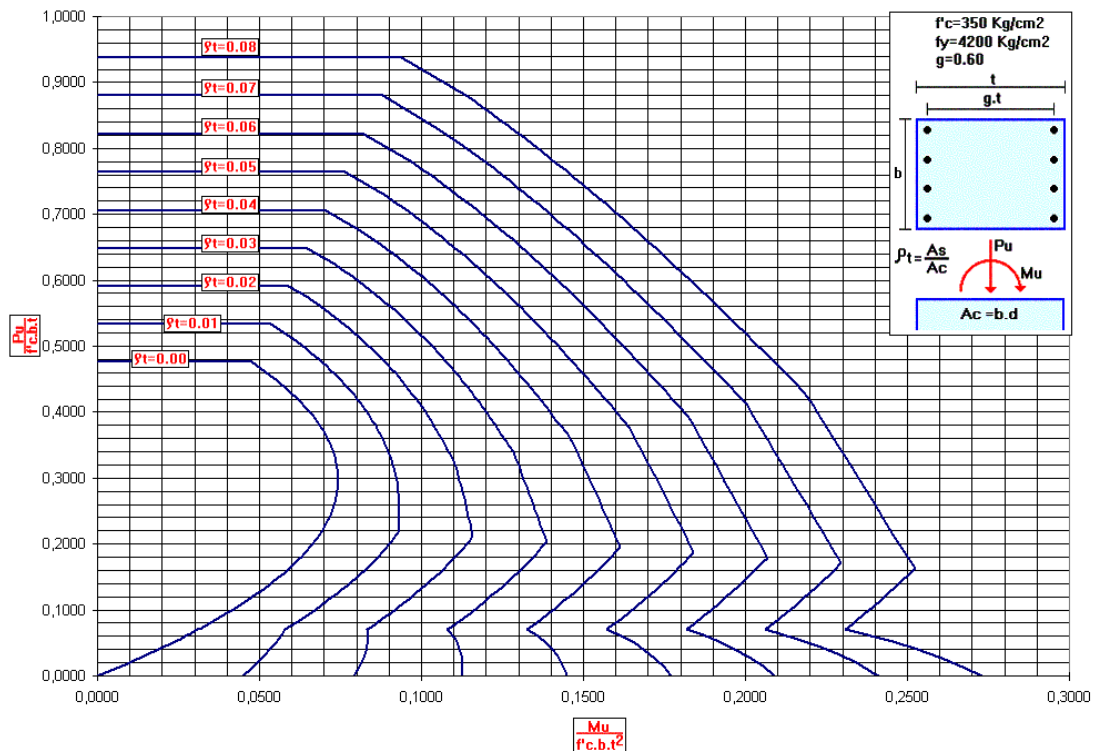


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

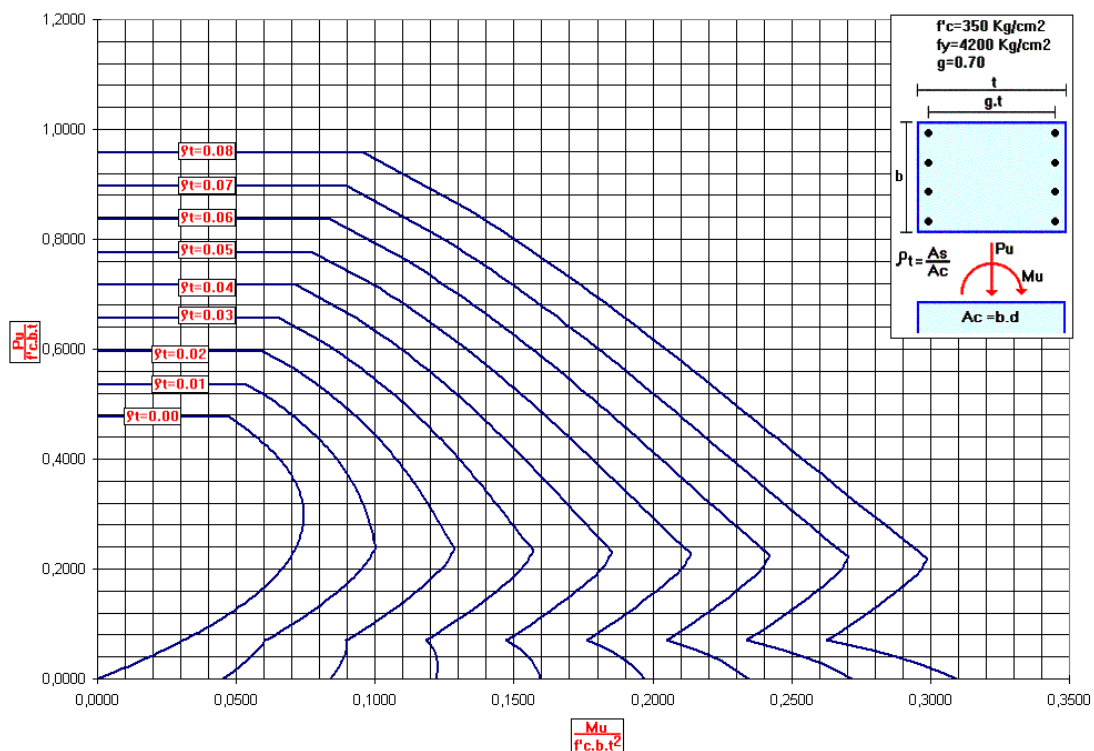
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 165)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 166)



