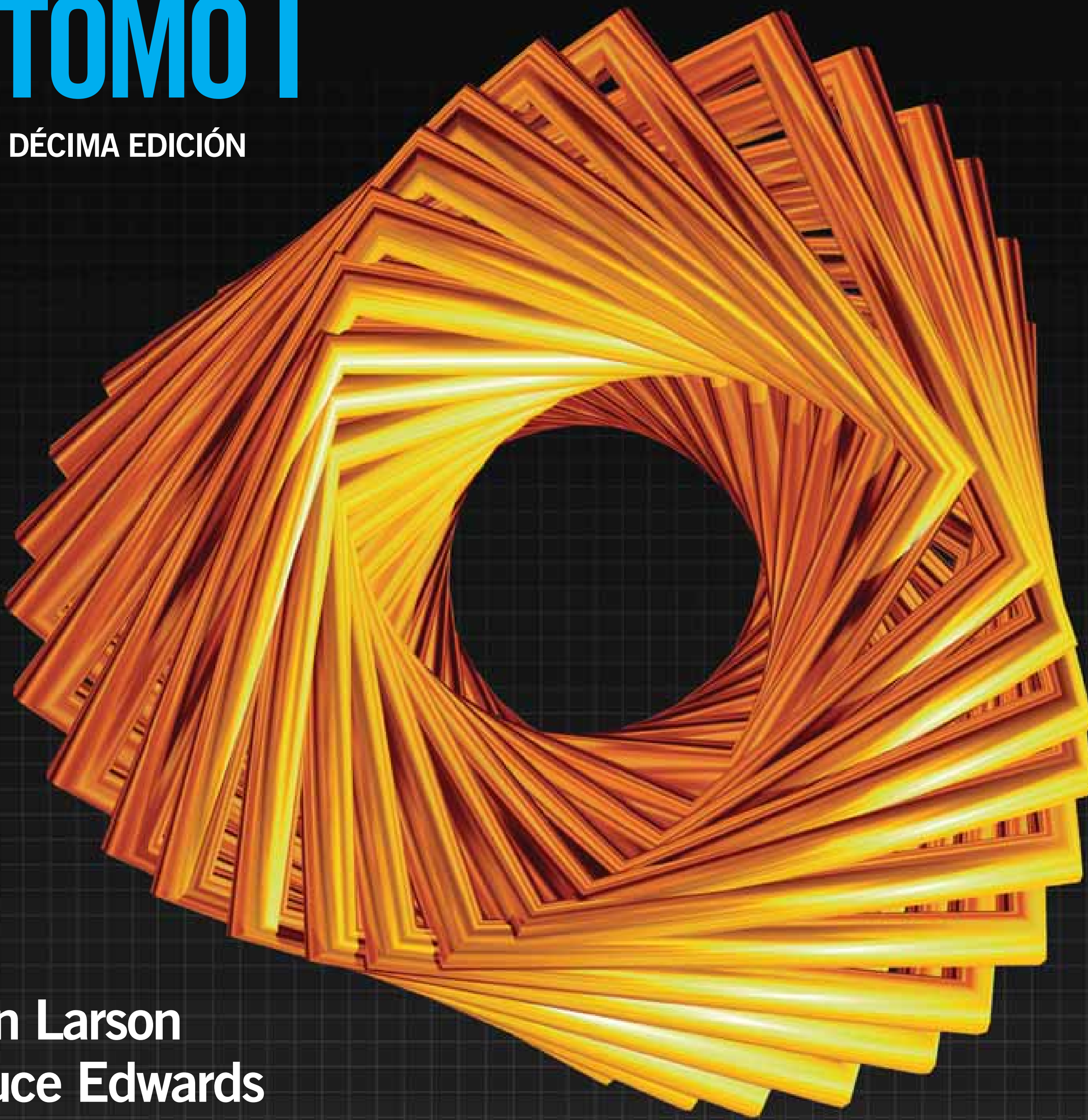
CENGAGE Learning

CÁLCULO

TOMO I

DÉCIMA EDICIÓN



Ron Larson
Bruce Edwards

P Preparación para el cálculo

P.1 Gráficas y modelos
P.2 Modelos lineales y razones de cambio
P.3 Funciones y sus gráficas
P.4 Ajuste de modelos a colecciones de datos

