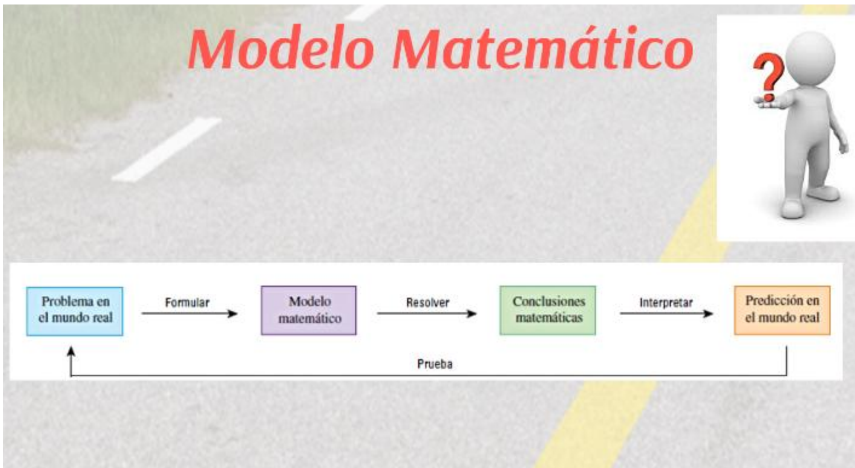
Modelos Funcionales

Un modelo funcional utiliza *ecuaciones o formulas matemáticas* para representar la relación existente entre las variables, parámetros y condiciones de un problema o caso de estudio. La representación matemática de una situación práctica se denomina **modelo matemático**.



En sesiones anteriores estudiamos modelos que representaban el costo de fabricación, la función objeto que permitía maximizar la rentabilidad o minimizar costos, la oferta y la demanda, etc. En esta unidad realizaremos un repaso para ejemplificar algunas de las técnicas que se pueden utilizar para crear modelos propios en *función de una sola variable*, concepto fundamental para el estudio de la asignatura correspondiente a Cálculo Diferencial e Integral.

Ejemplo 1:

Cada unidad de cierto artículo cuesta $p = 25x + 10, con\ x > 0$, centavos, cuando se producen x unidades del artículo. Si se venden todas las x unidades producidas a este precio, exprese el ingreso derivado de las ventas como función de x.

$$Ingreso = precio\ del\ artículo \times cantidad\ de\ unidades$$

$$I(x) = (25x + 10)x$$

$$I(x) = 25x^2 + 10x$$

Ejemplo 2:

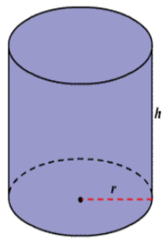
Un envase cilíndrico debe tener una capacidad de $12\pi cm^3$, el costo del material utilizado en la parte superior e inferior del envase es de 15 centavos por centímetro cuadrado y el costo del material utilizado en la parte lateral es de 8 centavos por centímetro cuadrado. Exprese el costo de fabricación del envase como función de su radio.

$$\boldsymbol{V = A_b h}$$
$$12\pi = \pi r^2 h$$
$$\boldsymbol{h} = \frac{12}{r^2}$$

$$\boldsymbol{C_{env} = C \cdot A_b + C \cdot A_l}$$
$$C_{env}(r) = 2[15(\pi r^2)] + 8(2\pi r\boldsymbol{h})$$
$$C_{env}(r) = 30(\pi r^2) + 16\pi r\frac{12}{r^2}$$
$$C_{env}(r) = 30\pi r^2 + \frac{192\pi}{r}$$

Ejemplo 3:

Un envase cilíndrico debe tener una capacidad de $4\pi\ plg^3$ de jugo de naranja congelado, el costo de una pulgada cuadrada de la parte superior e inferior es hecho en metal *y es dos veces el costo de una pulgada cuadrada de la parte lateral hecha en cartón*. **Exprese el costo** de fabricación del envase como función del radio si el costo de una pulgada cuadrada de la parte lateral es 0.02 centavos.



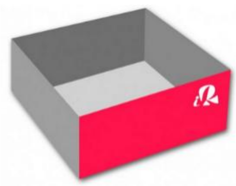
$$\boldsymbol{V = A_b h}$$
$$4\pi = \boldsymbol{\pi r^2} h$$
$$\boldsymbol{h} = \frac{4}{r^2}$$

$$\boldsymbol{C_{env} = C \cdot A_b + C \cdot A_l}$$
$$\boldsymbol{C_{env}(r)} = 2[0.04(\boldsymbol{\pi r^2})] + 0.02(2\pi r\boldsymbol{h})$$
$$C_{env}(r) = 0.08(\pi r^2) + 0.04\pi r(\frac{4}{r^2})$$
$$C_{env}(r) = 0.08\pi r^2 + 0.16\frac{\pi}{r}$$

$$\boldsymbol{V} = 4\pi\ plg^3$$
$$C_{later} = 0.02\ \times plg^2$$
$$C_{base} = 0.04 \times plg^2$$
$$C(r) = ?$$

Ejemplo 4:

La fabricación de una *caja abierta* de base cuadrada cuesta \$4.2 Si el metro cuadrado de los lados de la caja cuesta \$0.5 y el de la base cuesta \$0.75. Exprese el ***volumen de la caja*** como función de la longitud de la base.



$$\boldsymbol{A_s = A_b + A_l}$$
$$\boldsymbol{A_s} = x^2 + 4(xh)$$
$$C(x) = 0.75x^2 + 0.5[4(xh)]$$
$$4.2 = 0.75x^2 + 2xh$$
$$h = \frac{4.2 - 0.75x^2}{2x}$$

$$\boldsymbol{V = A_b h}$$
$$V(x) = (x^2)\boldsymbol{h}$$
$$V(x) = x^2\left(\frac{4.2 - 0.75x^2}{2x}\right)$$
$$V(x) =$$

$C_{caja} = \$4.2$

$largo: x$

$altura$: h

$\boldsymbol{V_c(r)} = ?$

Funciones definidas a Trozos o Intervalos

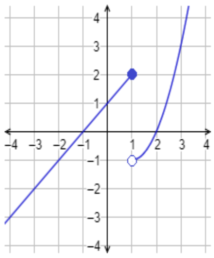
Una función a trozos o por intervalos, está definida para distintos valores de la variable independiente x, es decir cumple dos o más condiciones para cada subconjunto de su dominio

Ejemplo

La siguiente función está compuesta por una función lineal y una cuadrática:

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & \text{si } x\leq 1 \\ x^2-2x, & \text{si } x>1 \end{cases}$$

Gráfica:



Utilizamos el punto sólido y el punto vacío para enfatizar que la imagen de 1 es 2 y no -1, puesto que hay que utilizar la primera definición de la función.