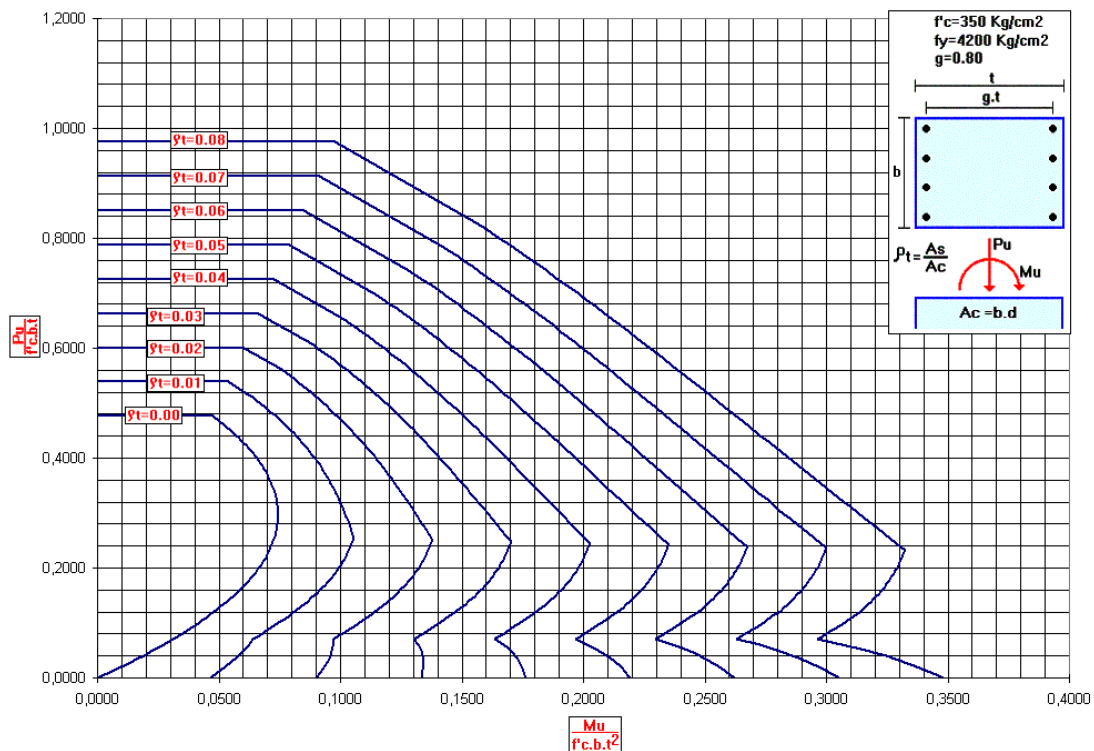


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

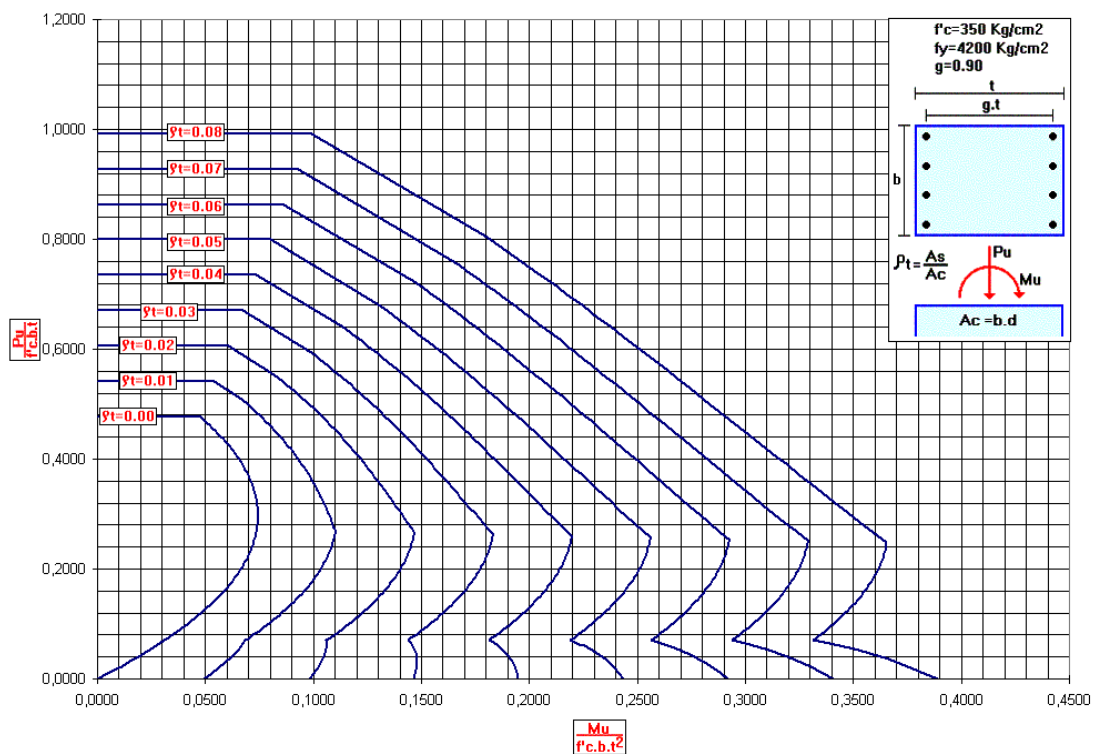
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 167)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 168)



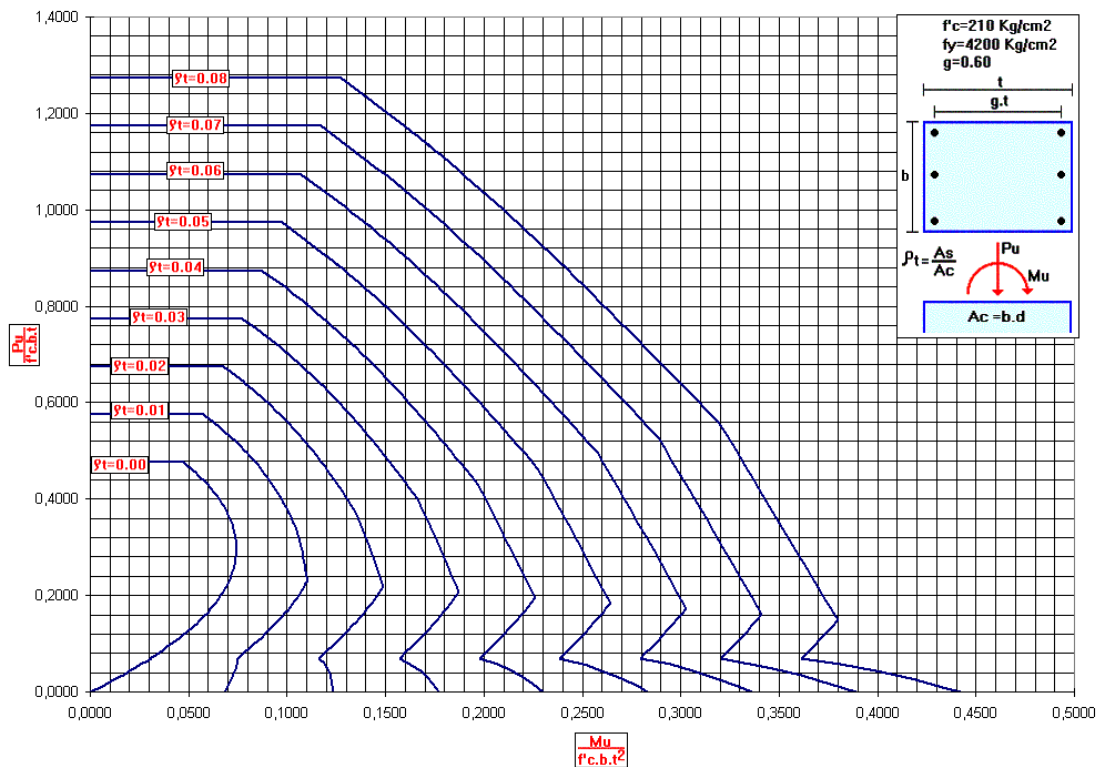


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

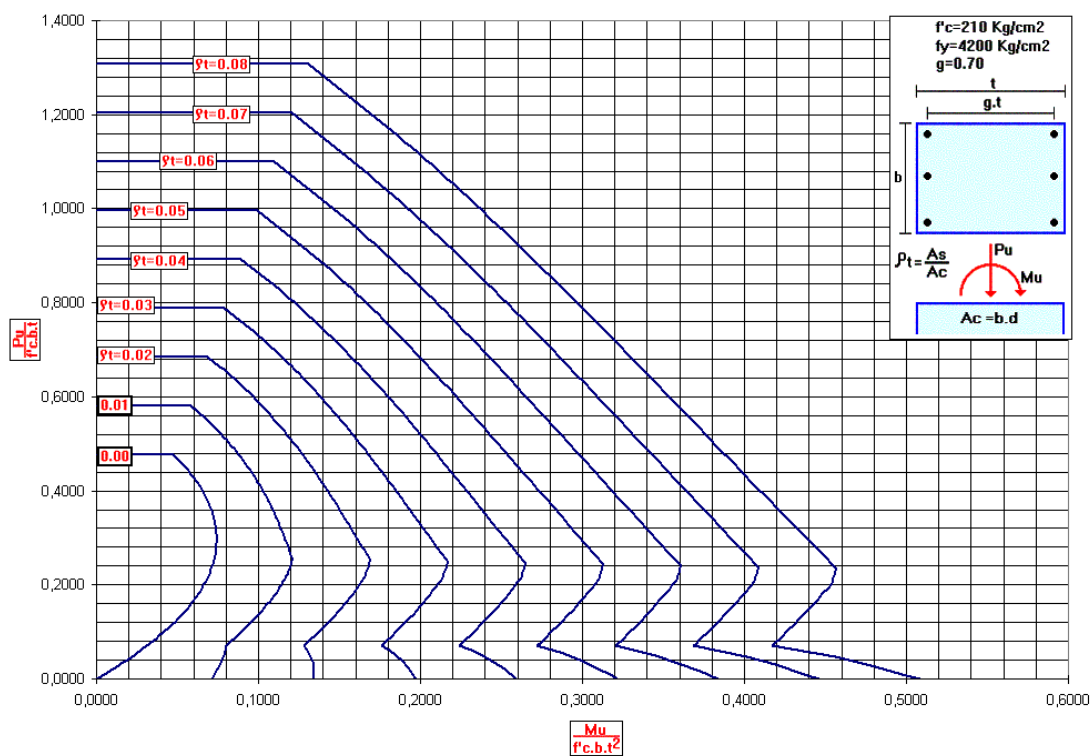
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 169)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 170)





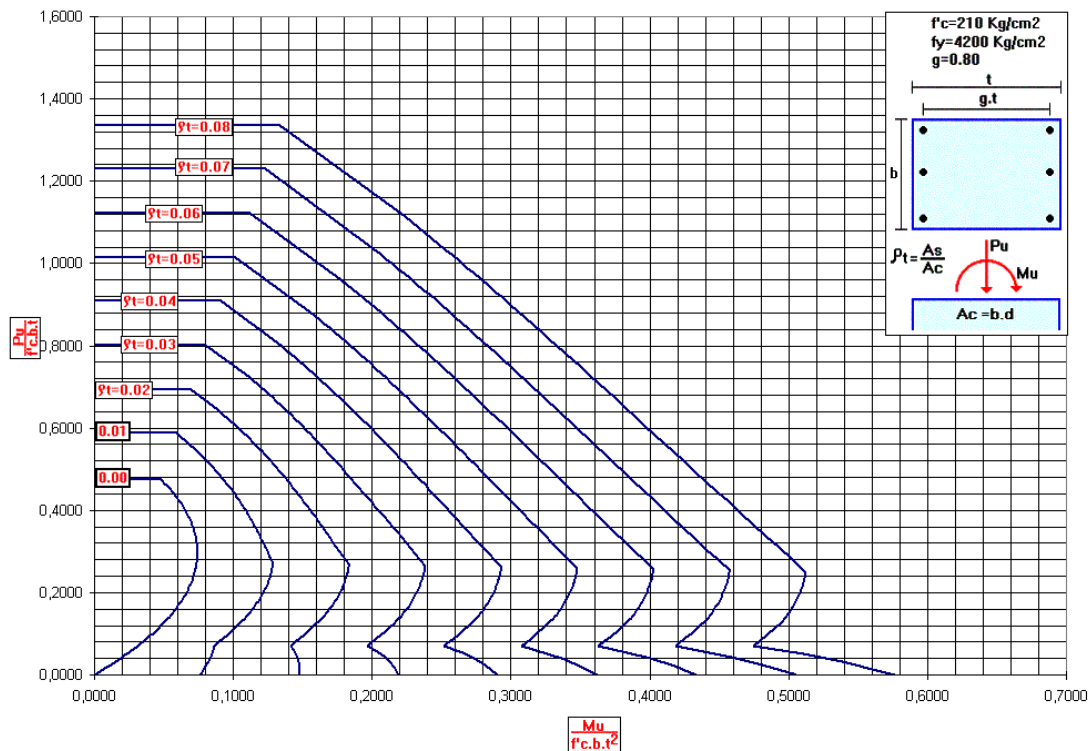
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