Horas de luz
(Ejemplo 3, p. 33)

Aerodinámica
(Ejercicio 96, p. 30)

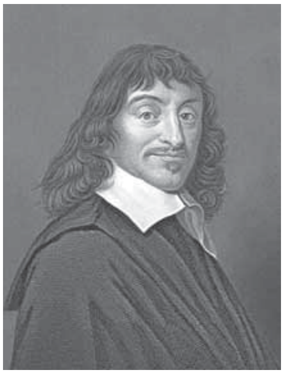
Diseño de banda transportadora *(Ejercicio 23, p. 16)*

Suscriptores de teléfono celular
(Ejercicio 68, p. 9)

Modelado de la concentración de dióxido de carbono
(Ejemplo 6, p. 7)

P.1 Gráficas y modelos

- **Dibujar la gráfica de una ecuación.**
- **Encontrar las intersecciones de la gráfica.**
- **Probar la simetría de una gráfica respecto a un eje y al origen.**
- **Encontrar los puntos de intersección de dos gráficas.**
- **Interpretar los modelos matemáticos con los datos de la vida real.**



RENÉ DESCARTES (1596–1650)

Descartes hizo muchas contribuciones a la filosofía, la ciencia y las matemáticas. En su libro *La Géométrie*, publicado en 1637, describió la idea de representar puntos del plano por medio de pares de números reales y curvas en el plano mediante ecuaciones.

Ver LarsonCalculus.com para leer más acerca de esta biografía.

Gráfica de una ecuación

En 1637, el matemático francés René Descartes revolucionó el estudio de las matemáticas mediante la combinación de sus dos principales campos: álgebra y geometría. Con el plano de coordenadas de Descartes, los conceptos geométricos se podrían formular analíticamente y los conceptos algebraicos se podrían ver de forma gráfica. El poder de este enfoque era tal, que a un siglo de su introducción, mucho del cálculo ya se había desarrollado. Se puede seguir el mismo método en su estudio del cálculo. Es decir, mediante la visualización de cálculo desde múltiples perspectivas, en forma *gráfica, analítica y numérica*, aumentará su comprensión de los conceptos fundamentales.

Considere la ecuación $3x + y = 7$. El punto $(2, 1)$ es un **punto solución** de la ecuación, puesto que esta última se cumple (es cierto) cuando se sustituye x por 2 y y por 1. Esta ecuación tiene muchas otras soluciones, como $(1, 4)$ y $(0, 7)$, para encontrarlas de manera sistemática despeje y de la ecuación inicial.

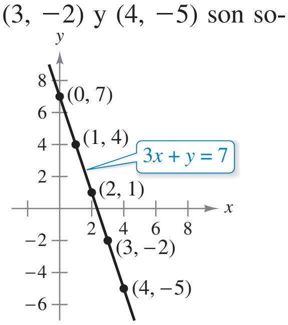
$$y = 7 - 3x$$ Método analítico

Ahora, se construye una **tabla de valores** dando valores de x.

x	0	1	2	3	4
y	7	4	1	-2	-5

Método numérico

A partir de la tabla, se puede ver que $(0, 7)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(3, -2)$ y $(4, -5)$ son soluciones de la ecuación inicial $3x + y = 7$. Al igual que muchas ecuaciones, ésta tiene una cantidad infinita de soluciones. El conjunto de todos los puntos de solución constituye la **gráfica** de la ecuación, como se ilustra en la figura P.1. Observe que aunque se refiera al dibujo de la figura P.1 como la gráfica de $3x + y = 7$, en realidad sólo representa una *porción* de la misma. La gráfica completa se extendería fuera de la página.



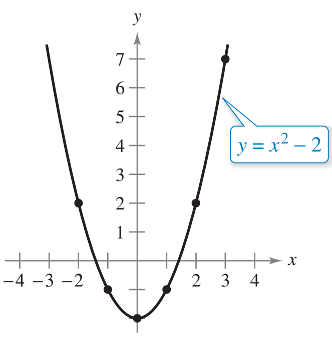
Método gráfico: $3x + y = 7$
Figura P.1

En este curso se estudiarán varias técnicas para la representación gráfica. La más simple consiste en dibujar puntos hasta que la forma esencial de la gráfica sea evidente.

