EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

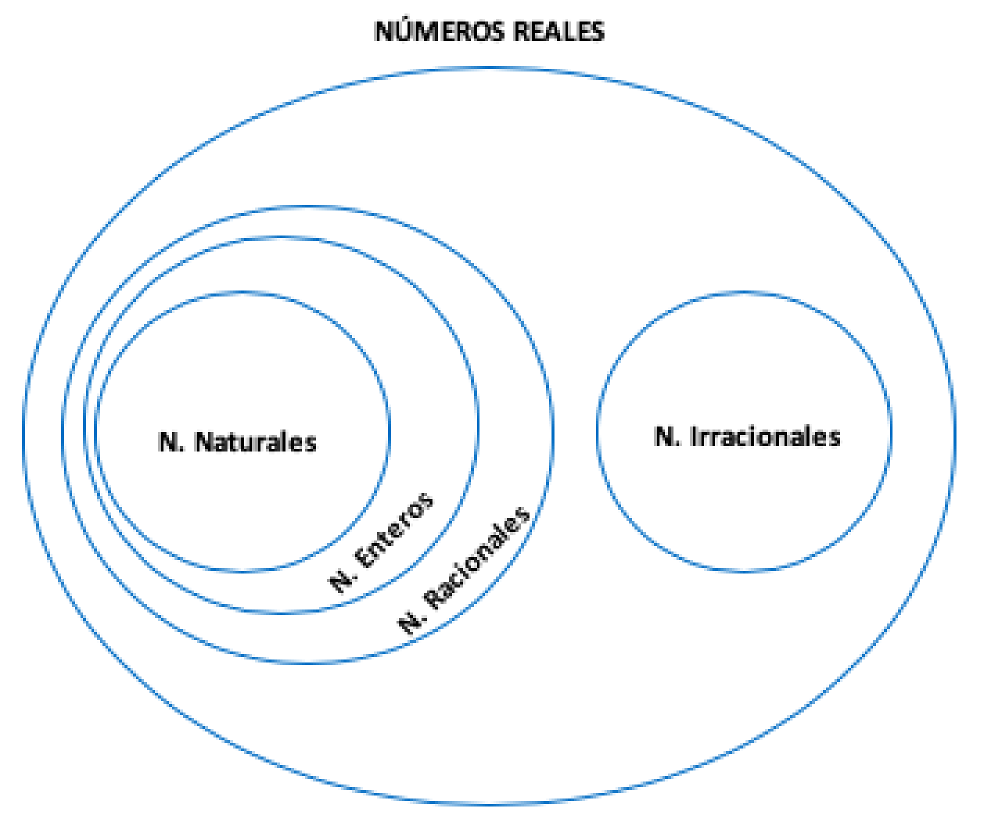
ING. JOSÉ ALFONSO ALVARADO. C.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

INTRODUCCIÓN

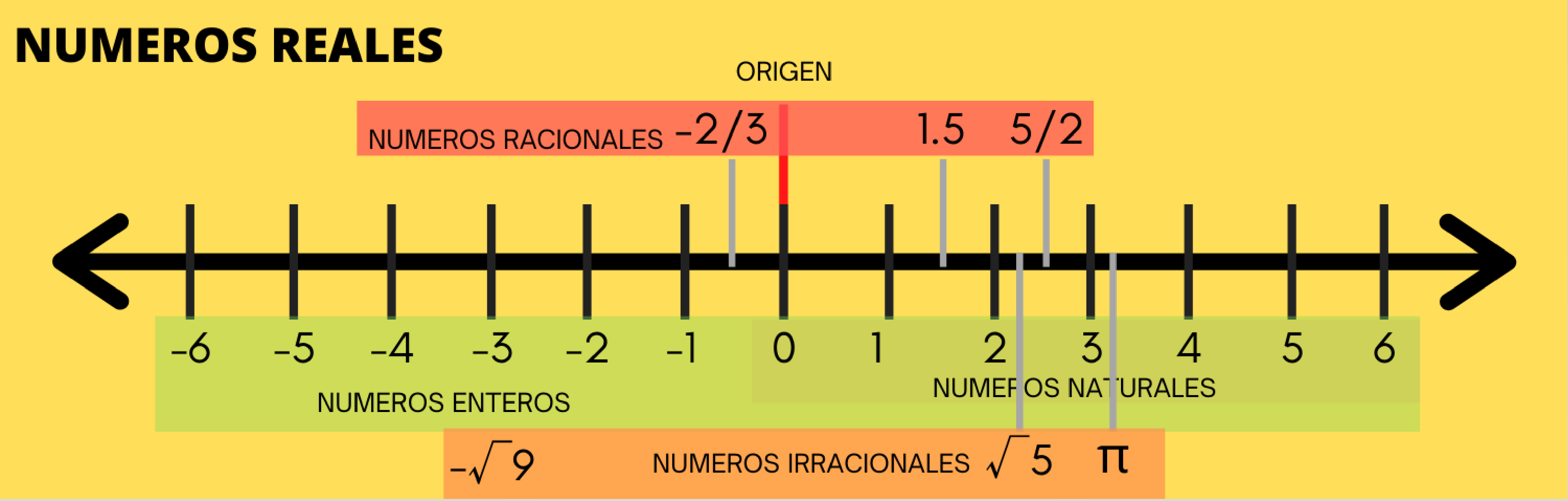
Se llama real a un **número que puede ser racional e irracional**, por lo tanto este conjunto de números es la unión del conjunto de los **números racionales (fracciones)** y el conjunto de los **números irracionales** **(no pueden expresarse como fracción).**

Los números reales cubren la recta real y cualquier **punto** de esta es un número real, y se designan con el **símbolo** R.