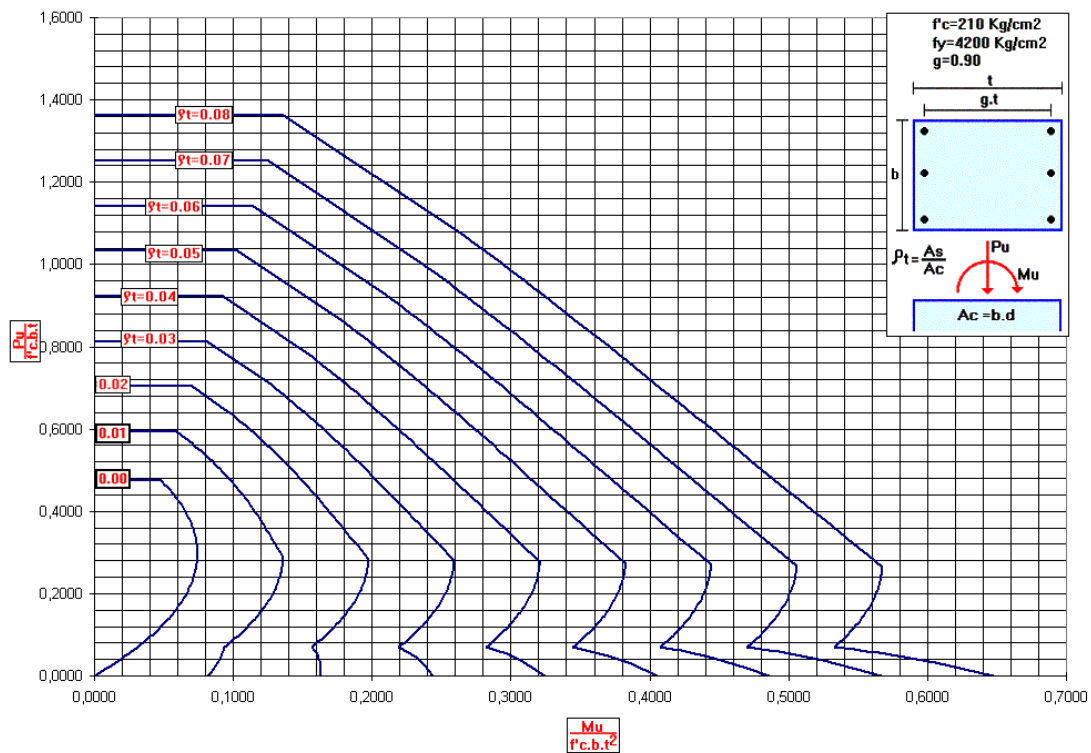
DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 171)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 172)



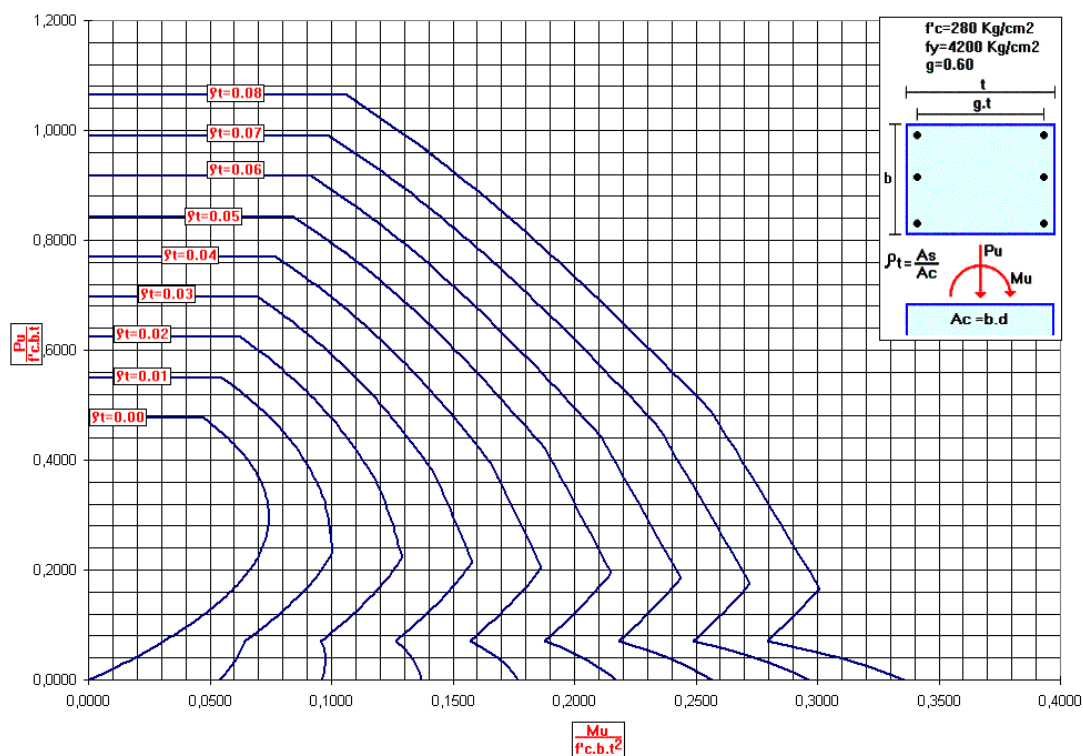


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

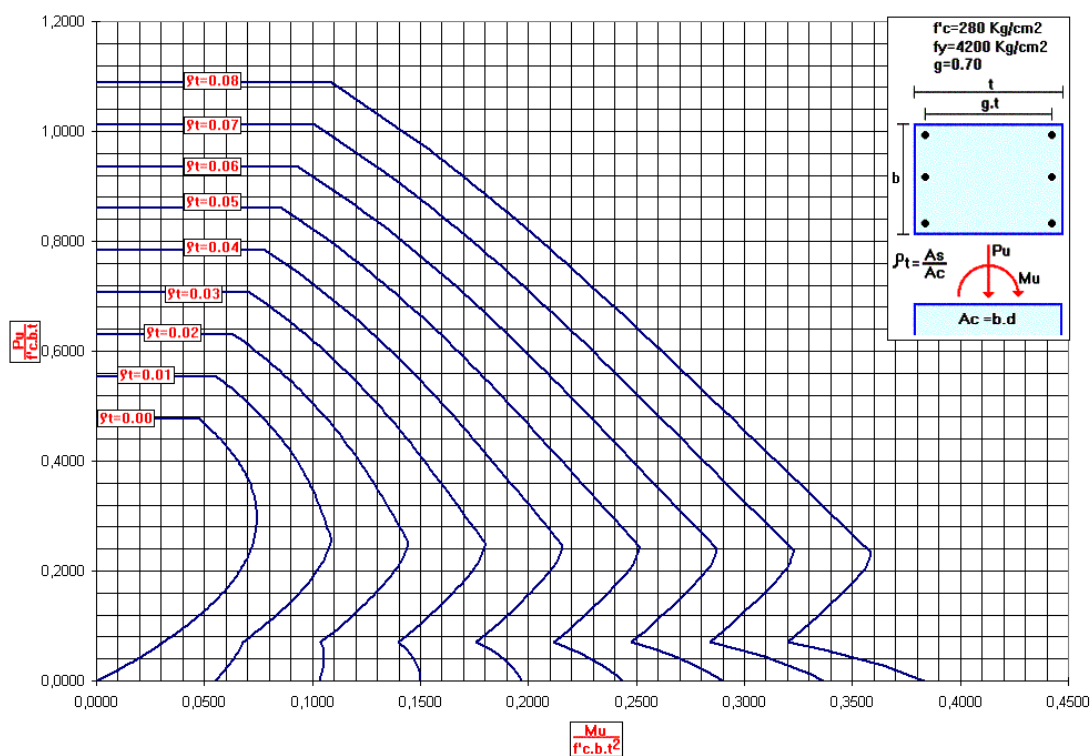
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 173)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 174)



