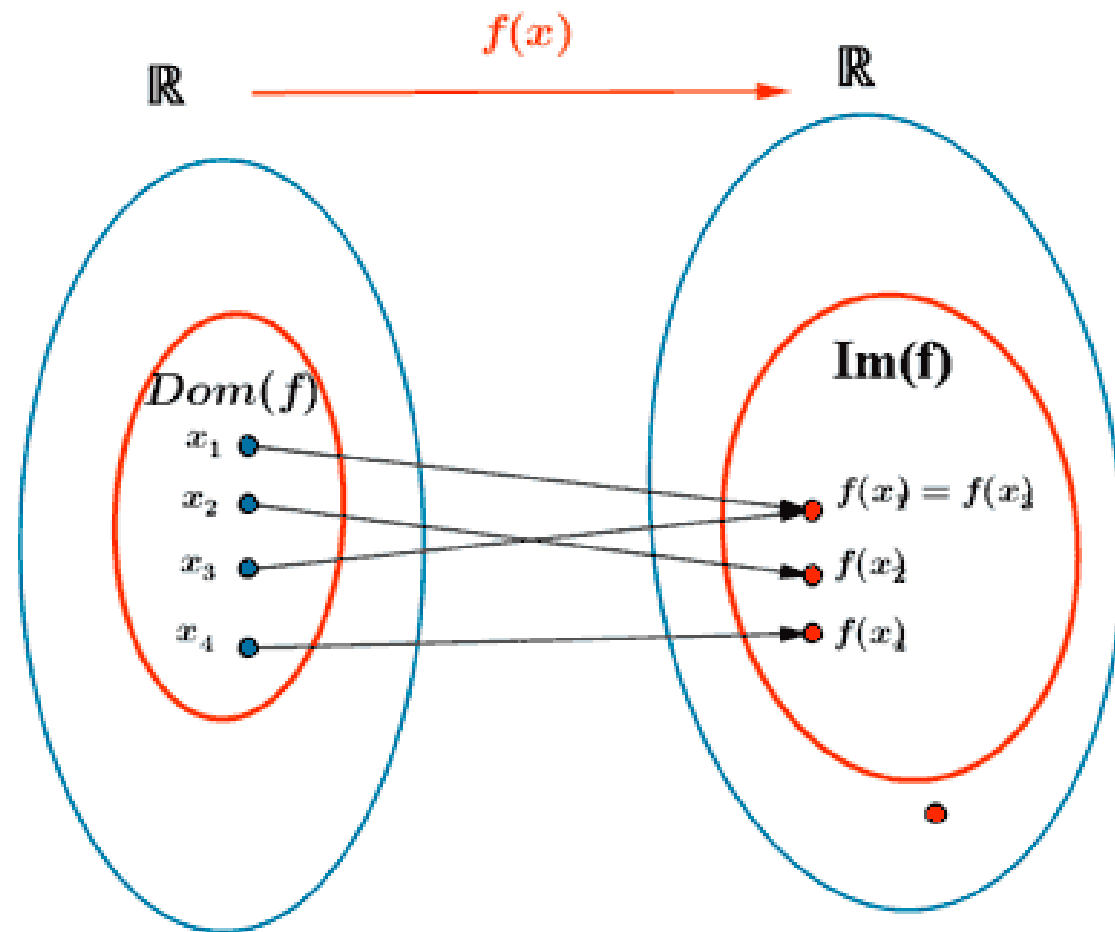




UNIDAD N° 3

FUNCIONES



FUNCIONES PRINCIPALES DE VARIABLE REAL

Una función es una relación entre dos conjuntos en la que a cada valor del primer conjunto, denominado dominio, le corresponde un único valor del segundo conjunto, denominado recorrido. Decimos que estamos ante una función real de variable real cuando tanto el primer conjunto como el segundo están formados por números reales.

FUNCIONES PRINCIPALES DE VARIABLE REAL

Recuerda el significado de los siguientes símbolos:

- $\exists$ existe un
- $\forall$ para todo
- $\in$ pertenece a
- $/$ tal que
- $\subset$ subconjunto de
- $\subseteq$ subconjunto o igual a

SÍMBOLOS PARA FUNCIONES

DEFINICIÓN

Se define una función real de variable real, o simplemente función real, como aquella función matemática que hace corresponder a cada número real $x \in \mathbb{R}$ otro número real $y \in \mathbb{R}$ a través de una regla de transformación $f(x)$. Formalmente:

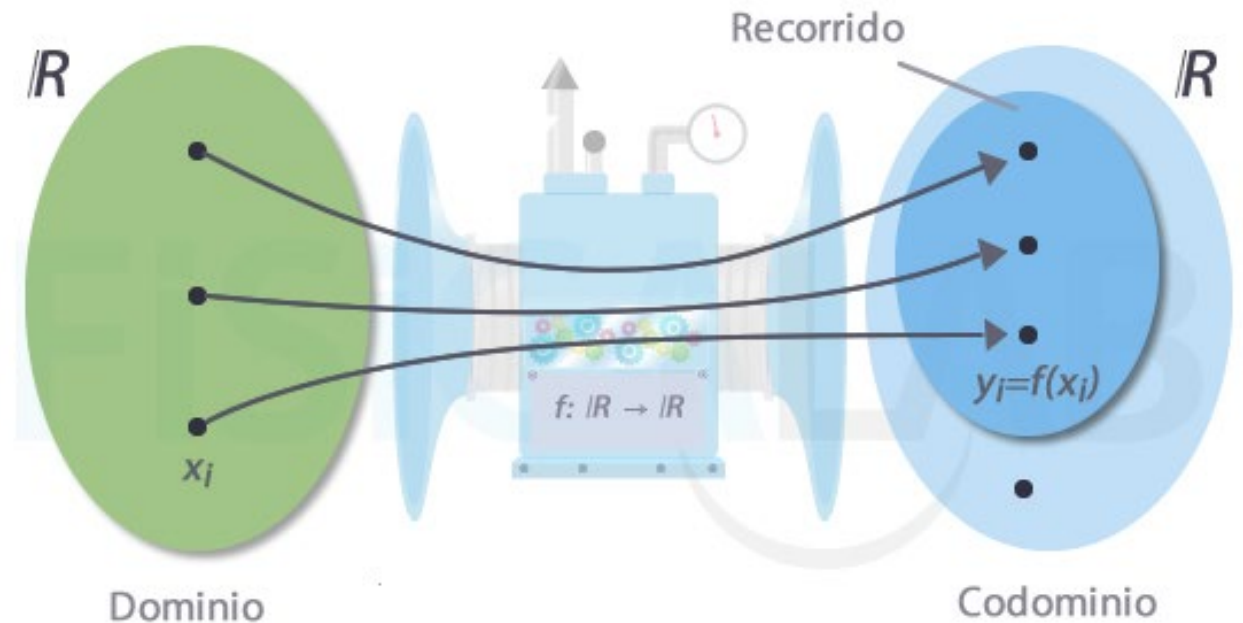
$$\begin{aligned} f : \text{Dom}_f &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x) \end{aligned}$$

Donde:

- f : Es la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir, una regla de correspondencia que asigna a cada valor $\mathbb{R}$ del dominio otro número real
- Dom_f : Es el dominio de definición de la función f , también llamado campo de existencia. Esto es, el conjunto de posibles valores que puede tomar la entrada de la función, es decir, que tienen imagen. Puede ser, o bien el conjunto completo de los reales ($\mathbb{R}$), o bien un subconjunto de este: $\text{Dom}_f \subseteq \mathbb{R}$. Más formalmente: $\text{Dom}_f = \{x \in \mathbb{R} / \exists y = f(x) \in \mathbb{R}\}$
- $\mathbb{R}$: Es el codominio de la función, es decir, el conjunto de posibles valores que podría tomar la variable dependiente
- x : Es la variable independiente. En este caso, un número real que hace las veces de entrada de la función
- $y = f(x)$: Es la variable dependiente, imagen de x . Es un número real que hace las veces de salida. Para obtener su valor se aplica la función sobre el elemento x

FUNCIÓN REAL

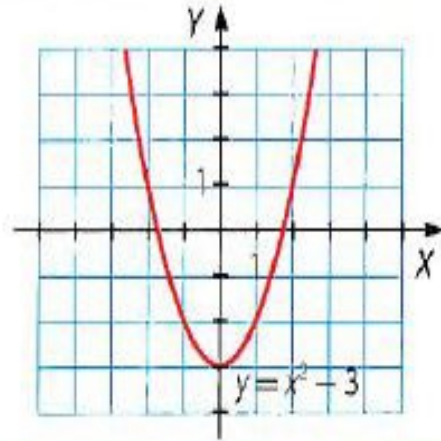
En la ilustración representamos el concepto de función real de variable real. Observa que la función f es una correspondencia, representada en la ilustración por una máquina azul, que asocia a cada elemento de un conjunto inicial llamado dominio (formado por números reales), otro número real de un conjunto denominado imagen o recorrido.



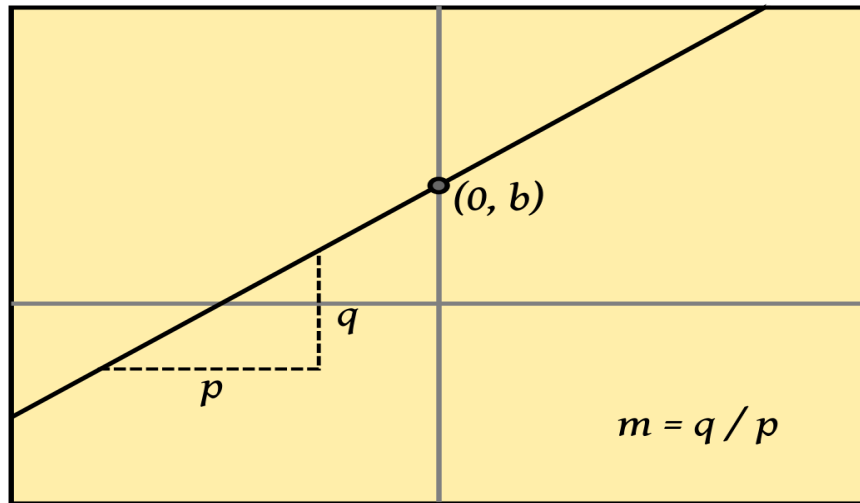
EXPRESIONES DE UNA FUNCIÓN

Una función puede expresarse en una de las siguientes formas:

- Expresión algebraica. Es la relación matemática entre las dos variables en la que la variable dependiente (y) está despejada. No siempre es posible obtener la expresión analítica de una función. La expresión analítica suele utilizarse en física, química, economía, etc.
- Tabla de valores. Es un conjunto de pares de valores (x,y) de la función.
- Gráfica. La gráfica es el conjunto de todos los puntos $(x,y=f(x))$ representados en los ejes de coordenadas cartesianas,

Expresión algebraica	$y = x^2 - 3$ o $f(x) = x^2 - 3$																	
Tabla de valores	<table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>$f(-2) = 1$</td><td>$f(-1) = -2$</td><td>$f(0) = -3$</td><td>$f(1) = -2$</td><td>$f(2) = 1$</td></tr></table>	x	-2	-1	0	1	2	$f(x)$	$f(-2) = 1$	$f(-1) = -2$	$f(0) = -3$	$f(1) = -2$	$f(2) = 1$					
x	-2	-1	0	1	2													
$f(x)$	$f(-2) = 1$	$f(-1) = -2$	$f(0) = -3$	$f(1) = -2$	$f(2) = 1$													
Gráfica																		

FUNCIÓN LINEAL



$$y = mx + b$$

una función lineal es una función polinómica de primer grado, es decir, una función de una variable

Se puede describir generalmente como una función de la forma:

$$y = mx + b$$

donde y representa la variable dependiente (ordenada), x representa la variable independiente (abscisa), m es la pendiente de la recta, y b es la ordenada al origen (o término constante).

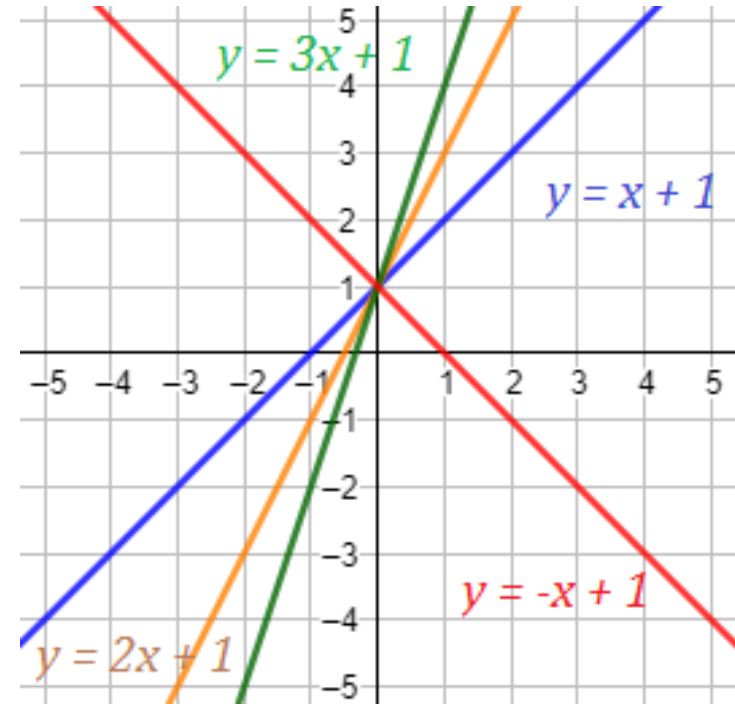
CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Pendiente (m):

La pendiente es el coeficiente de la variable, es decir, m .

Geométricamente, cuanto mayor es la pendiente, más inclinada es la recta. Es decir, más rápido crece la función.

- Si la pendiente es positiva, la función es creciente.
- Si la pendiente es negativa, la función es decreciente.



La pendiente m determina la inclinación de la recta:

- Si $m > 0$, la línea sube de izquierda a derecha.
- Si $m < 0$, la línea baja de izquierda a derecha.
- Si $m = 0$, la línea es horizontal.
- La ordenada al origen b indica

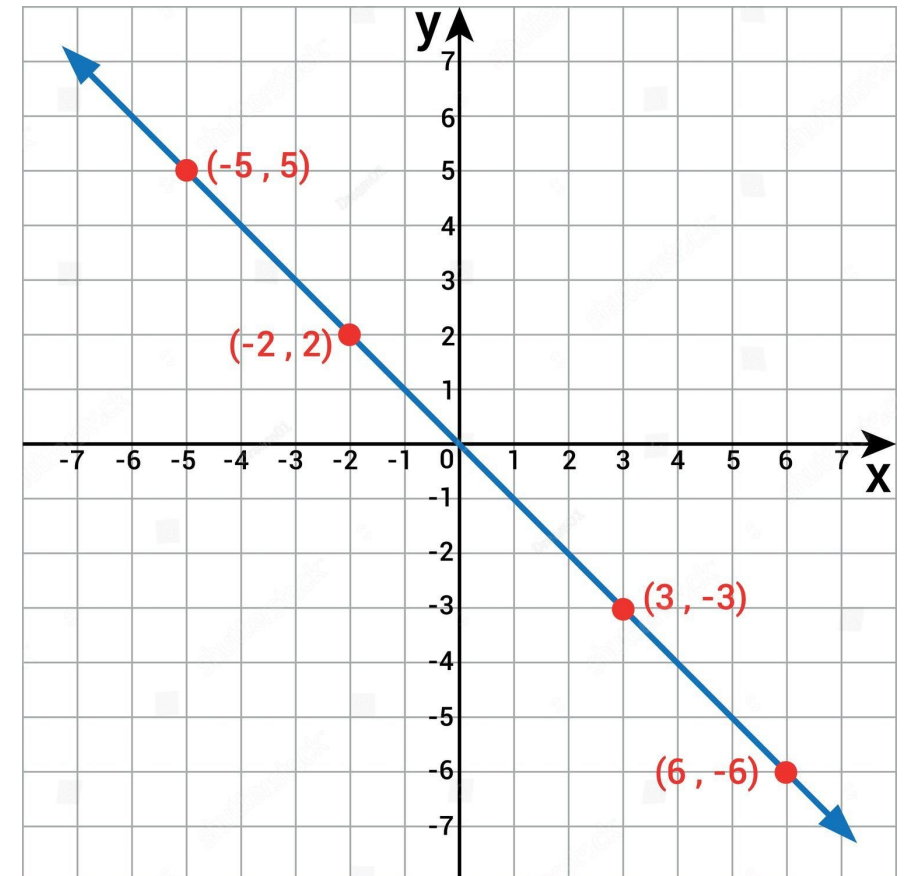
CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN LINEAL

Gráfica

Como una función lineal es una recta, para representar su gráfica sólo tenemos que trazar la recta que une dos de sus puntos. Para ello, calculamos la imagen de dos puntos cualesquiera.

La definición formal de la gráfica de la función es el conjunto de puntos siguiente:

$$\{(x, f(x))\}$$



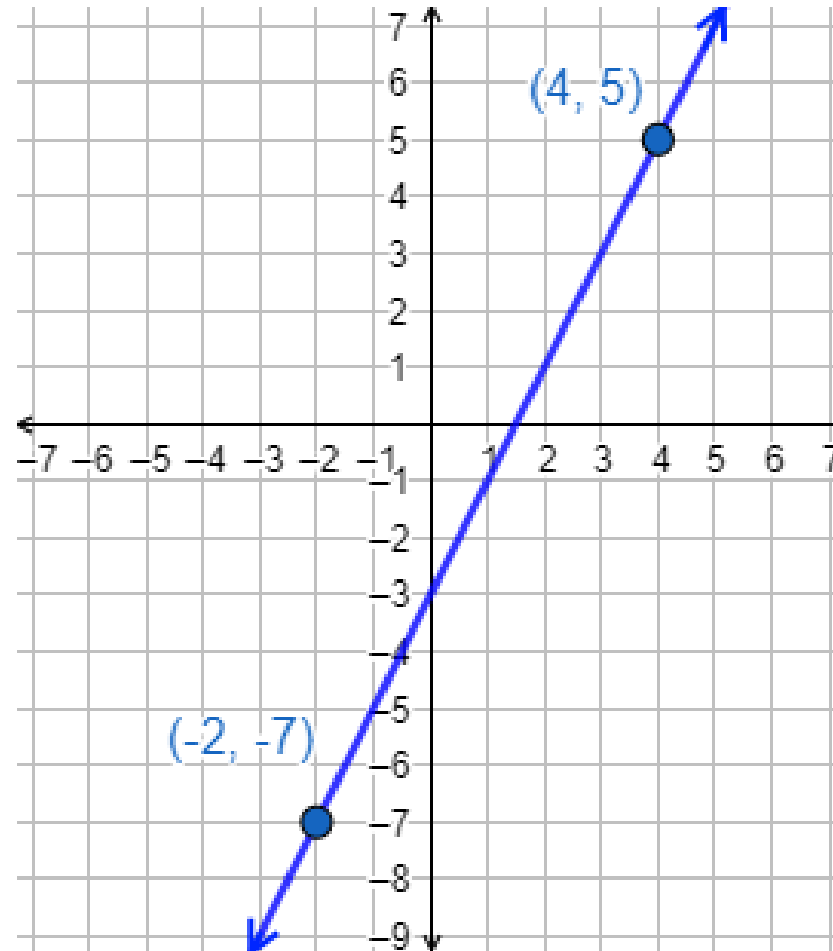
EJEMPLO

$$f(x) = 2x - 3$$

x	$y = 2x - 3$
4	5
-2	-7

NOTA: se ve que la recta corta al eje Y por debajo del eje X, esto se debe a que la ordenada es negativa ($b=-3$).

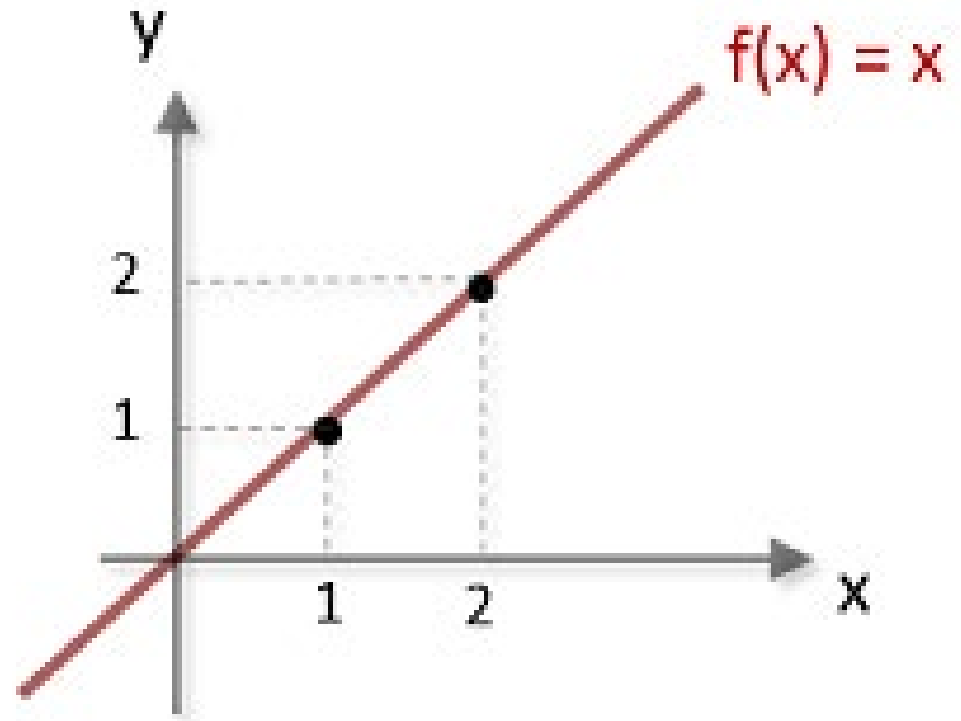
Representamos la recta a partir de los puntos $(4,5)$ y $(-2,-7)$:



FUNCIÓN IDENTIDAD.

