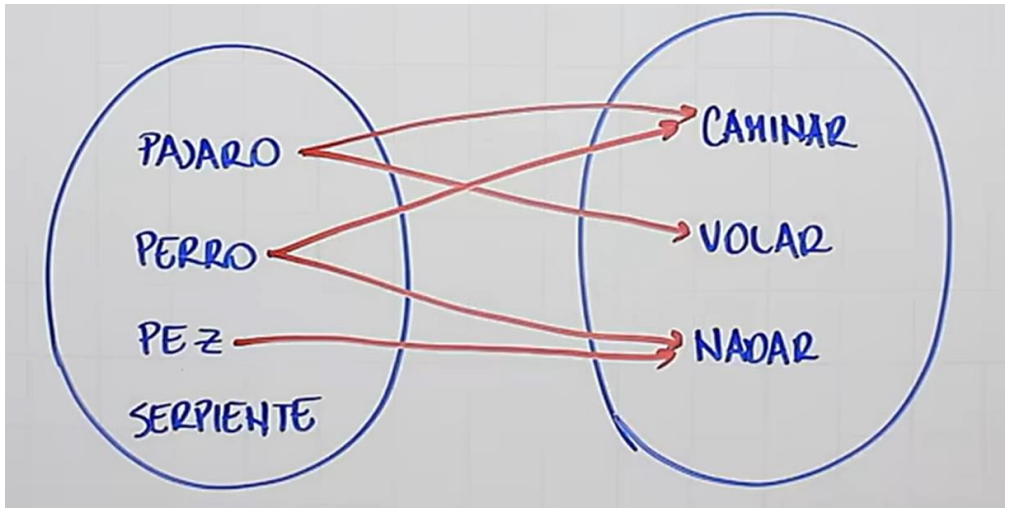
UNIDAD N° 3
FUNCIONES

FUNCIONES

RELACIÓN

Esta dada por la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que forman parejas ordenadas, la formación de una expresión que une a dos o más objetos entre si establece una relación



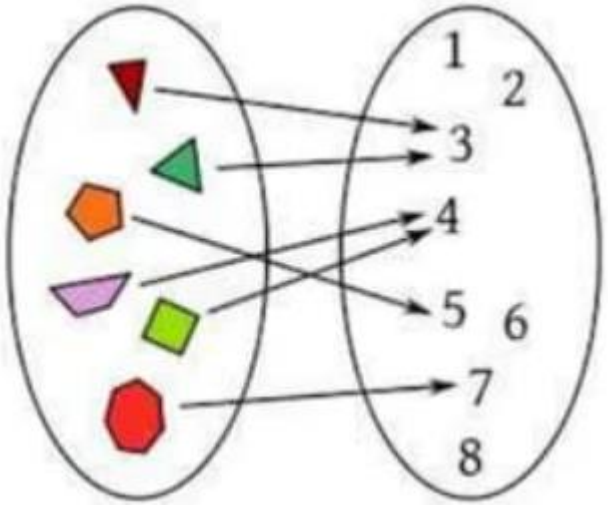
FUNCIÓN

DEFINICION

Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.

Es una relación establecida entre dos conjuntos A y B que asigna a cada valor del conjunto A (Variable Independiente) un **UNICO** valor del segundo conjunto B (Variable dependiente).

En la imagen se muestra una función entre un conjunto de polígonos y un conjunto de números. A cada polígono le corresponde su número de lados.



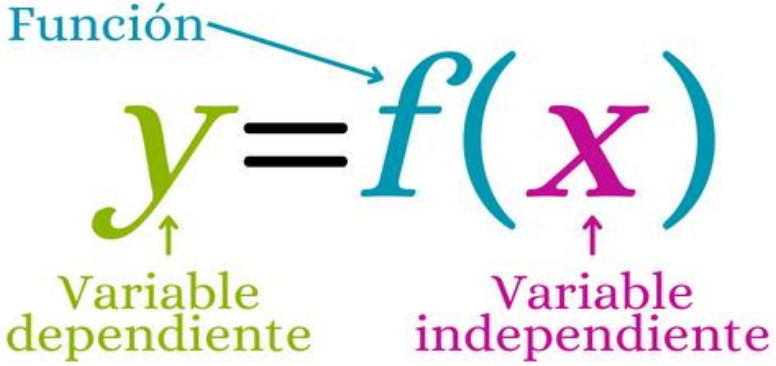
TIPOS DE VARIABLES

VARIABLE INDEPENDIENTE

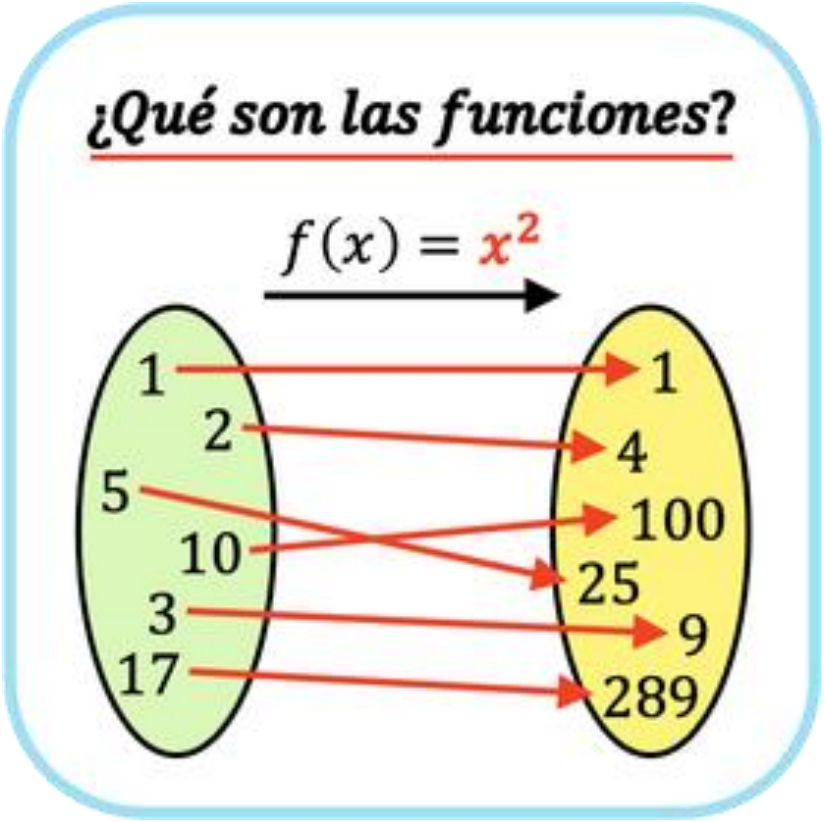
Es la que no depende de ninguna otra variable, generalmente es la letra "x" y en el plano cartesiano corresponde al eje de las abscisas.

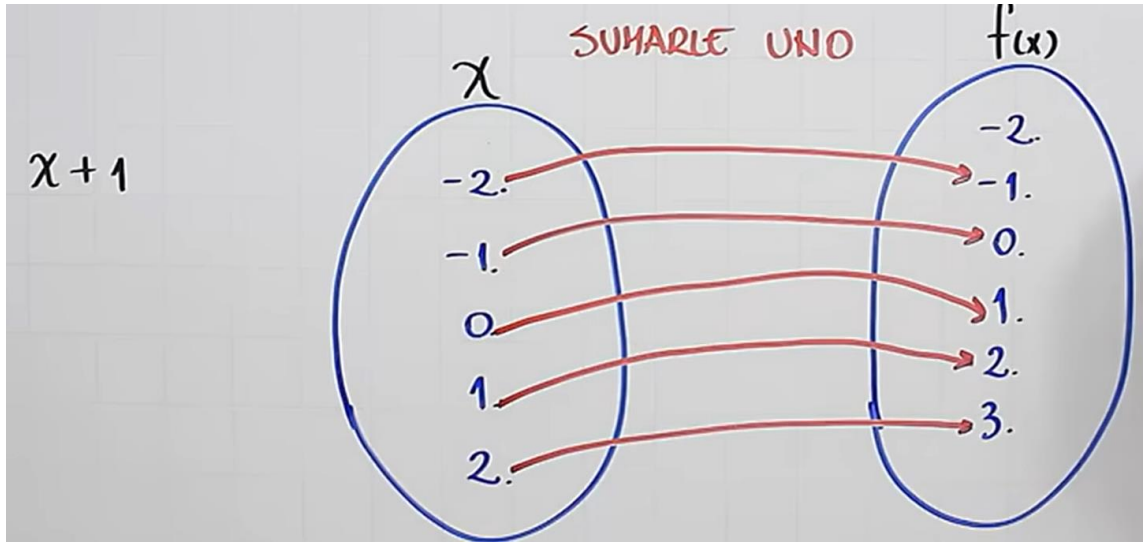
VARIABLE DEPENDIENTE

Es la que depende del valor que toma la otra variable como, por ejemplo: f(x) = x donde f(x) es la variable dependiente dado que está sujeta a valores que toma "x" y en el plano cartesiano corresponde al eje de las ordenadas.

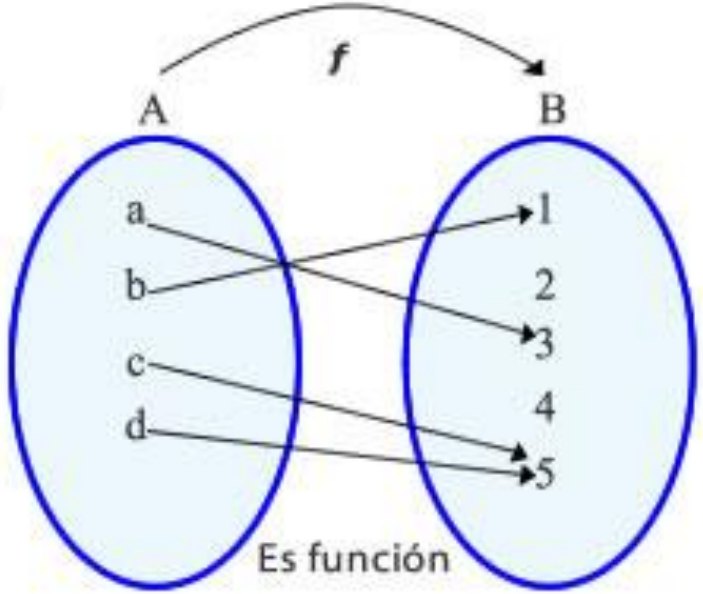


En matemáticas, escribimos una función como f(x) o y = f(x) para mostrar que está relacionada con un número al que llamamos x. Podemos utilizar otra letra para representar este número. Si usamos la letra m la función se escribiría como f(m) o si usamos la letra p, la función se escribiría como f(p).



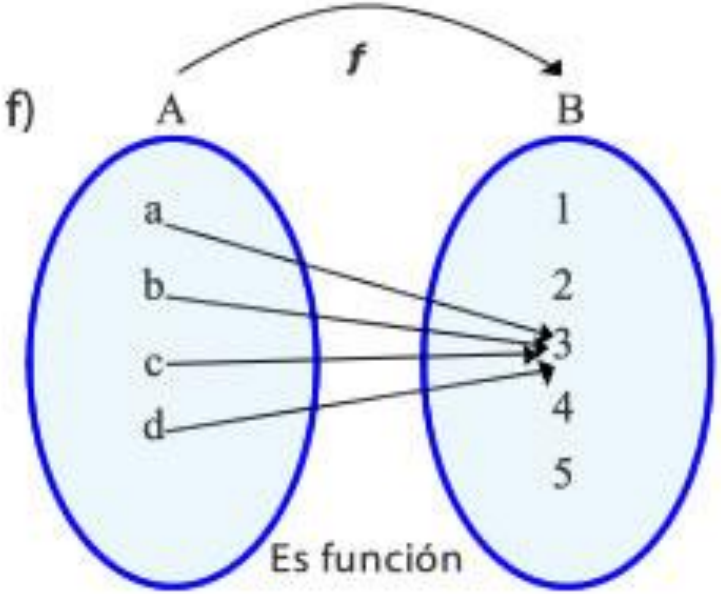


d)



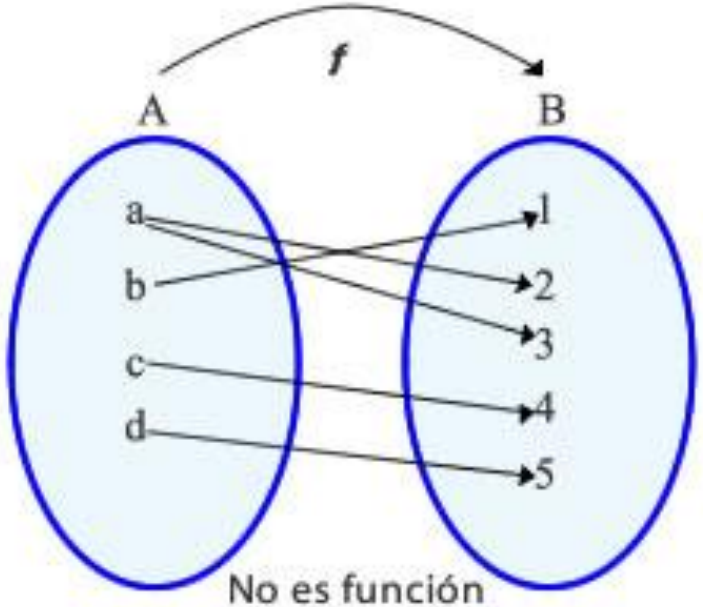
Es función

f)



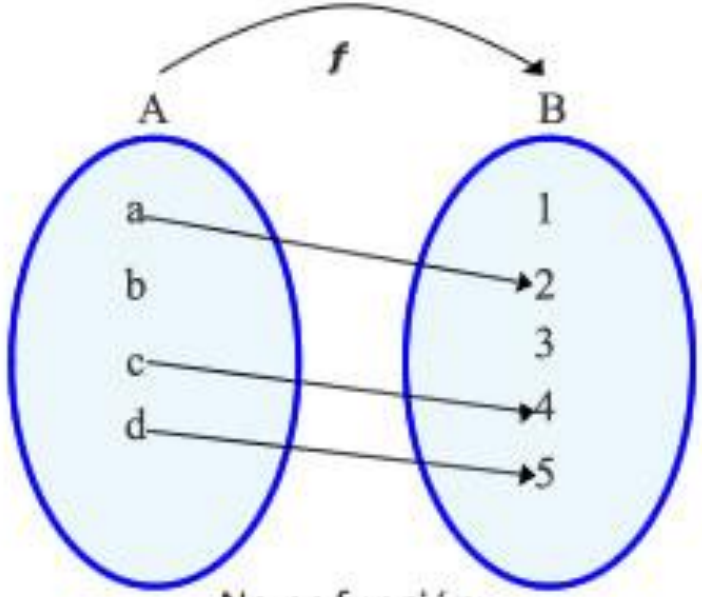
Es función

e)



No es función

g)



No es función

Determinar cuales de los siguientes conjuntos representan una función sí:

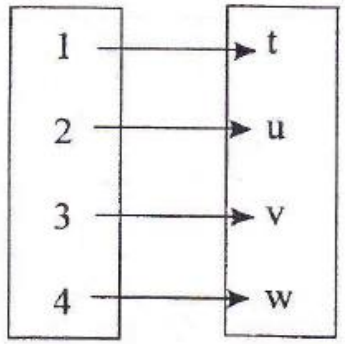
$$A = \{1, 2, 3, 4\} \quad y \quad B = \{t, u, v, w\}$$

a) $f_1 = \{(1,t), (2,u), (3,v), (4,w)\}$
b) $f_2 = \{(1,t), (2,t), (3,t), (4,t)\}$
c) $f_3 = \{(1,u), (2,v), (4,w)\}$
d) $f_4 = \{(1,v), (2,t), (3,w), (4,u)\}$
e) $f_5 = \{(1,1), (2,t), (3,v), (4,w)\}$

GRAFICAR Y DAR SOLUCIÓN
5 PRIMERAS PERSONAS

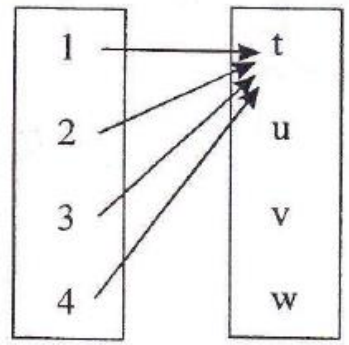
Solución:

a)



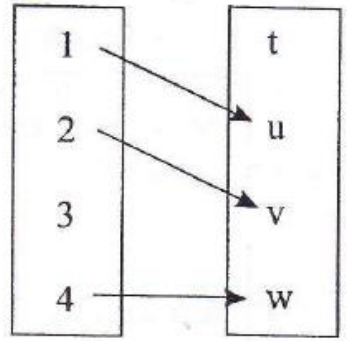
Función

b)



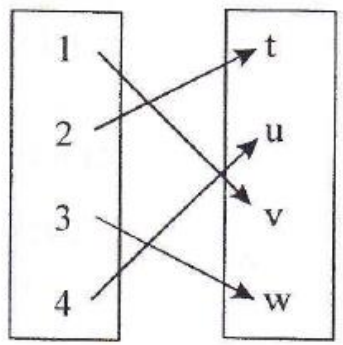
Función

c)



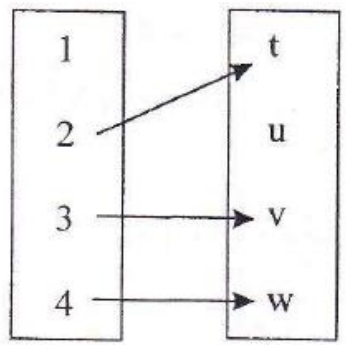
Relación

d)