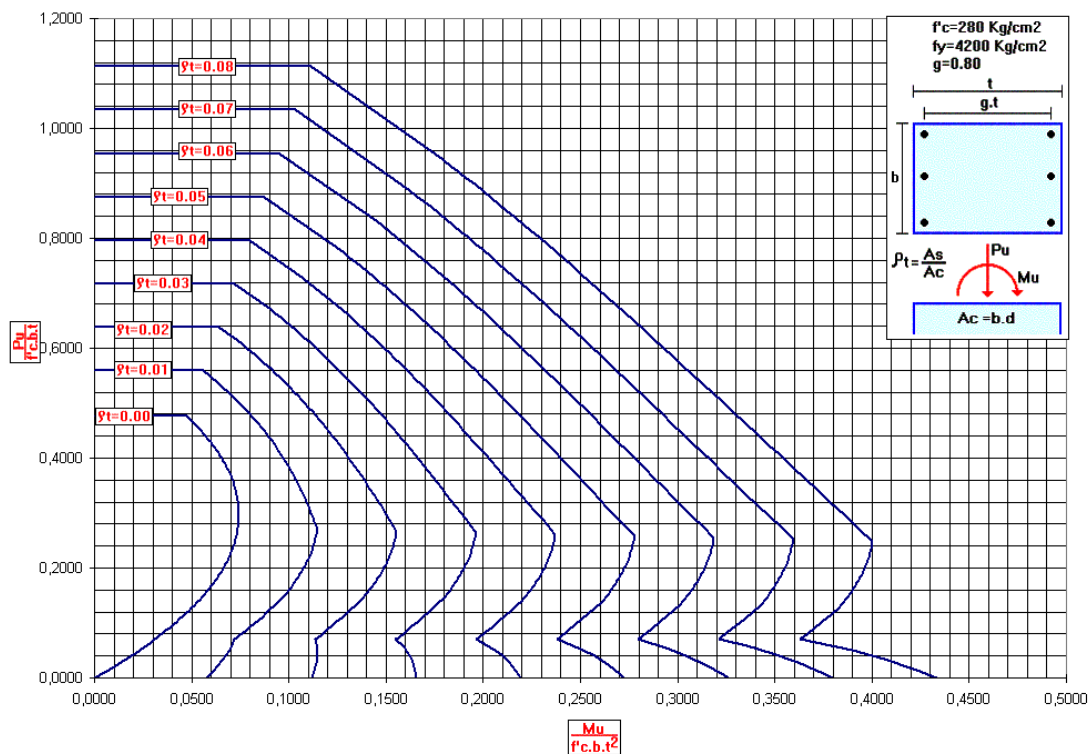


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

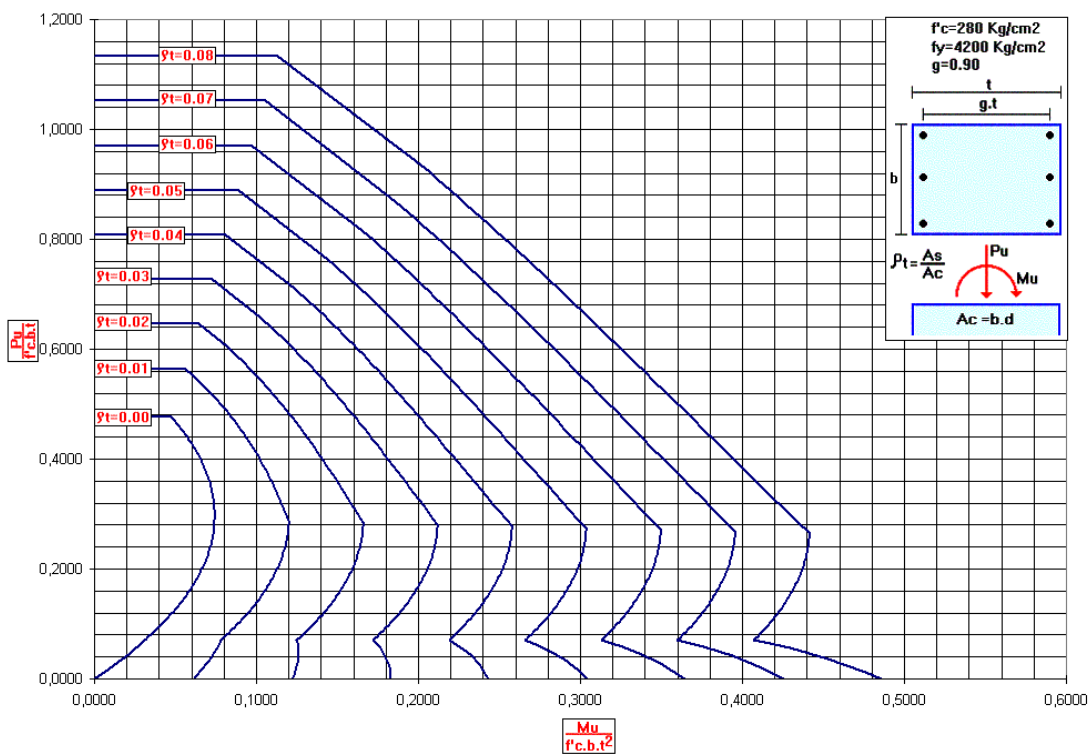
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 175)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 176)





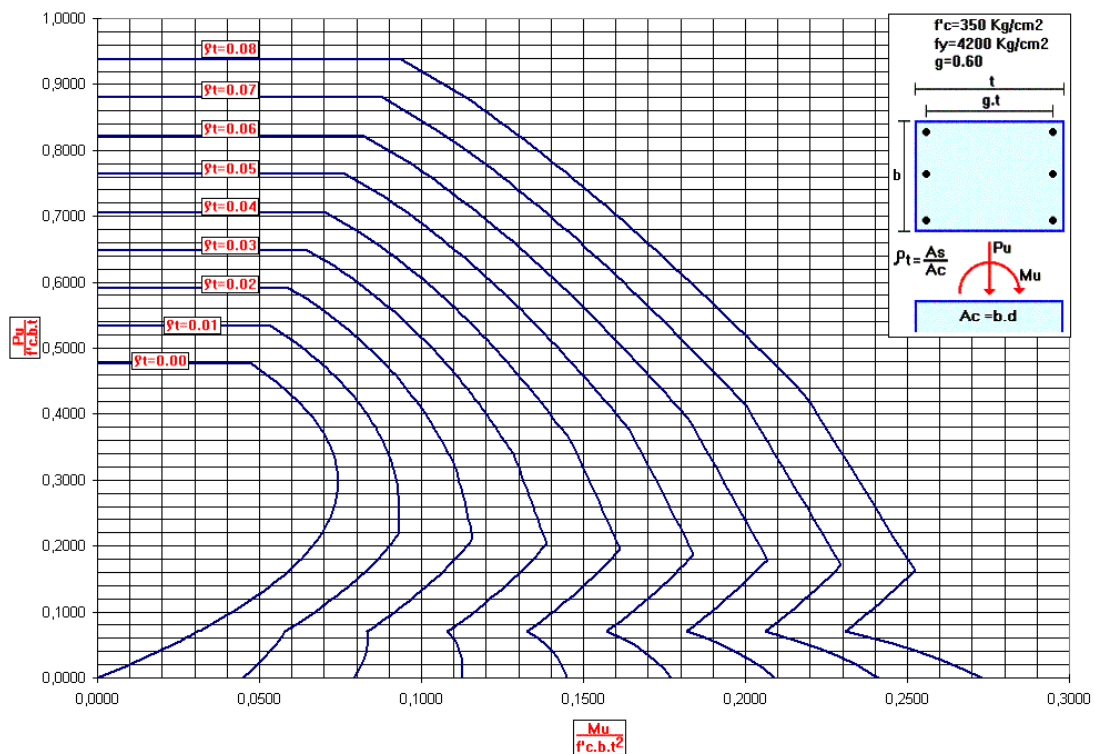
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

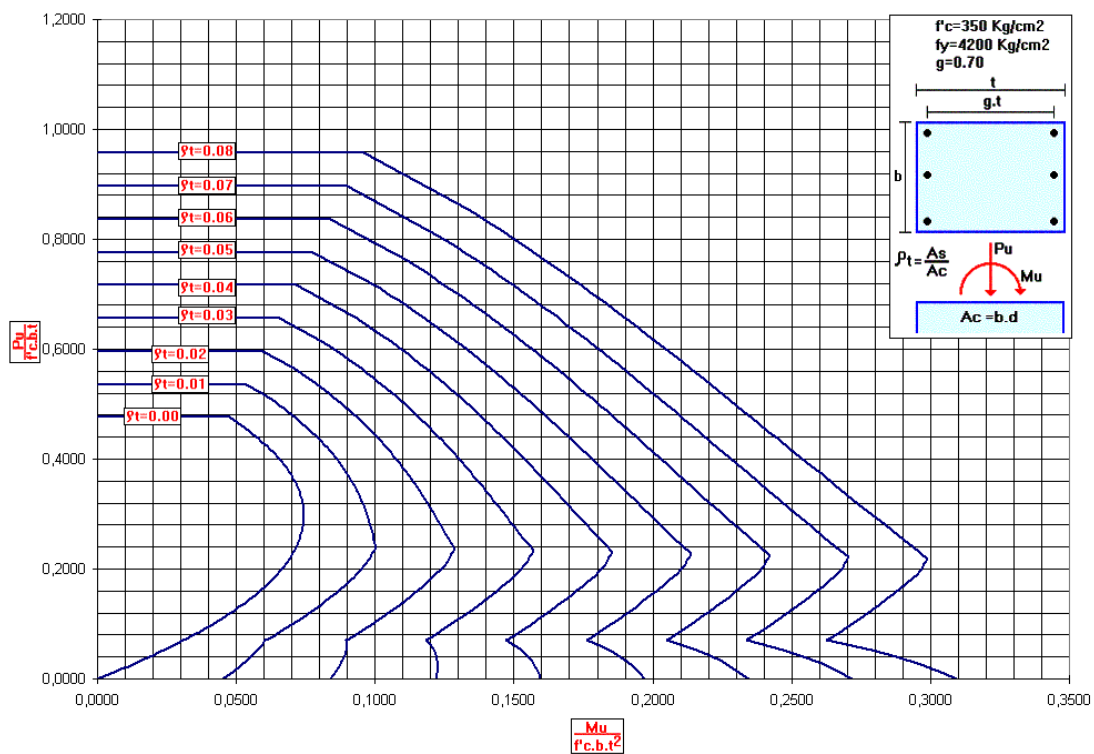
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 177)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 178)