La función identidad o función id es una función que asigna cada número real a sí mismo. Matemáticamente, se define como: $f(x)=x$

para todo x en el dominio de f , que generalmente es el conjunto de todos los números reales $\mathbb{R}$.



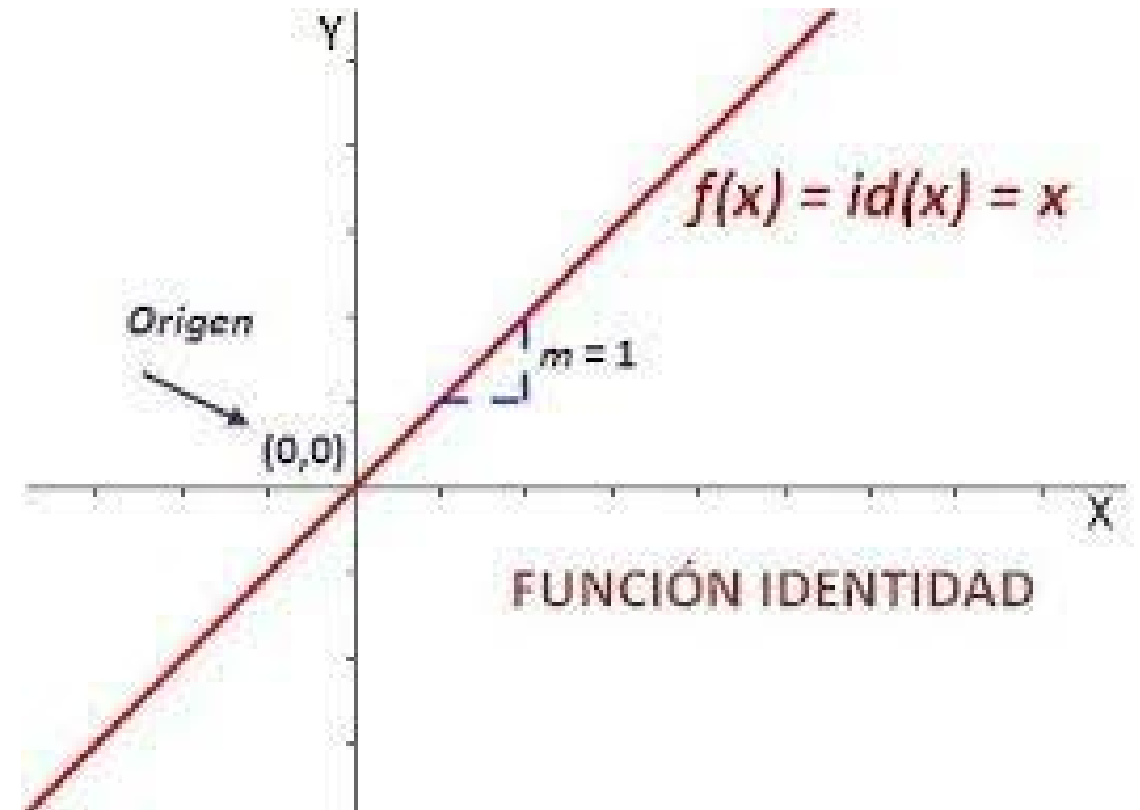
CARACTERÍSTICAS

1. Dominio y Codominio:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Codominio: $\mathbb{R}$

2. **Gráfica:** La gráfica de la función identidad es una línea recta que pasa por el origen $(0,0)$ y tiene una pendiente de 1. Es la línea $y = x$ en el plano cartesiano.

3. **Continuidad:** La función identidad es continua en todo su dominio porque no tiene saltos ni discontinuidades.



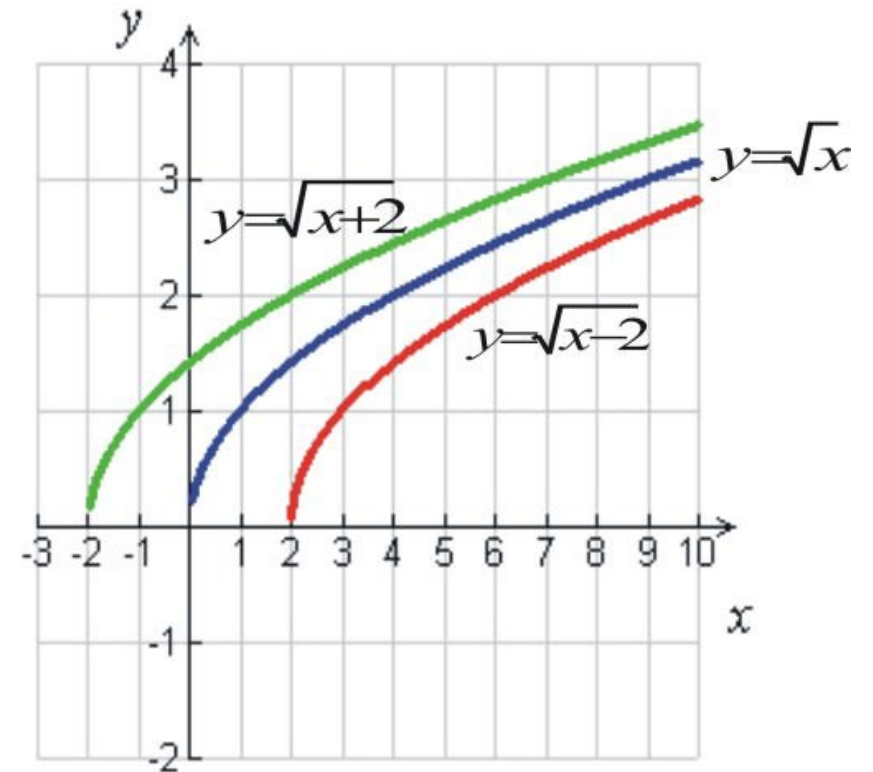
FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA.

La raíz cuadrada permite definir una función real cuyo dominio e imagen es el conjunto $[0; \infty)$. Para cada número real x esta función se define como el único número no negativo y que elevado al cuadrado es igual a x .

La función raíz cuadrada $f(x)=\sqrt{x}$ está definida para $x \geq 0$ en los números reales, ya que la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real.

$$D_f: x \in [0; +\infty)$$

$$R_f: y \in [0; +\infty)$$

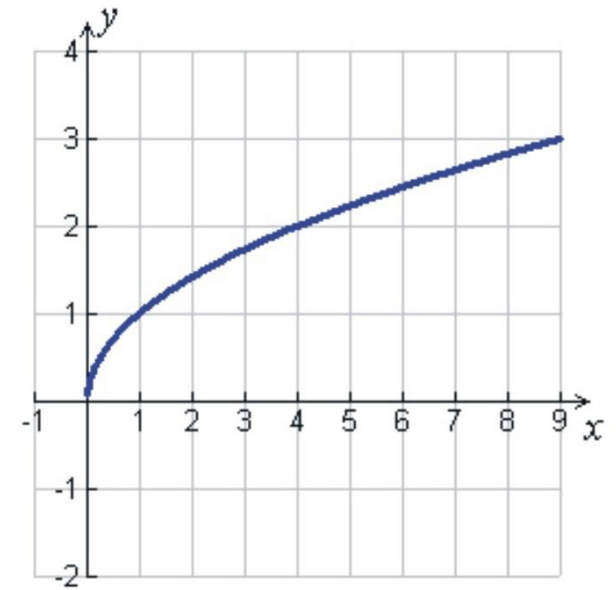


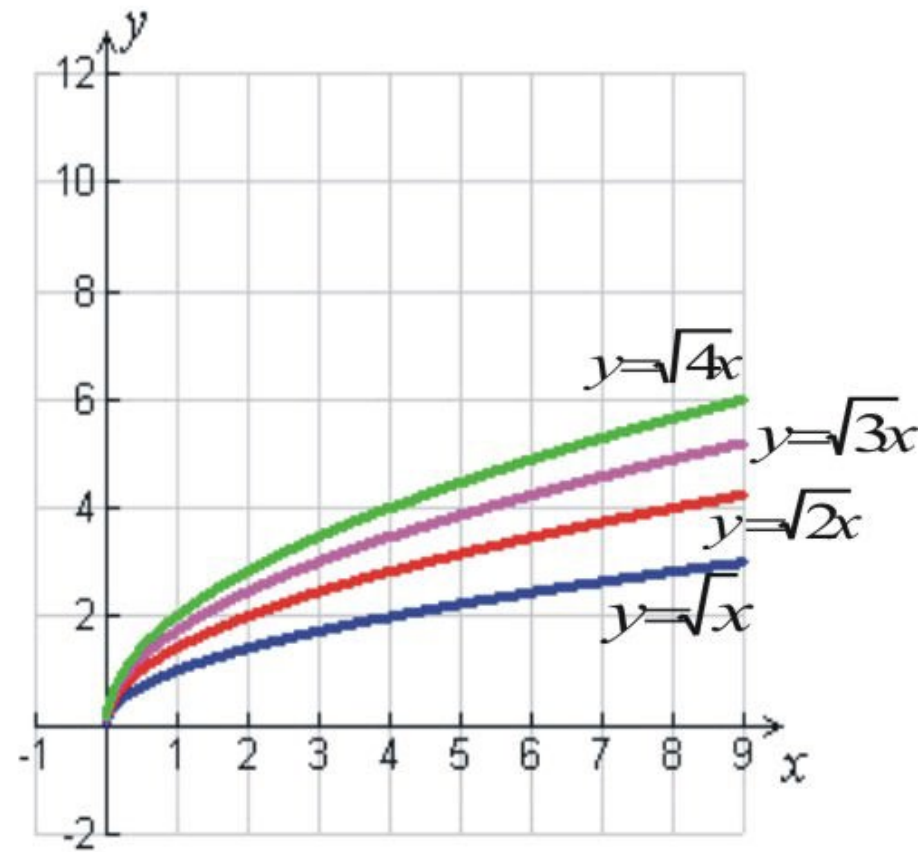
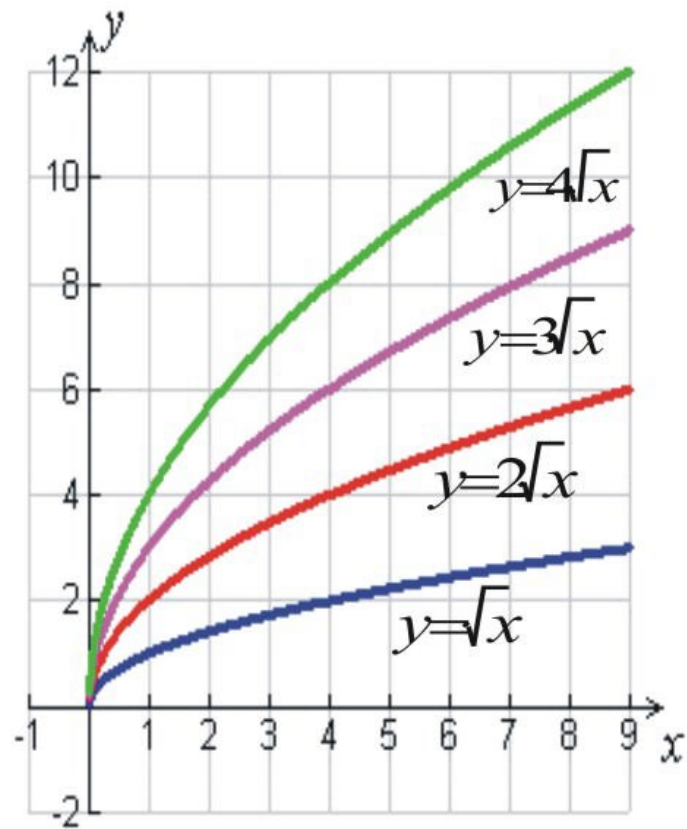
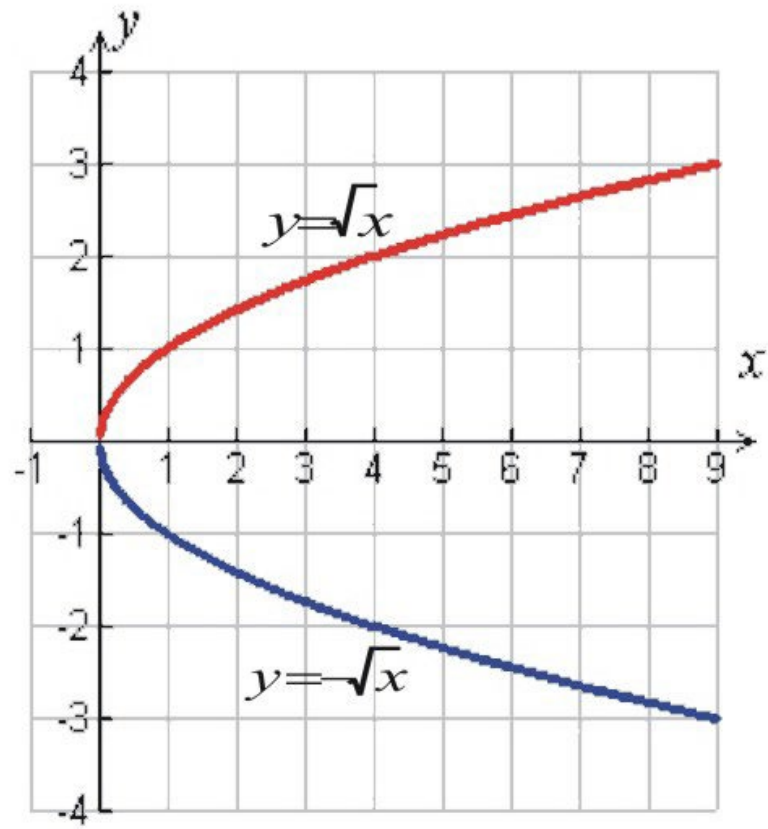
FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA.

Gráfica:

- La gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es una curva que comienza en el punto $(0,0)$ y se extiende hacia arriba y hacia la derecha.
- Es una curva suave y continua en su dominio.

x	$y = \sqrt{x}$
0	$y = \sqrt{0} = 0$
1	$y = \sqrt{1} = 1$
2	$y = \sqrt{2} = 1.4$
3	$y = \sqrt{3} = 1.7$
4	$y = \sqrt{4} = 2$
5	$y = \sqrt{5} = 2.2$
6	$y = \sqrt{6} = 2.4$
7	$y = \sqrt{7} = 2.6$
8	$y = \sqrt{8} = 2.8$
9	$y = \sqrt{9} = 3$





GRAFICAR LA FUNCIÓN $y = 2\sqrt{3x - 1} + 2$.

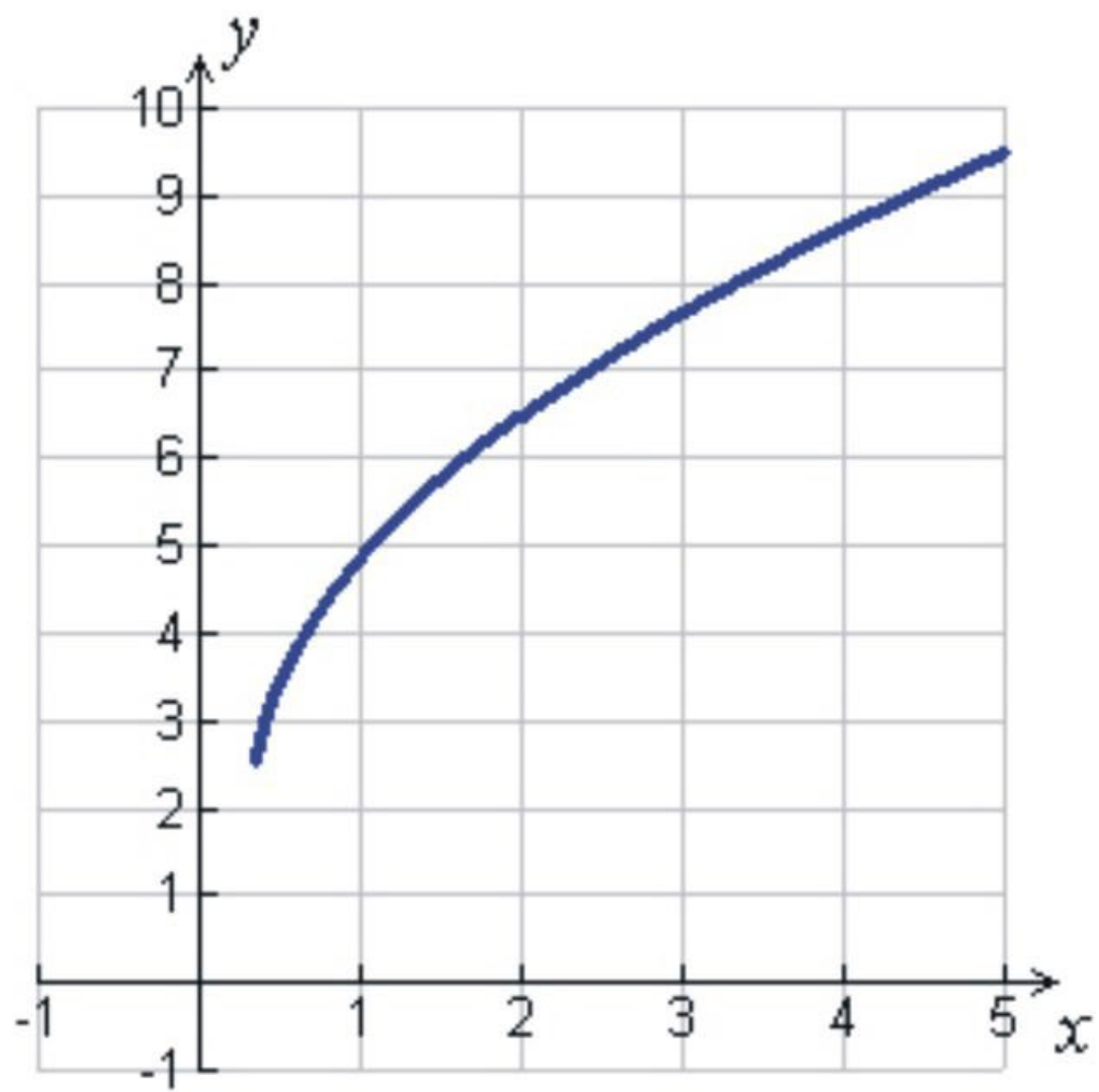
En primer lugar, determinemos el dominio de la función.

La función está definida, únicamente si la expresión que se encuentra dentro de la raíz cuadrada es positiva.