Función

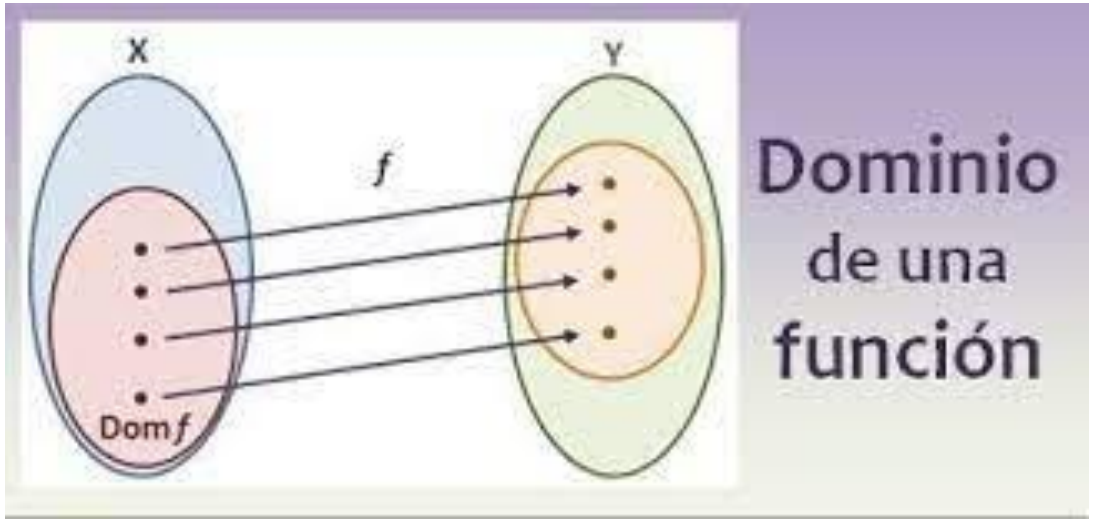
e)



Relación

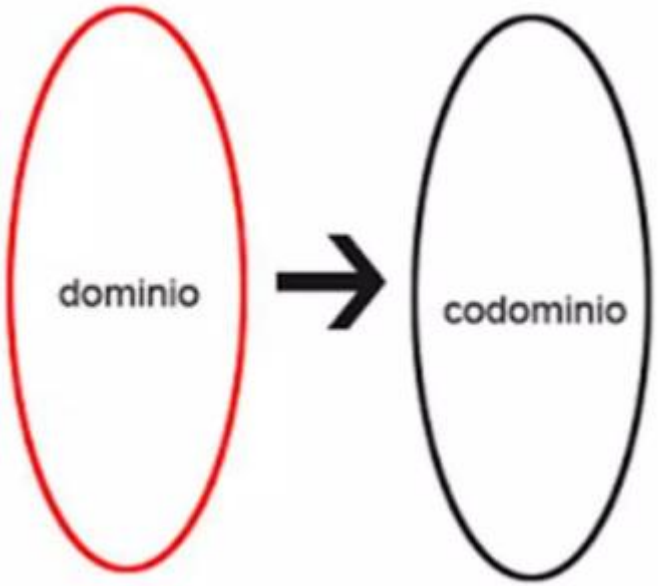
DOMINIO DE UNA FUNCION

El dominio de una función es el conjunto de todos los posibles valores de entrada puede tomar la variable independiente “X”. En otras palabras, es el conjunto de todos los valores x para los que f(x) tiene un valor real.



CODOMINIO DE UNA FUNCION

El codominio de una función es el conjunto de todos los valores posibles que pueden salir de la función. Es decir que corresponde a la gama de valores que toma dicha función.

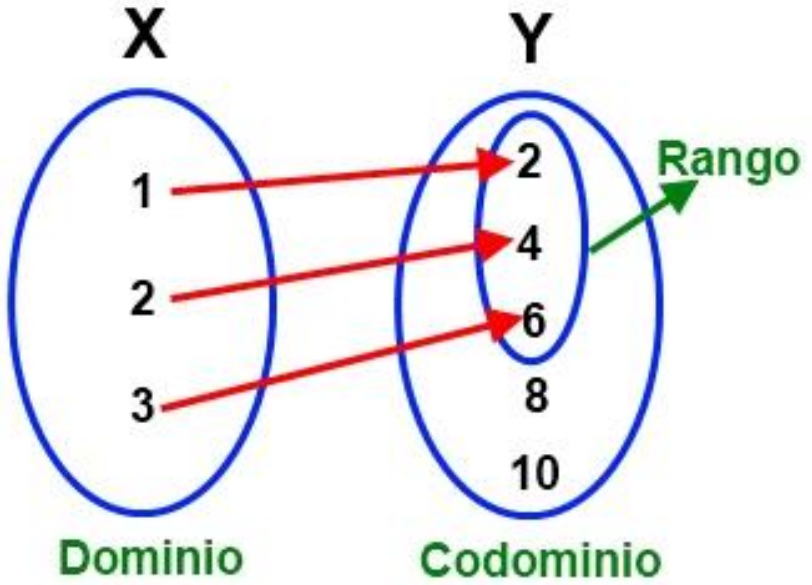


RANGO

El rango (o imagen) de una función es el conjunto de todos los valores que realmente se obtienen al aplicar la función a todos los elementos del dominio. Es un subconjunto del codominio. El rango siempre es un subconjunto del codominio, pero no necesariamente igual al codominio. El codominio es parte de la definición de la función y es más amplio, mientras que el rango es el resultado de la función aplicada a todos los elementos del dominio.

EN RESUMEN

El dominio es el conjunto de valores de entrada, el rango (o imagen) es el conjunto de valores de salida de una función y el codominio es el conjunto que contiene al rango.



PROCEDIMIENTO GENERAL PARA ENCONTRAR EL DOMINIO:

1. Identifica la función y cualquier operación que afecte la definición de la función (división, raíces, logaritmos, etc.).
2. Encuentra las restricciones impuestas por estas operaciones:
•Para fracciones: El denominador no puede ser cero.
•Para raíces cuadradas: La expresión dentro de la raíz debe ser no negativa.
•Para logaritmos: El argumento del logaritmo debe ser positivo.
•Para funciones trigonométricas: Identifica las posiciones donde la función no está definida.
3. Escribe el dominio en notación de conjunto o en intervalos.

COMO SACAR EL DOMINIO

Para determinar el dominio de una función, debes identificar todos los valores de entrada (x) para los cuales la función está definida.

1. Funciones Polinomiales

Para funciones polinomiales como $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 5$, el dominio son todos los números reales R, ya que los polinomios están definidos para todos los valores de x.

2. Funciones Racionales

Para funciones racionales, es decir, cocientes de polinomios como $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, debes asegurarte de que el denominador no sea cero.

Ejemplo: $f(x) = \frac{1}{x-3}$

Encuentra dónde el denominador es cero: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

Dominio: Todos los números reales excepto $3 \quad (R \setminus \{3\})$

COMO SACAR EL DOMINIO

3. Funciones con Raíces

Para funciones que involucran raíces, como $f(x) = \sqrt{g(x)}$, debes asegurarte de que la expresión dentro de la raíz sea no negativa (para raíces pares).

Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x-2}$

Encuentra dónde $x - 2 \geq 0 : \ x \geq 2$

Dominio: $[2, \infty)$

4. Funciones Logarítmicas

Para funciones logarítmicas como $f(x) = \log_b(g(x))$,el argumento del logaritmo debe ser positivo.

Ejemplo: $f(x) = \log(x-1)$

Encuentra dónde $x - 1 > 0 : \ x > 1.$

Dominio: $(1, \infty)$

COMO SACAR EL DOMINIO

5. Funciones Trigonométricas

Para funciones trigonométricas como $f(x) = \tan(x)$,debes considerar los valores donde la función no está definida.

Ejemplo: $f(x) = \tan(x)$

La tangente no está definida en $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, donde k es un entero.

Dominio: Todos los números reales excepto $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

EJEMPLOS DE DOMINIO

$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-4}$

Para encontrar el dominio de esta función, debemos asegurarnos de que el denominador no sea cero.

1. Denominador: $x^2 - 4=0$
2. Factoriza el denominador: $(x-2)(x+2) = 0$
3. Encuentra los valores de x que hacen que el denominador sea cero: $x = 2\ y\ x = -2$
4. El dominio es todos los números reales excepto $x = 2\ y\ x = -2$

Dominio: $R\backslash\{-2,2\}$ o en intervalos: $(-\infty,-2)U(-2,2)U(2,\infty)$

EJEMPLOS DE DOMINIO

Ejemplo 2: Función con Raíz Cuadrada

$f(x) = \sqrt{5 - 2x}$

Para encontrar el dominio de esta función, debemos asegurarnos de que la expresión dentro de la raíz sea no negativa.

1. Expresión dentro de la raíz: $5 - 2x \geq 0$
2. Resuelve la desigualdad: $5 \geq 2x \Rightarrow \frac{5}{2} \geq x$
3. El dominio es todos los números reales menores o iguales a $5/2$

Dominio: $(-\infty, \frac{5}{2}]$

EJEMPLOS DE DOMINIO

Ejemplo 3: Función Logarítmica

$f(x) = \log(x^2 - 1)$

Para encontrar el dominio de esta función, debemos asegurarnos de que el argumento del logaritmo sea positivo.

1. Argumento del logaritmo: $x^2 - 1 > 0$
2. Factoriza la expresión: $(x - 1)(x + 1) > 0$
3. Encuentra los intervalos donde el producto es positivo. Esto ocurre cuando ambos factores son positivos o ambos son negativos:

- $x - 1 > 0 \; y \; x + 1 > 0 \;\Rightarrow\; x > 1$
- $x - 1 < 0 \; y \; x + 1 < 0 \;\Rightarrow\; x < -1$

El dominio $es\ x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

COMO CALCULAR EL RANGO

Calcular el rango (o imagen) de una función implica determinar el conjunto de todos los valores de salida posibles cuando se aplican todos los valores del dominio a la función.

Para calcular el rango de una función:

1. **Identifica el Dominio:** Asegúrate de conocer los valores de entrada permitidos.
2. **Resuelve la Ecuación:** Si es posible, resuelve $y = f(x)$ para x en términos de y y determina los valores de y válidos.
3. **Analiza la Gráfica:** Usa la gráfica para observar los valores de salida posibles.
4. **Usa Derivadas:** Si conoces cálculo, utiliza derivadas para encontrar máximos y mínimos.
5. **Conoce Funciones Básicas:** Familiarízate con los rangos de funciones comunes y sus transformaciones.

Ejemplo 1: Función Racional

$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Dominio:

Para encontrar el dominio de f(x), debemos identificar los valores de x que hacen que el denominador sea cero, ya que la función no está definida en esos puntos.

1. **Denominador**: $x-2=0$
2. Encuentra el valor que hace que el denominador sea cero: $x=2$
3. El dominio es todos los números reales excepto $x=2$.

Dominio: $R\backslash\{2\}$ o en intervalos: $(-\infty,2)U(2,\infty)$

Rango:

Para encontrar el rango, consideramos los valores posibles de y en la ecuación $y = \frac{x+1}{x-2}$

Resolver $y = \frac{x+1}{x-2}$ para x

$y(x-2) = x+1$

$yx - 2y = x + 1$

$yx - x = 2y + 1$

$x(y-1) = 2y + 1$

$x = \frac{2y+1}{y-1}$

El valor de y puede ser cualquier número real excepto 1, porque si $y=1$, el denominador de $x = \frac{2y+1}{y-1}$ sería cero, lo cual no está permitido.

Rango: $R\backslash\{1\}$ o en intervalos: $(-\infty,1)U(1,\infty)$

Ejemplo 2: Función Racional

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

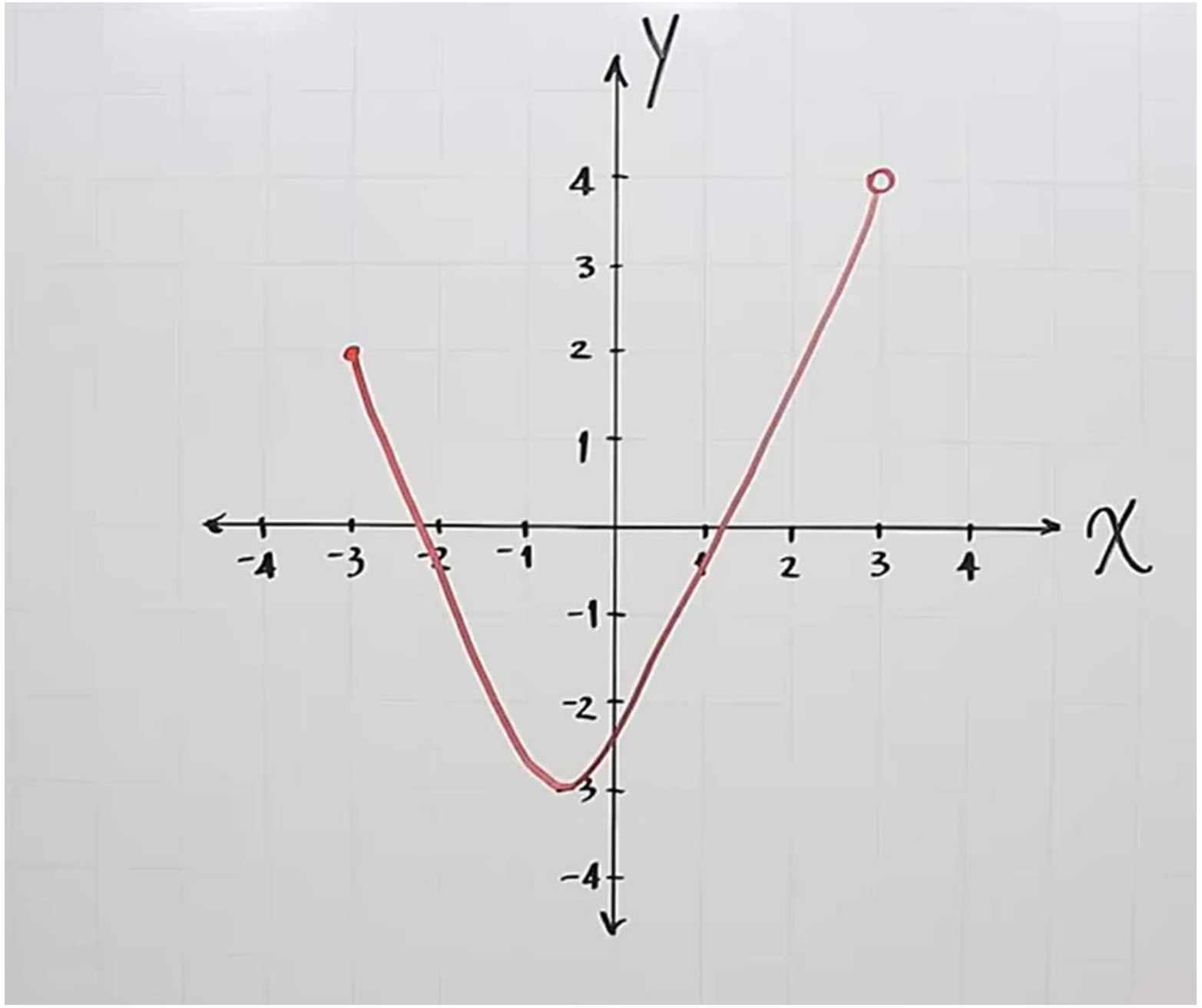
Resolver $y = f(x)$

- $y = \frac{1}{x+1}$
- $y(x+1) = 1$
- $x = \frac{1}{y} - 1$

Restricciones:

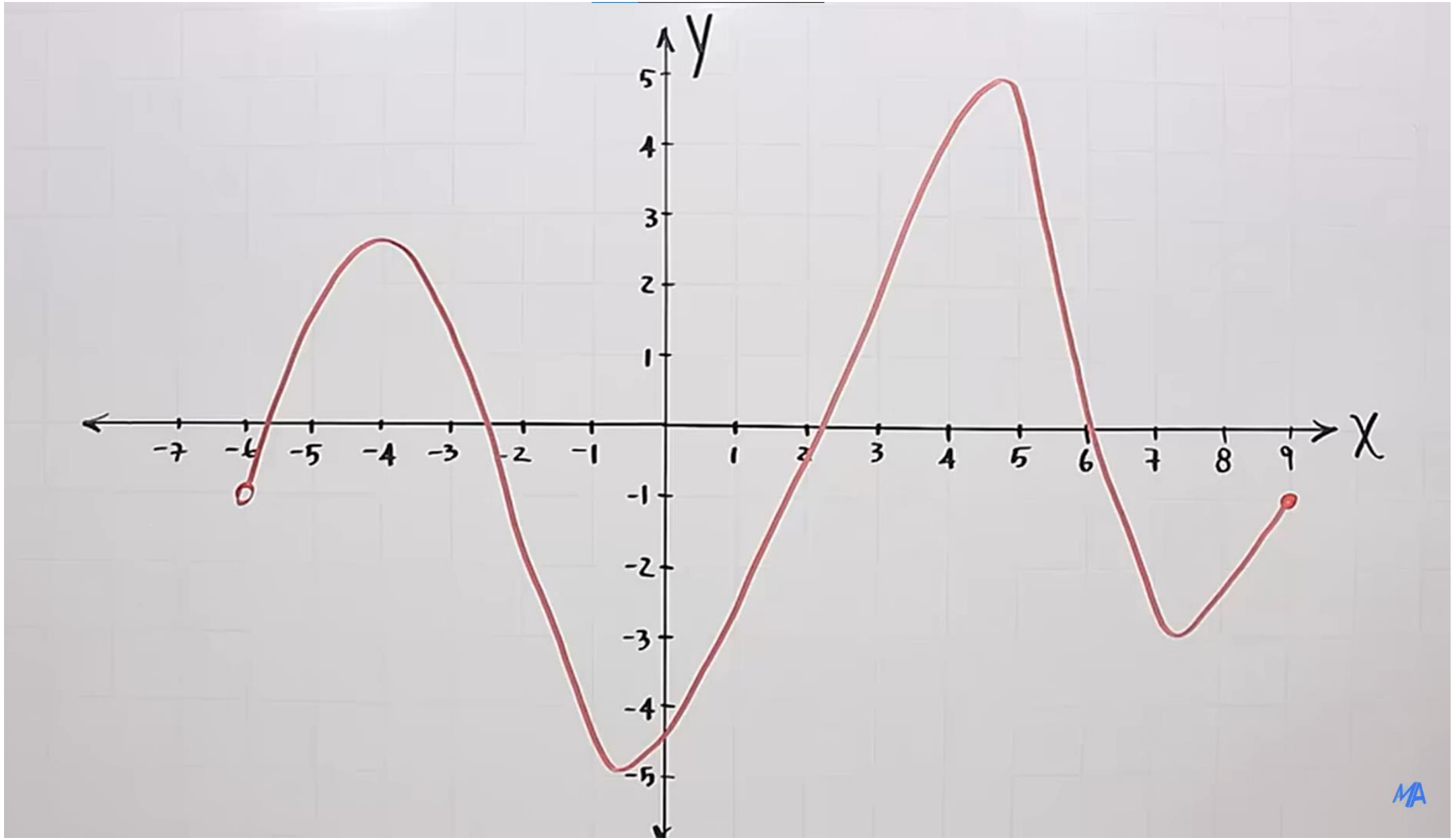
- X es real cuando y≠0.
- El dominio $x \neq -1$ no afecta el rango ya que cualquier $y \neq 0$ es alcanzable.