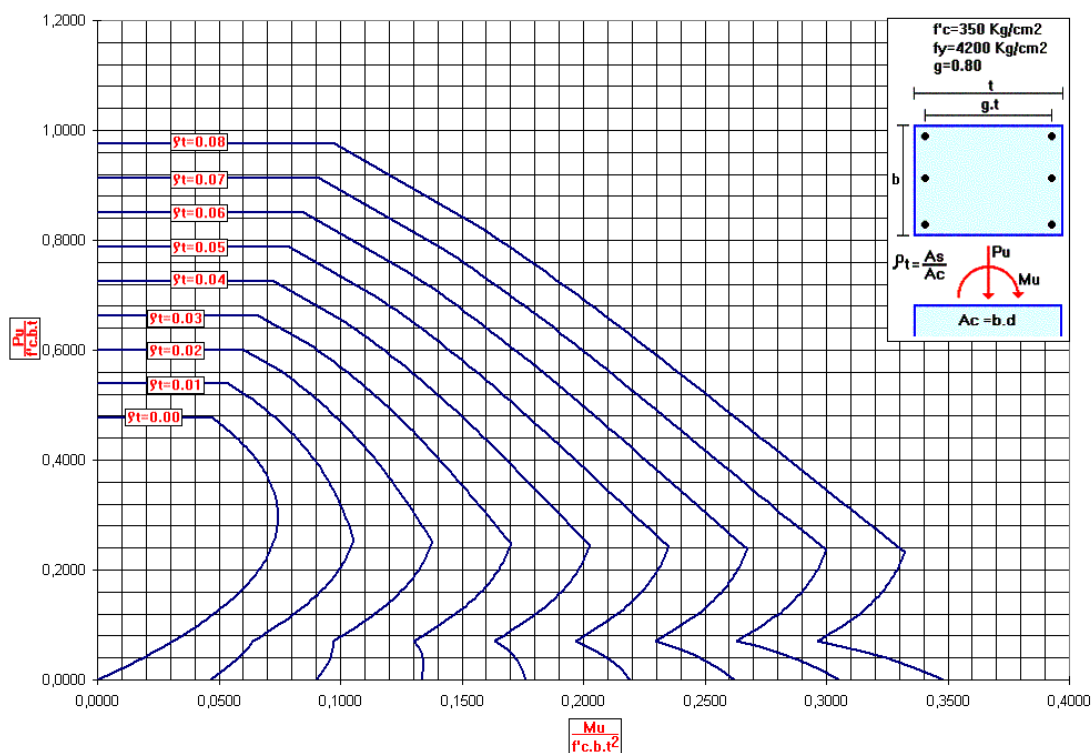


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

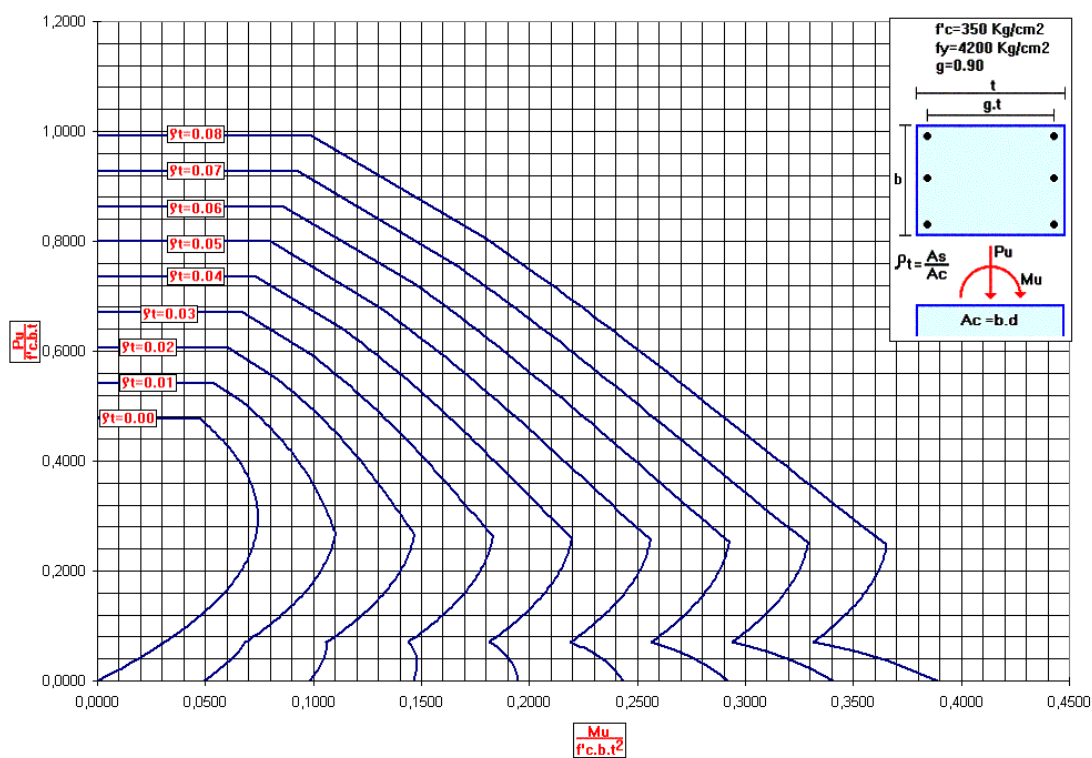
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 179)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 180)





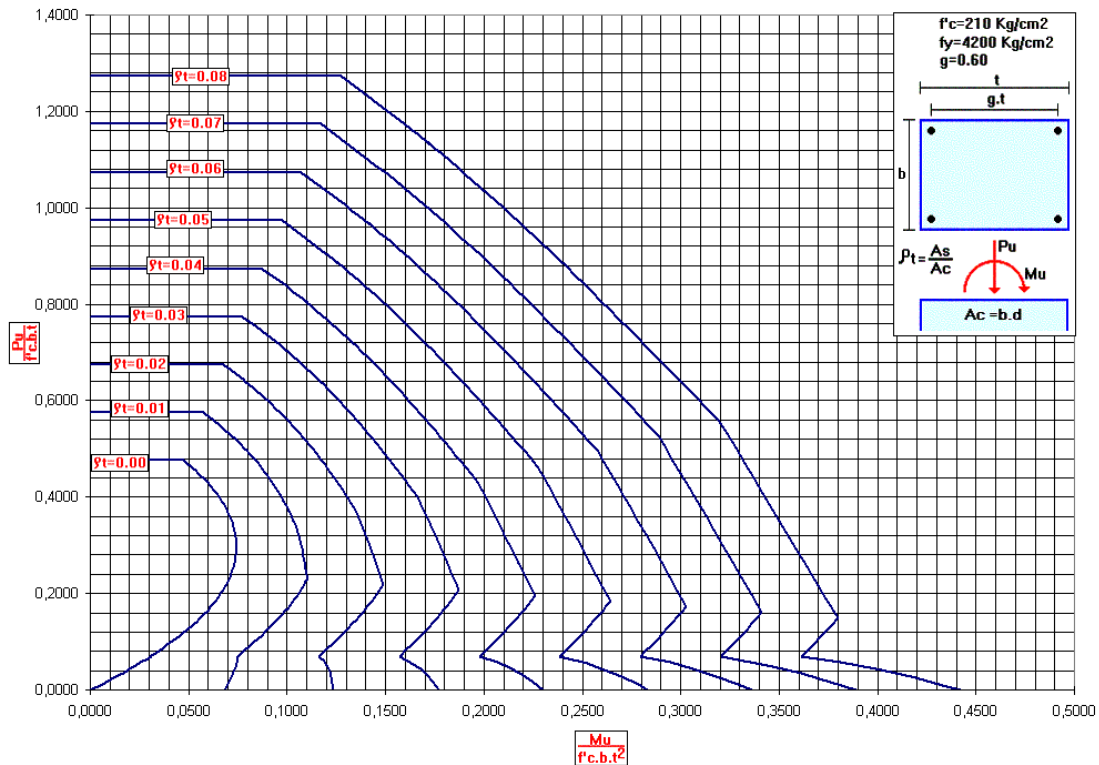
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