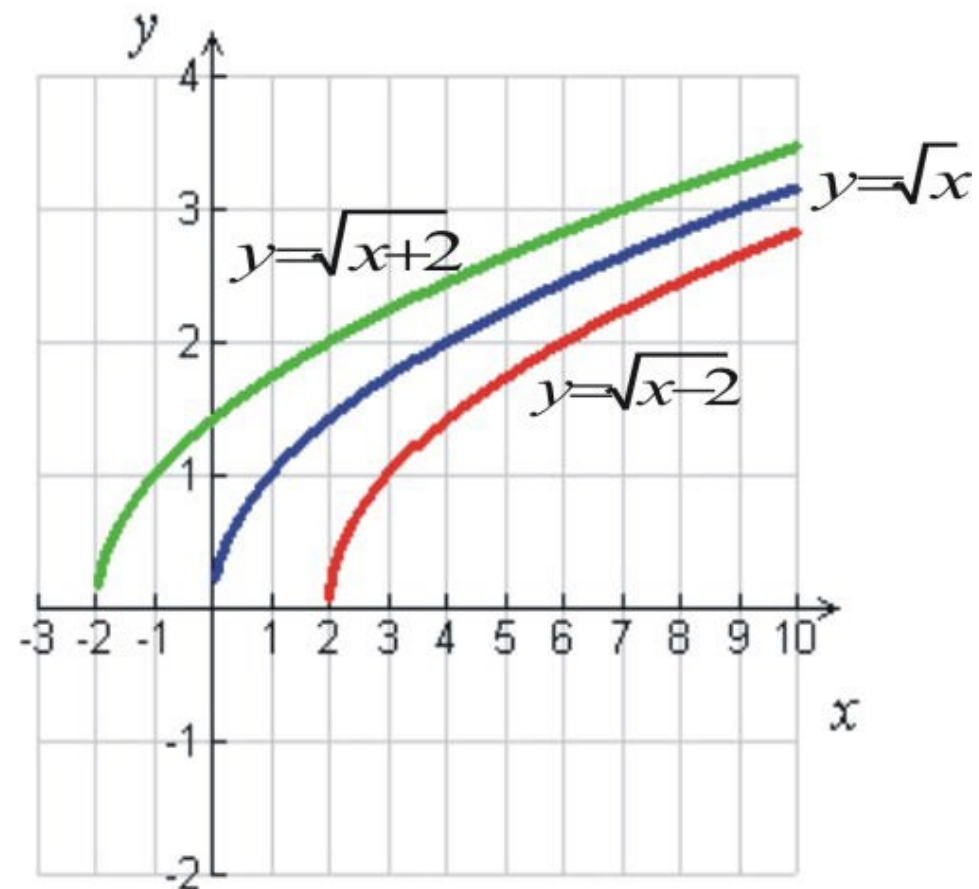
Es decir, debe cumplirse que $3x - 1 \geq 0$, de donde se tiene que $x \geq \frac{1}{3}$

.

x	$y = 2\sqrt{3x - 1} + 2$
$\frac{1}{3}$	$y = 2\sqrt{3 \cdot \frac{1}{3} - 1} + 2 = 2$
1	$y = 2\sqrt{3(1) - 1} + 2 = 4.8$
2	$y = 2\sqrt{3(2) - 1} + 2 = 6.5$
3	$y = 2\sqrt{3(3) - 1} + 2 = 7.7$
4	$y = 2\sqrt{3(4) - 1} + 2 = 8.6$
5	$y = 2\sqrt{3(5) - 1} + 2 = 9.5$



GRAFICAR $\sqrt{x-2}$ Y $\sqrt{x+2}$



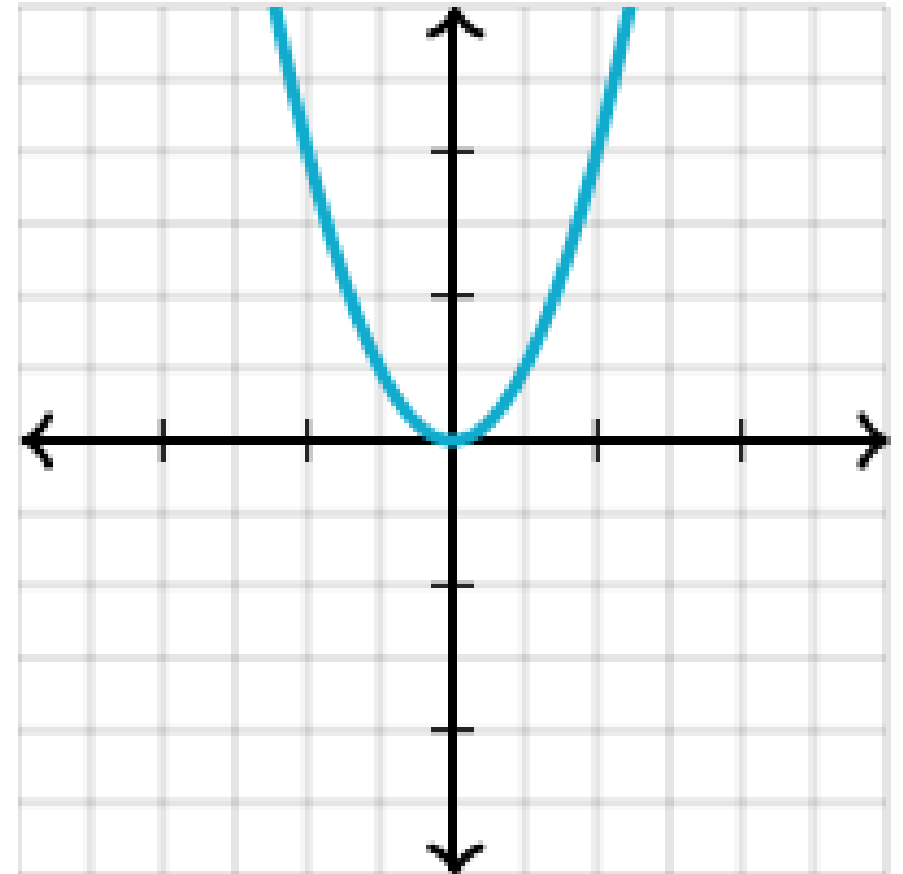
FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática (o parabólica) es una función polinómica de segundo grado. Es decir, tiene la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a , b y c son coeficientes reales, y $a \neq 0$ (si a fuera igual a 0, la función se convertiría en una función lineal).

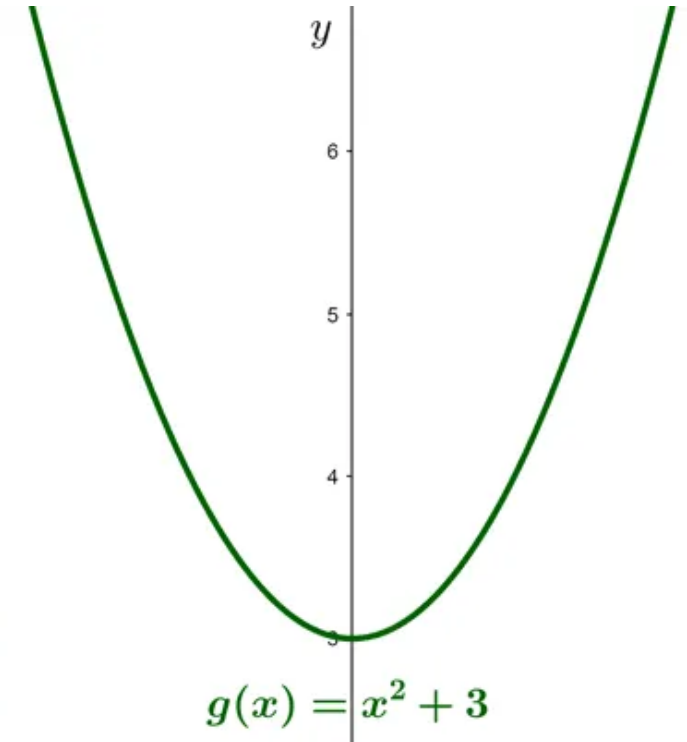
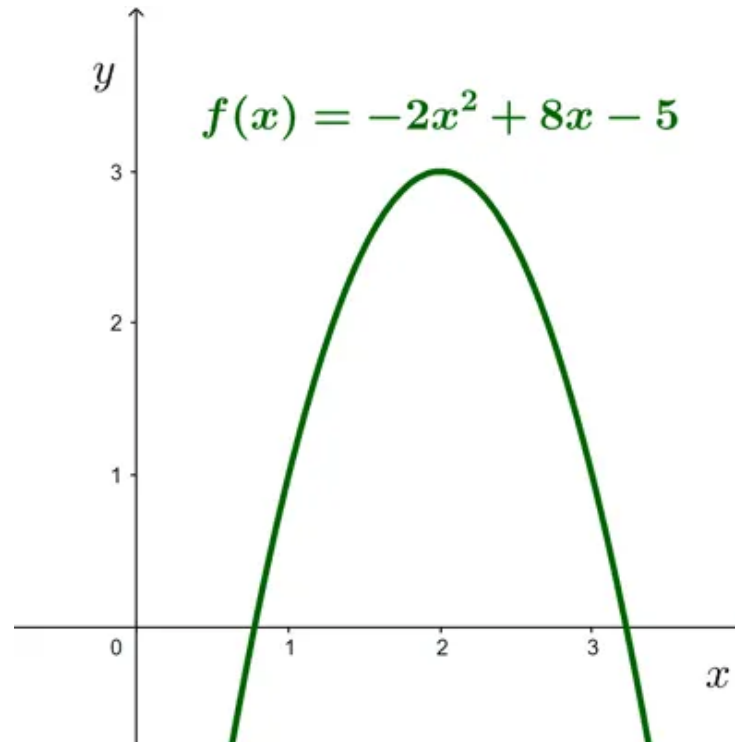
Se distingue por formar una parábola simétrica con el eje vertical



a positiva abre hacia arriba
 a negativa abre hacia abajo

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA:

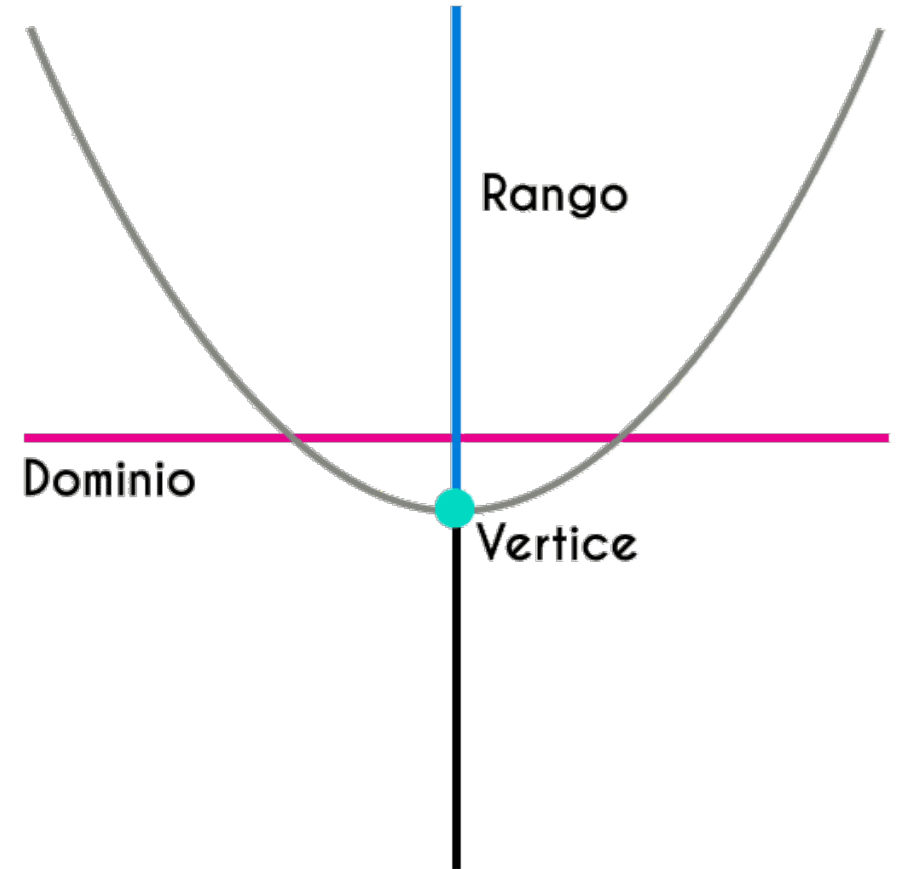
La gráfica de una función cuadrática es una parábola. La orientación (si abre hacia arriba o hacia abajo) depende del signo del coeficiente a . Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba, y si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo.



PROPIEDADES

- **Dominio:** El dominio de una función cuadrática es el conjunto de todos los números reales, es decir, $\mathbb{R}$.
- **Codominio:** Dependiendo del valor de a , el codominio puede ser $[v, \infty)$ si la parábola abre hacia arriba (cuando $a > 0$), o $(-\infty, v]$ si la parábola abre hacia abajo (cuando $a < 0$), donde v es el valor mínimo o máximo de la función (el vértice de la parábola).
- **Vértice:** El vértice de la parábola es el punto donde la función alcanza su valor máximo o mínimo. Se puede calcular utilizando la fórmula:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$



DOMINIO Y RANGO FUNCIÓN CUADRÁTICA

Para encontrar la coordenada y del vértice, se sustituye x_v en la función

$$v = \left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

Dom: en funciones cuadráticas siempre será $\mathbb{R}$ (Todos los reales)

Rango: es el valor a partir del vértice en y

$$y = x^2 + 2x - 3$$

$$v = \left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(1)} = -1$$

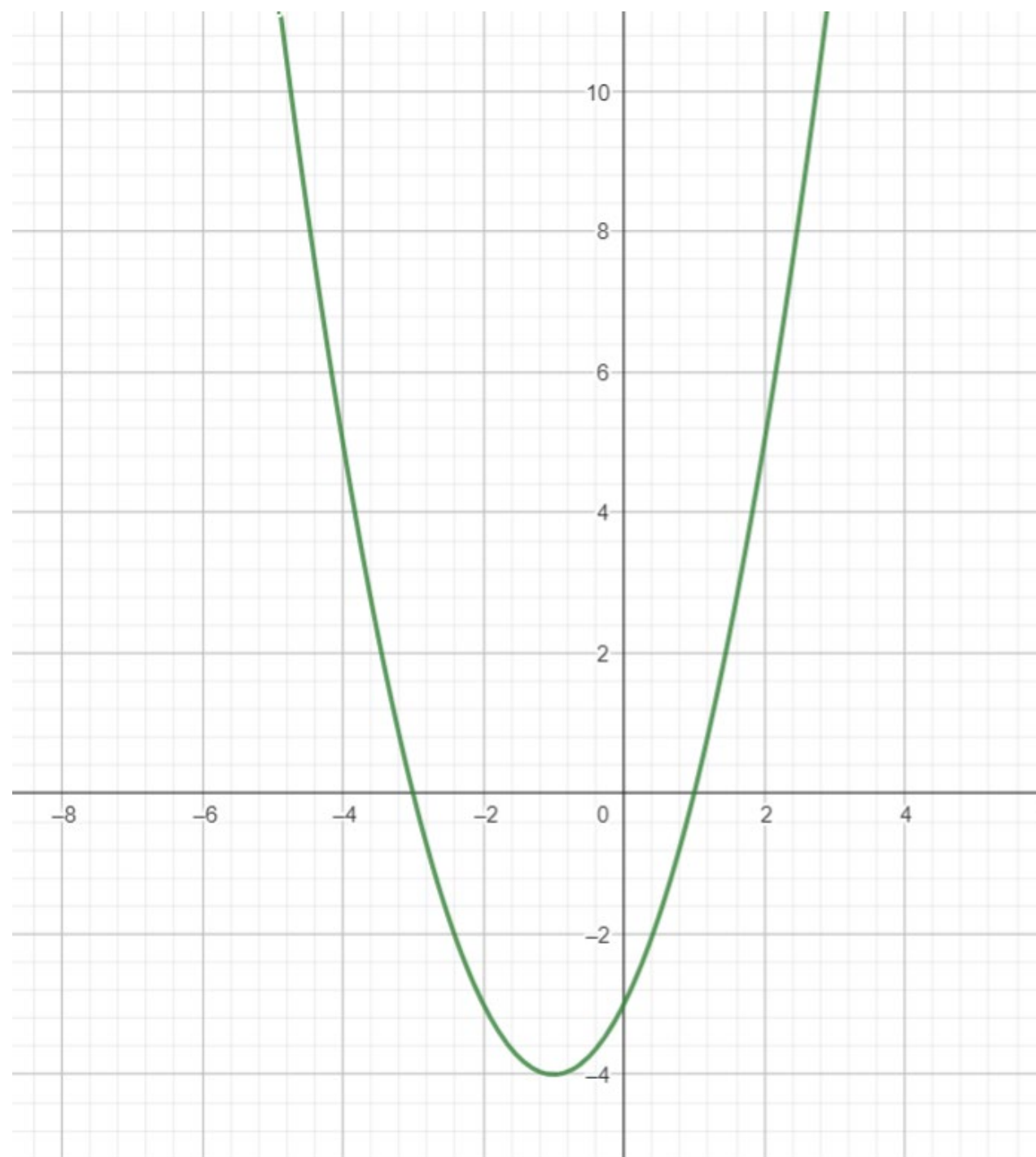
$$y_v = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = (-1)^2 + 2(-1) - 3$$

$$y_v = -4$$

$$v = (-1; -4)$$

$$Dom = \mathbb{R}$$

$$Rango = [-4; \infty)$$



PUNTOS DE CORTE

Puntos de corte con el eje X

Para encontrar el valor de x cuando $f(x) = 0$, la segunda coordenada debe igualarse a cero, por lo que tendremos que resolver la siguiente igualdad:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Al resolver la ecuación anterior los resultados pueden ser:

- Dos puntos de corte: $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ esto sucede si $b^2 - 4ac > 0$
- Un punto de corte: $(x_1, 0)$ esto sucede si $b^2 - 4ac = 0$
- Ningún punto de corte si $b^2 - 4ac < 0$

PUNTOS DE CORTE

Puntos de corte con el eje y

Para encontrar la intersección con el eje y la primera coordenada debe igualarse a cero, $X = 0$, por lo que tendremos:

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \Rightarrow (0, c)$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

$$x_v = -\frac{-4}{2} = 2 \quad y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$$

$$V(2, -1)$$

$$Dom = R$$

$$Rango = [-1; \infty)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

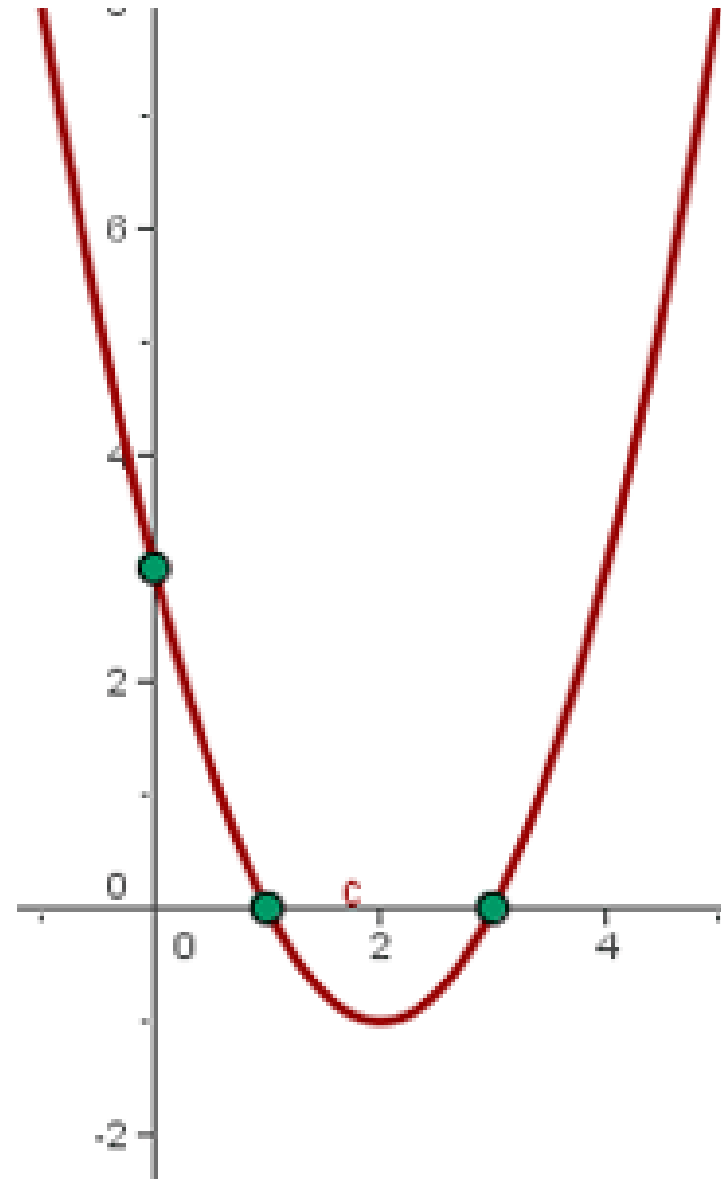
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 3 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

En este caso para x se corta en dos puntos (3,0) y (1,0)

Y para el corte en y solo basta con conocer el valor de c en la ecuación, en este caso es 3 entonces las coordenadas son (0,3)