Rango: $R \setminus \{0\}\ o\ (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$



Dom [-3 ; 3)

Rango [3 ; 4)

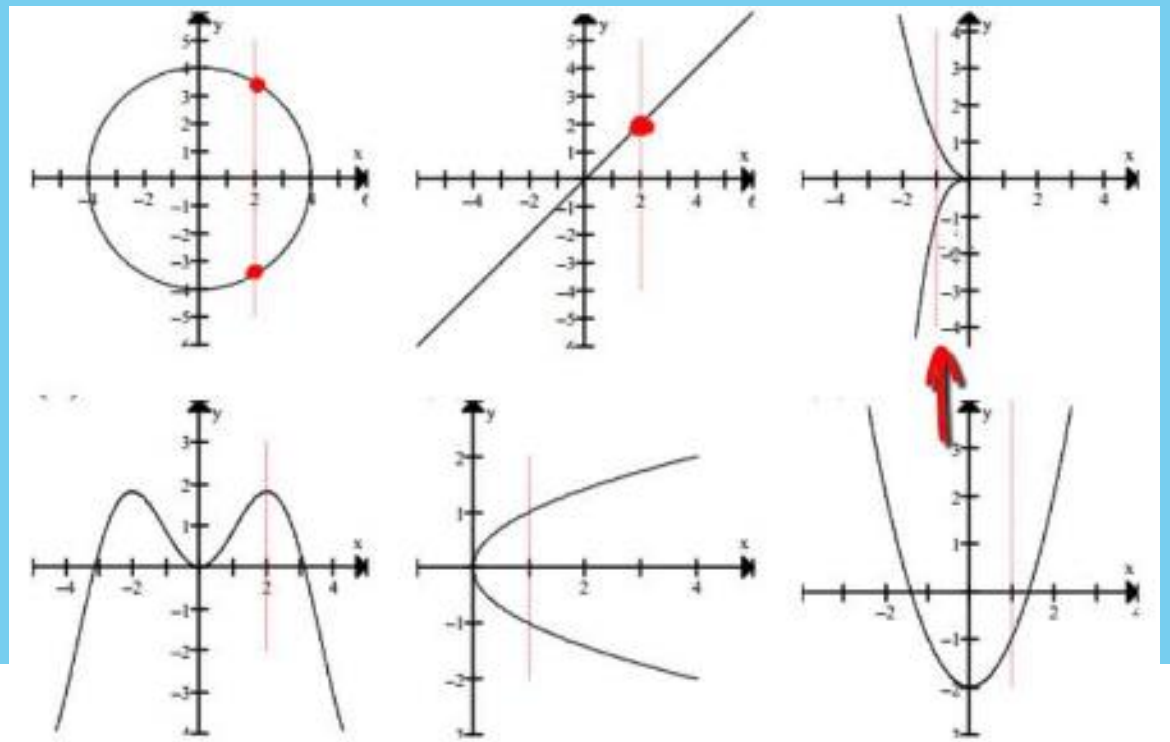

y
x
5
4
3
2
1
-1
-2
-3
-4
-5
-7
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

TALLER

Hallar el dominio y rango de

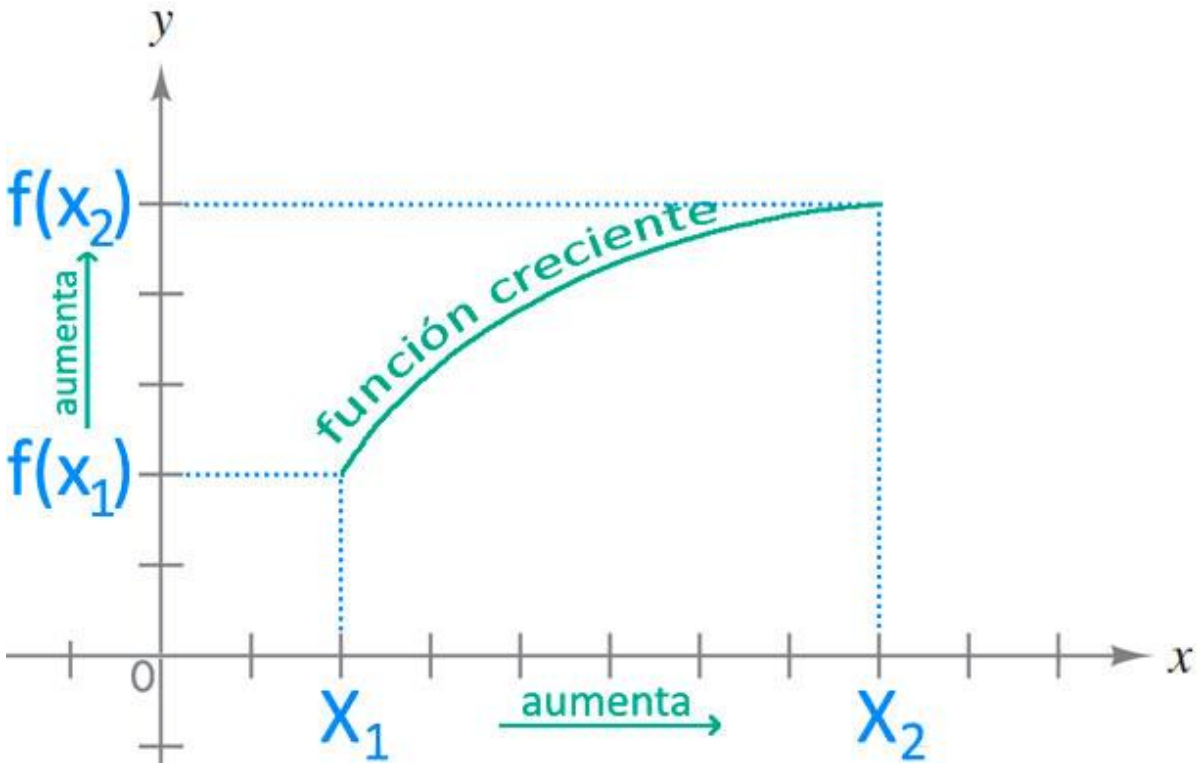
1. $f(x): \sqrt{x^2}$
2. $f(x): \frac{\sqrt{x}}{1+x}$
3. $f(x): 2x^2 - 3x + 5$
4. $f(x): \sqrt{(2x+3)} - \sqrt{(1-2x)}$
5. $f(x): \frac{x+1}{x-1}$
6. $f(x): \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
7. $f(x): \frac{2}{1-x^2}$

TIPOS DE FUNCIONES



FUNCION CRECIENTE

Una función creciente es aquella cuyo valor aumenta a medida que el valor de la variable independiente aumenta a lo largo de su dominio. Es decir, si $f(x1) < f(x2)$ siempre que $x1 < x2$ En términos más simples, la función crece o sube conforme nos movemos hacia la derecha en su gráfica.



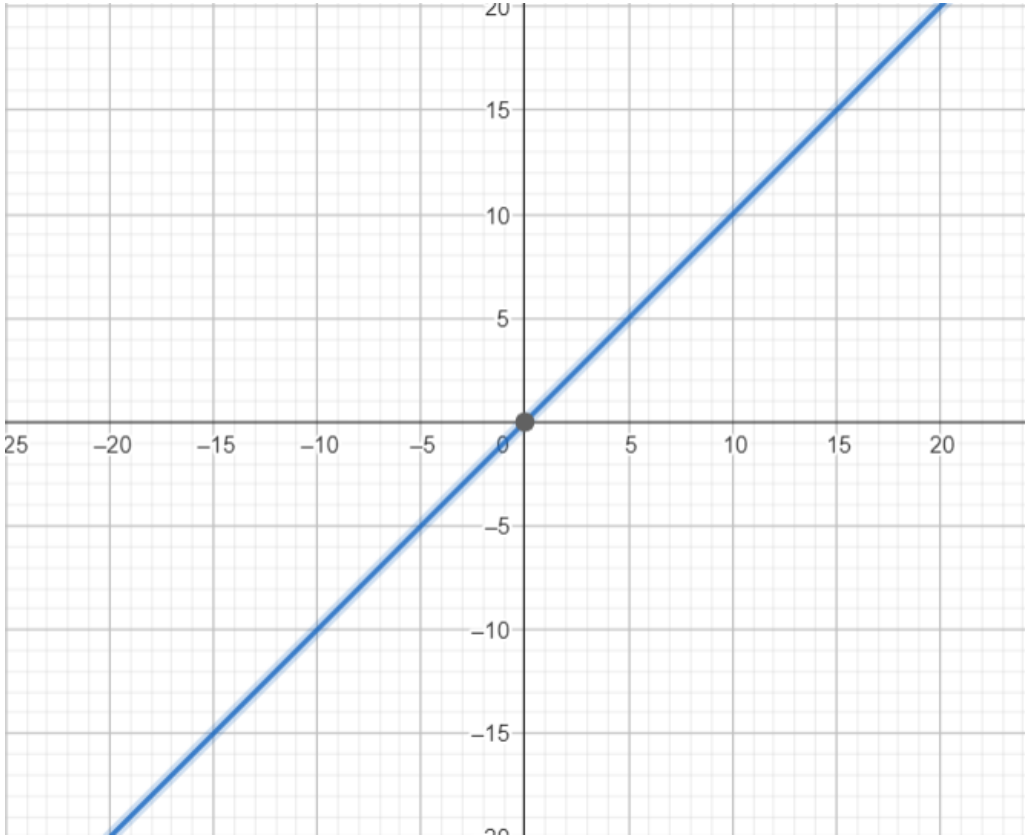
CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES CRECIENTES:

•**Definición Formal**: Una función f es creciente en un intervalo si para cualquier par de puntos x1 y x2 en ese intervalo, $x1 < x2$ implica que $f(x1) \leq f(x2)$. Si la desigualdad es estricta $(f(x1) < f(x2))$, entonces la función se llama estrictamente creciente.

•**Gráfica**: En la gráfica de una función creciente, la curva tiende a inclinarse hacia arriba a medida que avanzamos de izquierda a derecha. Esto significa que el valor de la función aumenta a medida que la variable independiente aumenta.

•**Intervalos**: Una función puede ser creciente en todo su dominio, en un intervalo específico, o en múltiples intervalos disjuntos dentro de su dominio.

•**Derivada Positiva**: Matemáticamente, una función f es creciente en un intervalo si su derivada $f'(x)$ es positiva en ese intervalo. Esto se debe a que la derivada representa la tasa de cambio instantánea de la función, y una derivada positiva indica que la función está aumentando.