EJEMPLO 1 Dibujar una gráfica mediante el trazado de puntos

Para dibujar la gráfica de $y = x^2 - 2$, primero construya una tabla de valores. A continuación, dibuje los puntos dados en la tabla. Después, una los puntos con una *curva suave*, como se muestra en la figura P.2. Esta gráfica es una **parábola**. Es una de las cónicas que estudiará en el capítulo 10.

x	-2	-1	0	1	2	3
y	2	-1	-2	-1	2	7



La parábola $y = x^2 - 2$
Figura P.2

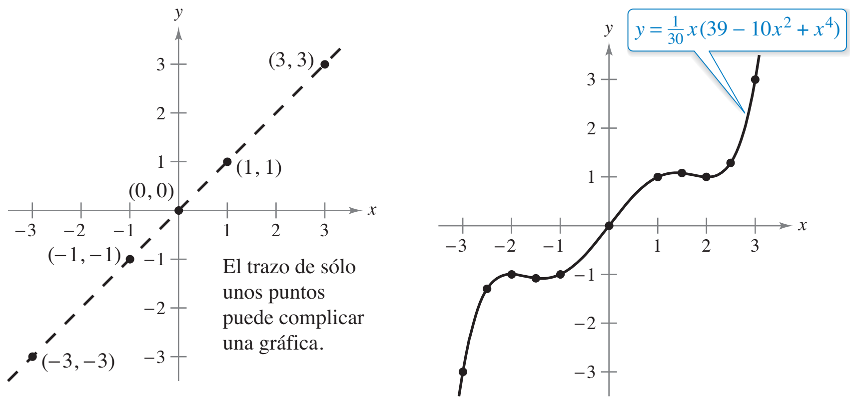
Uno de los inconvenientes de la representación mediante el trazado de puntos radica en que la obtención de una idea confiable de la forma de una gráfica puede exigir que se marque un gran número de puntos. Utilizando sólo unos pocos, se corre el riesgo de obtener una visión deformada de la gráfica. Por ejemplo, suponiendo que para dibujar la gráfica de

$$y = \frac{1}{30}x(39 - 10x^2 + x^4)$$

se han marcado sólo cinco puntos:

$$(-3, -3), \quad (-1, -1), \quad (0, 0), \quad (1, 1) \quad \text{y} \quad (3, 3)$$

como se muestra en la figura P.3(a). A partir de estos cinco puntos se podría concluir que la gráfica es una recta. Sin embargo, esto no es correcto. Trazando varios puntos más, se puede ver que la gráfica es más complicada, como se observa en la figura P.3(b).



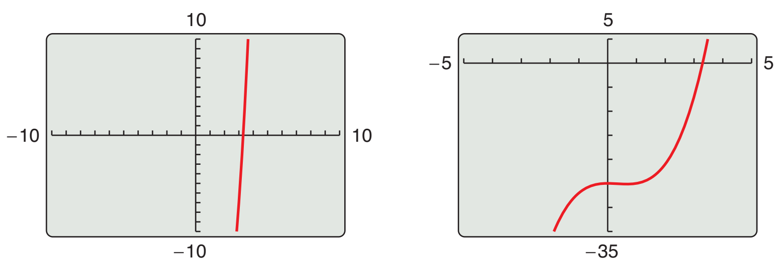
(a) **(b)**

Figura P.3

TECNOLOGÍA La tecnología moderna ha simplificado el dibujo de las gráficas. No obstante, incluso recurriendo a ella es posible desfigurar una gráfica. Por ejemplo, cada una de las pantallas de la herramienta de graficación* de la figura P.4 muestran una porción de la gráfica de

$$y = x^3 - x^2 - 25.$$

En la pantalla de la izquierda puede suponer que la gráfica es una recta. Sin embargo, la de la derecha muestra que no es así. Entonces, cuando dibuja una gráfica, ya sea a mano o mediante una herramienta de graficación, debe tener en cuenta que diferentes ventanas de representación pueden dar lugar a imágenes muy distintas a las de la gráfica. Al elegir una ventana, la clave está en mostrar una imagen de la gráfica que se adecue al contexto del problema.