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$



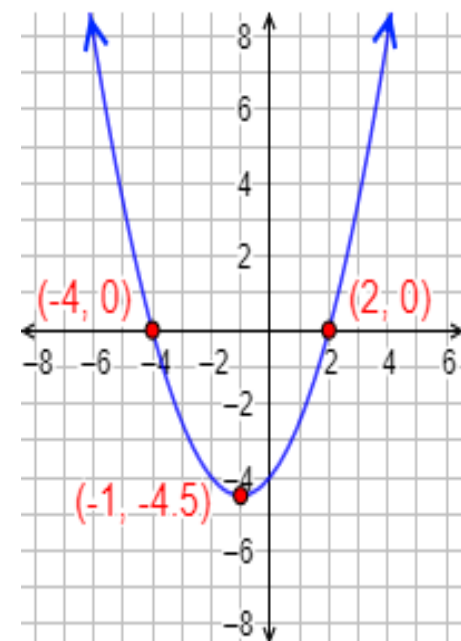
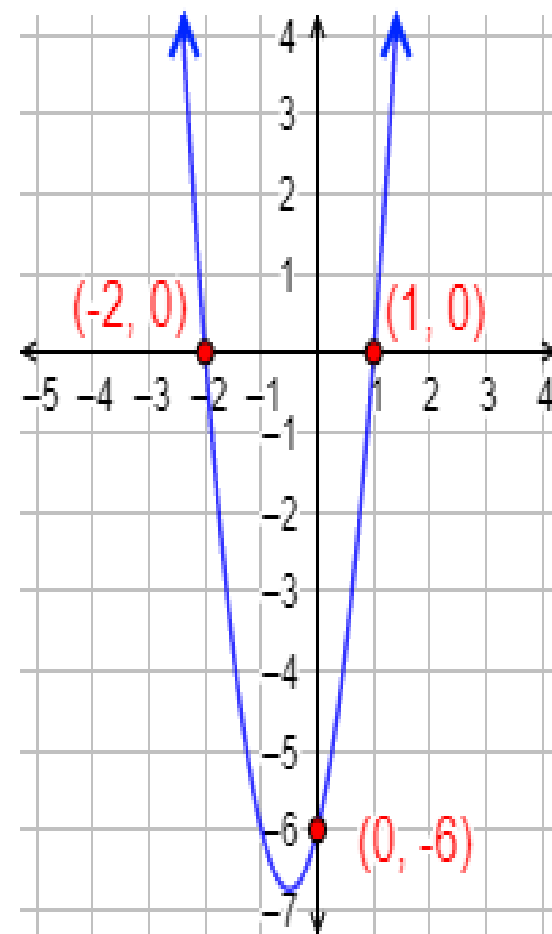
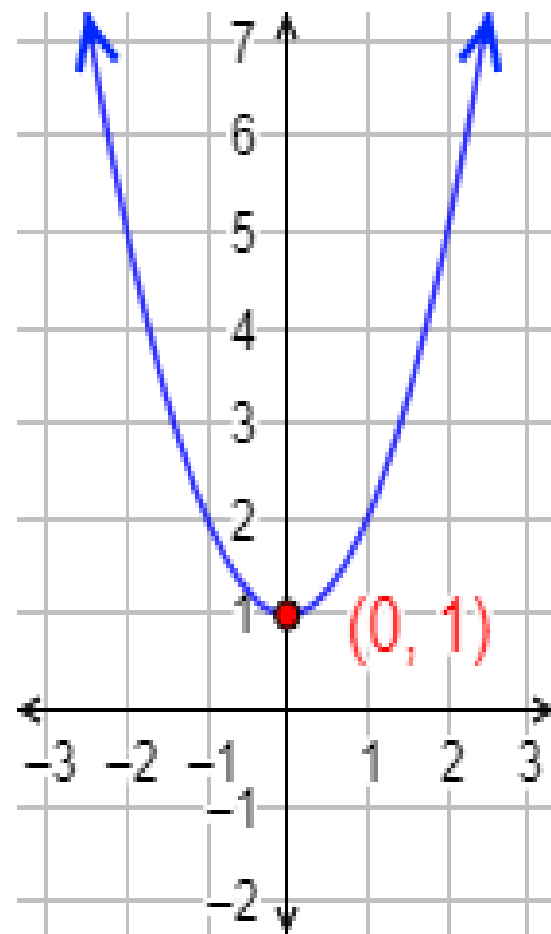
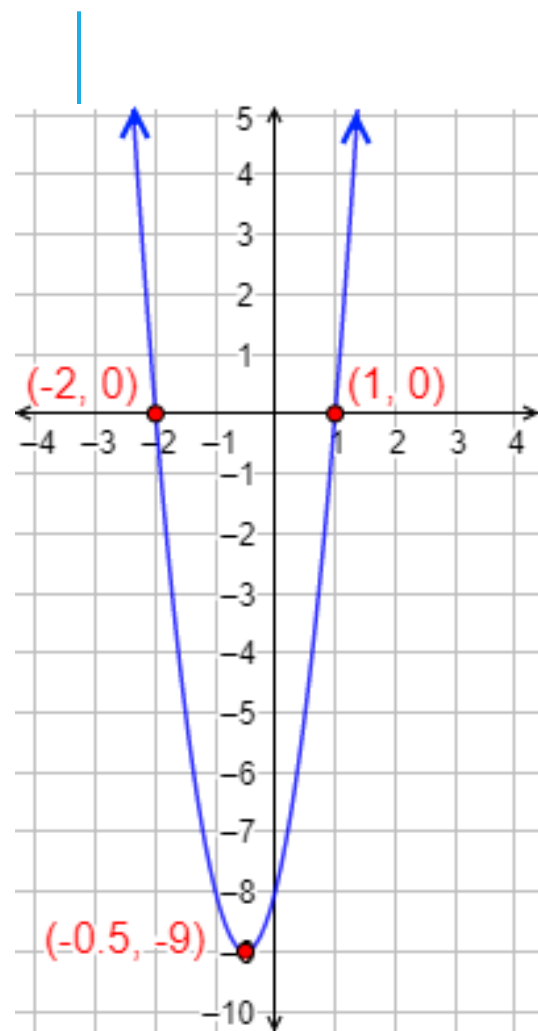
EJERCICIOS

$$f(x) = 4x^2 + 4x - 8$$

$$f(x) = x^2 + 1$$

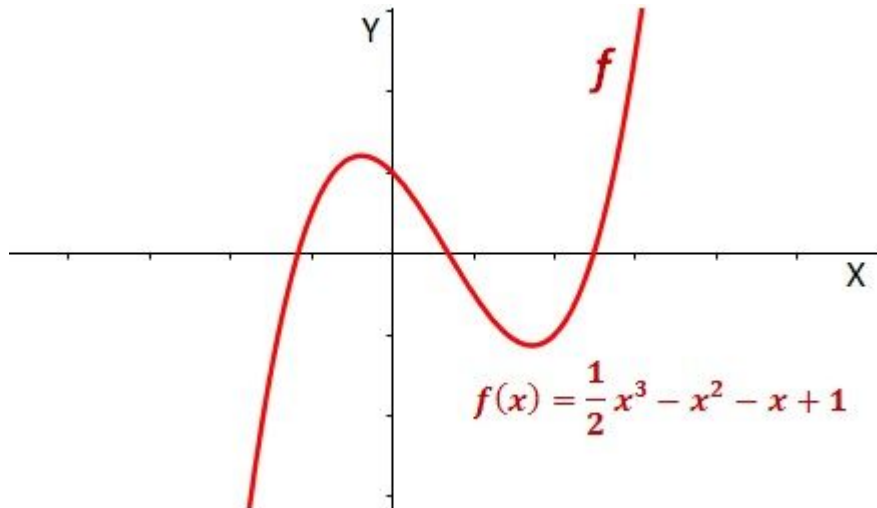
$$f(x) = 3(x - 1)(x + 2)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + x - 4$$



FUNCIÓN POLINÓMICA

Una función polinómica es una función cuya expresión algebraica es un polinomio, es decir, una función polinómica está definida por la suma o resta de un número finito de términos de diferente grado.



$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$a_0, a_1 \dots a_n$ son los coeficientes del polinomio. Se trata, simplemente, de los números reales que acompañan a la variable independiente x en los distintos sumandos. A a_0 se le denomina término independiente

n en la variable x es el grado del polinomio. Es el número entero mayor al que está elevada la variable independiente

Tipos de Polinomios Según su Grado

1. **Polinomio constante:** Es un polinomio de grado 0, de la forma $P(x) = a_0$.
2. **Polinomio lineal:** Es un polinomio de grado 1, de la forma $P(x) = a_1x + a_0$.
3. **Polinomio cuadrático:** Es un polinomio de grado 2, de la forma $P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$.
4. **Polinomio cúbico:** Es un polinomio de grado 3, de la forma $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
5. **Polinomio de grado n :** Es un polinomio de la forma $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$.

TIPOS DE POLINOMIOS SEGÚN SU
GRADO

EJEMPLOS SEGÚN SU GRADO

Función polinomial	Nombre
$f(x) = 5$	Función constante (grado0)
$f(x) = -2x + 1$	Función lineal (grado1)
$f(x) = 5x^2 + 4x - 3$	Función cuadrática (grado2)
$f(x) = x^3 - 1$	Función cúbica (grado3)
$f(x) = 4x^5 + 3x^4 - 7$	Función polinomial

PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES POLINÓMICAS

Las funciones polinómicas tienen las siguientes características:

- El dominio de cualquier función polinómica es el conjunto de los números reales.

$$Dom = R$$

- Todas las funciones polinómicas son continuas. (NO TIENE CORTES)

- La gráfica de una función polinómica corta al eje Y en $(0, a_0)$.
- Corta al eje X un número de veces igual o inferior al grado del polinomio n .
- Se pueden hacer operaciones con funciones polinómicas

Igualdad de funciones.

Suma de funciones.

Diferencia de funciones.

Multiplicación de funciones.

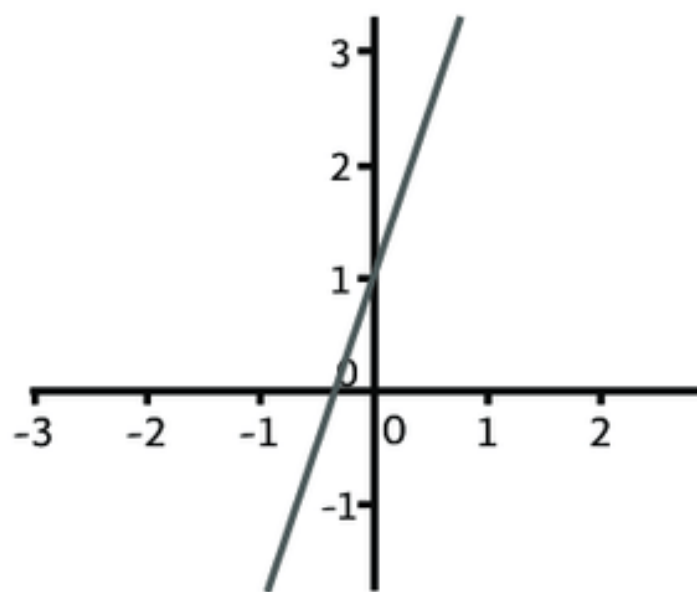
Cociente de funciones.

Composición de funciones.

FUNCIÓN LINEAL

$$f(x) = ax + b$$

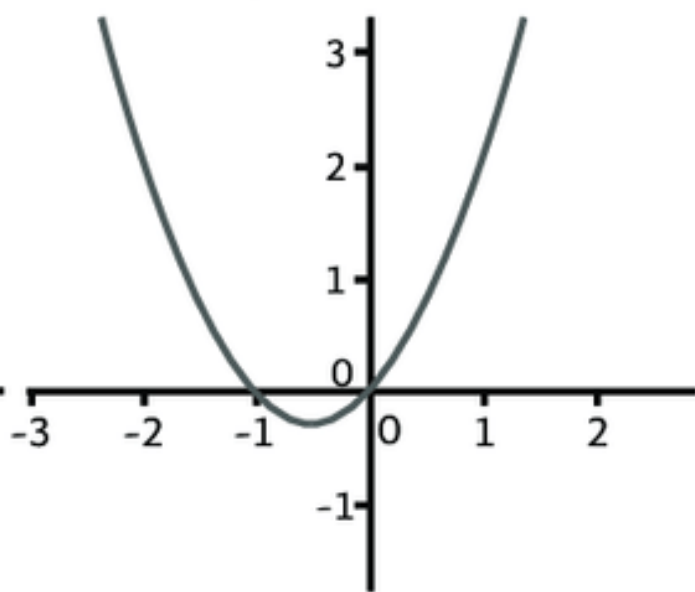
La recta



FUNCIÓN CUADRÁTICA

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

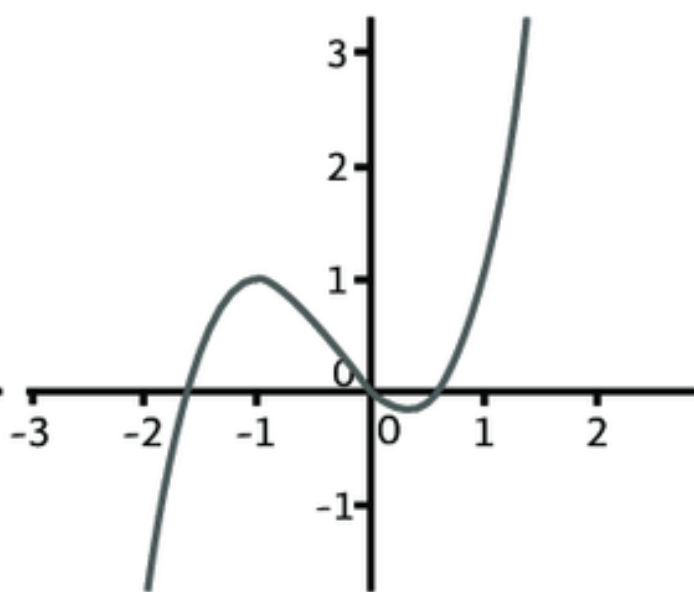
La parábola



FUNCIÓN CÚBICA

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

La cúbica



FUNCION RACIONAL

Una función racional es aquella función algebraica definida por el cociente de dos polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ sin raíces comunes, en la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$$

Donde:

- $a_0, a_1 \dots a_n, b_0, b_1 \dots b_m$ son los coeficientes de los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$ respectivamente. Se trata, simplemente, de los números reales que acompañan a la variable independiente en cada caso
- n es el grado del polinomio $P(x)$
- m es el grado del polinomio $Q(x)$

CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES RACIONALES

El dominio de una función racional son todos los números reales excepto los valores de la variable x que anulan el denominador ($Q(x) = 0$), es decir, excepto las raíces del polinomio correspondiente al denominador.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\}$$

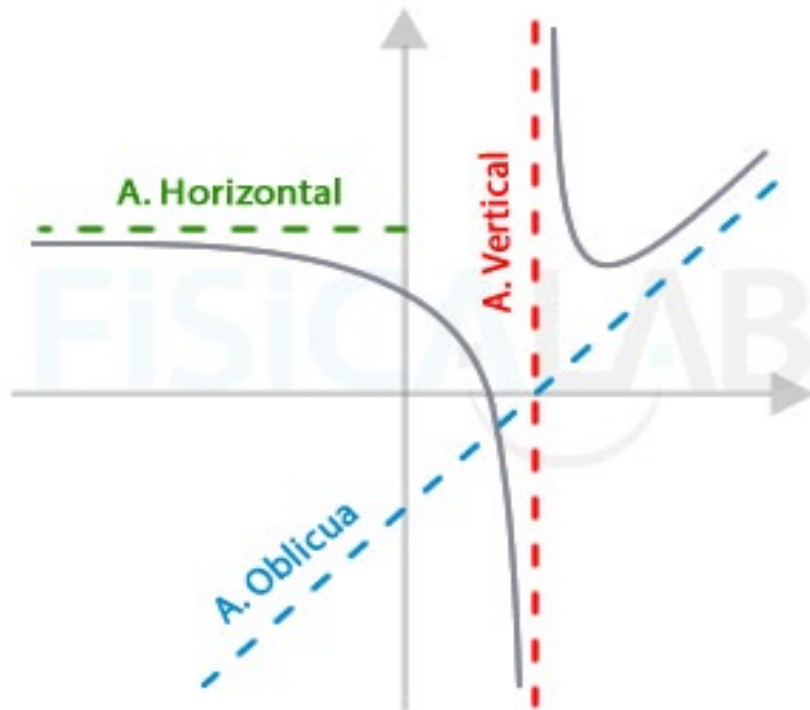
Intersecciones con los Ejes:

- Intersección con el eje y : Se encuentra evaluando la función en $x=0$, siempre que $x=0$ esté en el dominio de la función.
- Intersecciones con el eje x : Se encuentran resolviendo $P(x)=0$ para x , siempre que los valores encontrados estén en el dominio de la función.

ASINTOTAS

Asíntotas Verticales: CUANDO EL DENOMINADOR ES CERO

Ocurren en los valores de x que hacen que $Q(x)=0$



Asíntotas Horizontales: Determinadas por los grados de los polinomios en el numerador y el denominador.

Si el grado de $P(x)$ es igual al grado de $Q(x)$, la asíntota horizontal es $y=a/b$ donde a es el coeficiente principal de $P(x)$ y b es el coeficiente principal de $Q(x)$.

- Si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, la asíntota horizontal es $y=0$.
- Si el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$, no hay asíntota horizontal, pero puede haber una asíntota oblicua.

EJEMPLO PRACTICO CASO 1 GRADOS IGUALES

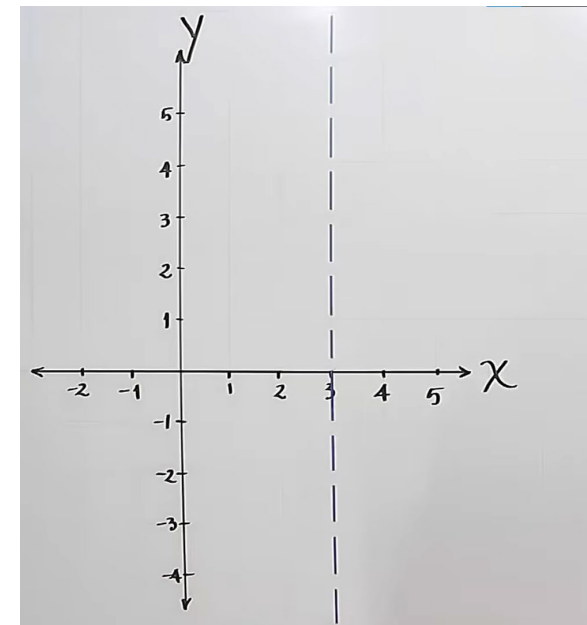
$$y = \frac{2x-5}{x-3}$$

Asintotas Verticales

Valores que hagan 0 al denominador

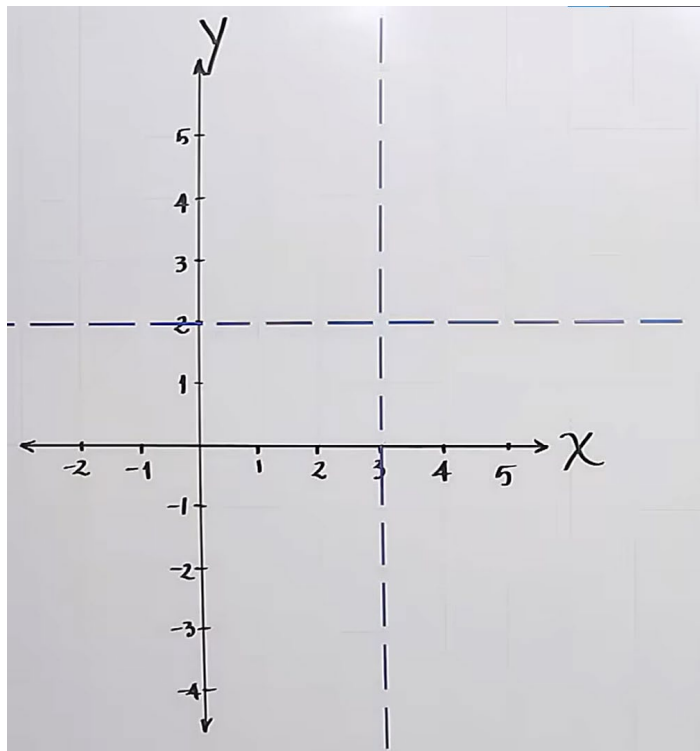
$$x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$