INTRODUCCIÓN

El conjunto de los números reales es el conjunto de todos los números que corresponden a los puntos de la recta.



CARACTERÍSTICAS

- El conjunto de los números reales es el conjunto de todos los números que pueden expresarse con decimales infinitos o finitos periódicos o no periódicos.

- Los números irracionales se distinguen de los racionales por poseer infinitas cifras decimales que no se repiten nunca, es decir, no periódicas.

- Por ello no pueden ser expuestos en forma de fracción de dos enteros.

- Algunos números irracionales se distinguen de otros números mediante símbolos.

Por ejemplo: π=3,1415926535914039.

EJEMPLOS

Determine si los siguientes números son racionales o irracionales:

a) 4
Como podemos escribir 4 como un decimal periódico (4=4.0000...), es racional.

b) .3422123123123
Como podemos escribir .3422123123123 como un decimal periódico (.3422123123123 0000...), el número es racional.

c) 5
Cualquier raíz que no sea un número racional es un número irracional.

d) .110110110...
Este es un decimal periódico, por lo tanto es número racional.

LOS REALES COMO UN CAMPO

El conjunto de números reales está formado por los números racionales y los irracionales y se puede representar en una recta en la que se determinan un origen y una unidad, de modo que a cada número real le corresponde un único punto de la recta, y a cada punto de la recta se le asigna un único número real.

La noción de orden en el conjunto de los números reales permite definir en la recta real los siguientes conjuntos numéricos:

- **Intervalo abierto de extremos a y b.** Es el conjunto de número reales, cuyos elementos son mayores que a y menores que b: $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$.
- **Intervalo cerrado de extremos a y b.** Es el conjunto de número reales, cuyos elementos son mayores o iguales que a y menores o iguales que b: $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$.
- **Intervalo semiabierto o semicerrado de extremos a y b.** Observa en este caso, que solo está incluido uno de los extremos:

$$[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\} \qquad (a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$$

AXIOMAS DE LOS NUMEROS REALES

1. AXIOMAS DE CUERPO

Asumimos la existencia de dos operaciones, llamadas suma y producto, tales que a cada par de números reales a y b la suma $a + b$ y el producto ab son números reales unívocamente determinados por a y b satisfaciendo los siguientes axiomas:

1.1 Axiomas de la suma

1.1.1 Asociatividad

$(a + b) + c = a + (b + c)$ para todo $a; b; c \in R$.

1.1.2 Conmutatividad

$a + b = b + a$ para todo $a; b \in R$.

1.1.3. Existe un elemento de R, denotado por 0 tal que $a + 0 = a$ para todo $a \in R$.

1.1.4 Para cada $a \in R$ existe un $-a \in R$ tal que $a + (-a) = 0$.

AXIOMAS DE LOS NUMEROS REALES

1. AXIOMAS DE CUERPO

1.2 Axiomas del producto

1.2.1 Asociatividad (ab) c = a(bc) para todo a; b; c ϵ R.

1.2.2 Conmutatividad ab = ba para todo a; b ϵ R.

1.2.3 Existe un elemento de R, distinto de 0, que denotaremos por 1 tal que 1x = x1 = a para todo a ϵ R.

1.2.4. Reciprocidad. Para cada a ϵ R tal que no sea cero, existe un b ϵ R tal que ab = 1.

1.3 Axioma de distributividad

D. Para todo a; b; c ϵ R, (a + b)c = ac + bc.

AXIOMAS DE LOS NUMEROS REALES

2. AXIOMAS DE ORDEN

Si a, b y c son números reales satisface los siguientes axiomas:

2.1. Aditividad Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$

2. 2 .Transitividad Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

2.3. Multiplicatividad Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $ac < bc$

3 AXIOMA DE COMPLETITUD

C. Si $A \subset R$, $A \neq \emptyset$, es acotado superiormente, entonces tiene supremo en R.

Teorema: (Arquimedianidad) Para todo $a > 0$ y $b \in R$ existe $n \in N$ tal que $na > b$:

EJEMPLOS

Indique cuáles axiomas se usaron para realizar las siguientes operaciones:

a) 3+(2+1)=(3+2)+1 Axioma asociativo de la suma

b) 2(3+4)=(3+4)2 Axioma conmutativo de la multiplicación

c) 2· (3· 4) = 2· (4· 3) Axioma conmutativo de la multiplicación

d) Si 2<3 entonces 4<5. Axioma de aditividad del orden

e) Si 2<3 entonces 8<12. Axioma de la multiplicatividad del orden