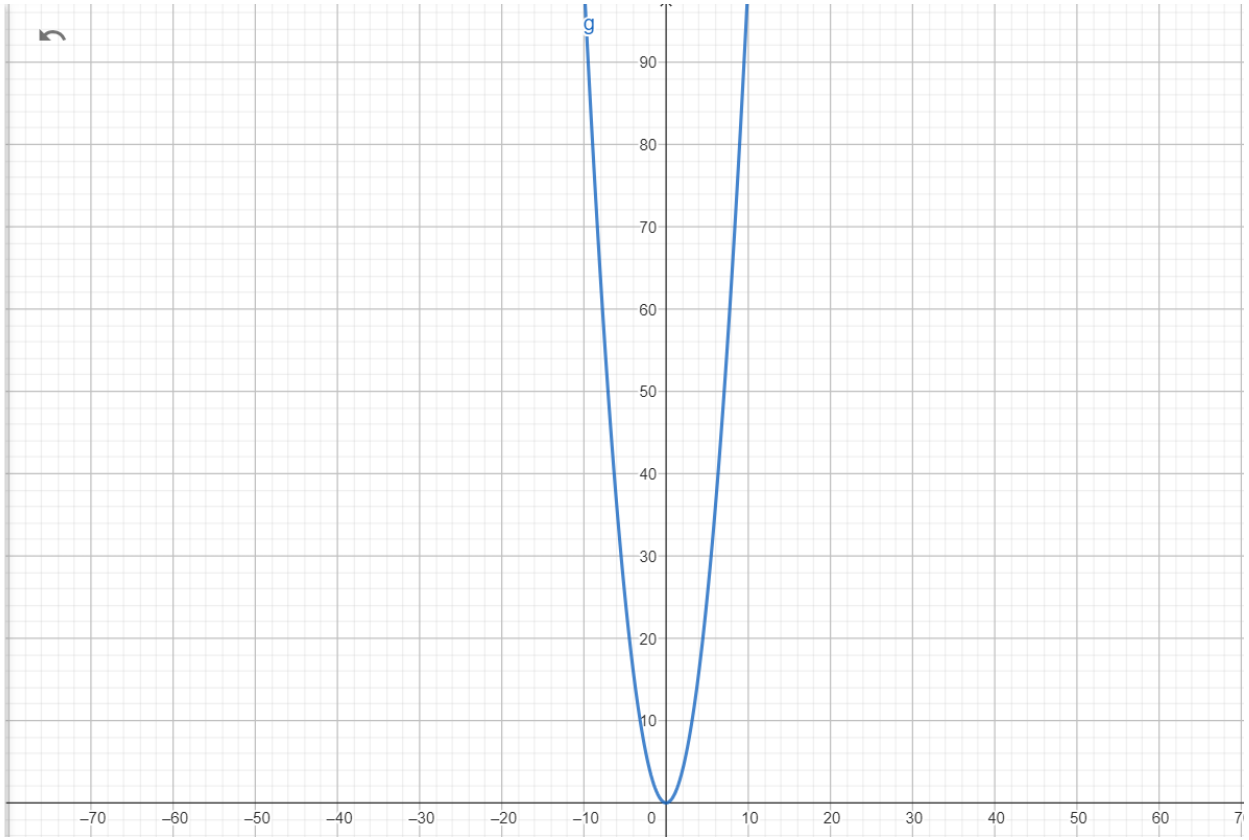


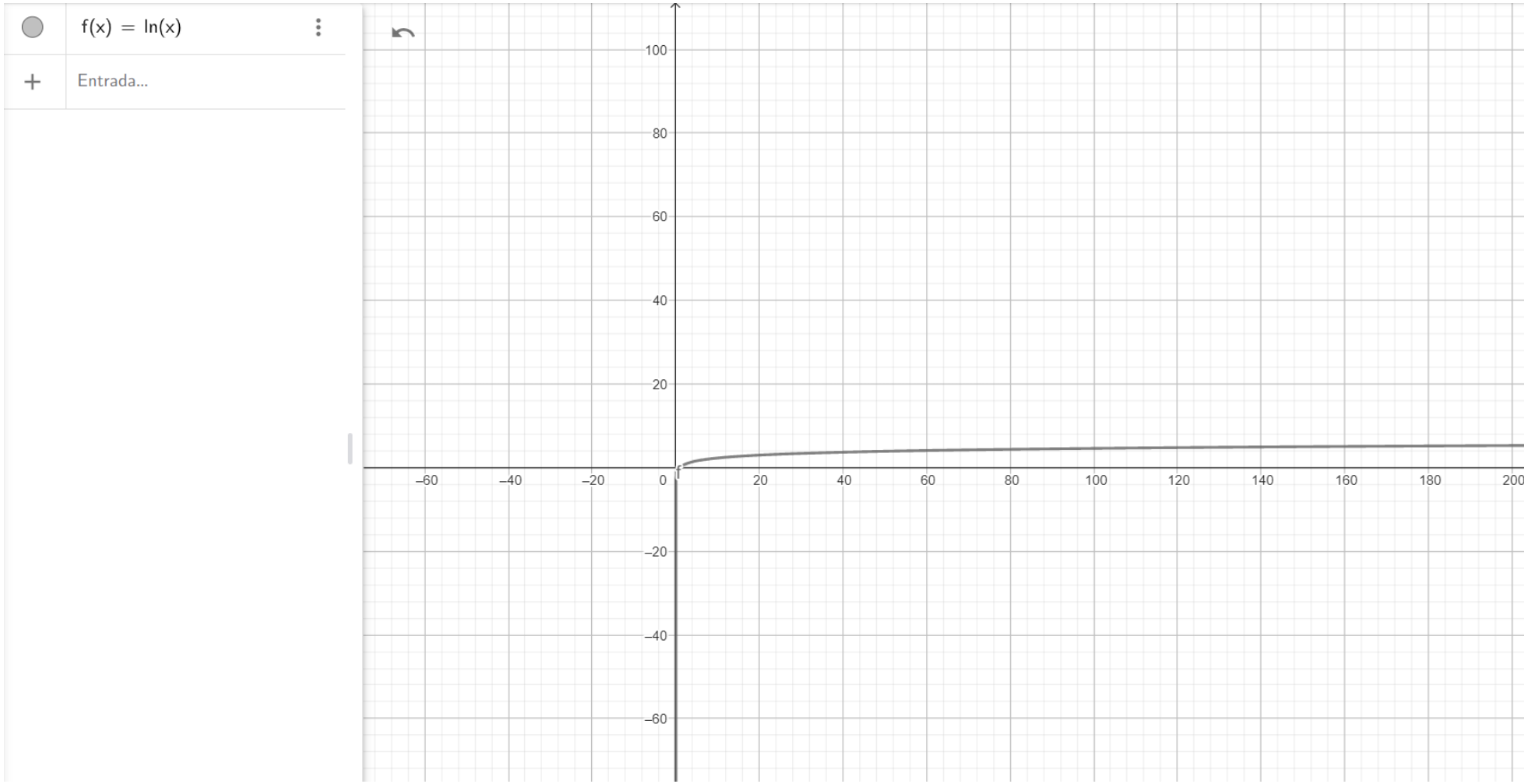
$f(x) = x$

lineal

$f(x) = x^2$ en $x \geq 0$

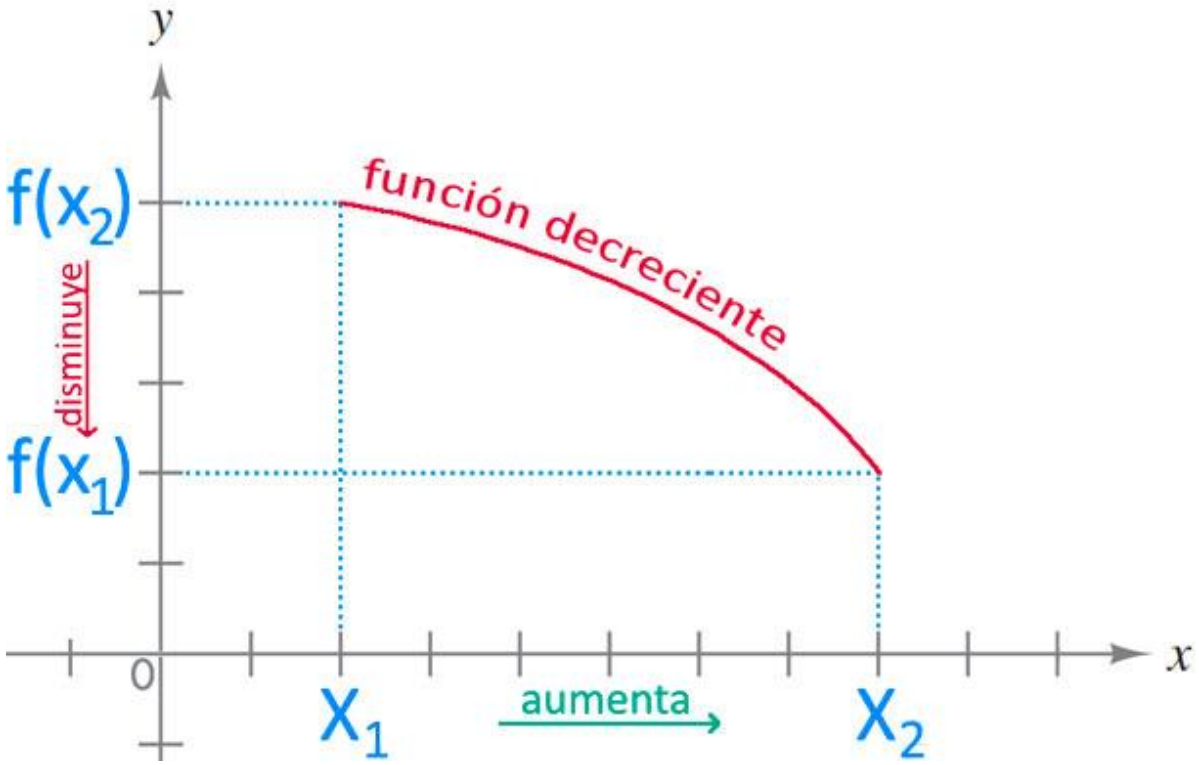
cuadratica




f(x) = ln(x)
Entrada...
100
80
60
40
20
–60
–40
–20
0
20
40
60
80
100
120
140
160
180
200
–20
–40
–60
f

FUNCION DECRECIENTE

Una función decreciente es aquella en la cual el valor de la función disminuye a medida que aumenta el valor de la variable independiente a lo largo de su dominio. Es decir, si $f(x1) > f(x2)$ siempre que $x1 < x2$. En términos simples, la función decrece o baja conforme nos movemos hacia la derecha en su gráfica.



CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES DECRECIENTES:

•**Definición Formal**: Una función fff es decreciente en un intervalo si para cualquier par de puntos x1 y x2 en ese intervalo, $x1 < x2$ implica que $f(x1) \geq f(x2)$. Si la desigualdad es estricta $(f(x1) > f(x2))$, entonces la función se llama estrictamente decreciente.

•**Gráfica**: En la gráfica de una función decreciente, la curva tiende a inclinarse hacia abajo a medida que avanzamos de izquierda a derecha. Esto significa que el valor de la función disminuye a medida que la variable independiente aumenta.

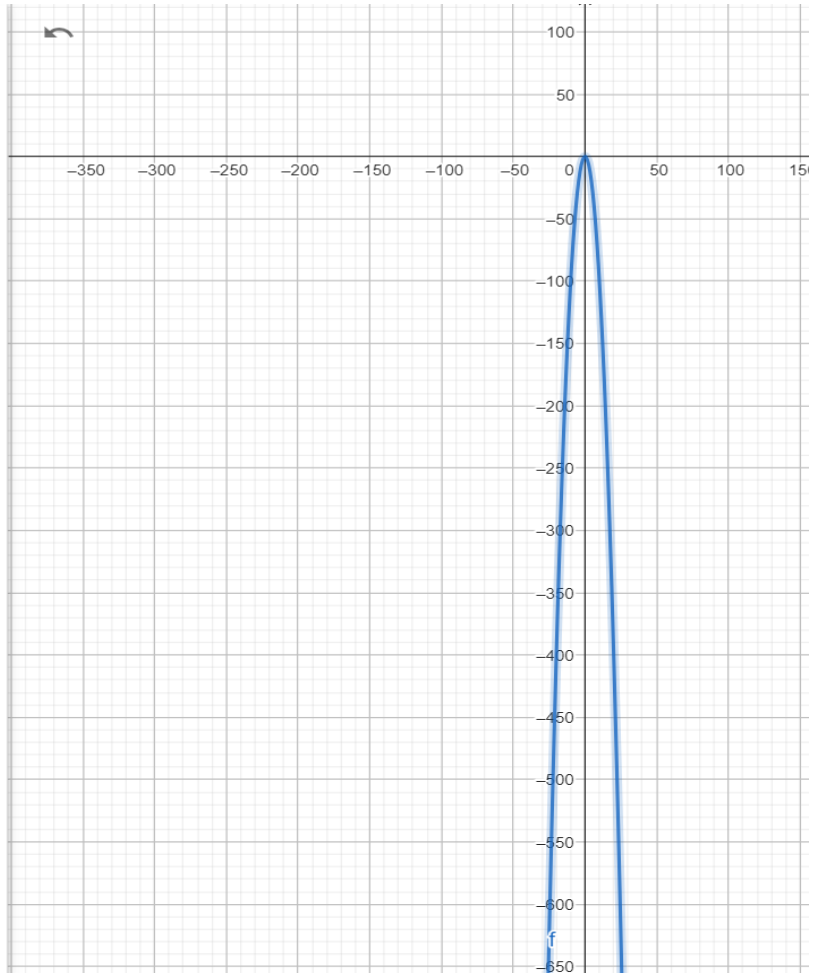
•**Intervalos**: Una función puede ser decreciente en todo su dominio, en un intervalo específico, o en múltiples intervalos disjuntos dentro de su dominio.

•**Derivada Negativa**: Matemáticamente, una función f es decreciente en un intervalo si su derivada $f'(x)$ es negativa en ese intervalo. Esto se debe a que la derivada representa la tasa de cambio instantánea de la función, y una derivada negativa indica que la función está disminuyendo.

$-x$

$f(x) = -x^2$

Entrada...



Suite Calculadora GeoGebra

FUNCIÓN PAR

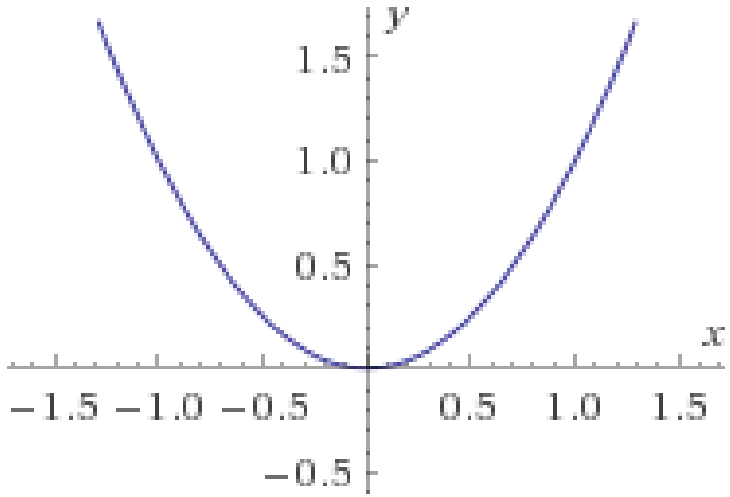
Una función $f(x)$ es una función par si: $f(x)=f(-x)$, es decir, el valor de la función que actúa sobre el factor x es el mismo que el valor de la función que actúa sobre el factor $-x$.

Esto significa que el valor de la función evaluada en −x es igual al valor de la función evaluada en x. En términos geométricos, la gráfica de una función par es simétrica respecto al eje y.

La función cuadrada $f(x) = x^2$ es par ya que

$f(x) = x^2 =$

$= (-x)^2 = f(-x)$



FUNCIÓN IMPAR

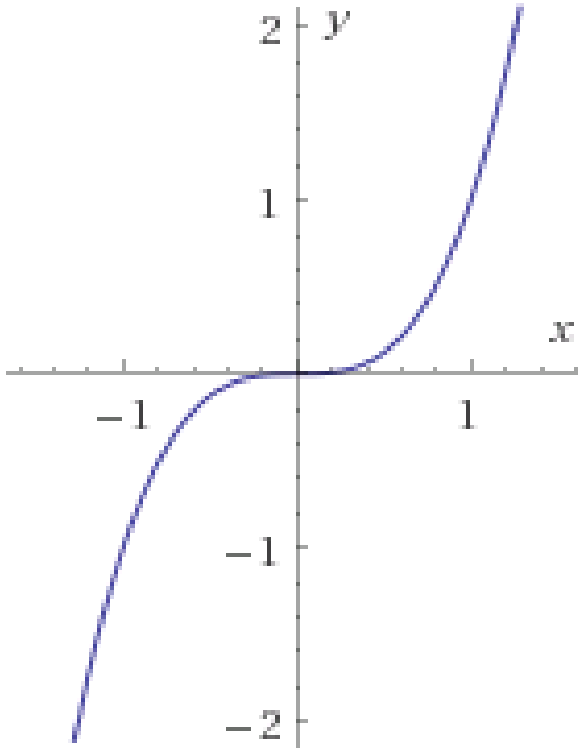
Una función es impar si, para cada x en el dominio de f , $f(-x) = -f(x)$. Las funciones impares tienen simetría rotacional de 180° con respecto al origen.

Esto significa que el valor de la función evaluada en −x es igual al negativo del valor de la función evaluada en x. En términos geométricos, la gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen.

La función cubo $f(x) = x^3$ es impar ya que

$f(-x) = (-x)^3 =$

$= -(x)^2 = -f(x)$

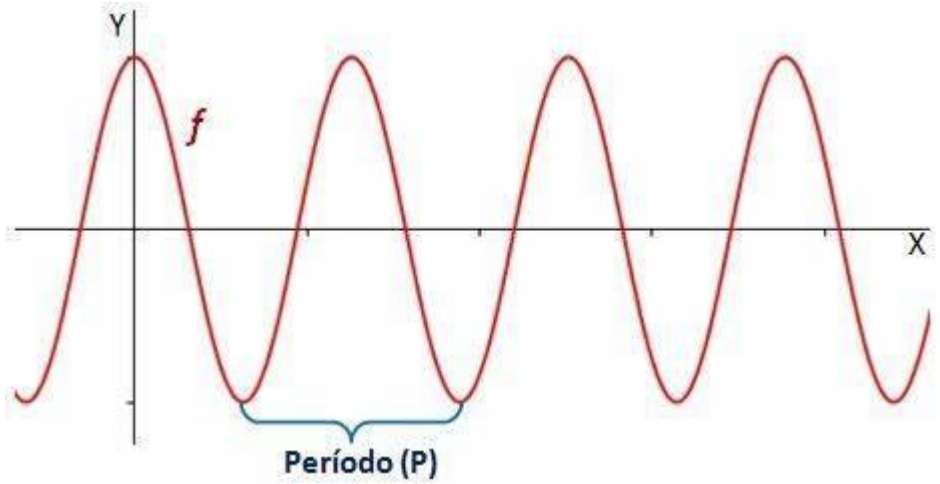


FUNCIÓN PERIODICA

Las funciones periódicas son funciones que se comportan de una manera cíclica (repetitiva) sobre un intervalo especificado (llamado un período). Formalmente, una función f(x) se considera periódica si existe un número real T tal que f (x + T) = f (x) para todas las x . Donde T (también puede ser vista como P)

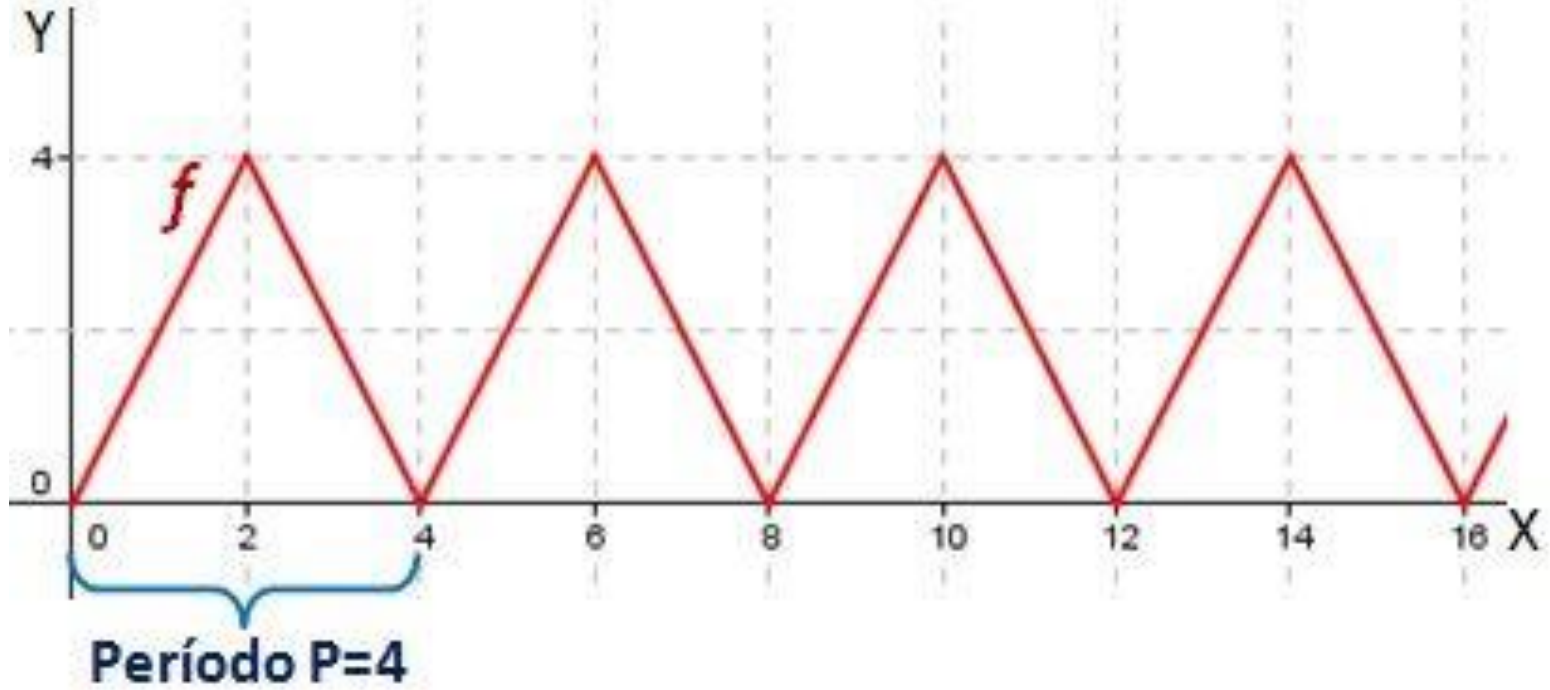
$$f(x+T) = f(x)$$
$$T > 0$$

Esto significa que la función tiene un patrón que se repite cada T unidades. Algunas de las funciones más comunes que son periódicas incluyen las funciones trigonométricas como el seno y el coseno.



$$f(x) = f(x+P) = f(x+2P) = f(x+3P) = \ldots = f(x+k \cdot P)$$

siendo k un número entero cualquiera



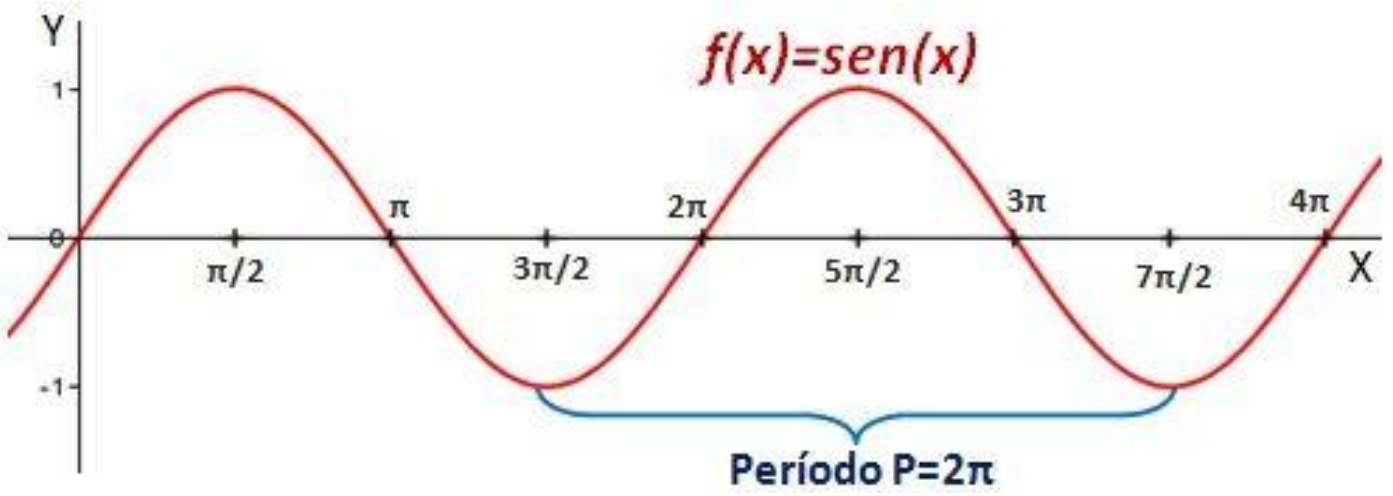
$$f(0) = f(4) = f(8) = f(12) = f(16) = \ldots = f(4k) = \ldots$$

$$f(2) = f(6) = f(10) = f(14) = \ldots = f(2 + 4k) = \ldots$$

siendo k un número entero cualquiera

Sea la función f(x)=seno(x).