EJEMPLO PRACTICO

$$y = \frac{2x-5}{x-3}$$

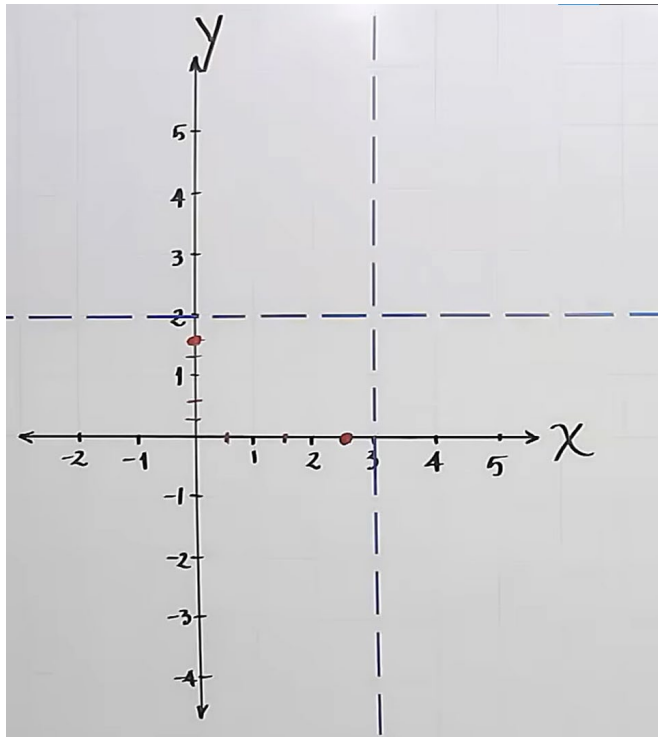


Asintotas horizontales

$$\frac{Cn}{cd} = \frac{2}{1} = 2$$

EJEMPLO PRACTICO

$$y = \frac{2x-5}{x-3}$$



Puntos de corte en x

$$y = 0$$

$$0 = \frac{2x-5}{x-3}$$

$$0 * (x - 3) = 2x - 5$$

$$X = \frac{5}{2}$$

Puntos de corte en y

$$x = 0$$

$$y = \frac{2(0)-5}{(0)-3}$$

$$y = \frac{5}{3}$$

EJEMPLO PRACTICO

$$y = \frac{2x-5}{x-3}$$

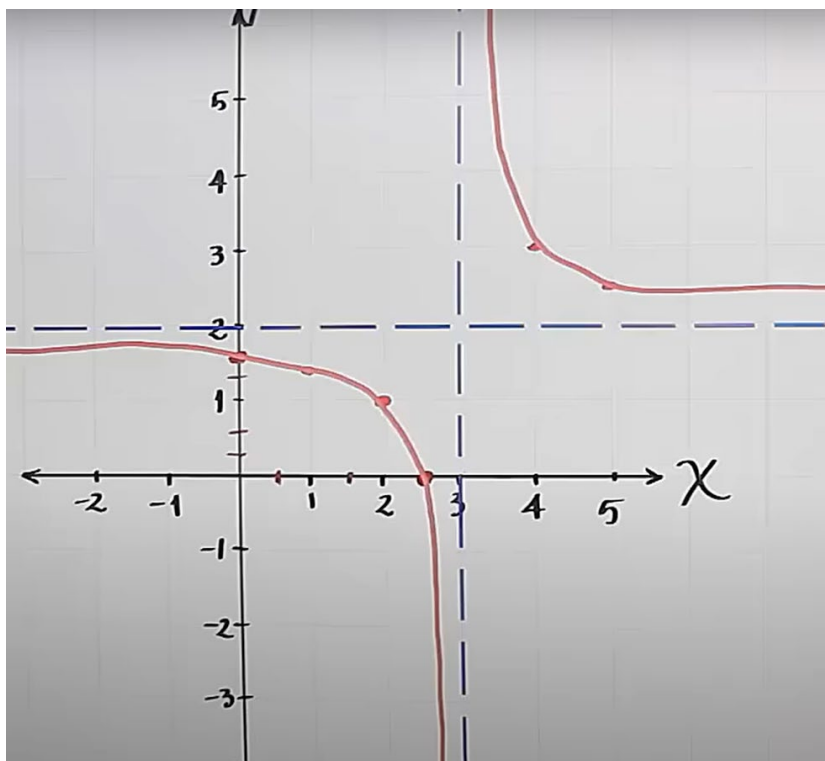


Tabla de valores

x	1	2	4	5
y	1.5	1	3	2.5

$$\text{dom} = \mathbb{R} - 3$$

$$\text{Rng} = \mathbb{R} - 2$$

EJERCICIO

$$y = \frac{x-5}{2x-4}$$

Asíntota vertical

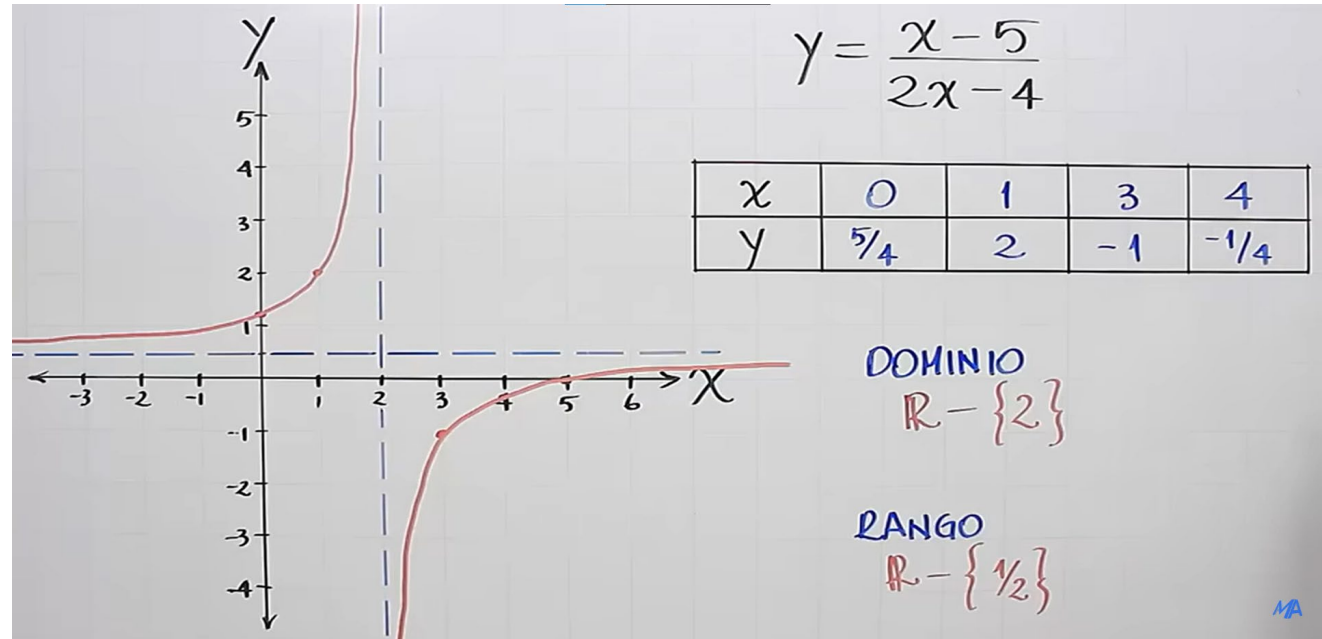
$$2x - 4 \neq 0$$

$$x \neq 2$$

Asíntota horizontal

$$Y = \frac{cn}{cd}$$

$$Y = 1/2$$



Puntos de corte

$$y = 0$$

$$x = 5$$

$$x = 0$$

$$y = 5/4$$

EJERCICIO $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$

$$y = \frac{(x-4)(x+1)}{2x(x+2)}$$

Asíntota v

$$2x(x+2) \neq 0$$

$$x = 0 \quad x = -2$$

Asíntota h

$$y = \frac{1}{2}$$

$$\text{dom} = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$$

$$\text{Rango} = \mathbb{R}$$

Puntos de cortes

$$x = 0$$

$$y = -4/0$$

No hay ceros en x

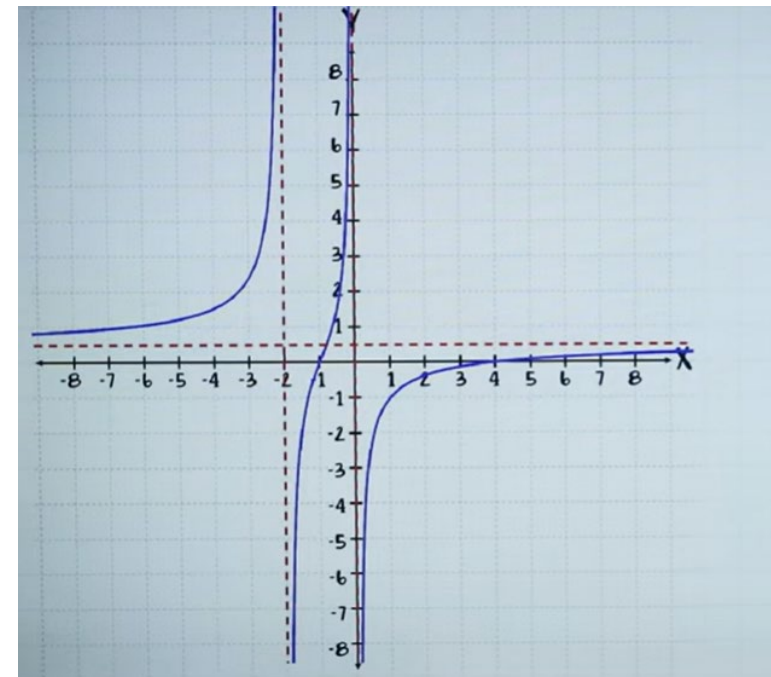
$$y = 0$$

$$x = (x-4)(x+1)$$

$$x = 4 \quad (4, 0)$$

$$x = -1 \quad (-1, 0)$$

x	4	-1	-4	-3	-0.5	-1.5	1	2	
y	0	0	1.5	2.3	1.5	-1.8	-1	-0.3	



EJERCICIO

$$y = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

$$y = \frac{(x+4)(2x-1)}{(x+2)(x-1)}$$

A.V

$$x = -2$$

$$x = 1$$

A.H

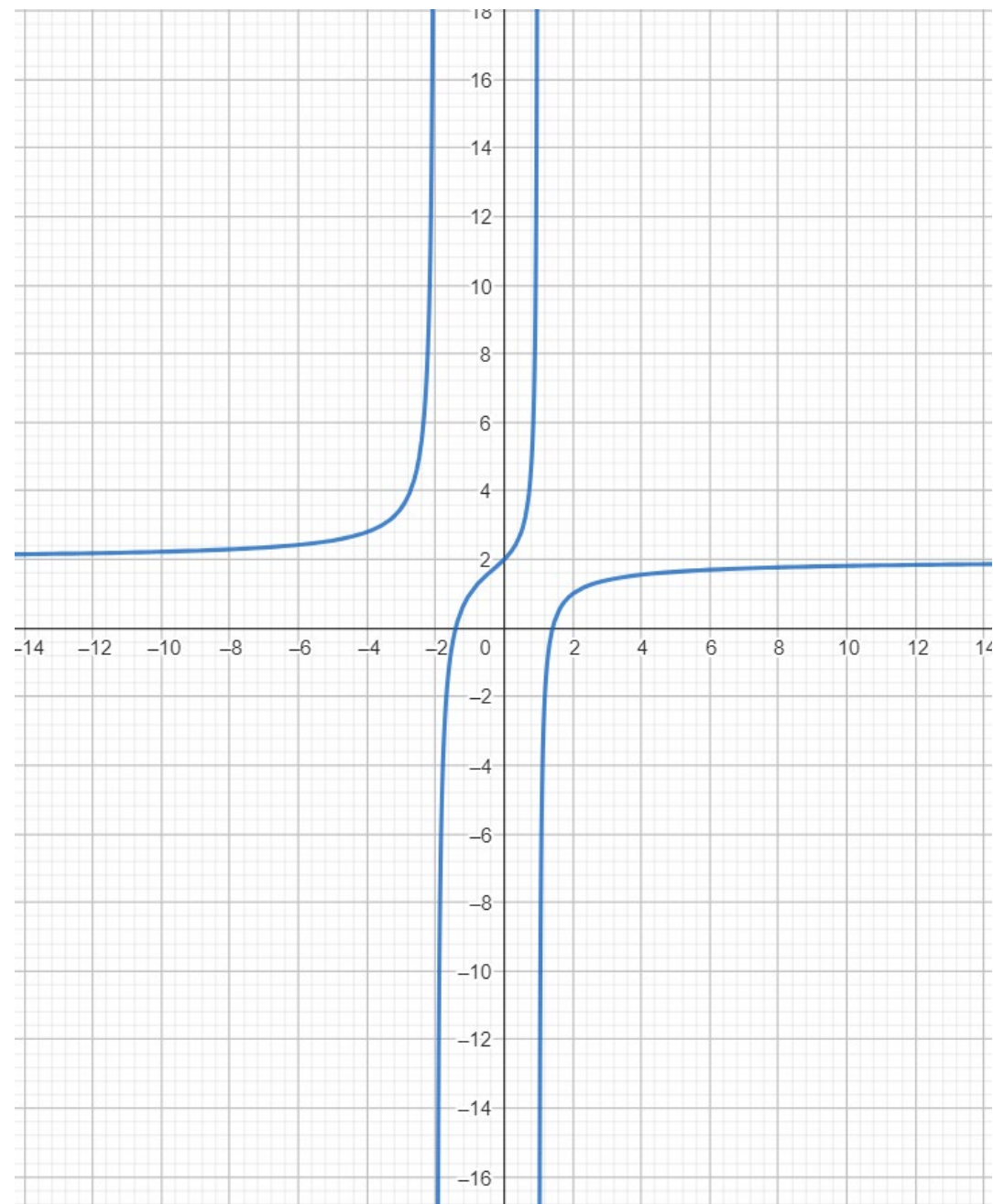
$$y = \frac{2}{1} = 2$$

Puntos de corte

$$X=0 \quad y=0$$

$$Y=2 \quad x = -4 \quad x = 1/2$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$$
$$\text{Rang} = \mathbb{R}$$