Visualizaciones en la pantalla de una herramienta de graficación de $y = x^3 - x^2 - 25$.
Figura P.4

Exploración

Comparación de los métodos gráfico y analítico Utilice una herramienta de graficación para representar cada una de las siguientes ecuaciones. En cada caso, encuentre una ventana de representación que muestre las características principales de la gráfica.

a. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$

b. $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 25$

c. $y = -x^3 - 3x^2 + 20x + 5$

d. $y = 3x^3 - 40x^2 + 50x - 45$

e. $y = -(x + 12)^3$

f. $y = (x - 2)(x - 4)(x - 6)$

Resolver este problema usando sólo métodos gráficos conllevaría una estrategia simple de "intuición, comprobación y revisión". ¿Qué tipo de aspectos podría involucrar un planteamiento analítico? Por ejemplo, ¿tiene simetrías la gráfica? ¿Tiene inflexiones? Si es así, ¿dónde están? A medida que se avance por los capítulos 1, 2 y 3 de este texto, se estudiarán muchas herramientas analíticas nuevas que serán de ayuda para analizar las gráficas de ecuaciones como éstas.

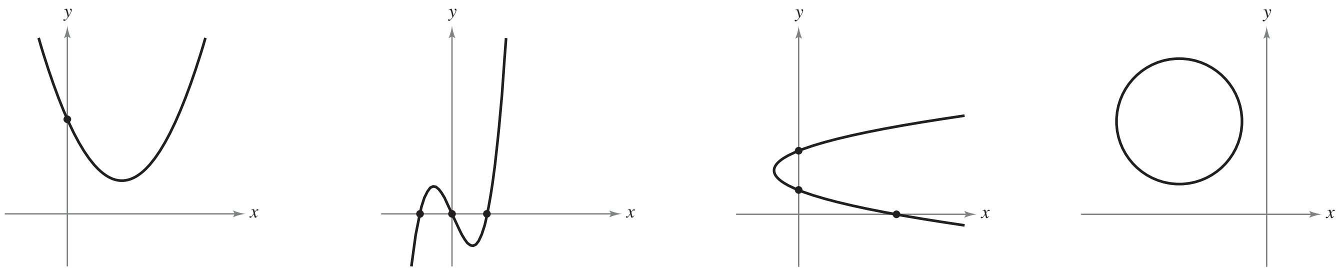
*En este libro, el término *herramienta de graficación* se refiere a una calculadora graficadora o a una herramienta graficadora como *Maple*, *Mathematica* o a la calculadora *TI−Nspire*.

COMENTARIO Algunos textos denominan intersección x a la coordenada x del punto $(a, 0)$ en un lugar del propio punto. A menos que sea necesario distinguirlos, se usará el término *intersección* para denotar tanto al punto de intersección con el eje x como a su abscisa.

Intersecciones de una gráfica

Dos tipos de puntos de solución útiles al representar gráficamente una ecuación son aquellos en los que la coordenada x o y es cero. Tales puntos se denominan **intersecciones con los ejes**, porque son los puntos en los que la gráfica corta (hace intersección con) el eje x o eje y. Un punto del tipo $(a, 0)$ es una **intersección en x** de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de ésta. Para determinar las intersecciones en x de una gráfica, iguale y a cero y despeje x de la ecuación resultante. De manera análoga, un punto del tipo $(0, b)$ es una **intersección en y** de la gráfica de una ecuación si es un punto solución de la misma. Para encontrar las intersecciones en y de una gráfica, iguale x a cero y despeje y de la ecuación resultante.

Es posible que un gráfico no carezca de intersecciones con los ejes, o que presente varias de ellas. Por ejemplo, considere las cuatro gráficas de la figura P.5.



No hay intersecciones con el eje x
Una intersección con eleje y

Tres intersecciones con el eje x
Una intersección con el eje y

Una intersección con el eje x
Dos intersecciones con el eje y

No hay intersecciones

Figura P.5

EJEMPLO 2 Encontrar las intersecciones *x* y *y*

Encuentre las intersecciones con los ejes x y y en la gráfica de $y = x^3 - 4x$.