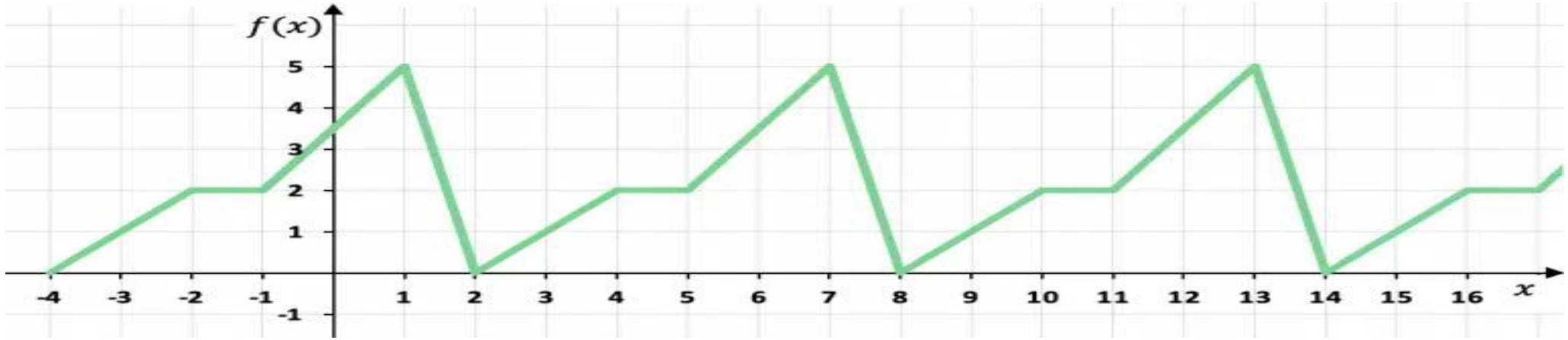
Todas las funciones trigonométricas son periódicas. En particular, el seno es periódica de período P=2π. En particular, se cumple que:

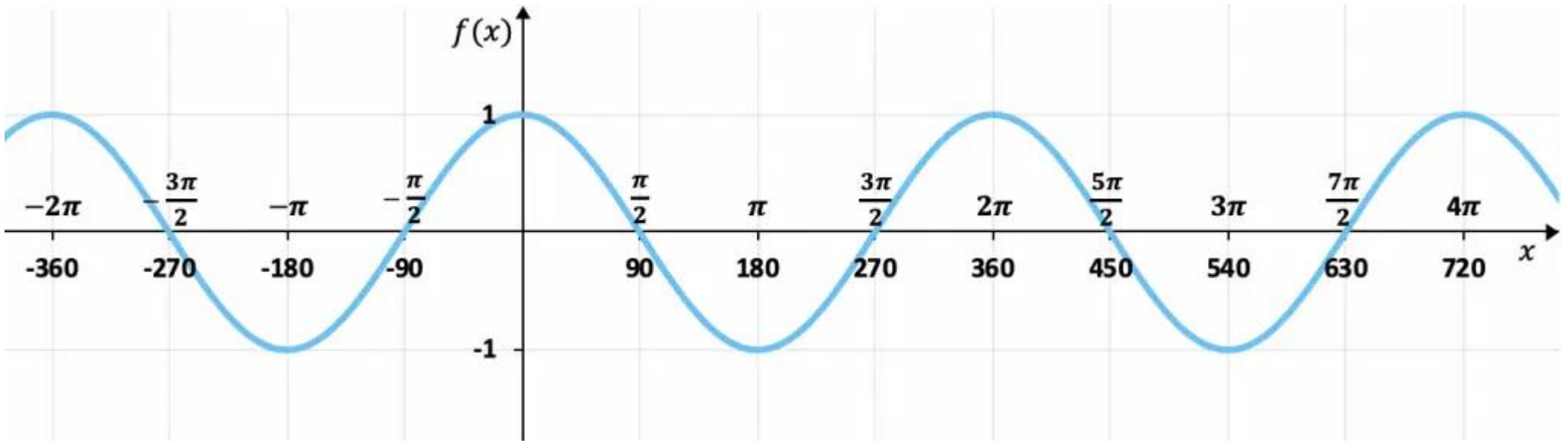


$$f(0) = f(2\pi) = f(4\pi) = f(6\pi) = \ldots = f(k \cdot 2\pi)$$

$$f(\pi) = f(3\pi) = f(5\pi) = \ldots = f(\pi + k \cdot 2\pi)$$

siendo k un número entero cualquiera

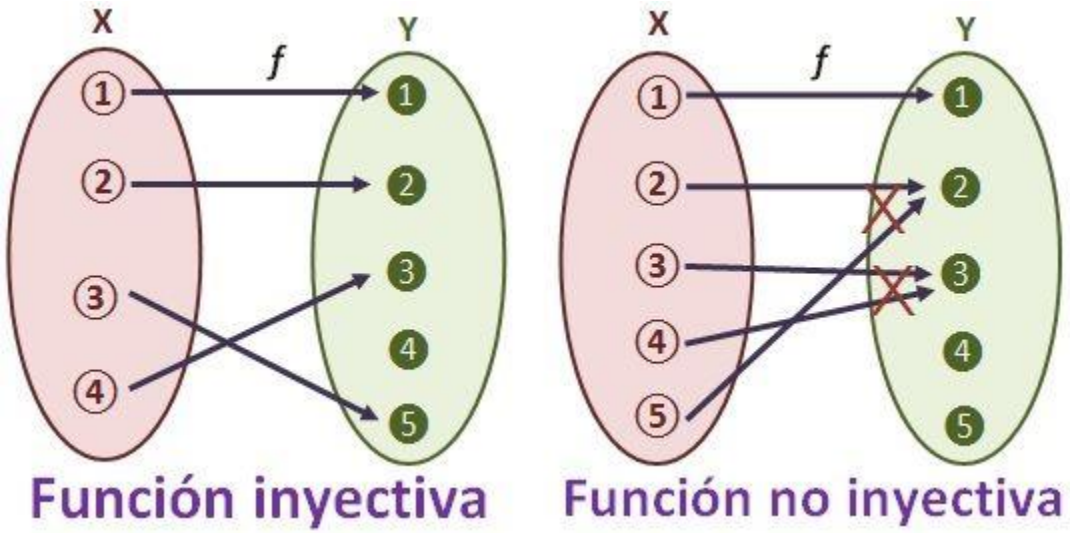

f(x)
5
4
3
2
1
-1
-4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16
x


f(x)
1
-1
−2π
−3π/2
−π
−π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π
7π/2
4π
-360
-270
-180
-90
90
180
270
360
450
540
630
720
x

FUNCIONES INYECTIVAS

Las funciones inyectivas, también conocidas como funciones uno a uno, son un tipo de función en la que cada elemento del dominio se asigna a un elemento único del codominio. Es decir, no hay dos elementos distintos en el dominio que se mapeen al mismo elemento en el codominio.

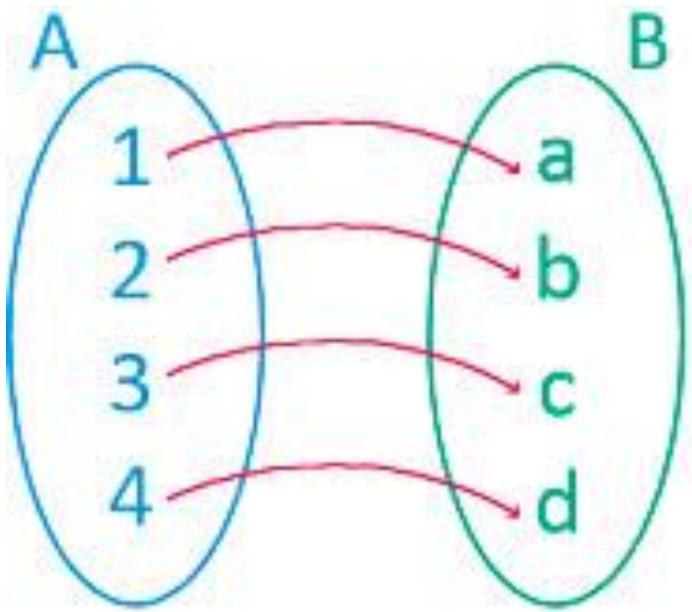
En términos matemáticos, una función f será inyectiva si dados dos puntos xa y xb:



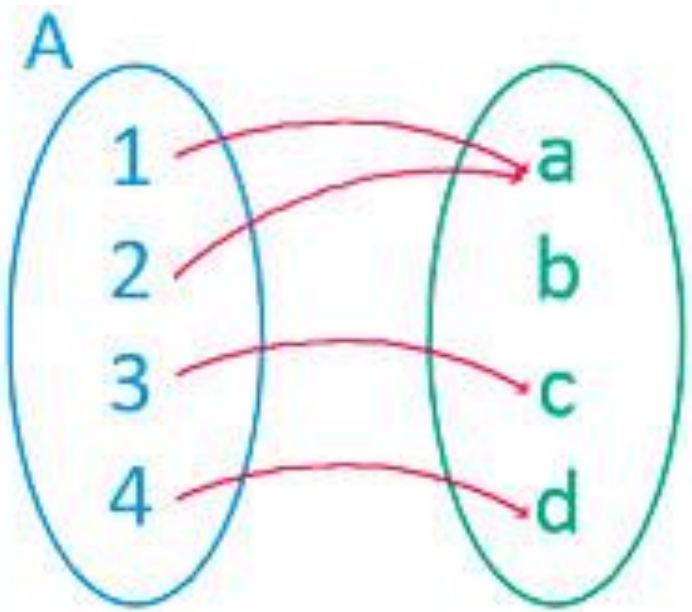
$$\text{Si } f(x_a) = f(x_b) \quad \text{entonces} \quad x_a = x_b$$

Dicho de otra manera: una función es inyectiva si se cumple que a valores de su dominio $x_0 \neq x_1 \Rightarrow f(x_0) \neq f(x_1)$.