CASO 2 $GN < GD$

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

$$y = \frac{x}{(x+1)(x-1)}$$

A.V

$$(x+1)(x-1)=0$$

$$x = 1$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$x = -1$$

$$\text{Rang} = \mathbb{R}$$

A.H

$$y = 0$$

Puntos de cortes

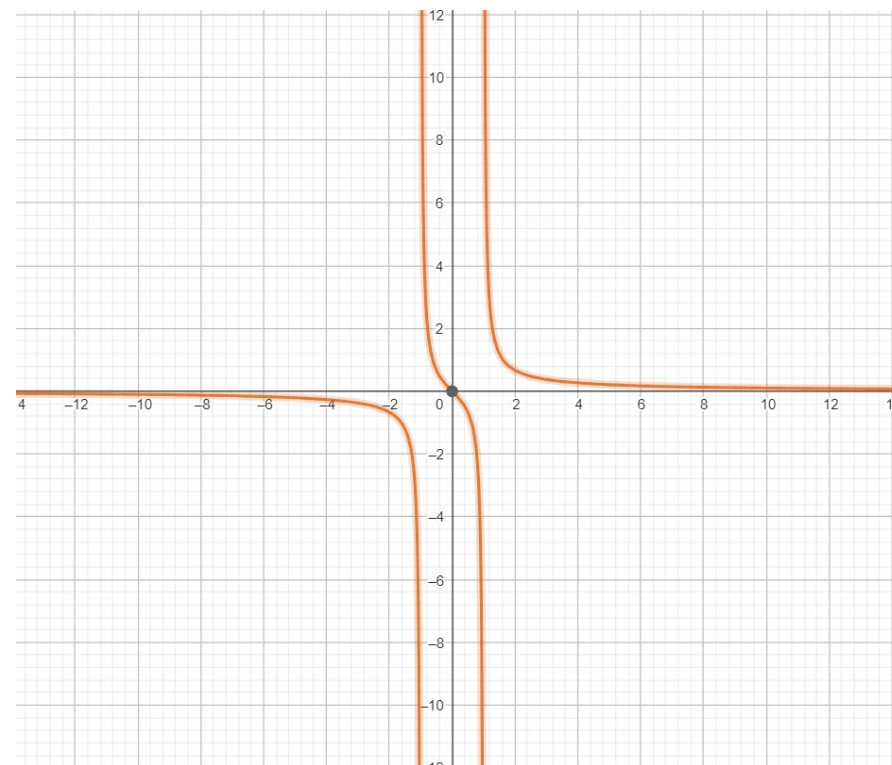
$$X=0$$

$$y=0$$

$$Y=0 (0,0)$$

$$x=0$$

x	-3	-2	-0.5	0.5	2	3
y	-0.3	-0.6	0.6	0.6	0.6	0.3



EJERCICIO

$$y = \frac{x}{x^2 - 2x - 8}$$

$$y = \frac{x}{(x-4)(x+2)}$$

x	-4	-3	-1	3	5	6
y	-0,2	-0,4	0,2	-0,6	0,7	0,3

A.V

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

$$x = -2$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$$

$$x = 4$$

A.H

$$y = 0$$

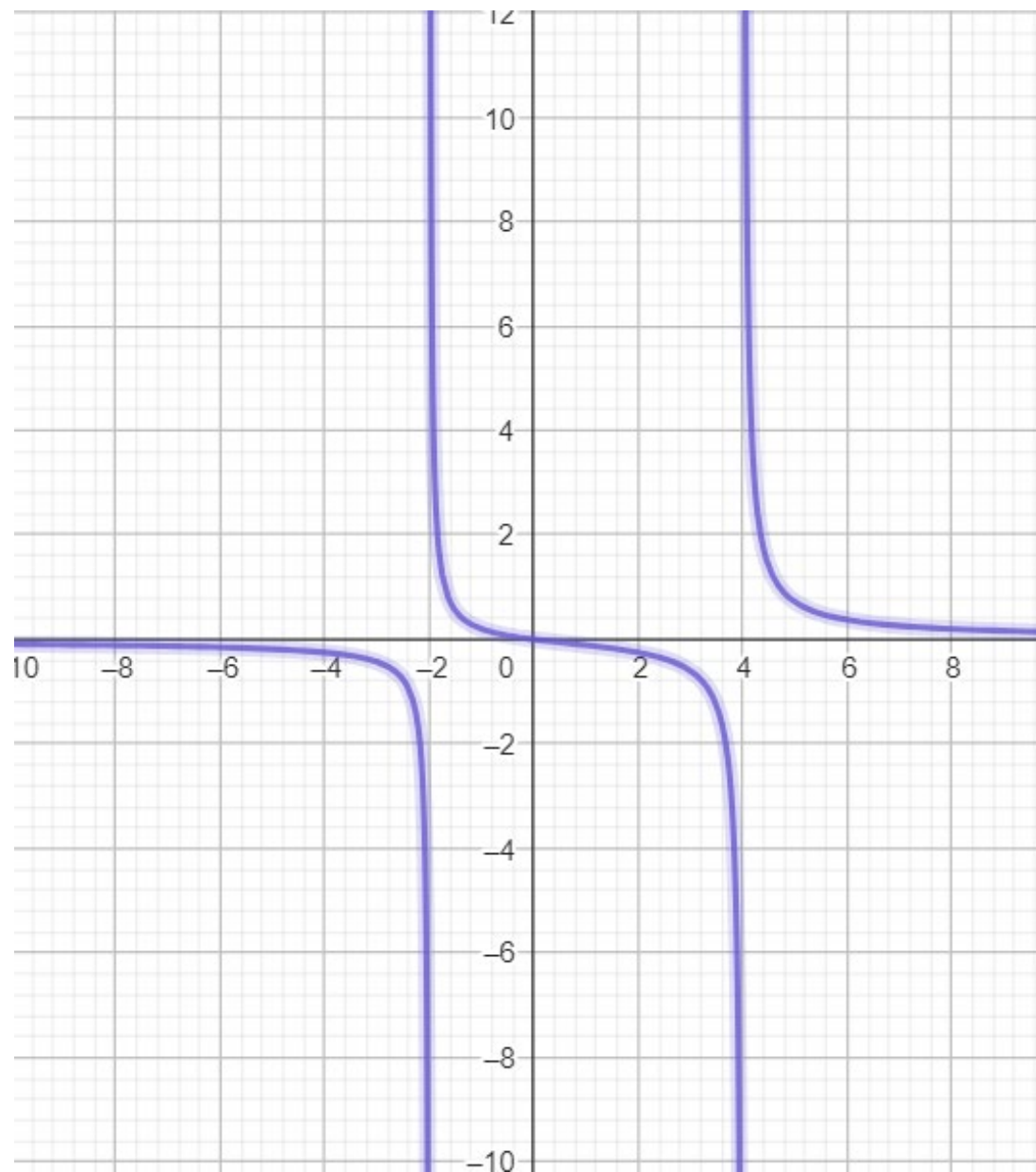
Puntos de cortes

$$X=0$$

$$y=0$$

$$Y=0 (0,0)$$

$$x=0$$



CASO 3 $GN > GD$

$$y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x - 2}$$

$$y = \frac{(x-5)(x+1)}{x-2}$$

A.V

$$X - 2 = 0$$

$$x = 2$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{2\}$$

A.H no hay , oblicuas pero no siempre

$$y = x - 2$$

Puntos de cortes

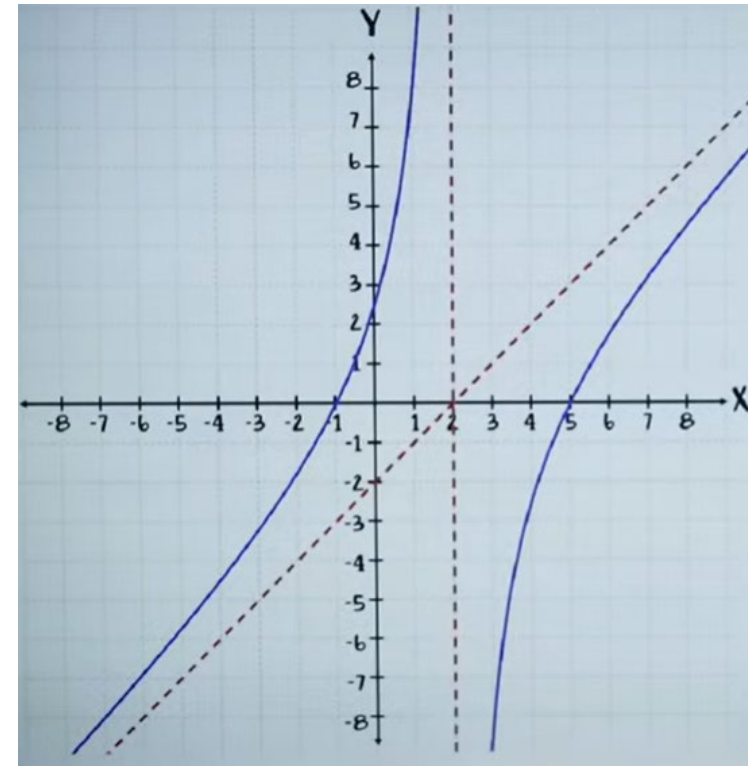
$$X=0$$

$$y=0$$

$$Y=5/2 \text{ (0;2,5)}$$

$$x=5 \text{ } x=-1$$

x	-5	1	3	7
y	-5,7	8	-8	3,2



CASO 3 $GN > GD$

$$y = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - x - 6}$$

$$y = \frac{x(x-2)(x+1)}{(x-3)(x+2)}$$

A.V

$$x + 2 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = -2$$

$$x = 3$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2; 3\}$$

A.H no hay , oblicuas pero no siempre

$$y = x$$

Puntos de cortes

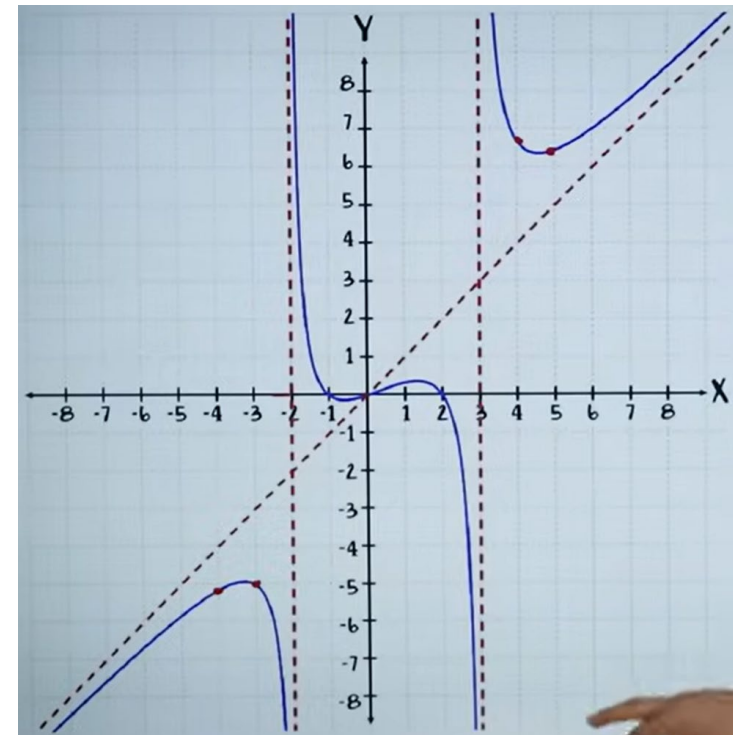
$$X=0$$

$$y=0$$

$$Y=0/-6 (0;0)$$

$$x=0 \quad x=2 \quad x=-1$$

x	-4	-3	-2	-1	0	2	3	4	5
y	-5,1	-5		0	0	0		6,6	6,4



CASO 3 $GN > GD$

$$y = \frac{2x^3 - 4x^2 - 6x}{x^2 - 2x - 3}$$

$$y = \frac{2x(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+1)}$$

$$y = 2x$$

A.V

$$x - 3 = 0 \quad x + 1 = 0$$

$$x = 3 \quad x = -1 \quad \text{Dom} = \mathbb{R} - \{-1 ; 3\}$$

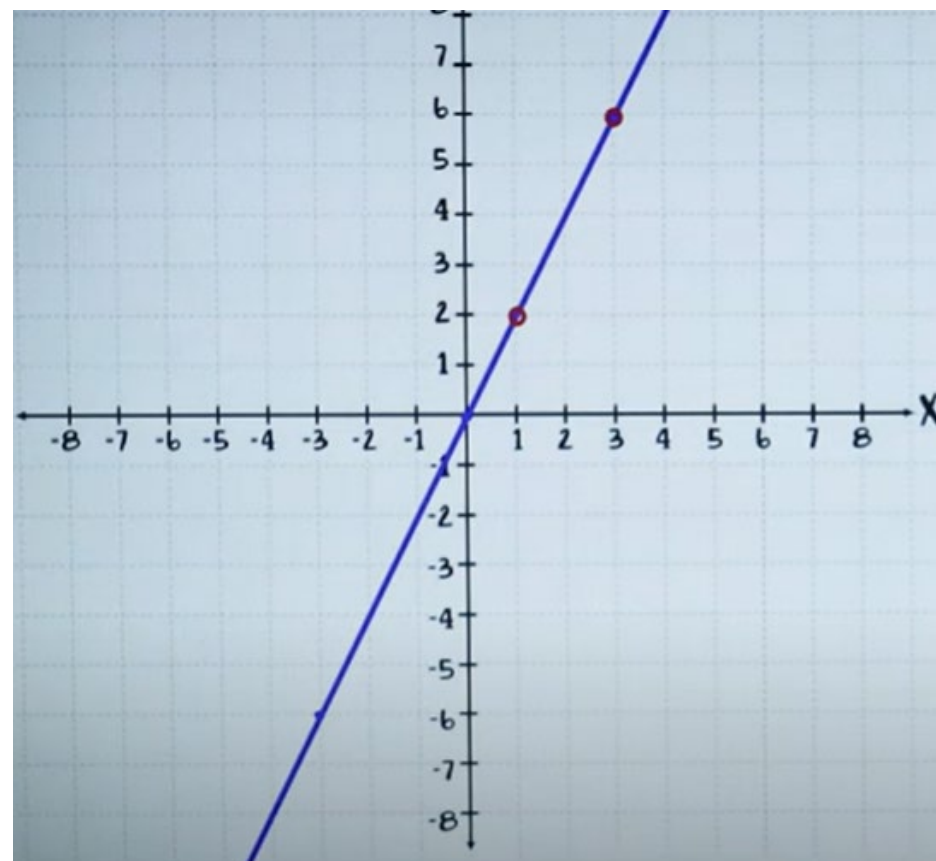
A.H no hay , oblicuas pero no siempre

$$y = 2x$$

Puntos de cortes

$$X=0 \quad y=0$$

$$Y=0/-3 (0;0) \quad x=0$$



x ::	f(x) ::	
-4	-8	
-3	-6	
-2	-4	
-1		
0	0	
1	2	
2	4	
3		
4	8	

CASO 3 $GN > GD$

$$y = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2}$$

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$y = x - 2$$

A.V

$$x + 2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

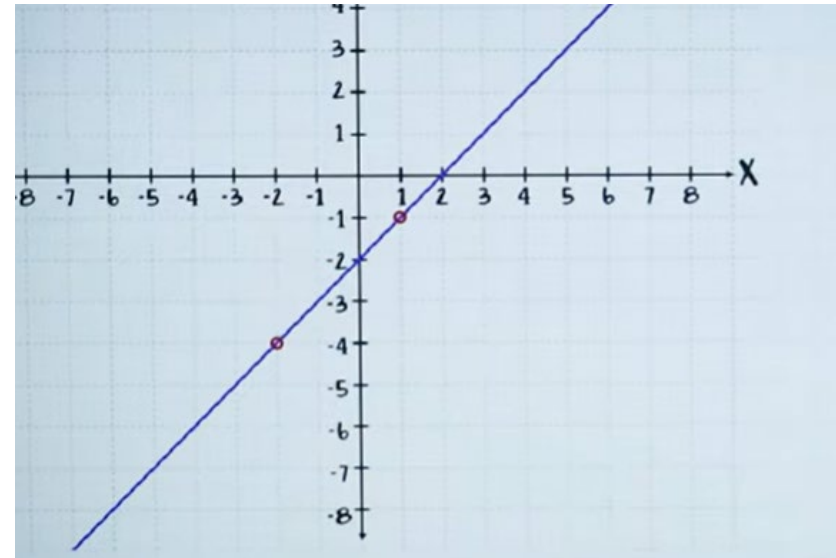
$$x = -2$$

$$x = 1$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$$

A.H no hay , oblicuas pero no siempre

$$y = x - 2$$



$$\text{Rang} = \mathbb{R} - \{-4 ; -1\}$$

FUNCIONES EXPONENCIALES

Una función exponencial es aquella función trascendente que, en su expresión más sencilla, es de la forma:

$$f(x) = a^x$$

a : Es la base de la función exponencial. Debe ser un número real mayor que 0 y distinto de 1. El valor de la base determina si la función es creciente o decreciente:

Si $a > 1$ la función es creciente

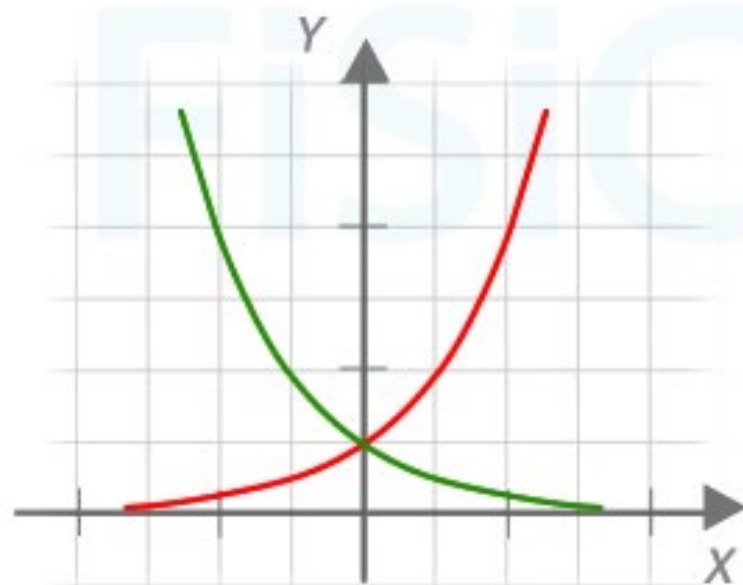
Si $0 < a < 1$ la función es decreciente

El número $e=2.71828182845...$, también denominado número de Euler, es un número irracional de gran importancia. A las funciones exponenciales con base e se las denominan exponenciales naturales:

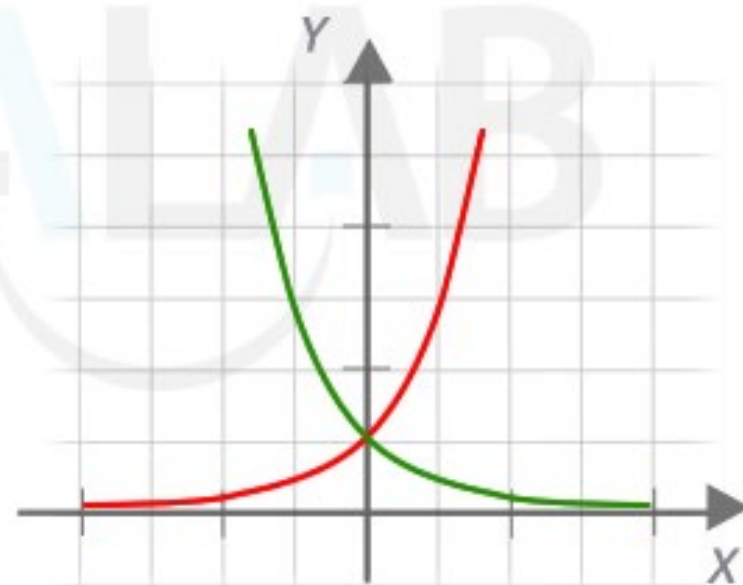
$$f(x) = e^x$$

Gráficas de funciones exponenciales

1 $f(x) = 2^x$ $g(x) = (1/2)^x$



2 $f(x) = e^x$ $g(x) = (1/e)^x$



DOMINIO Y RANGO

En matemáticas siempre podemos elevar un número real distinto de cero a cualquier otro real. De ahí que el dominio de la función exponencial tipo $f(x) = a^x$ es el conjunto de los reales:

$$\text{Dom}_f = \mathbb{R}$$

la función solo toma valores positivos, por lo tanto, el recorrido o rango de una función exponencial son todos los números reales positivos.