Solución Para determinar las intersecciones en x, haga y *igual* a cero y despeje x.

$$x^3 - 4x = 0 \qquad \text{Iguale } y \text{ a cero.}$$

$$x(x-2)(x+2) = 0 \qquad \text{Factorice.}$$

$$x = 0, 2, \text{o } -2 \qquad \text{Despeje } x.$$

Puesto que esta ecuación admite tres soluciones, puede concluir que la gráfica tiene tres intersecciones en x:

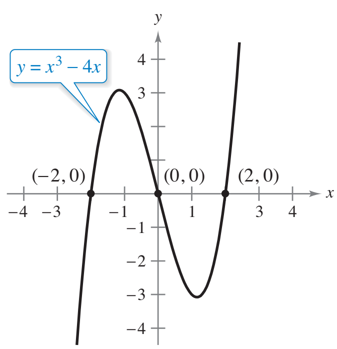
$$(0, 0), \quad (2, 0) \quad \text{y} \quad (-2, 0). \qquad \text{Intersecciones en } x$$

Para encontrar las intersecciones en y, iguale x a cero. Resulta entonces $y = 0$. Por tanto, la intersección en y es

$$(0, 0). \qquad \text{Intersección en } y$$

(Vea la figura P.6.)

TECNOLOGÍA En el ejemplo 2 utilice un método analítico para determinar intersecciones con los ejes. Cuando no es posible utilizar un método analítico, puede recurrir a métodos gráficos buscando los puntos donde la gráfica toca los ejes. Utilice la función *trace* de su herramienta de graficación para aproximar las intersecciones de la gráfica del ejemplo 2. Observe que la herramienta puede tener un programa incorporado que puede encontrar las intersecciones de la gráfica. (Su utilidad puede llamar a esto función *raíz* o *cero*.) Si es así, utilice el programa para encontrar las intersecciones de la gráfica de la ecuación en el ejemplo 2.



Intersecciones de una gráfica.
Figura P.6

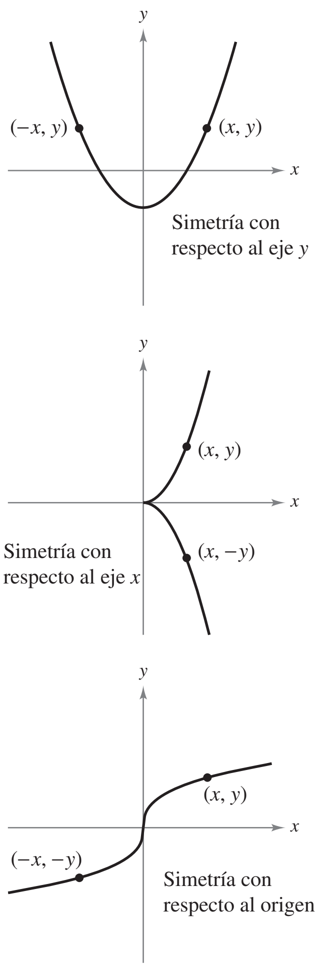


Figura P.7

Simetría de una gráfica

Es útil conocer la simetría de una gráfica antes de intentar trazarla, puesto que sólo se necesitarán la mitad de los puntos para hacerlo. Los tres tipos siguientes de simetría pueden servir de ayuda para dibujar la gráfica de una ecuación (vea la figura P.7).

1. Una gráfica es **simétrica respecto al eje** y si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(-x, y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la porción de la gráfica situada a la izquierda del eje y es la imagen especular de la derecha de dicho eje.
2. Una gráfica es **simétrica respecto al eje** x si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el punto $(x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la porción situada sobre el eje x del eje es la imagen especular de la situada bajo el mismo eje.
3. Una gráfica es **simétrica respecto al origen** si, para cada punto (x, y) de la gráfica, el mismo punto $(-x, -y)$ también pertenece a la gráfica. Esto significa que la gráfica permanece inalterada si se efectúa una rotación de 180° respecto al origen.

Criterios de simetría

1. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje y si al sustituir x por $-x$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.
2. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica respecto al eje x si al sustituir y por $-y$ en la ecuación resulta una ecuación equivalente.
3. La gráfica de una ecuación en x y y es simétrica con respecto al origen si al sustituir x por $-x$ y y por $-y$ en la ecuación se obtiene una ecuación equivalente.

La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al eje y si cada uno de los términos tiene exponente par (o es una constante). Por ejemplo, la gráfica de

$$y = 2x^4 - x^2 + 2$$

es simétrica respecto al eje y. La gráfica de un polinomio es simétrica respecto al origen si cada uno de los términos tiene exponente impar, como se ilustra en el ejemplo 3.