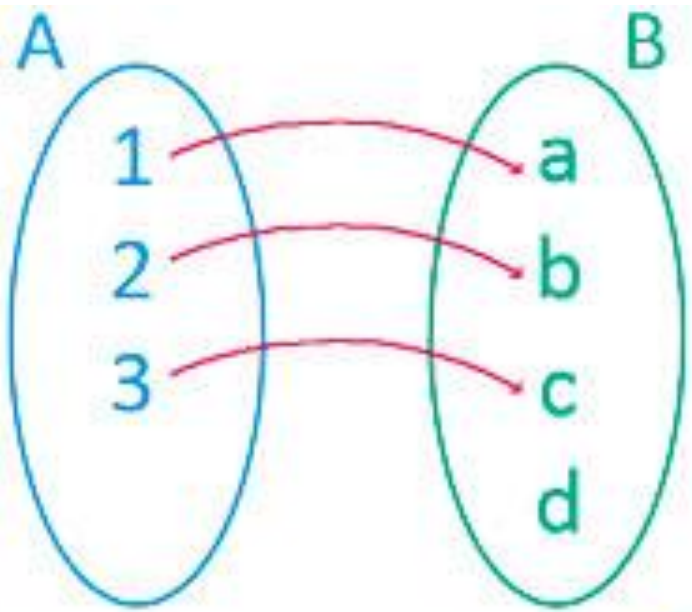
PUEDEN QUEDAR VALORES SIN CORRESPONDENCIA EN Y PERO NO EN X



Si es inyectiva

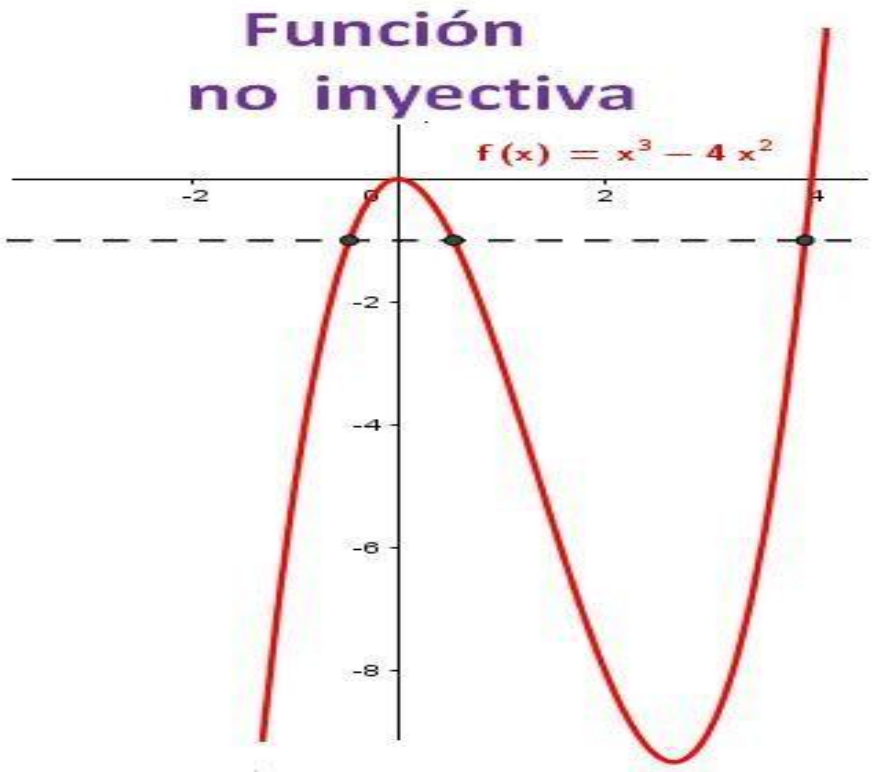


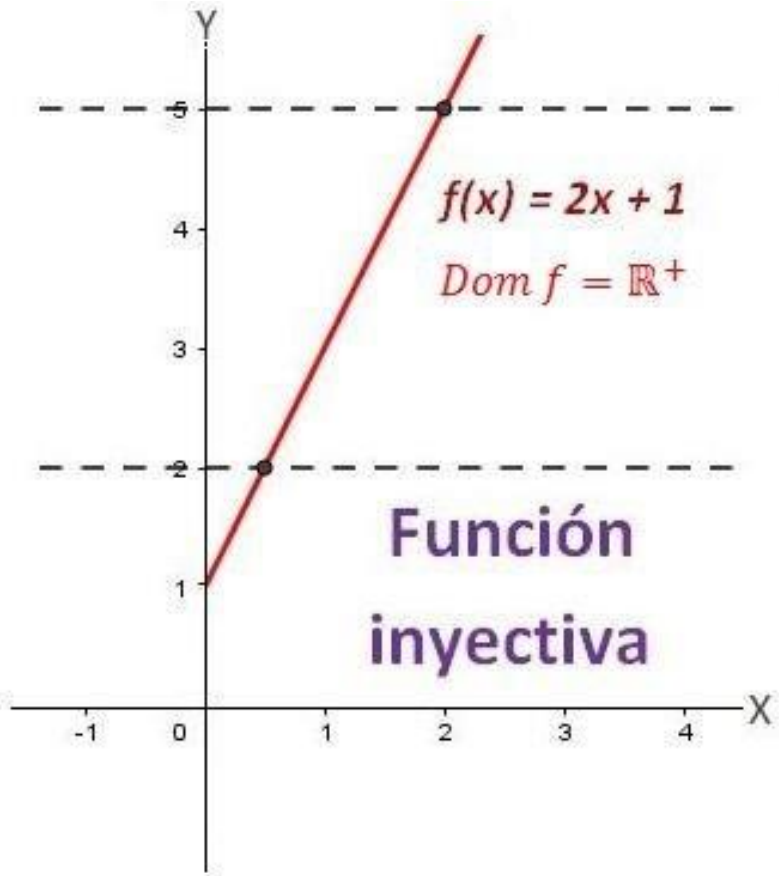
No es inyectiva



Si es inyectiva

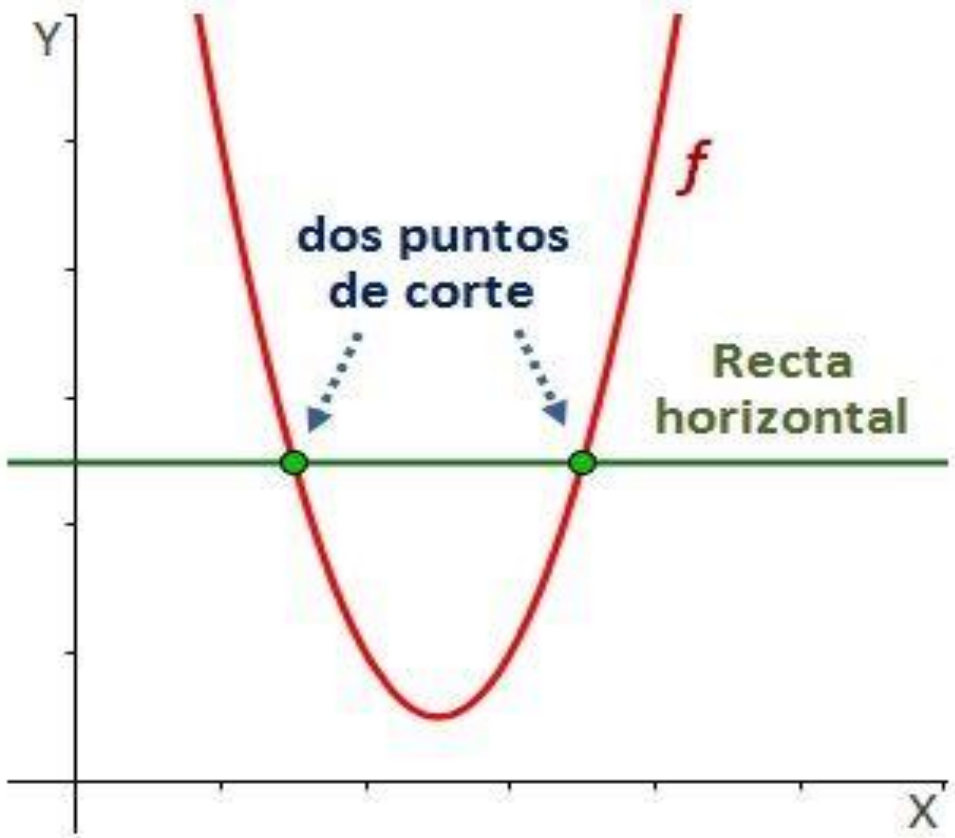
Una comprobación gráfica de la inyectividad de una función es cuando cualquier recta paralela al eje X corta a la misma, como máximo, en un punto.



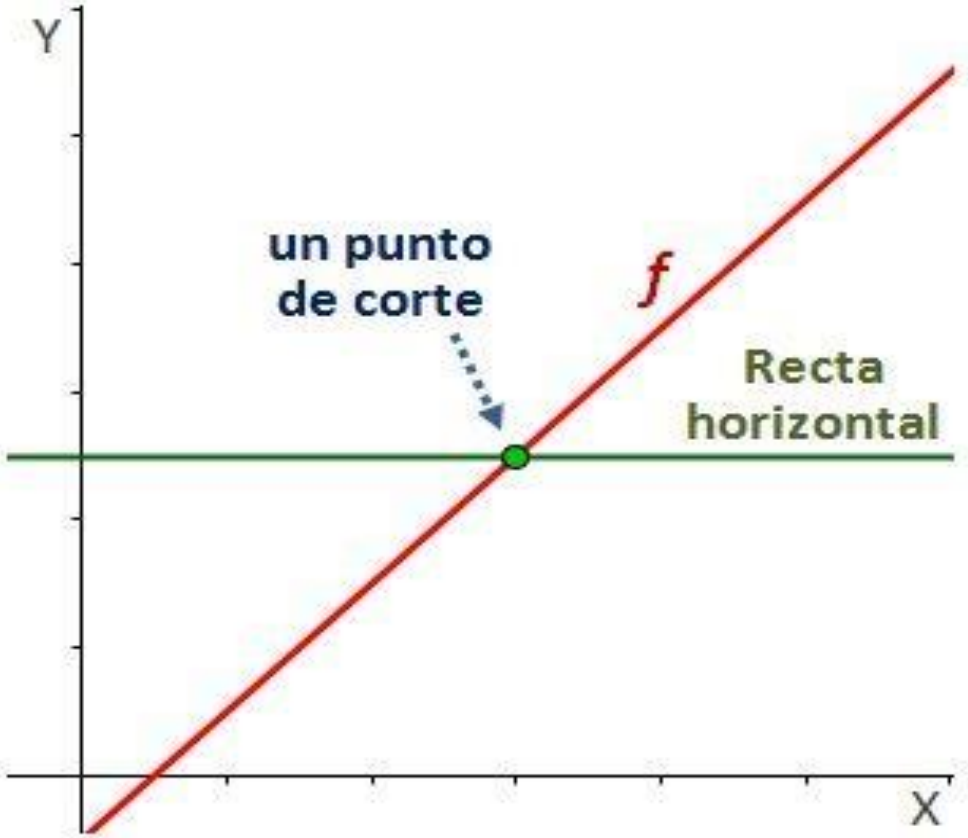


La prueba de la recta horizontal se realiza para comprobar si una función es o no inyectiva. Consiste en dibujar una recta horizontal paralela al eje de abscisas y ver en cuantos puntos corta dicha recta a la gráfica.

- Si encontramos alguna recta horizontal que corta a la gráfica en dos o más puntos, la función no es inyectiva.
- En cambio, si todas las rectas horizontales cortan en un máximo de un punto, la función es inyectiva.



Función no inyectiva



Función inyectiva

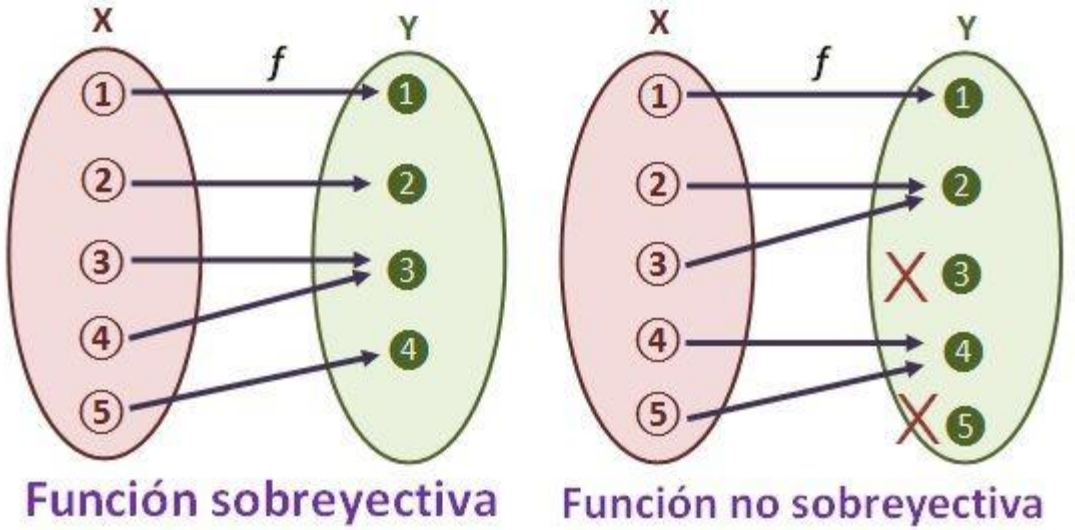
FUNCION SOBREINYECTIVA

Una función sobreyectiva, también conocida como función sobre o función suprayectiva, es un tipo de función en la que cada elemento del codominio tiene al menos un elemento del dominio que se mapea a él. En otras palabras, la imagen de la función es igual al codominio.

En términos matemáticos, *f* es **suprayectiva** si:

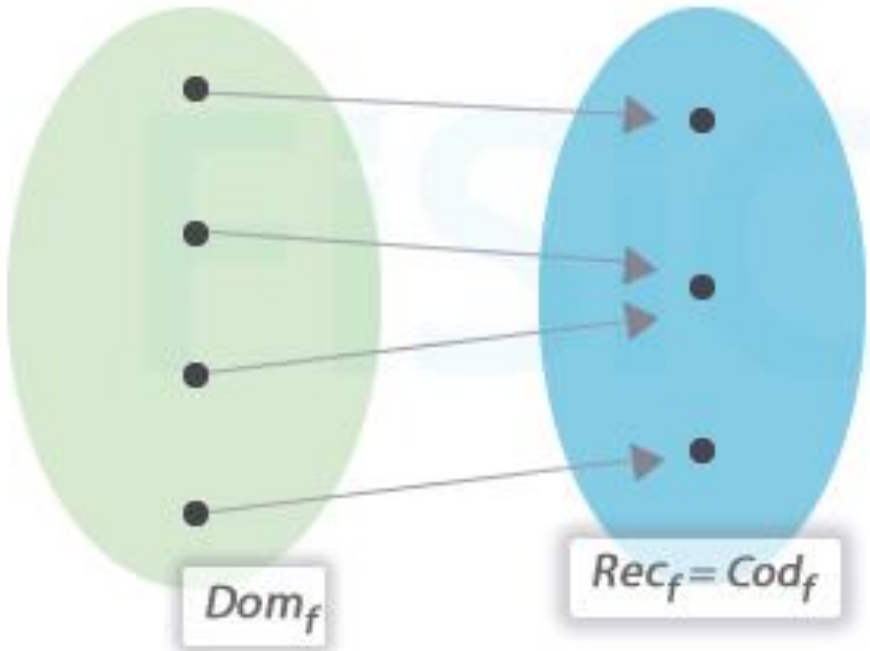
$$\forall y \in \text{Codom } f, \exists x \in \text{Dom } f / f(x) = y$$

$$\text{Rec } f (o \text{ Im } f) = \text{Codom } f$$

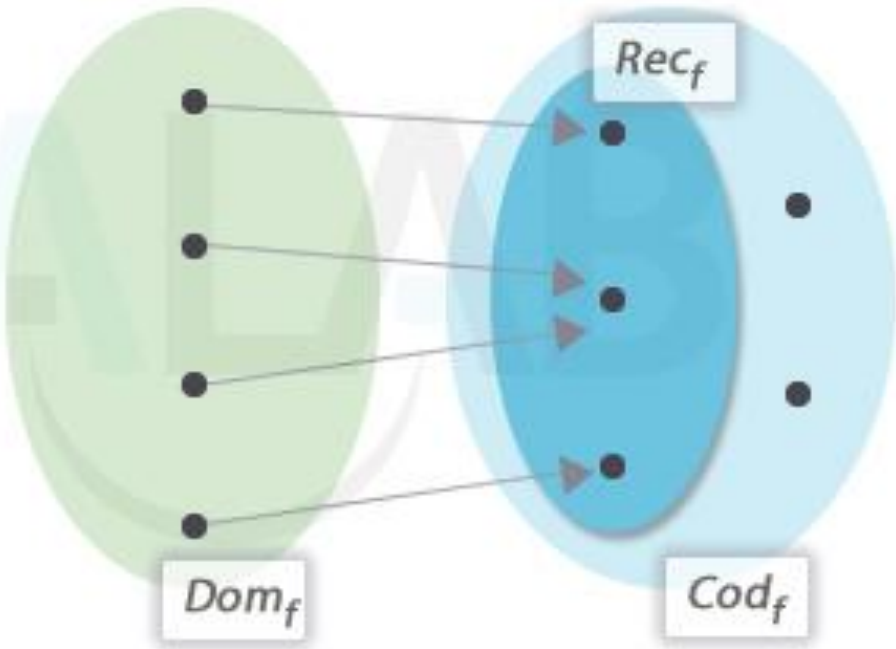


Dicho de otra manera, una función es suprayectiva cuando son iguales su codominio y su recorrido o rango.