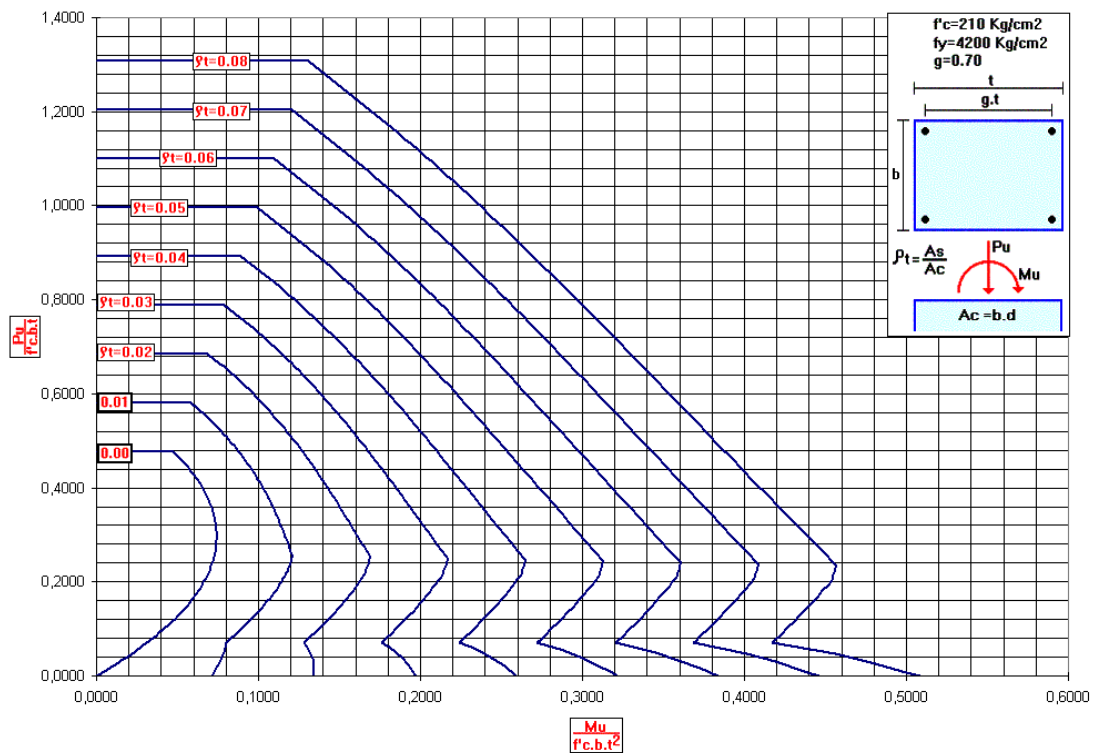
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 181)

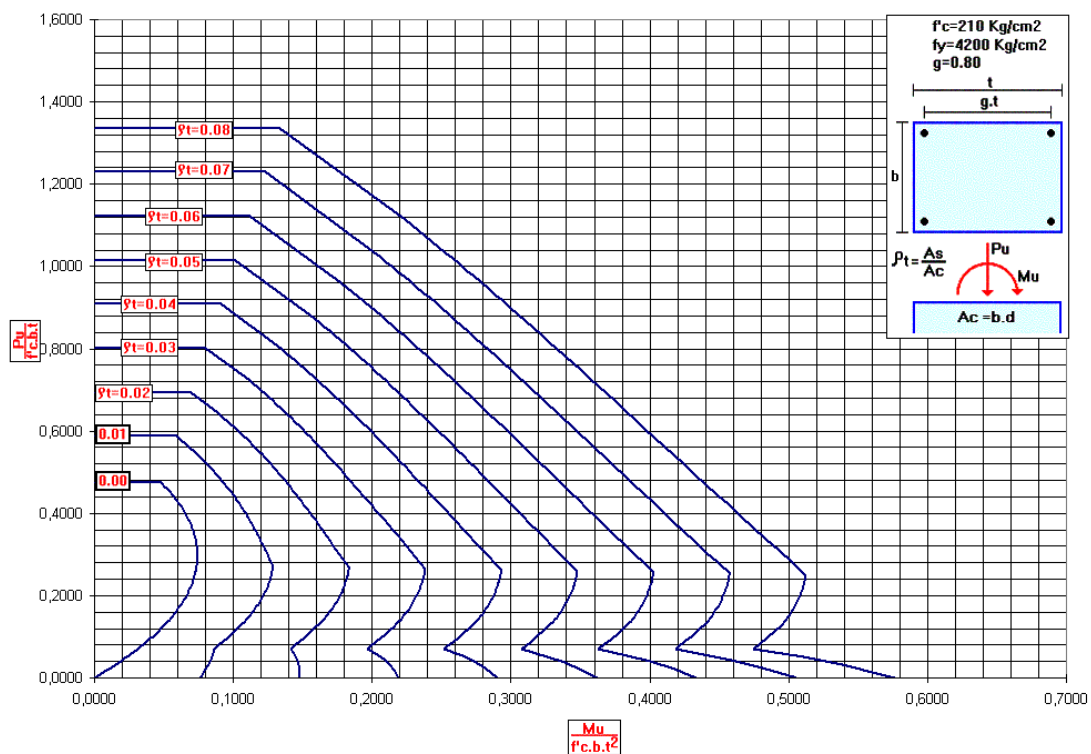


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES

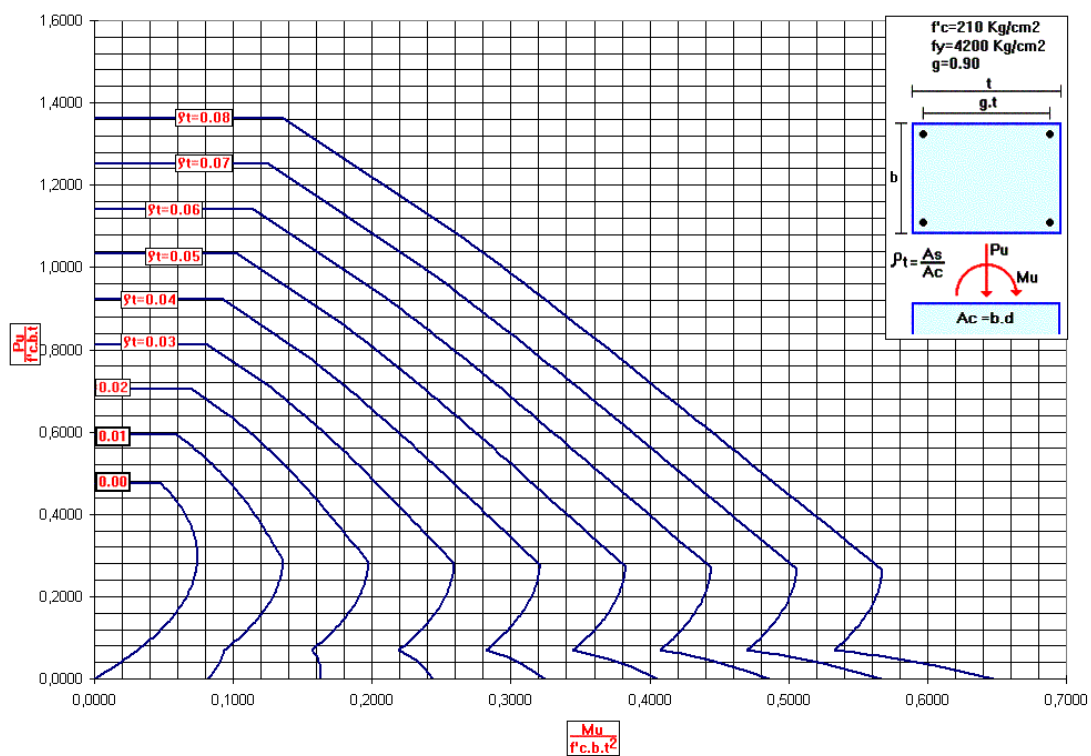
(gráfico # 182)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 183)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 184)