$$\text{Rang} = (0, \text{infinito})$$

$$\text{Im } f = (0, +\infty)$$

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES EXPONENCIALES

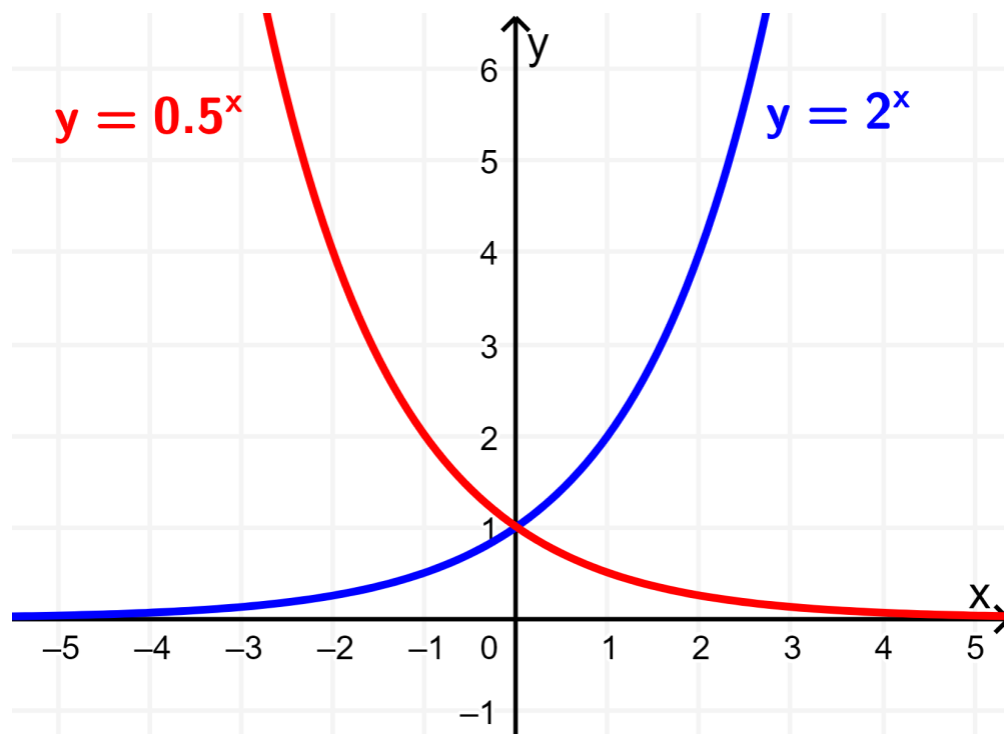
$$y = 2^x$$

$$y = -2^x$$

$$y = -2^{x+2}$$

$$y = 2^x - 3$$

SIGNO DEL EXPONENTE



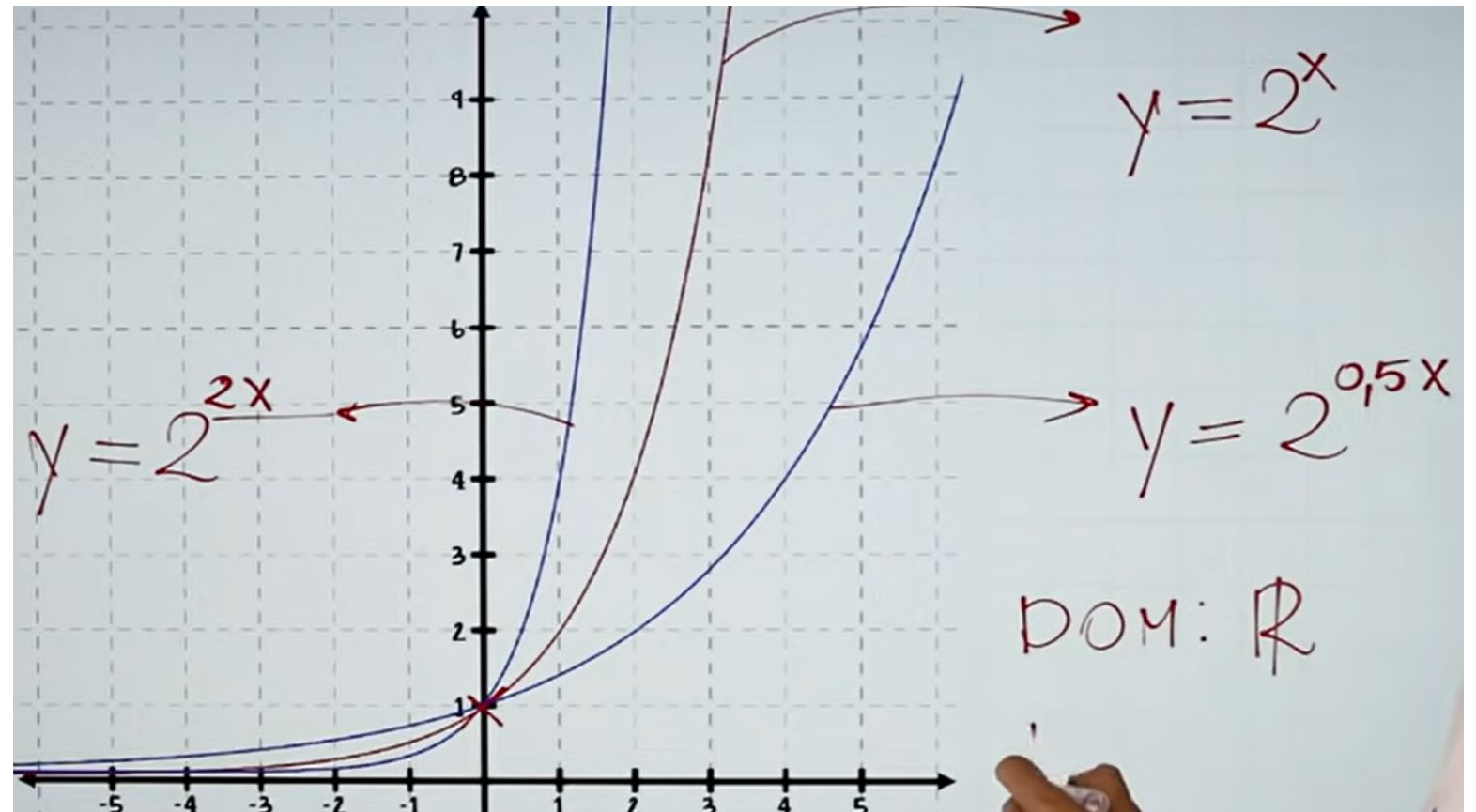
$$DOM = R$$

$$Rango = (0, \infty)$$

Multiplicar el exponente

$$\text{DOM} = \mathbb{R}$$

$$\text{Rango} = (0, \infty)$$

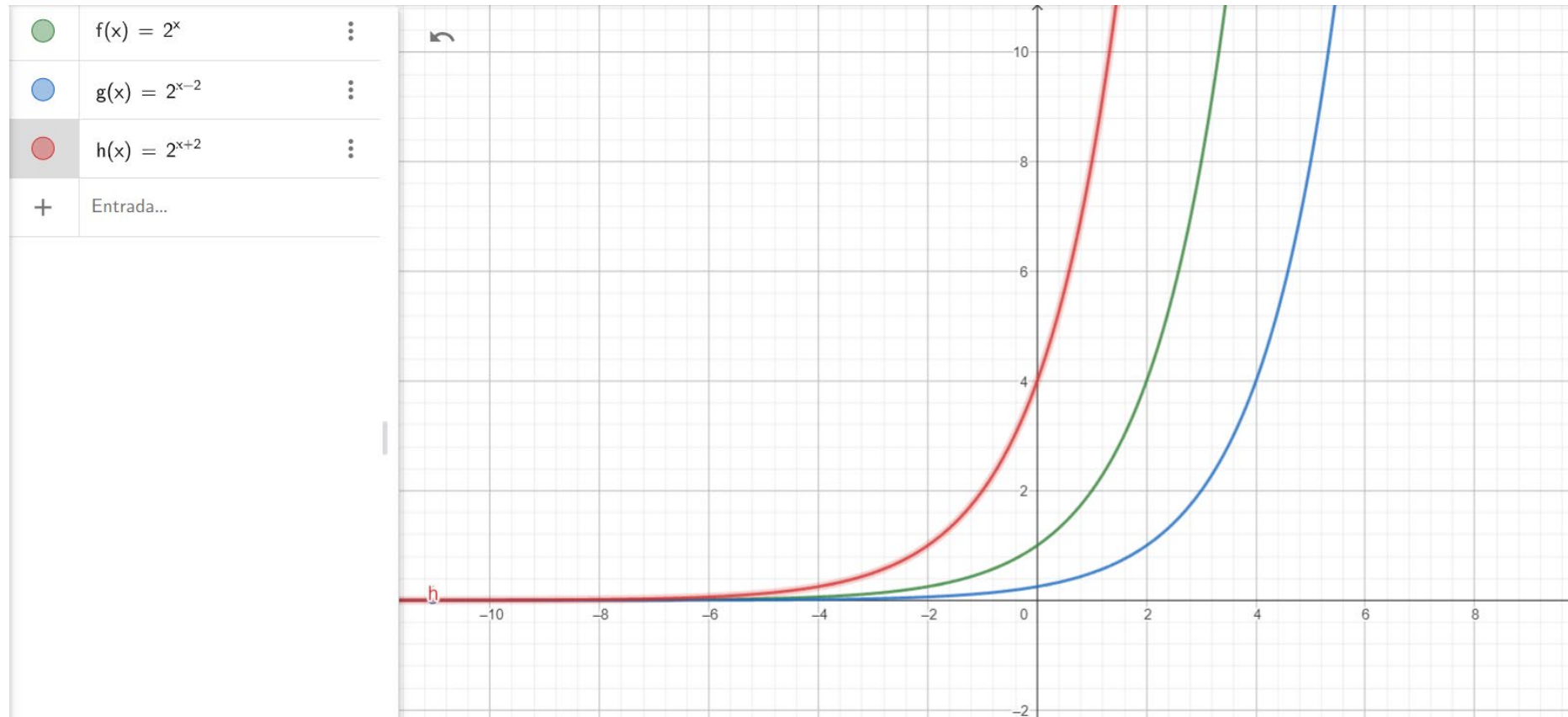


Suma o restar al
exponente

Se recorre la grafica al
contrario de lo añadido

$$DOM = R$$

$$Rango = (0, \infty)$$



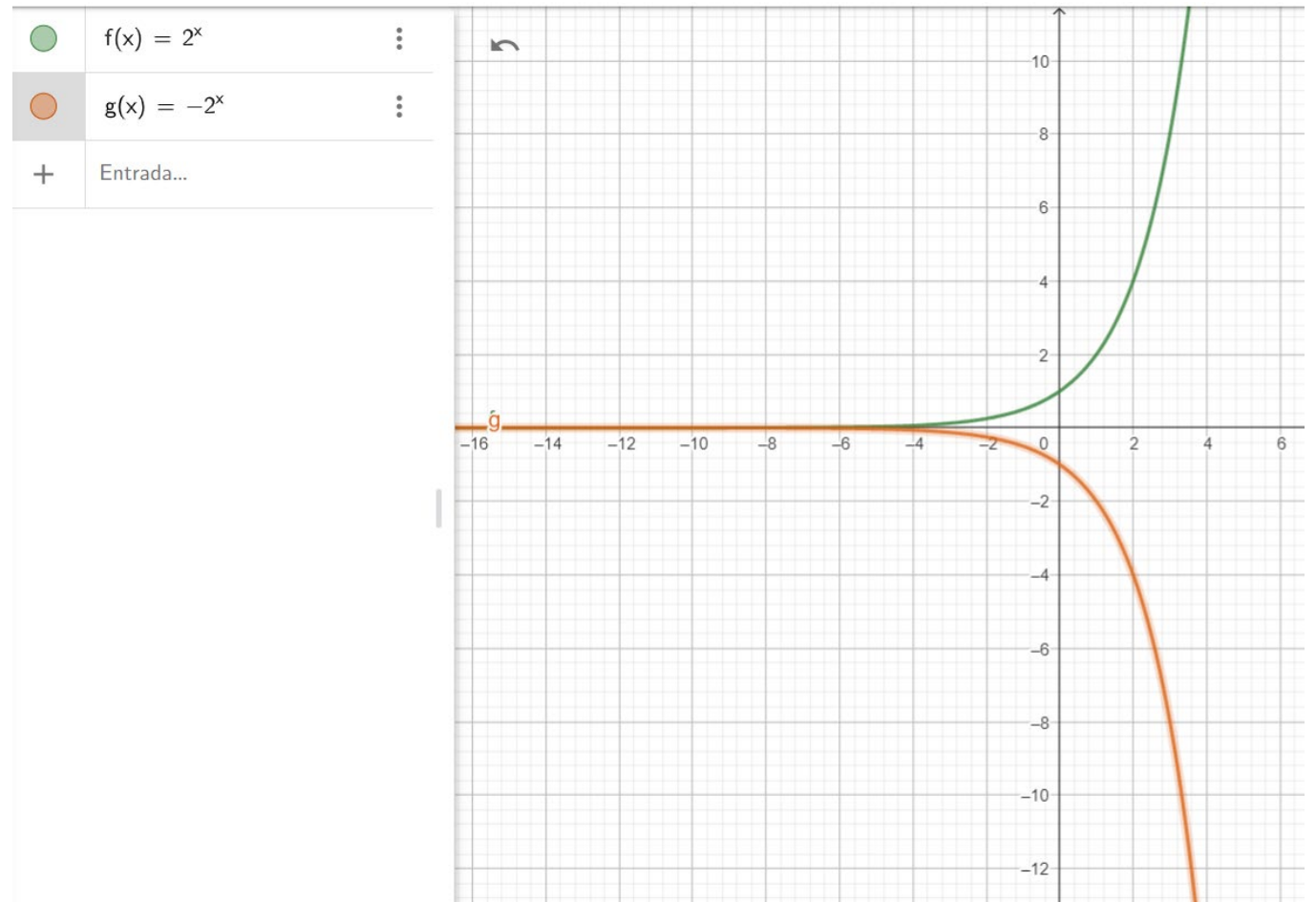
CAMBIAR SIGNO DE LA FUNCIÓN

$$y = 2^x$$

$$y = -2^x$$

$$DOM = \mathbb{R}$$

$$Rango = (-\infty, 0)$$



SUMAR O RESTAR A LA FUNCIÓN

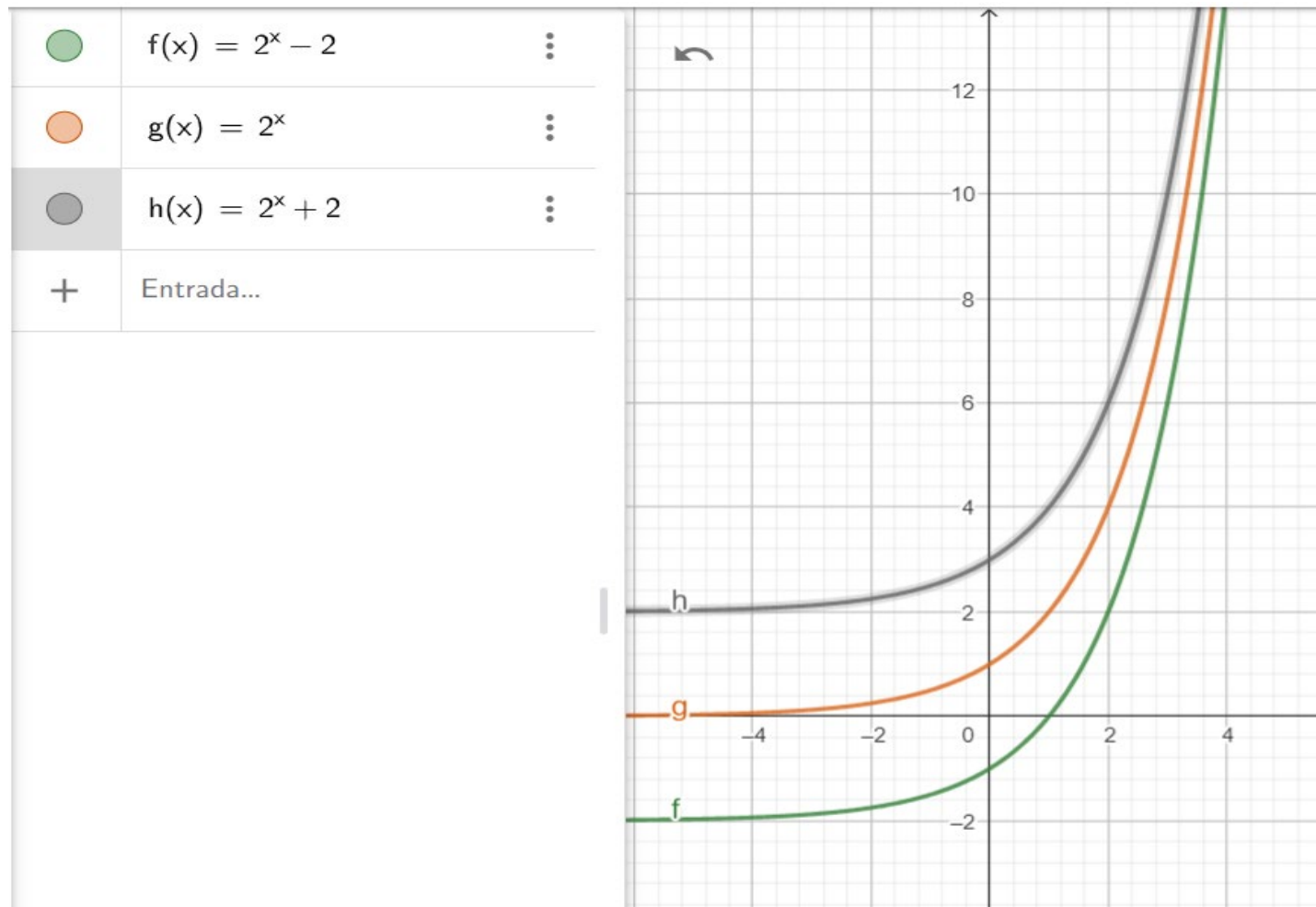
$$y = 2^x$$

$$y = 2^x + 2$$

$$\text{Rango} = (2, \text{inf})$$

$$y = 2^x - 2$$

$$\text{Rango} = (-2, \text{inf})$$



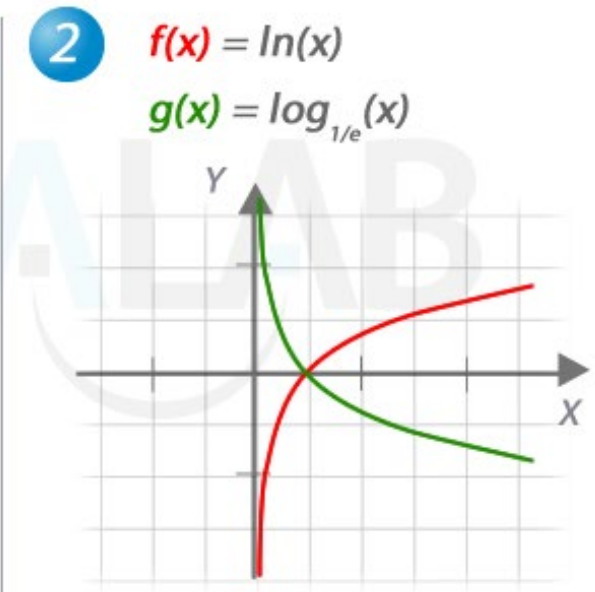
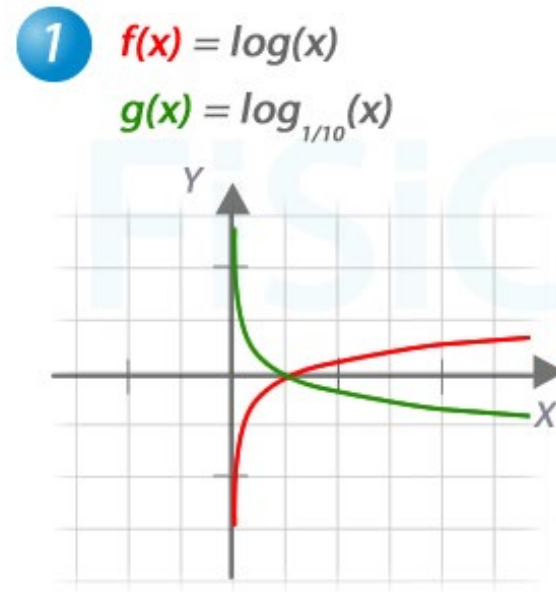
FUNCIONES LOGARITMICAS

Una función logarítmica es aquella función trascendente que, en su expresión más sencilla, es de la forma:

$$f(x) = \log_a(x)$$

- a : Es la base del logaritmo. Debe ser un número real mayor que 0 y distinto de 1. El valor de la base determina si la función es creciente o decreciente:
 - Si $a > 1$ la función es creciente
 - Si $a < 1$ la función es decreciente

Gráficas de funciones logarítmicas



$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

DOMINIO Y RANGO

Dado que es imposible obtener un número negativo elevando un número positivo (la base) a cualquier otro, no es posible hablar de logaritmos de números negativos. Por otro lado, dado que no es posible obtener 0 como resultado de elevar un número positivo (la base) a otro, tampoco podemos hablar del logaritmo de 0.

El dominio de la función logarítmica de tipo $f(x) = \log_a(x)$ es el conjunto de los reales positivos:

$$Dom = R$$

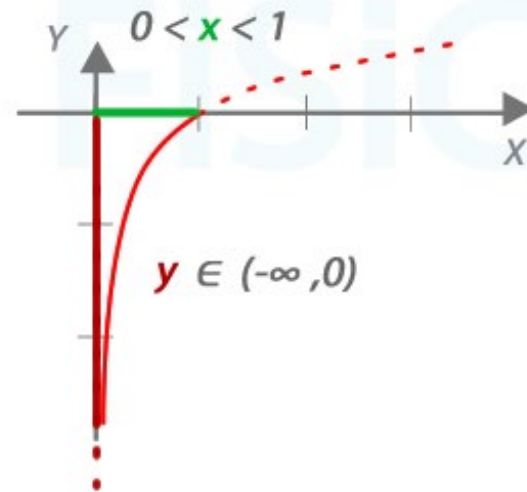
En el caso de funciones más complejas de tipo $f(x) = \log_a(g(x))$ asegúrate de hacer $g(x) > 0$. Asegúrate de sustraer del dominio de $f(x)$ también los elementos que no estén en el dominio de $g(x)$.

DOMINIO Y RANGO

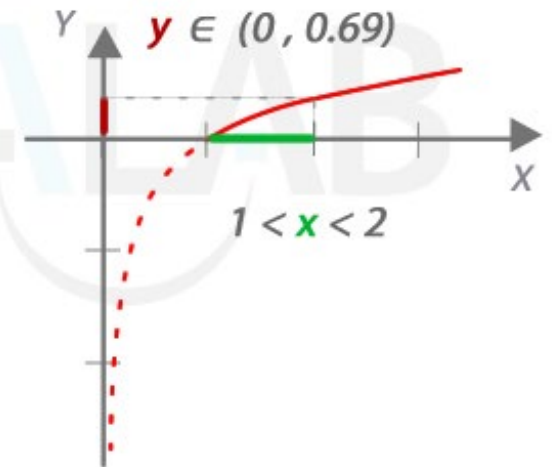
El recorrido de la función logarítmica tipo $f(x)=\log_a(x)$, es el conjunto de los reales: $Rec_f=\mathbb{R}$.

Recorrido de funciones logarítmicas

1 $f(x) = \ln(x)$



2 $f(x) = \ln(x)$



EJERCICIO

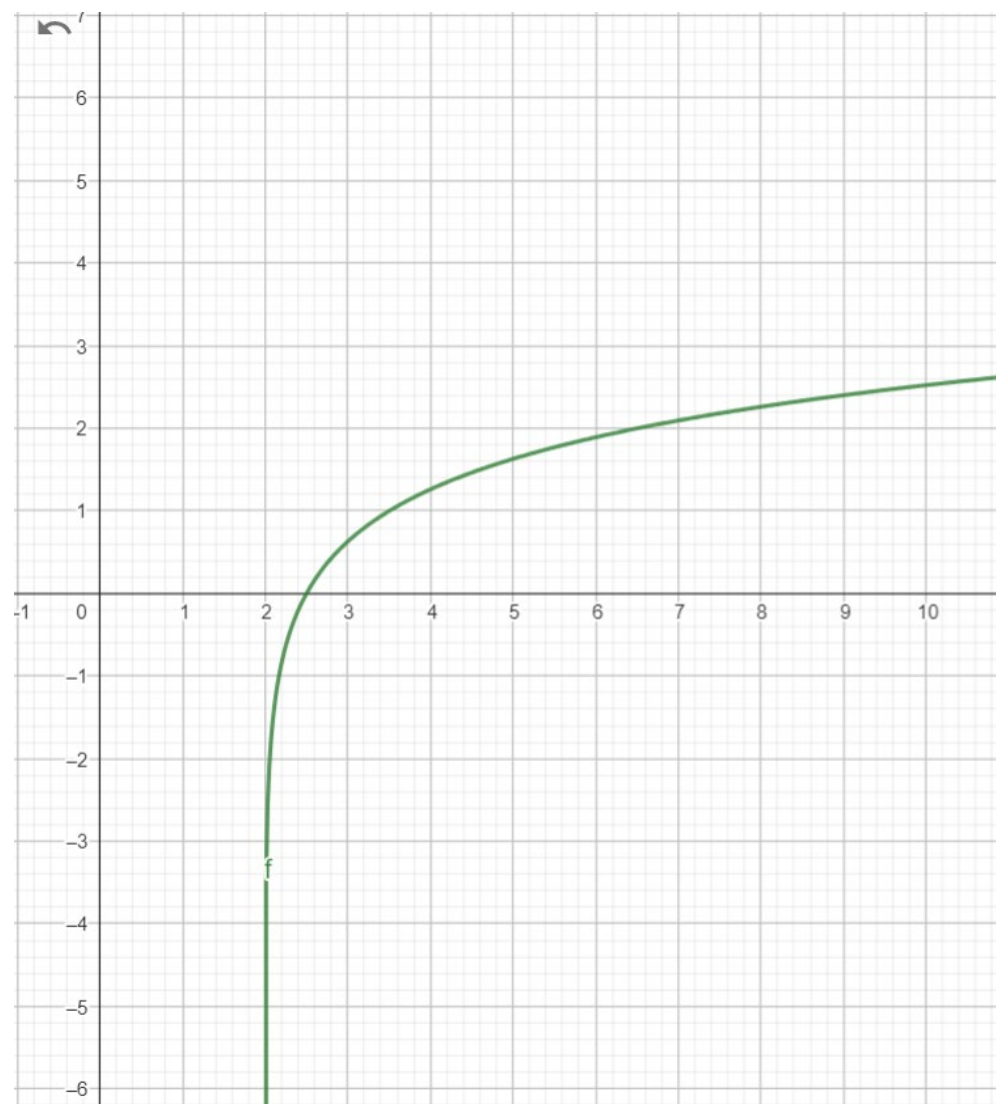
$$y = \log_3(2x - 4)$$

$$2x - 4 > 0$$

$$x > 2$$

$$\text{Dom} = (2; \infty)$$

$$\text{Rec}_f = \mathbb{R}.$$



EJERCICIO

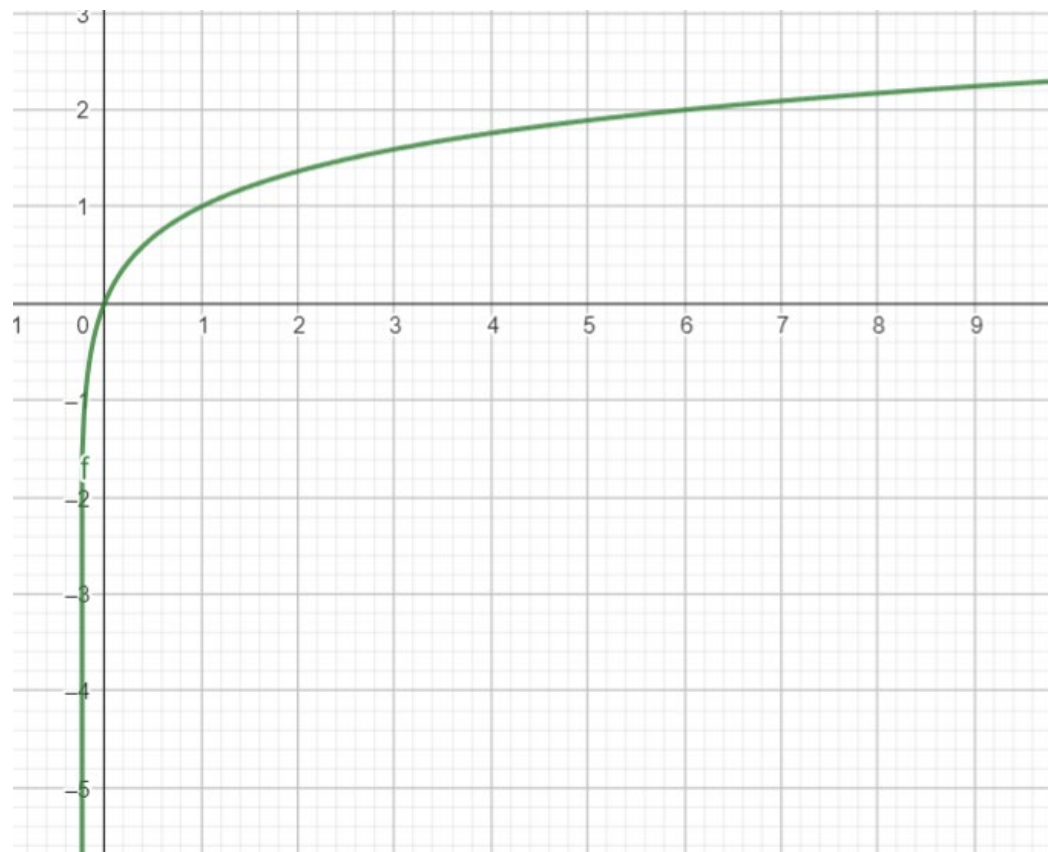
$$y = \log_5(4x + 1)$$

$$4x + 1 > 0$$

$$x > -\frac{1}{4}$$

$$\text{Dom} = (-1/4; \infty)$$

$$\text{Rec}_f = \mathbb{R}.$$



0	0
1	1
2	1.365212388...
3	1.593692641...
4	1.760374427...
5	1.891668149...