Función sobreyectiva

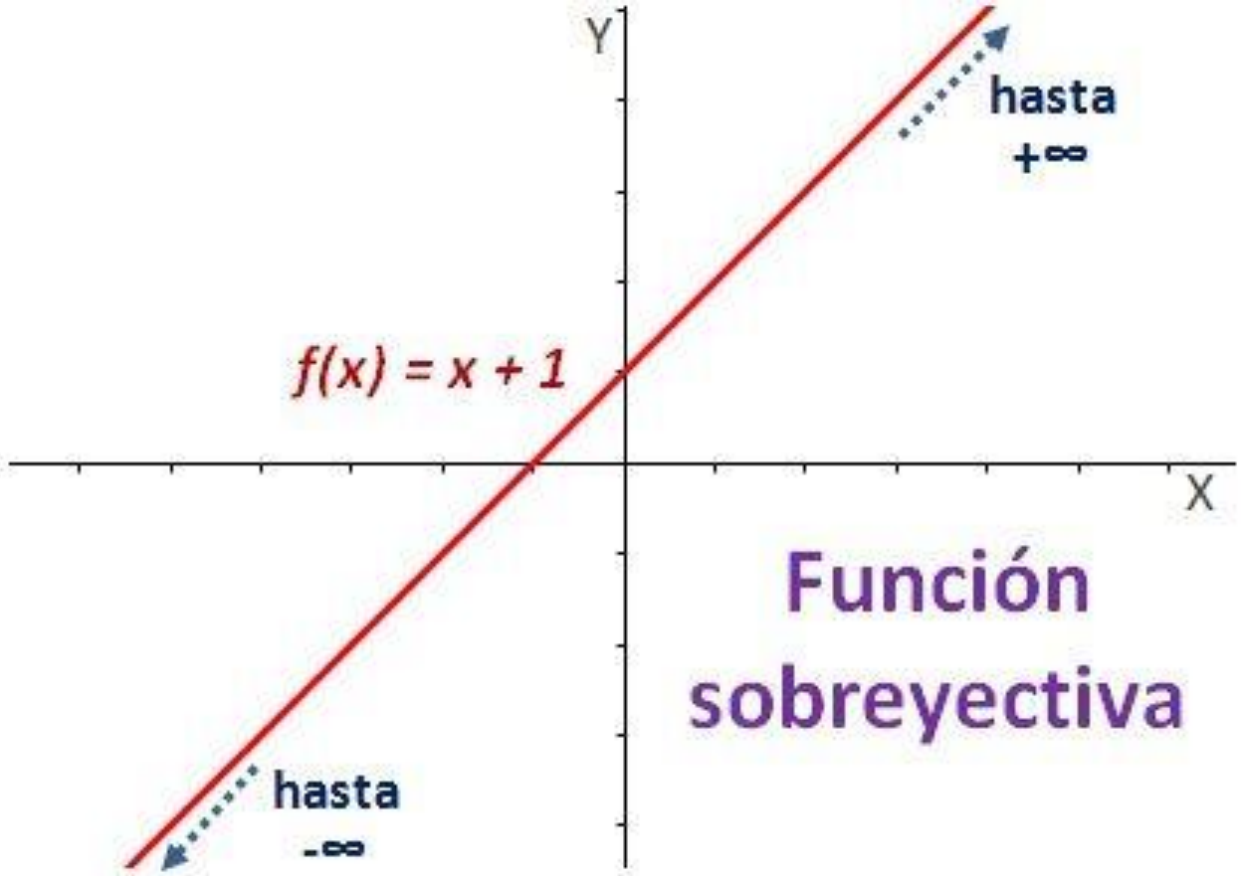


Función no sobreyectiva



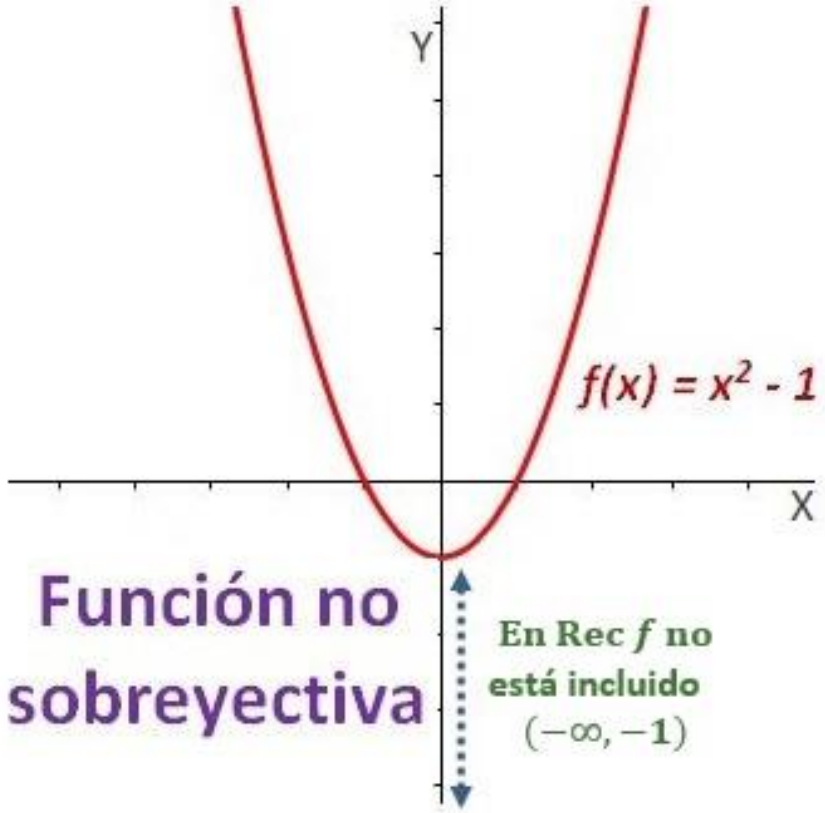
EJEMPLO

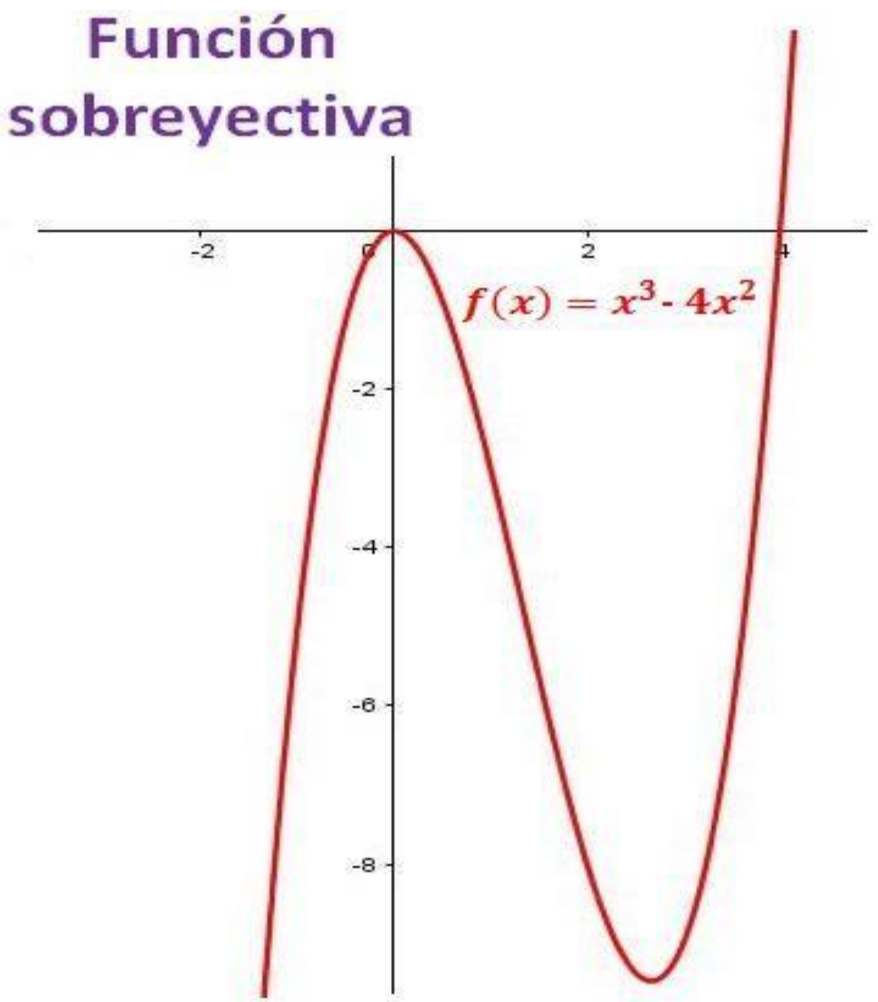
Sea la función en los números reales definida por f(x) = x+1.



Esta función sí que es sobreyectiva.

Una manera sencilla de ver si es sobreyectiva en la gráfica es ver que va de menos infinito a más infinito en el eje Y





$f(x) = 2 \cdot (x + 1)$

$f(x) = \sqrt{3x}$

$f(x) = \tan(x)$

$f(x) = x^2 - 4x + 2$

$f(x) = \ln(x + 2)$

$f(x) = \cos(x)$

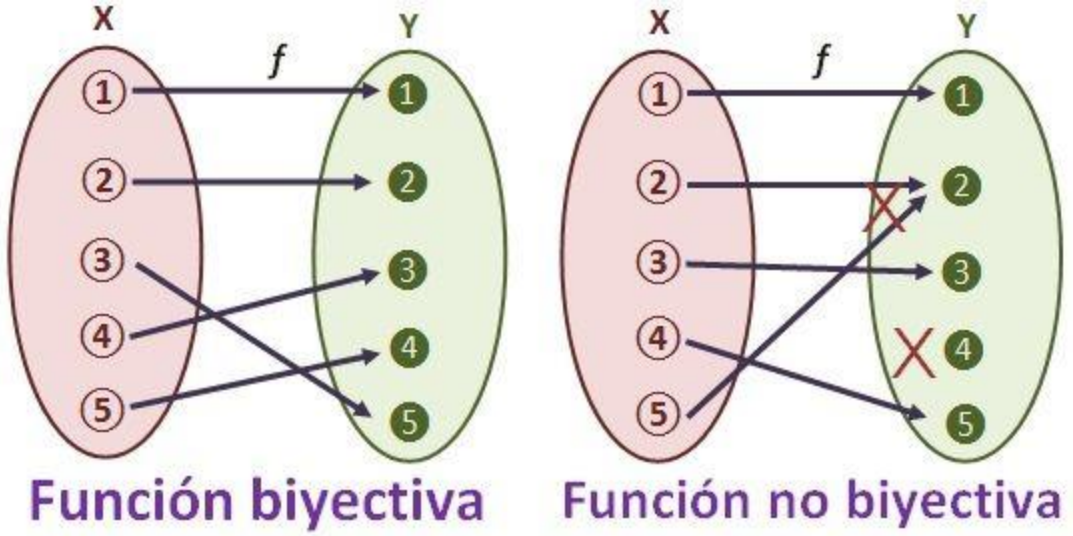
FUNCION BIYECTIVA

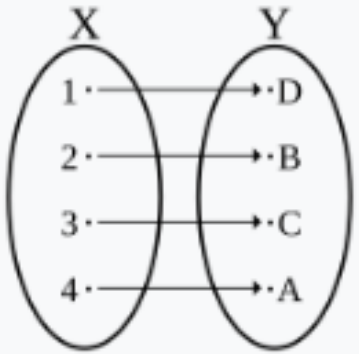
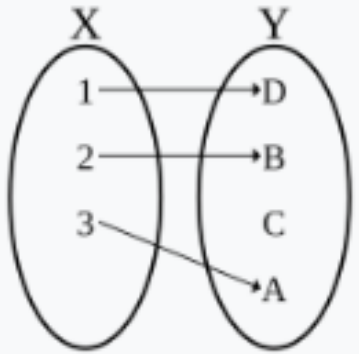
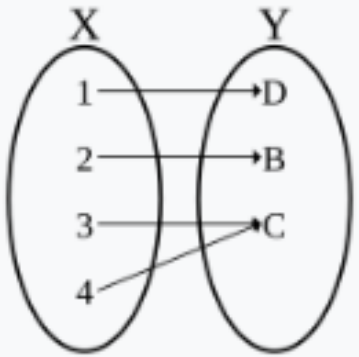
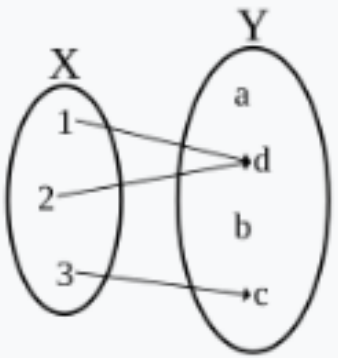
Una función biyectiva (también conocida como biyección) es una función que es tanto inyectiva como sobreyectiva. Esto significa que cada elemento del dominio se asigna a un elemento único del codominio, y cada elemento del codominio es la imagen de un elemento del dominio. En otras palabras, establece una correspondencia uno a uno entre los elementos del dominio y del codominio.

Formalmente, una función f es biyectiva si:

$$\forall y \in \text{Codom } f, \exists! \, x \in \text{Dom } f / f(x) = y$$

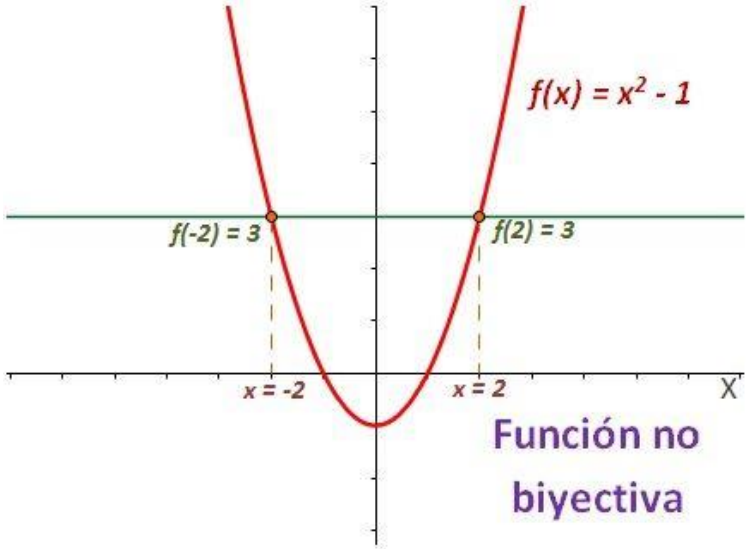
$$\text{Rec } f (o \text{ Im } f \,) = \text{Codom } f$$

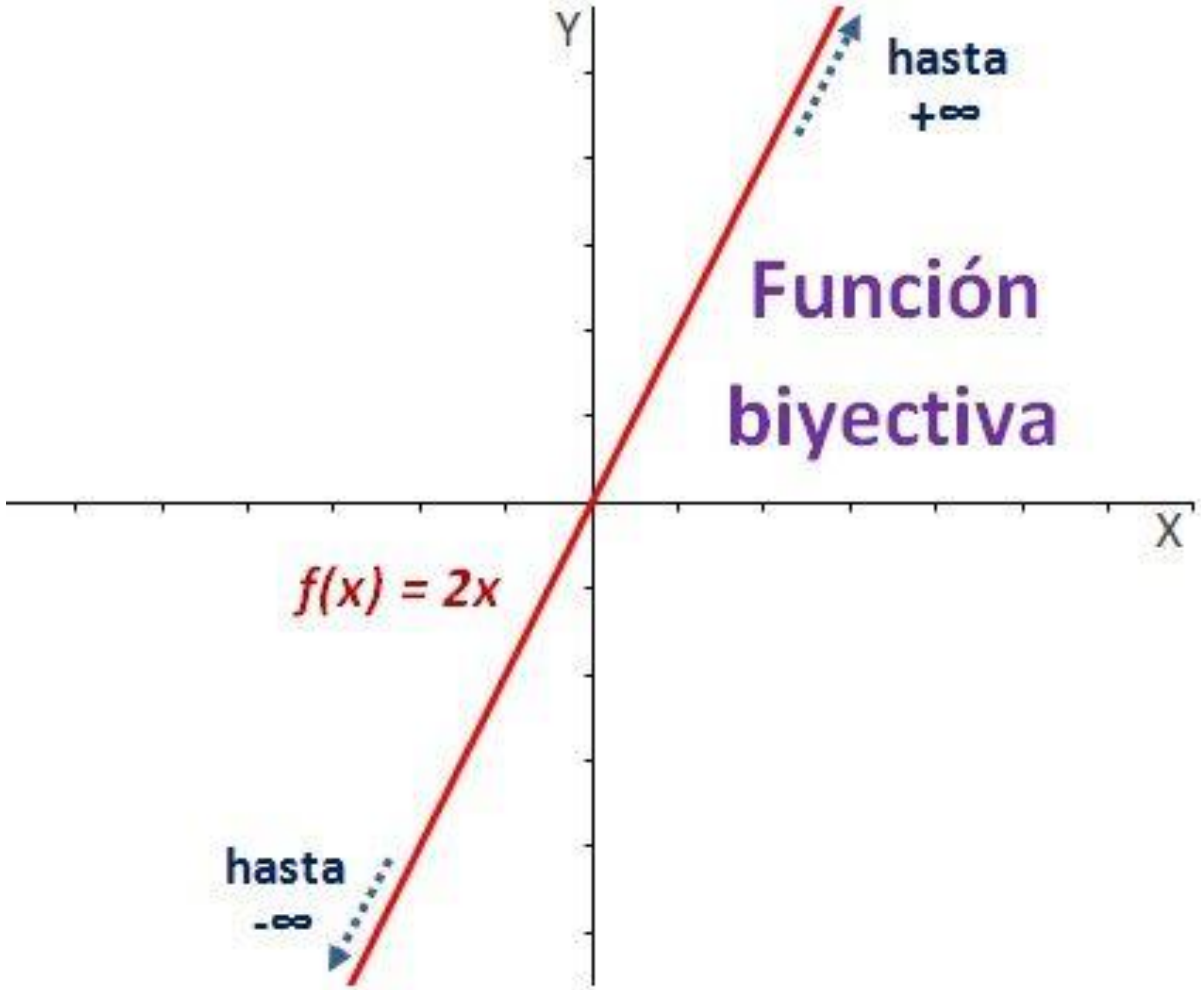


Aplicación	Sobreyectiva	No sobreyectiva
Inyectiva	 **Biyectiva**	 **Solo inyectiva**
No inyectiva	 **Solo sobreyectiva**	

GRAFICAMENTE

En un gráfico, una función es biyectiva si y solo si cada línea horizontal y cada línea vertical intersecan la gráfica de la función en exactamente un punto. Esto es conocido como el **Test de la Línea Horizontal** y el **Test de la Línea Vertical.**

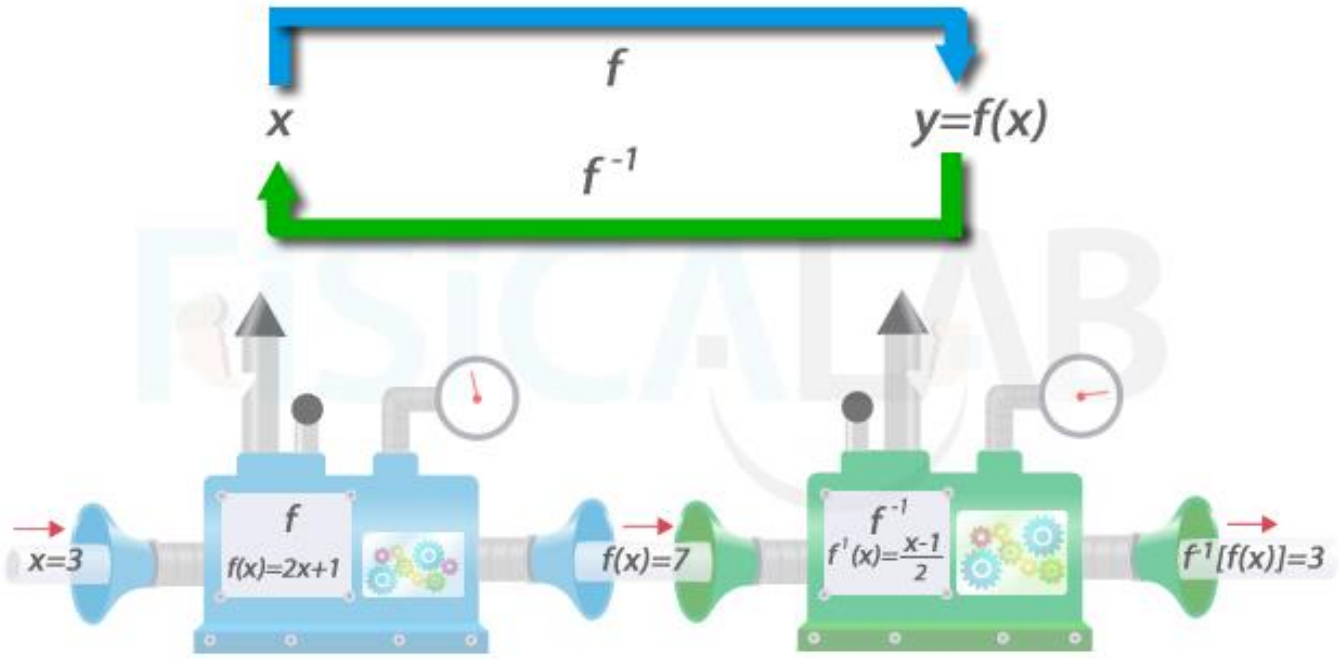




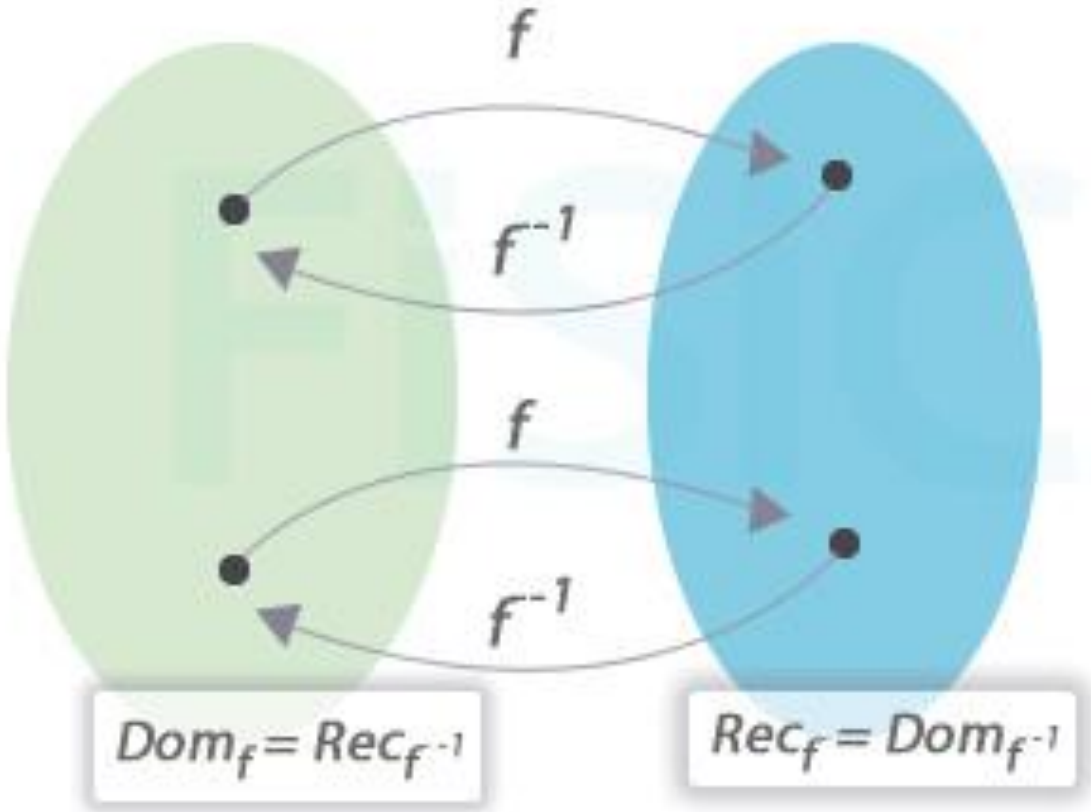
F. biyectiva	***F. no biyectiva***
$f(x) = \sqrt[3]{x+2}$	$f(x) = \sqrt{x+2}$
$f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$	$f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$
$f(x) = \ln(x)$	$f(x) = e^x$