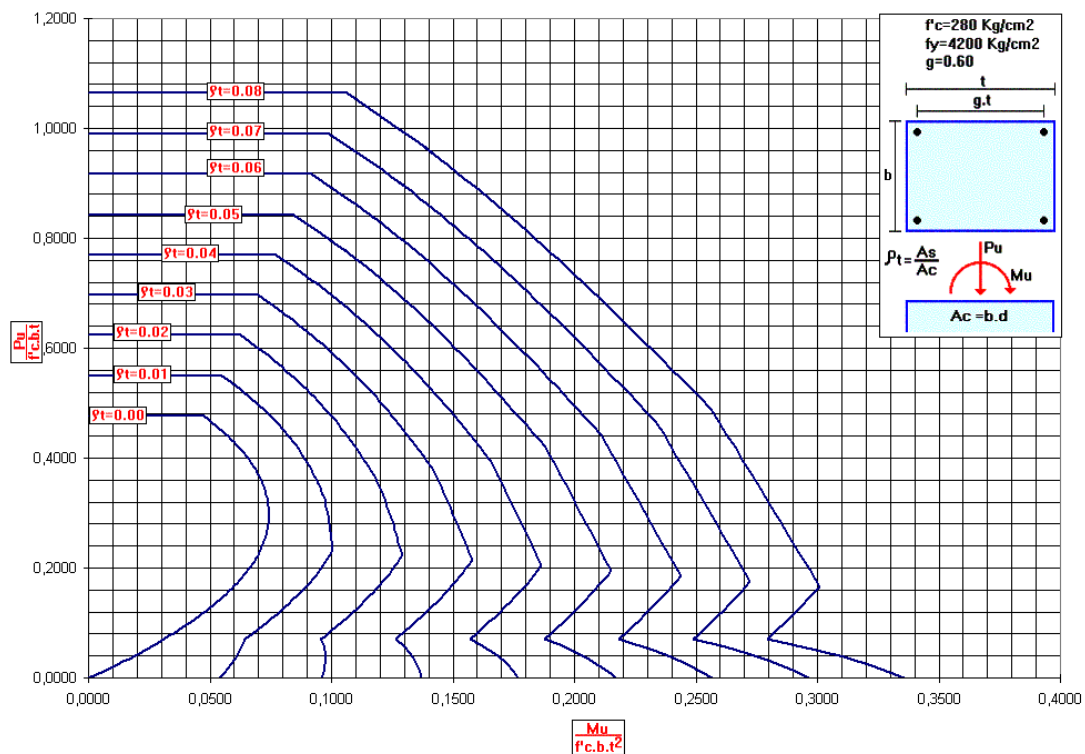


DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

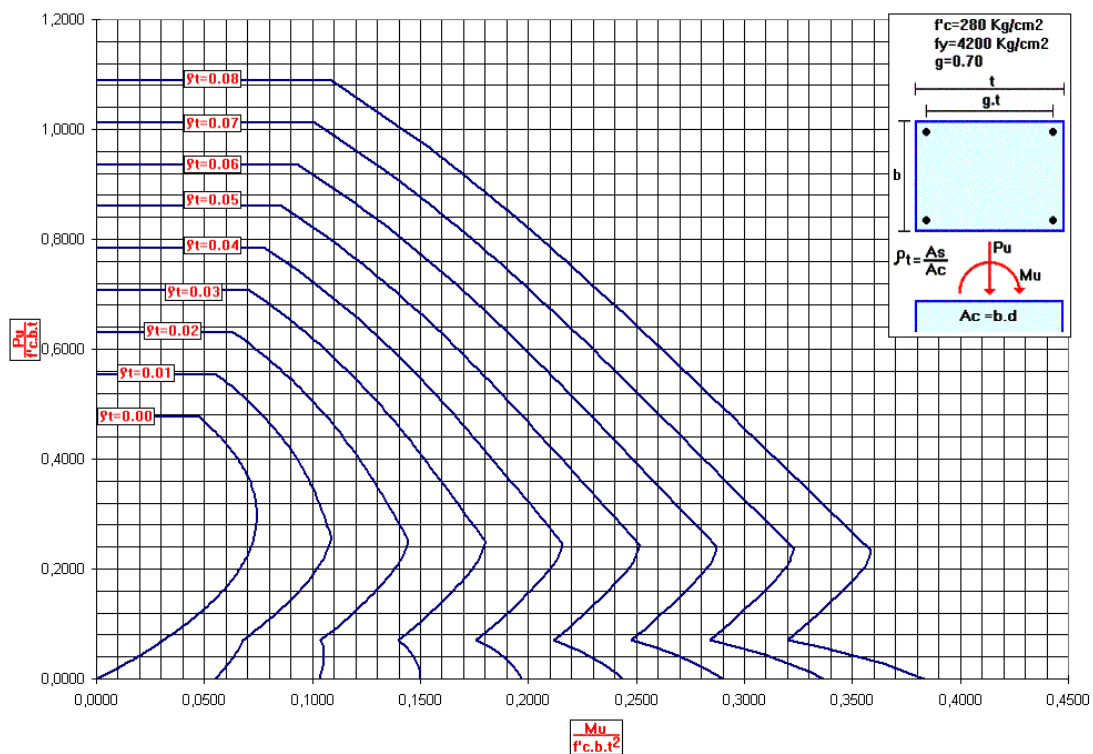
Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 185)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES
(gráfico # 186)





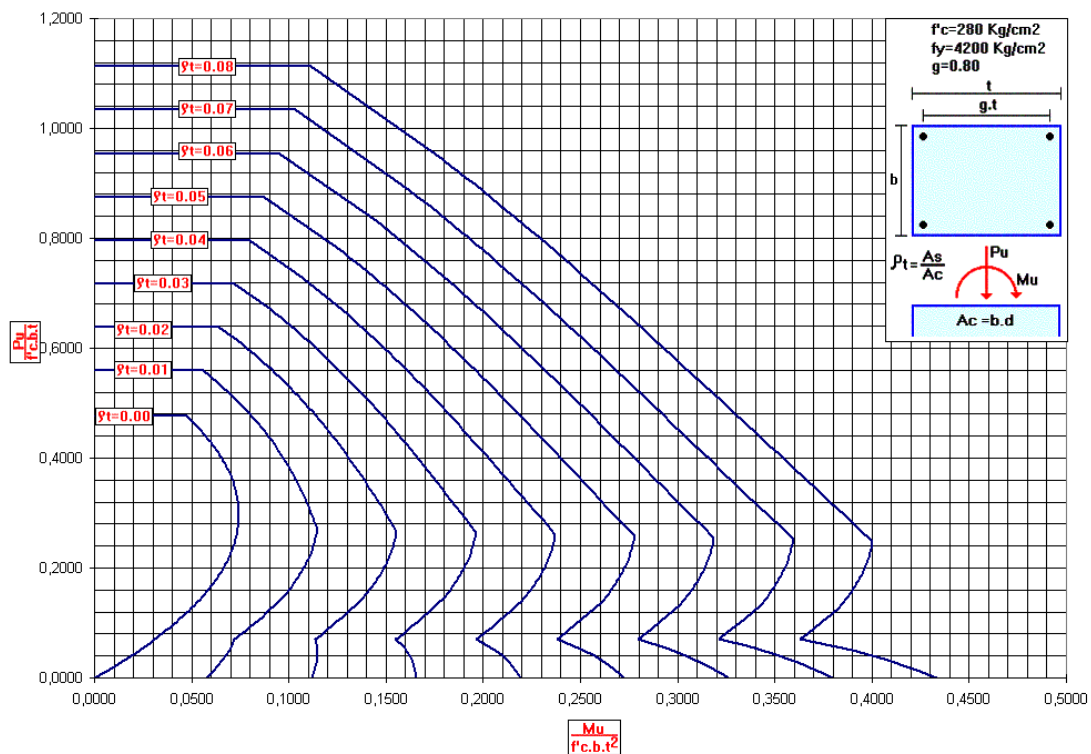
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

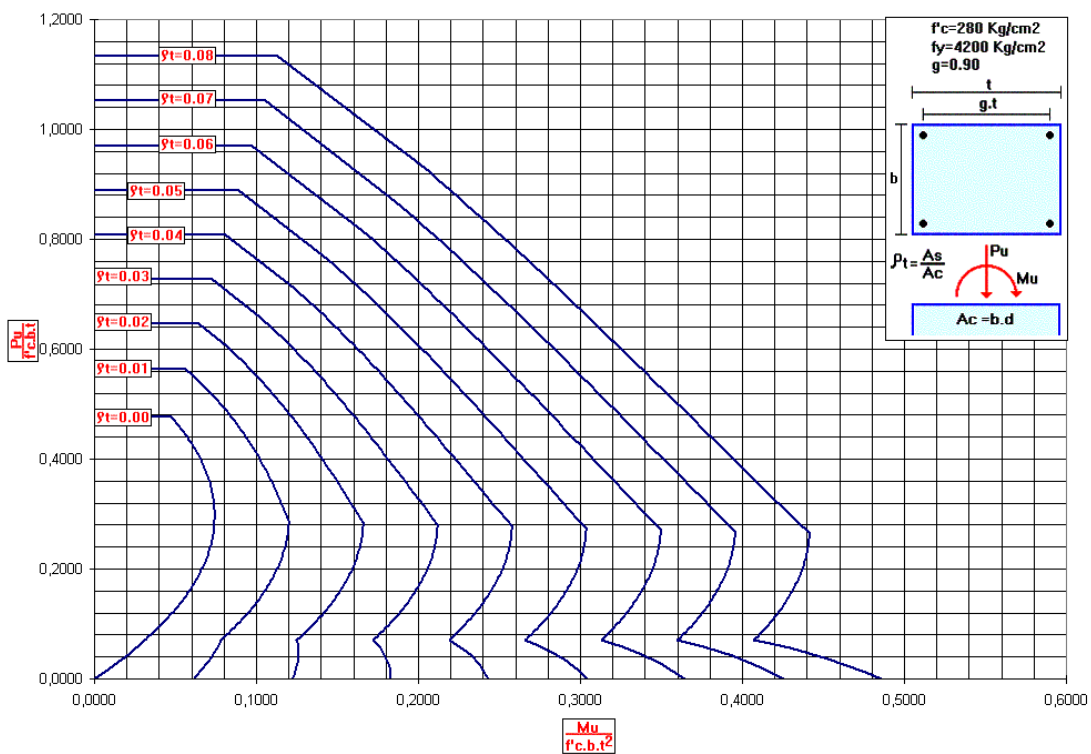
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 187)



DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 188)





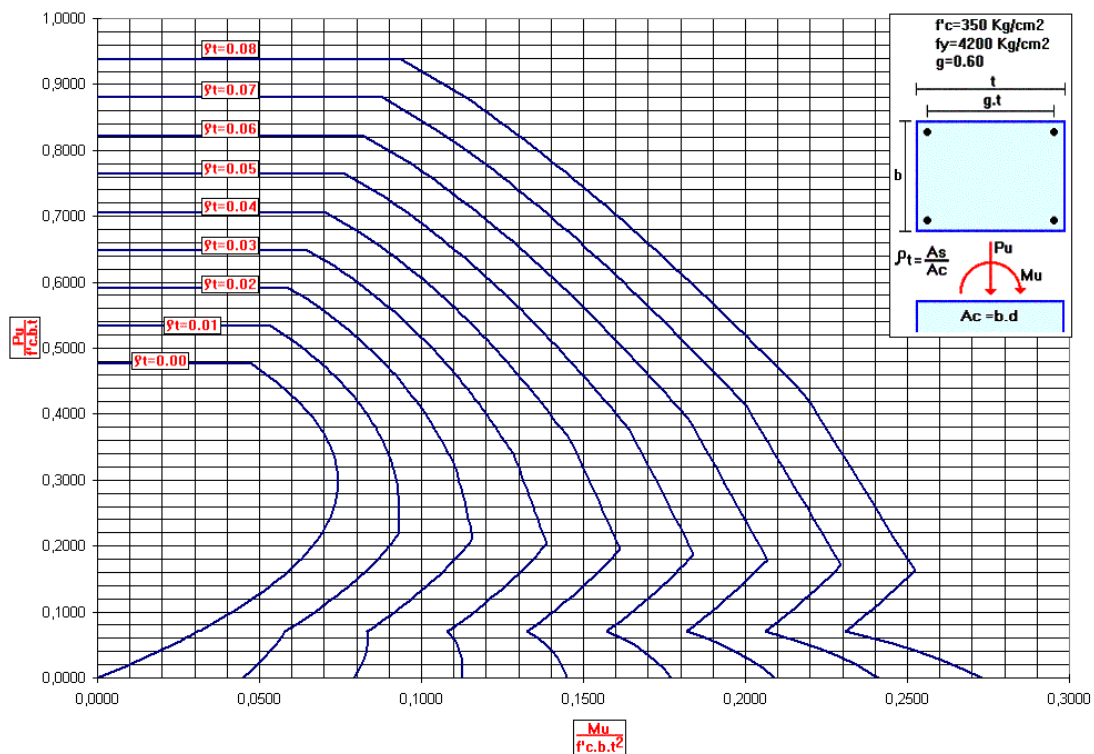
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

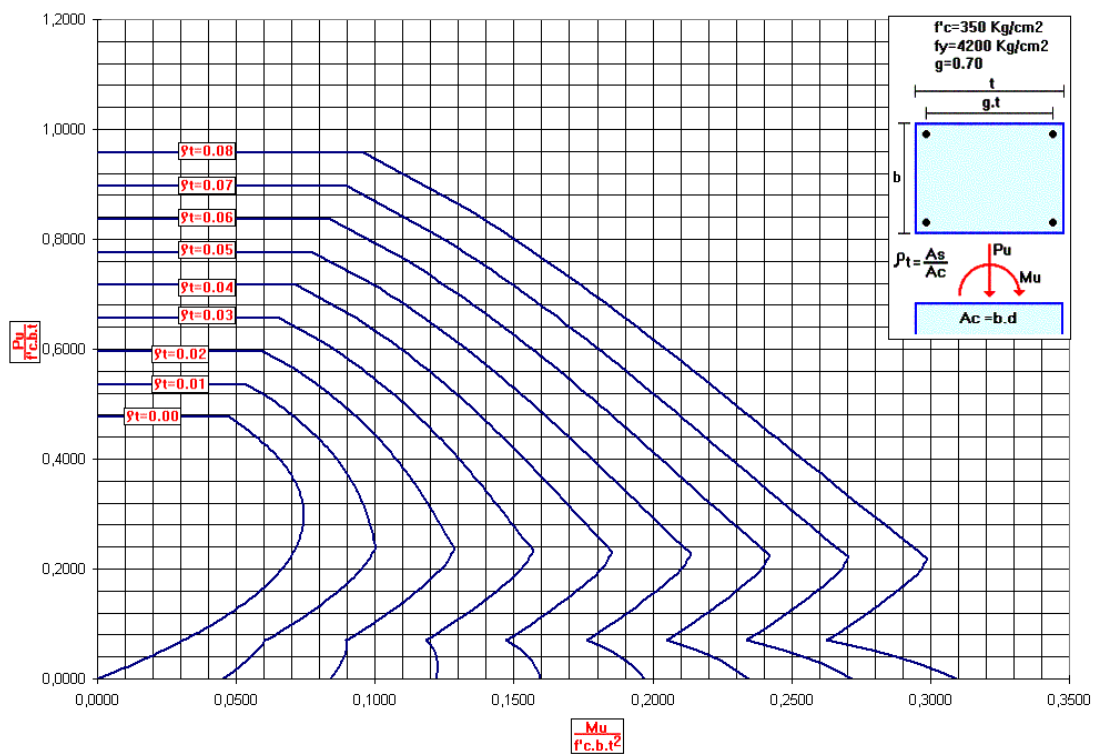
DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 189)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 190)





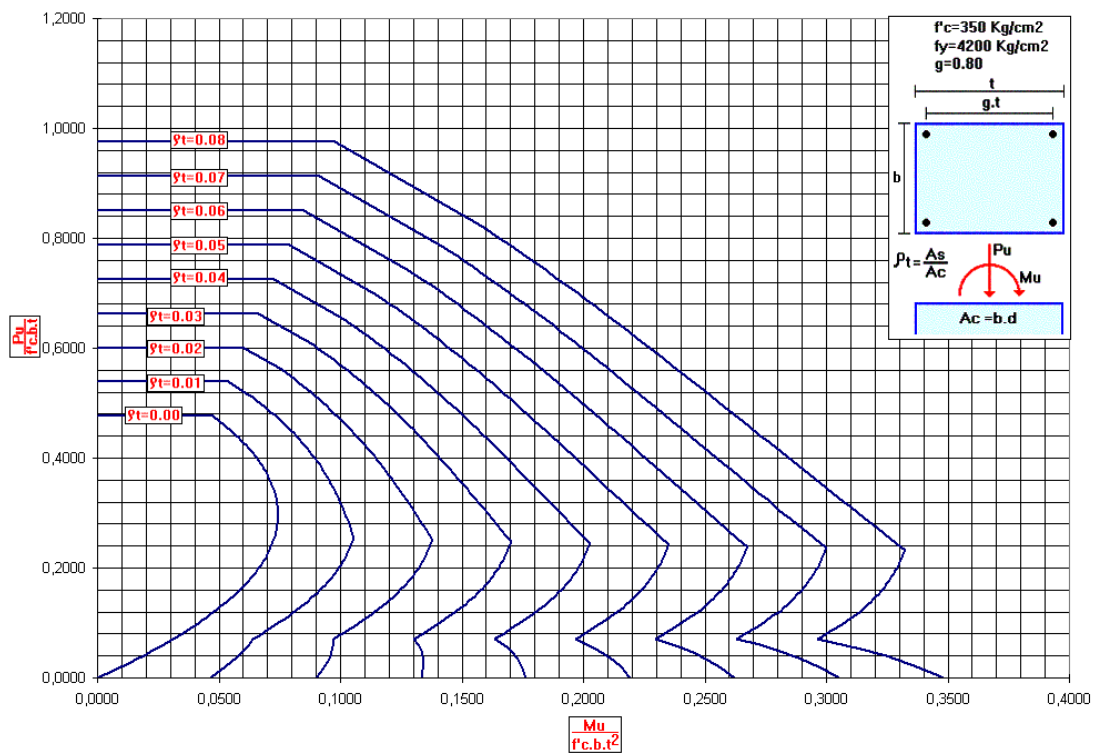
DIAGRAMAS DE INTERACCIÓN DE COLUMNAS - Flexión Uniaxial

Marcelo Romo Proaño

Escuela Politécnica del Ejército - Ecuador

DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 191)



DIAGRAMAS DE INTERACCION DE COLUMNAS RECTANGULARES

(gráfico # 192)