CASO 3 $GN > GD$

$$y = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 2}$$

$$y = \frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$y = x - 2$$

A.V

$$x + 2 = 0$$

$$x - 1 = 0$$

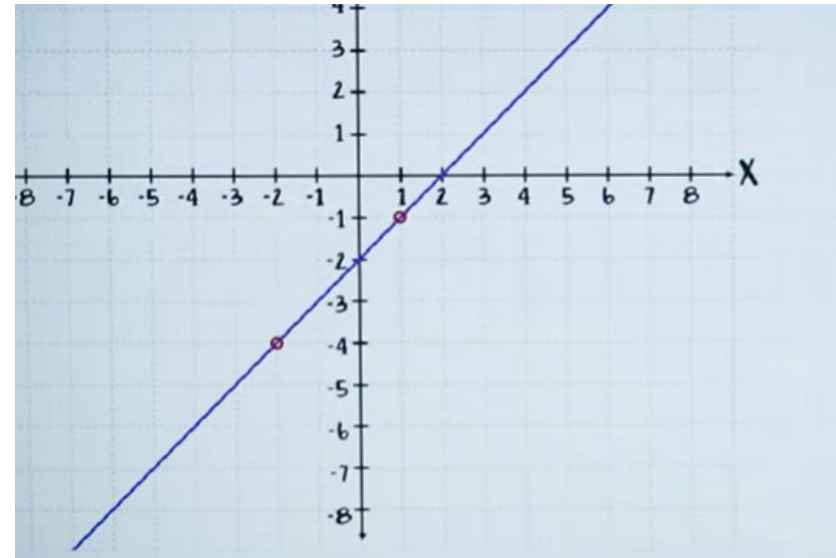
$$x = -2$$

$$x = 1$$

$$\text{Dom} = \mathbb{R} - \{-2 ; 1\}$$

A.H no hay , oblicuas pero no siempre

$$y = x - 2$$



$$\text{Rang} = \mathbb{R} - \{-4 ; -1\}$$

EJERCICIO $y = \frac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$

$$y = \frac{(x-4)(x+1)}{2x(x+2)}$$

Asíntota v

$$2x(x+2) \neq 0$$

$$x = 0 \quad x = -2$$

Asíntota h

$$y = \frac{1}{2}$$

$$\text{dom} = \mathbb{R} - \{-2, 0\}$$

$$\text{Rango} = \mathbb{R}$$

Puntos de cortes

$$x = 0$$

$$y = -4/0$$

No hay ceros en x

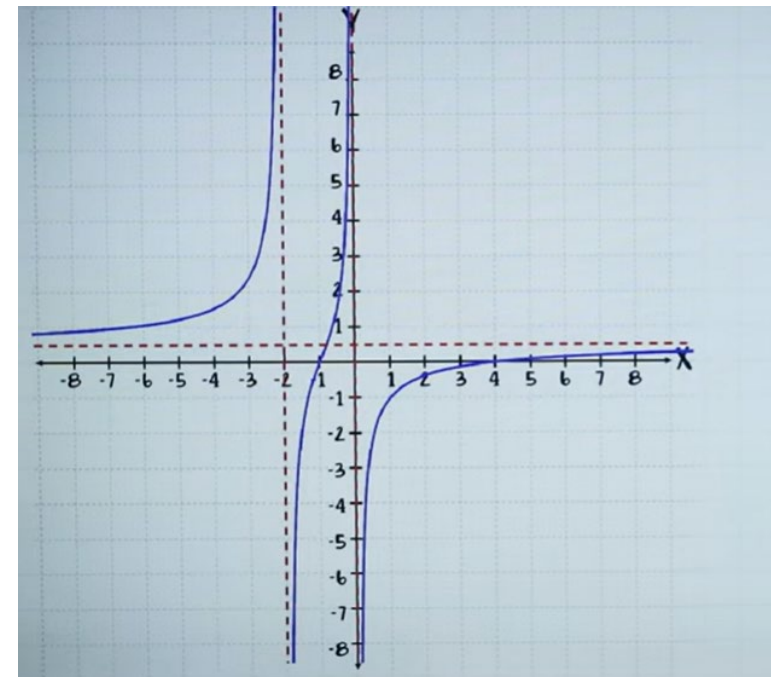
$$y = 0$$

$$x = (x-4)(x+1)$$

$$x = 4 \quad (4, 0)$$

$$x = -1 \quad (-1, 0)$$

x	4	-1	-4	-3	-0.5	-1.5	1	2	
y	0	0	1.5	2.3	1.5	-1.8	-1	-0.3	

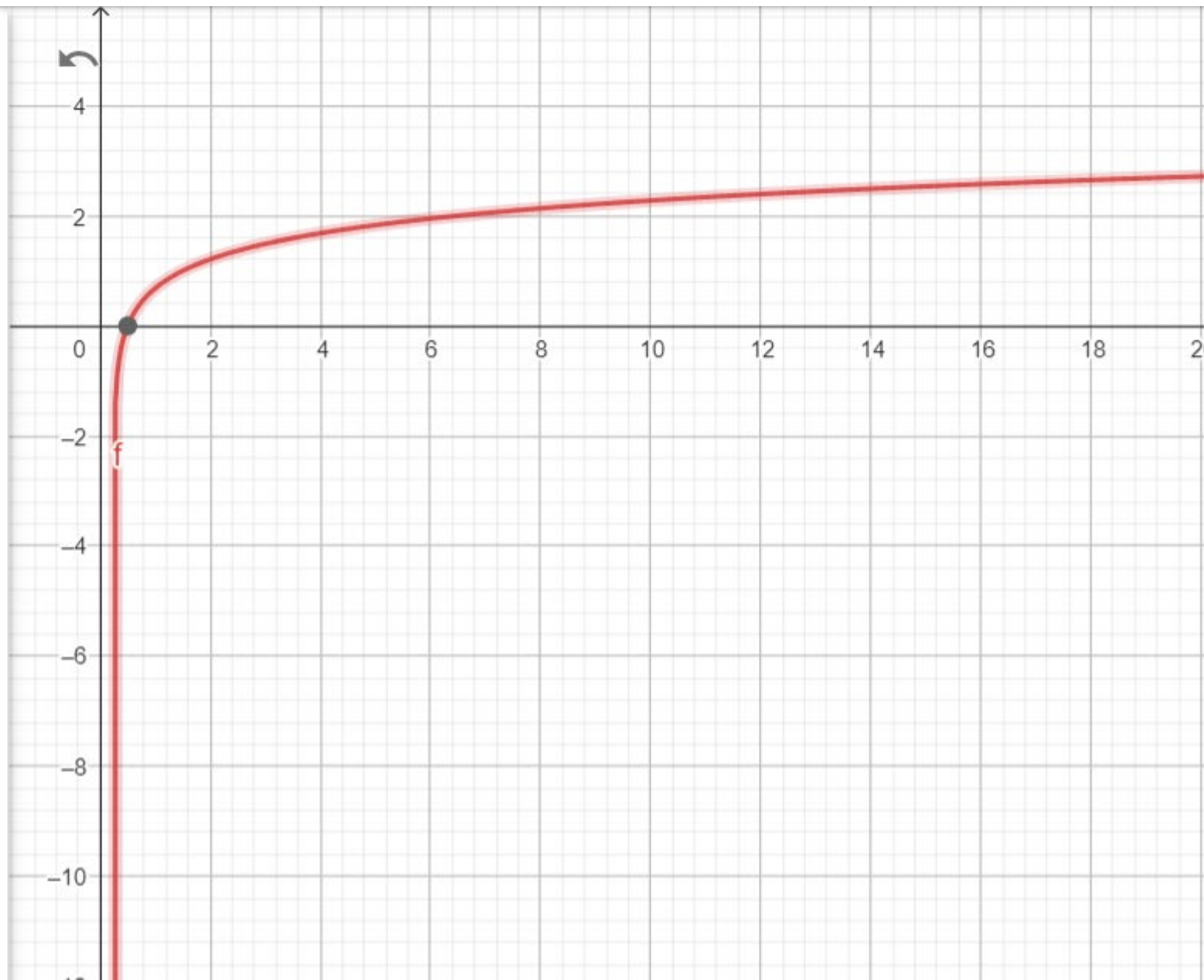


$$f(x) = \log_5(4x - 1)$$



Entrada...

$$\text{Dom} = \frac{1}{4}; \text{inf} +$$
$$\text{Rang} = \mathbb{R}$$



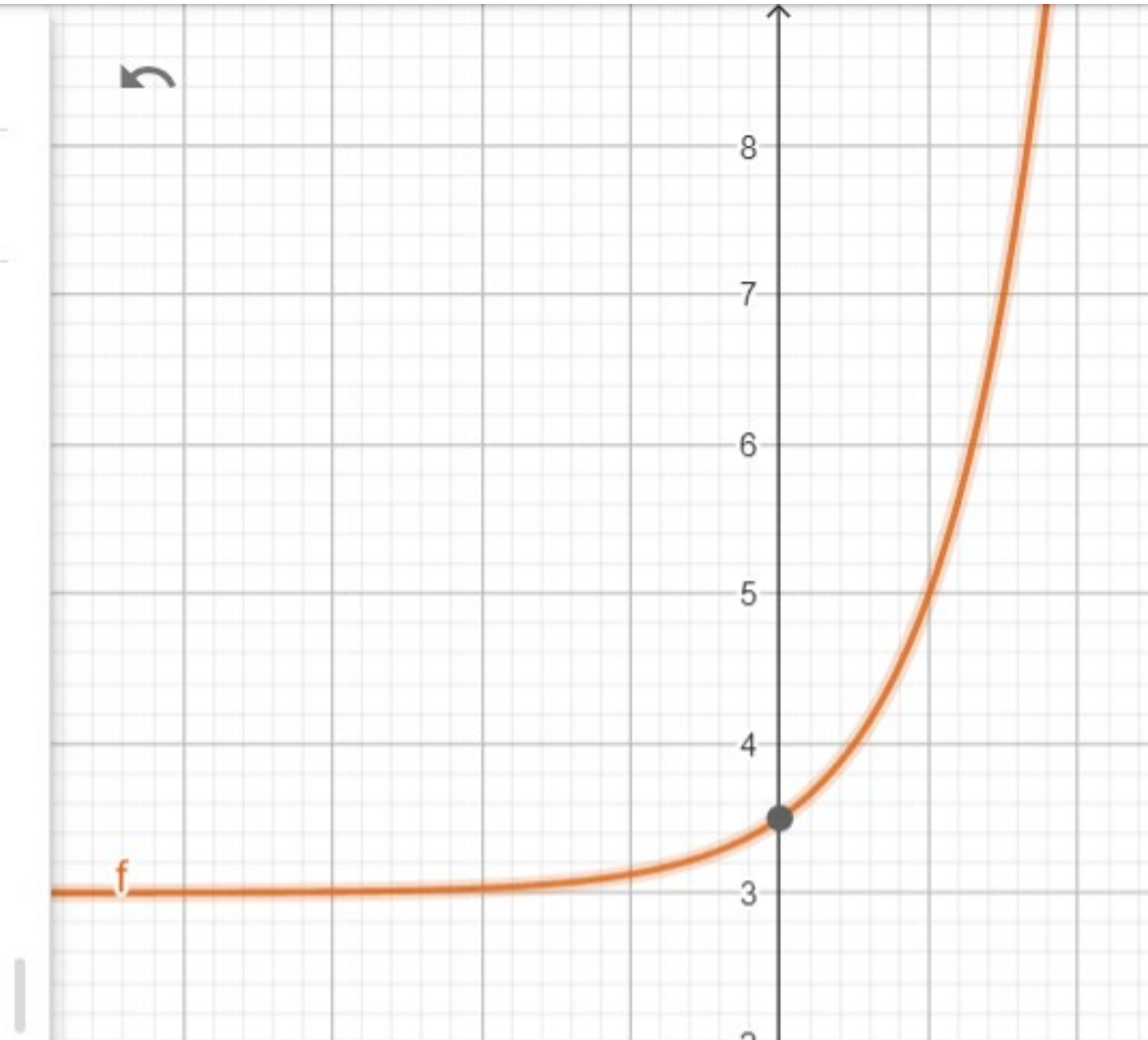
$$f(x) = 2^{2x-1} + 3$$



Entrada...

$$\text{Dom} = \mathbb{R}$$

$$\text{Rang} =]3; +\infty[$$



FUNCIÓN A TROZO

Una función definida a trozos es una función cuya definición cambia según el valor que toma la variable. También, recibe el nombre de función definida por partes, función segmentada y función seccionada, entre otros.

1 Expresión analítica

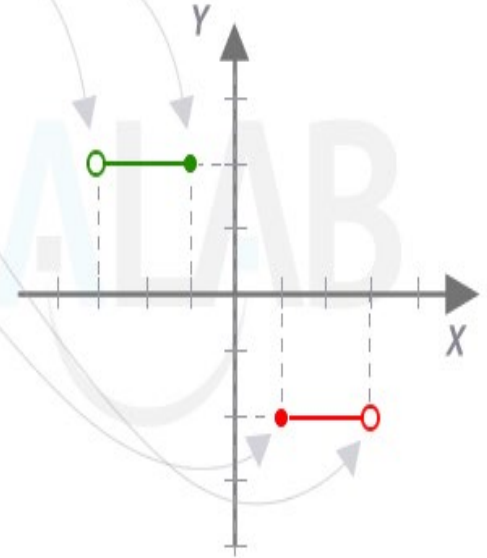
$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } -3 < x \leq -1 \\ -2 & \text{si } 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

3 Expresión gráfica

2 Tablas de valores

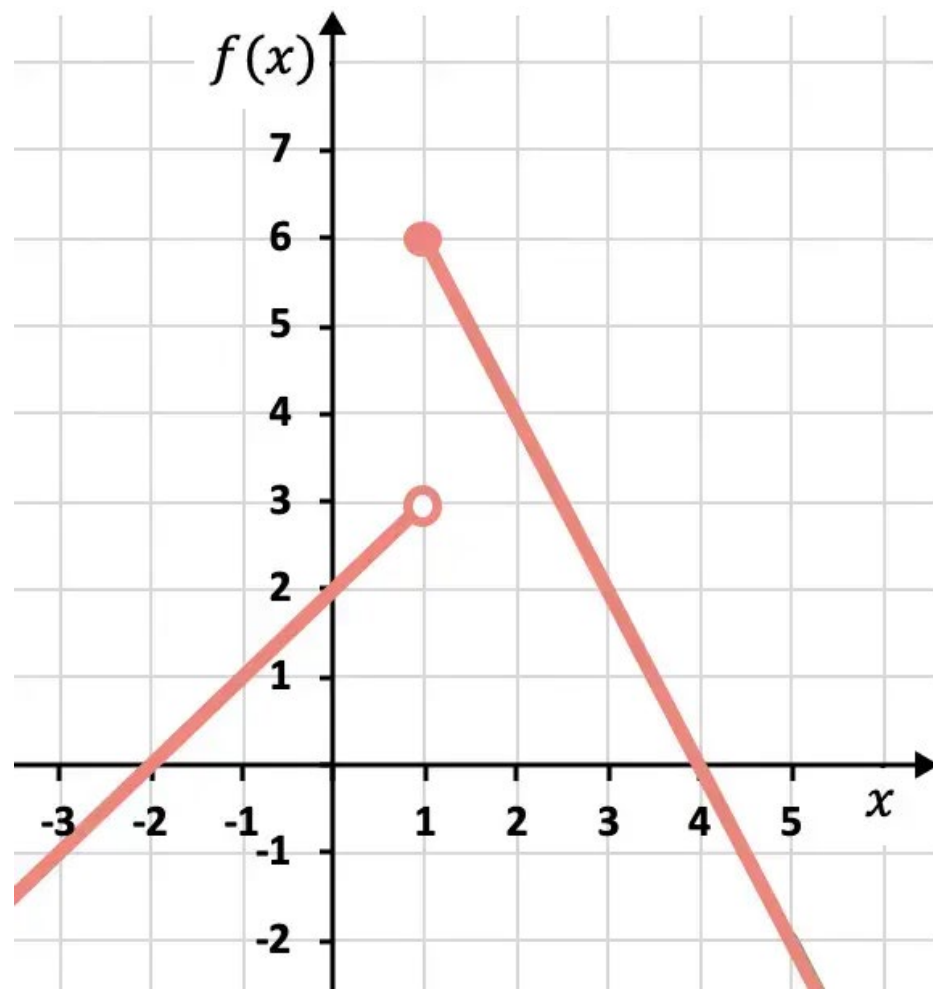
x	y
-3	2
-2	2
-1	2

x	y
1	-2
2	-2
3	-2



EJEMPLO

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 8 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



EJEMPLO

$$y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ 2 - x & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$x^2 + 2 \quad \text{si } x < 0$$

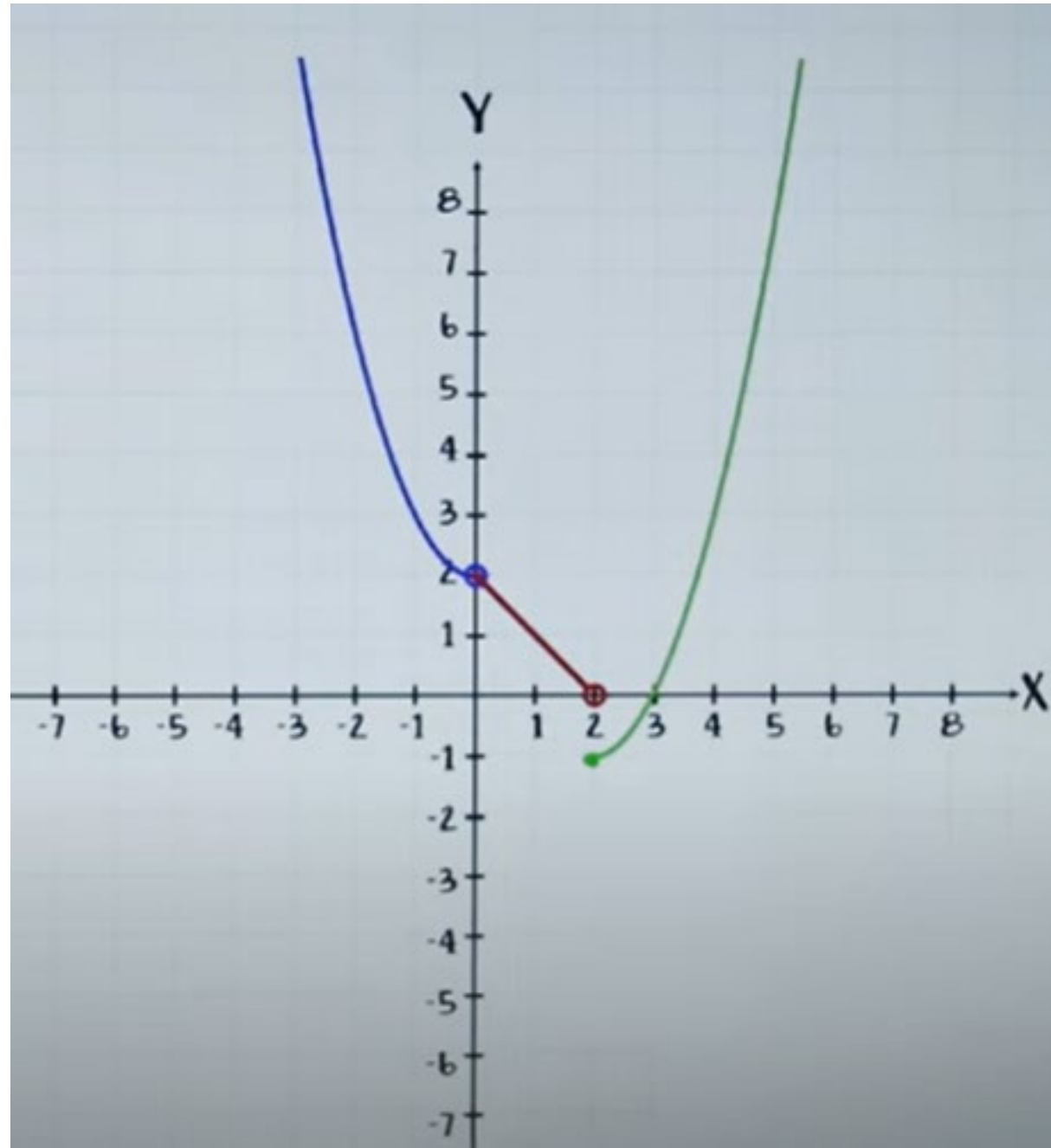
x	-2	-1	0
$f(x)$	6	3	2

$$2 - x \quad \text{si } 0 \leq x < 2$$

x	0	1	2
$f(x)$	2	1	0

$$x^2 - 4x + 3 \quad \text{si } x \geq 2$$

x	2	3	4
$f(x)$	-1	0	3



$$y = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} - 2x & \text{si } x < -2 \\ x + 5 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ 5 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\ominus \frac{x^2}{2} - 2x \quad \text{si } x < -2$$

x	-4	-3	-2
$f(x)$	0	$\frac{3}{2}$	2

$$x + 5 \quad \text{si } -2 \leq x < 1$$

x	-2	0	1
$f(x)$	3	5	6

$$5 \quad \text{si } (x \geq 1)$$

x	1	2	3
$f(x)$	5	5	5