FUNCION INVERSA

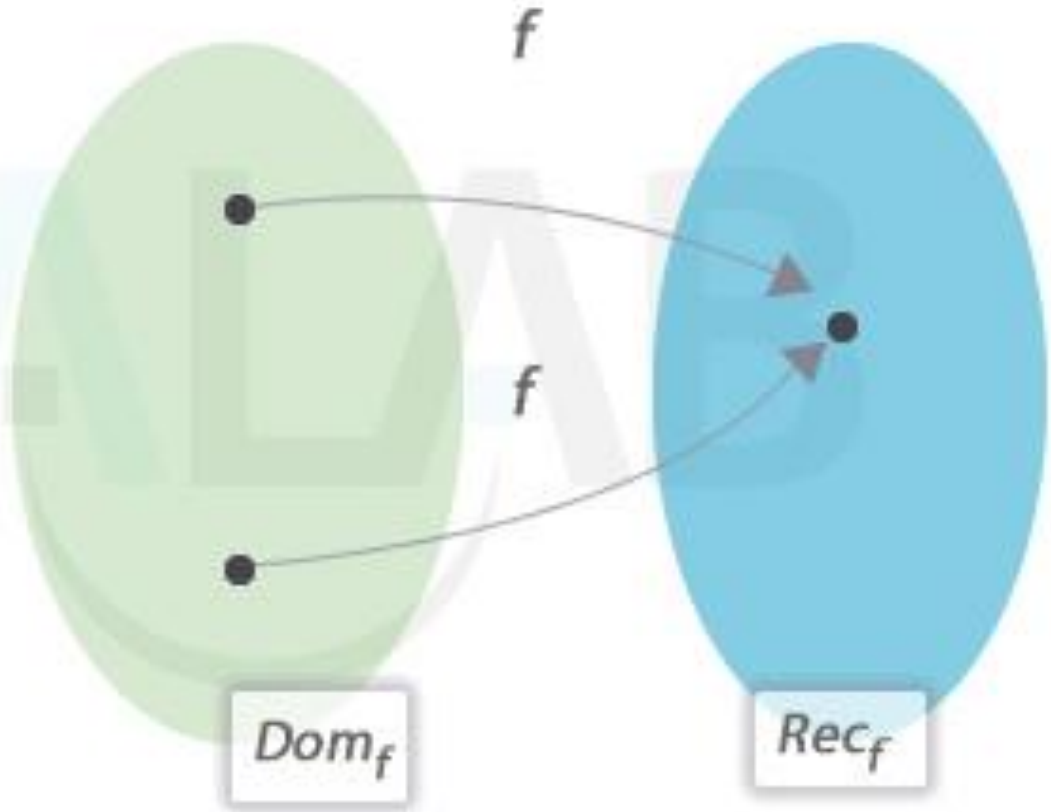
La función inversa de una función f es una función que "deshace" el efecto de f. Si f toma un valor x en su dominio y lo transforma en un valor y en su codominio, la función inversa, denotada como f^{-1}, toma el valor y y lo transforma de vuelta en x.



Función con inversa

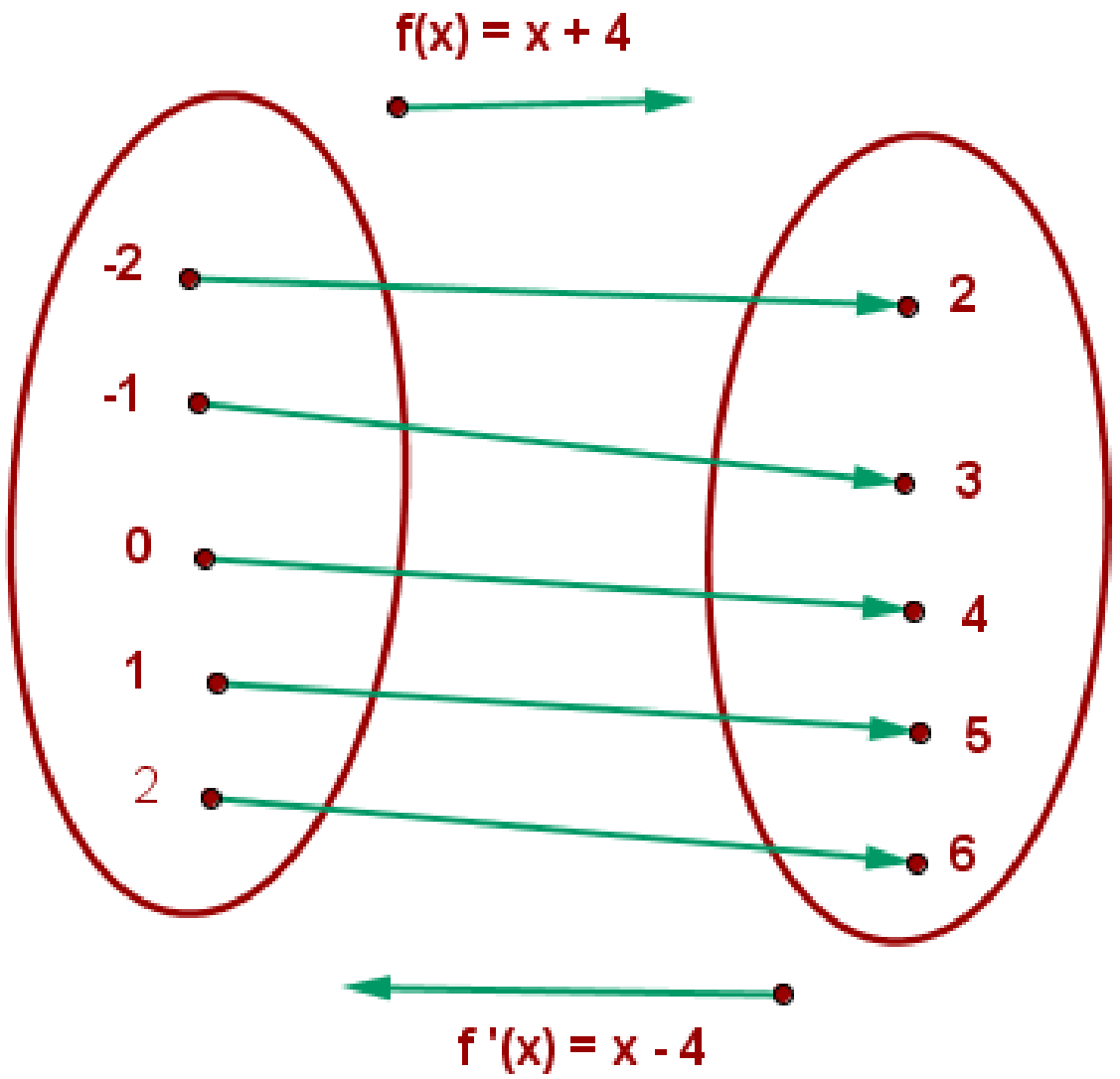


Función sin inversa



Podemos observar que:

- El dominio de $f^{-1}(x)$ es el recorrido de $f(x)$.
- El recorrido de $f^{-1}(x)$ es el dominio de $f(x)$.



Para calcular la función inversa de una función *f(x)* dada:

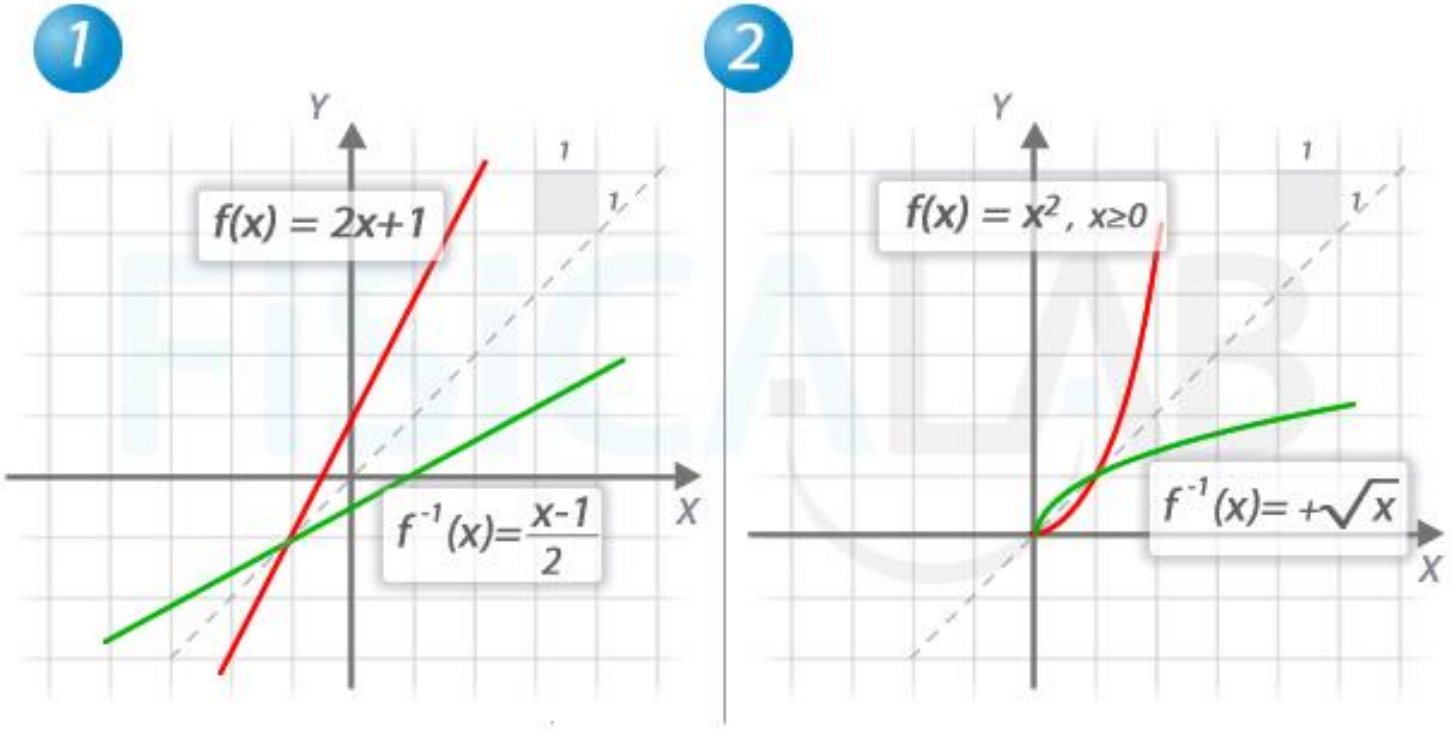
1. Hacemos *f(x)=y*
2. Intercambiamos *x* e *y*
3. Despejamos *y* en función de *x. Esta función obtenida es la inversa de la original*

Por ejemplo, volviendo al ejemplo con el que abríamos el apartado:

$$f(x) = 2x + 1 \Rightarrow \ \textcircled{1}\, y = 2x + 1 \textcircled{2}\, x = 2y + 1 \textcircled{3}\, y = \frac{x-1}{2} \ \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

GRÁFICAS

La gráfica de una función y su inversa se caracterizan por ser simétricas respecto a la recta y=x.



$$f(x) = e^{2x+1}$$

Empezamos sustituyendo $f(x)$ por y:

$$y = e^{2x+1}$$

Luego, recordemos que el logaritmo natural satisface que

$$\ln(e^x) = x$$

Así, aplicamos el logaritmo natural a ambos lados de la ecuación:

$$\ln y = \ln\left(e^{2x+1}\right) = 2x + 1$$

de este modo,

$$2x = \ln y - 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\ln y - 1}{2}$$

Por tanto, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{\ln x - 1}{2}$$

$$f(x) = \frac{2x - 3}{4}$$

Primero sustituimos $f(x)$ por y:

$$y = \frac{2x - 3}{4}$$

Luego despejamos x:

$$4y = 2x - 3 \quad \Longrightarrow \quad 4y + 3 = 2x$$

Es decir,

$$x = \frac{4y + 3}{2}$$

Por último, sustituimos x por $f^{-1}(x)$ y y por x:

$$f^{-1}(x) = \frac{4x + 3}{2}$$

la cual es la función inversa.

$$f(x) = \sqrt{x}$$

Las funciones radicales sí son uno-a-uno, por lo tanto, sí tiene función inversa:

$$y = \sqrt{x}$$

donde sabemos que $y \geq 0$. Luego elevamos al cuadrado ambos lados de la ecuación:

$$y^2 = x$$

Por tanto, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = x^2$$

donde $x \geq 0$ (como hacemos el cambio de y por x, entonces al final x es quien satisface que $x \geq 0$).

En otras palabras, para que $g(x) = x^2$ sea la función inversa de $f(x) = \sqrt{x}$, se debe cumplir que $g(x)$ tenga como dominio sólo a $[0, \infty)$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

Sabemos que la función de raíz cubica es uno-a-uno, tiene como rango a todos los números reales, y su rango también son todos los números reales. Por lo tanto, tendrá una inversa cuyo dominio son todos los reales:

$$y = \sqrt[3]{x-1}$$

Elevamos al cubo ambos lados:

$$y^3 = x - 1$$

es decir,

$$x = y^3 + 1$$

Por lo tanto, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = x^3 + 1$$

EJERCICIOS EN CLASE

ENCUENTRE LA FUNCION INVERSA DE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS.

$$f(x) = \frac{1}{2x - 1}$$

$$f(x) = \frac{x + 2}{2x + 1}$$

$$f(x) = 2^{x+1} - 1$$

$$f(x) = \log_3(2x) + 1$$

$$f(x) = \frac{4}{2 - e^{-x}}$$

Primero encontramos la función inversa, para eso sustituimos $f(x)$ por y:

$$y = \frac{1}{2x-1}$$

Luego, despejamos x:

$$(2x-1)y = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 1 = \frac{1}{y}$$

es decir,

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + 1\right)$$

Ya tenemos x despejada. Sin embargo, simplificamos un poco:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1+y}{y}\right) = \frac{y+1}{2y}$$

Por tanto, la inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2x}$$

Ahora, verificamos lo que se nos pidió:

Empezamos calculando la inversa, por lo que sustituimos $f(x)$ por y:

$$y = \frac{x+2}{2x+1}$$

Luego, despejamos x; por lo que multiplicamos por $2x + 1$:

$$y(2x+1) = x+2 \quad \Longrightarrow \quad 2xy + y = x + 2$$

Después, pasamos los términos con x hacia el lado izquierdo de la igualdad, y los términos restantes al lado derecho:

$$2xy - x = 2 - y \quad \Longrightarrow \quad x(2y-1) = 2 - y$$

Por lo tanto,

$$x = \frac{2-y}{2y-1}$$

Es decir, la función inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{2-x}{2x-1}$$

Comenzamos por sustituir $f(x)$ por y, luego depejamos para x:

$$\begin{aligned} y = 2^{2x+1} - 1 &\iff y + 1 = 2^{2x+1} \\ &\iff \log_2(y+1) = \log_2(2^{2x+1}) \\ &\iff \log_2(y+1) = 2x + 1 \\ &\iff \log_2(y+1) - 1 = 2x \\ &\iff \frac{\log_2(y+1)}{2} - 1 = x, \end{aligned}$$

Es decir,

$$f^{-1}(x) = \frac{\log_2(x+1)}{2} - 1.$$

Comenzamos por sustituir $f(x)$ por y, luego depejamos para x:

$$\begin{aligned} y = \log_3(2x) + 1 &\iff y - 1 = \log_3(2x) \\ &\iff 3^{y-1} = 3^{\log_3(2x)} \\ &\iff 3^{y-1} = 2x \\ &\iff \frac{3^{y-1}}{2} = x \end{aligned}$$

Es decir,

$$f^{-1}(x) = \frac{3^{x-1}}{2}.$$

Comenzamos por sustituir $f(x)$ por y, luego depejamos para x:

$$\begin{aligned} y = \frac{4}{2 - e^{-x}} &\iff y(2 - e^{-x}) = 4 \\ &\iff 2y - ye^{-x} = 4 \\ &\iff 2y = 4 + ye^{-x} \\ &\iff 2y - 4 = ye^{-x} \\ &\iff \ln(2y - 4) = \ln(ye^{-x}) \\ &\iff \ln(2y - 4) = \ln(y) + \ln(e^{-x}) \\ &\iff \ln(2y - 4) - \ln(y) = -x \\ &\iff \ln\left(\frac{2y - 4}{y}\right) = -x \\ &\iff \ln\left(\frac{y}{2y - 4}\right) = x \end{aligned}$$

Es decir,

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x}{2x - 4}\right)$$