EJEMPLO 3 Comprobar la simetría

Verifique si la gráfica de $y = 2x^3 - x$ es simétrica respecto (a) al eje y y (b) respecto al origen.

Solución

a. $y = 2x^3 - x$ Escriba la ecuación original.

$y = 2(-x)^3 - (-x)$ Sustituya x por $-x$.

$y = -2x^3 + x$ Simplifique. No es una ecuación equivalente.

Debido a que la sustitución x por $-x$ no produce una ecuación equivalente, se puede concluir que la gráfica de $y = 2x^3 - x$ *no* es simétrica con respecto al eje.

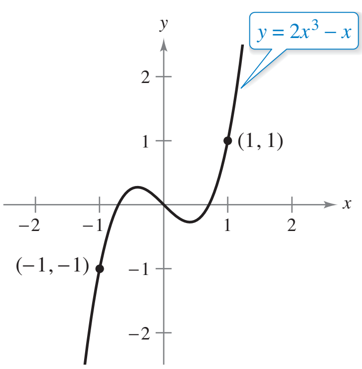
b. $y = 2x^3 - x$ Escriba la ecuación original.

$-y = 2(-x)^3 - (-x)$ Sustituya x por $-x$ y y por $-y$.

$-y = -2x^3 + x$ Simplifique.

$y = 2x^3 - x$ Ecuación equivalente

Puesto que la sustitución x por $-x$ y y por $-y$ produce una ecuación equivalente, puede concluir que la gráfica de $y = 2x^3 - x$ es simétrica con respecto al origen, como se muestra en la figura P.8.



Simetría con respecto al origen.
Figura P.8

EJEMPLO 4 Usar las intersecciones y las simetrías para representar una gráfica

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Dibuje la gráfica de $x - y^2 = 1$.

Solución La gráfica es simétrica respecto al eje x, porque al sustituir y por $-y$ se obtiene una ecuación equivalente

$$x - y^2 = 1 \quad \text{Escriba la ecuación original.}$$
$$x - (-y)^2 = 1 \quad \text{Sustituya } y \text{ por } -y.$$
$$x - y^2 = 1 \quad \text{Ecuación equivalente}$$

Esto significa que la porción de la gráfica situada bajo el eje x es una imagen especular de la porción situada sobre el eje. Para dibujar la gráfica, primero se grafica la intersección con el eje x y la porción sobre el eje x. Después se refleja el dibujo en el eje x y se obtiene la gráfica completa, como se muestra en la figura P.9.

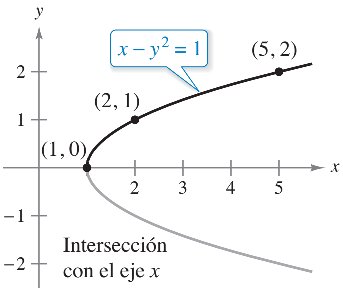


Figura P.9

TECNOLOGÍA Las herramientas de graficación están diseñadas para dibujar con mayor facilidad ecuaciones en las que y está en función de x (vea la definición de **función** en la sección P.3). Para representar otros tipos de ecuación, es necesario dividir la gráfica en dos o más partes, *o bien* utilizar un modo gráfico diferente. Por ejemplo, para graficar la gráfica de la ecuación del ejemplo 4, se puede dividir en dos partes.

$$y_1 = \sqrt{x - 1} \quad \text{Porción superior de la gráfica}$$
$$y_2 = -\sqrt{x - 1} \quad \text{Porción inferior de la gráfica}$$

Puntos de intersección

Se llama **punto de intersección** de las gráficas de dos ecuaciones a todo punto que satisfaga ambas ecuaciones. Los puntos de intersección de dos gráficas se determinan al resolver las ecuaciones de manera simultánea.

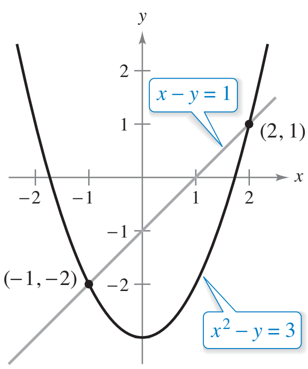
EJEMPLO 5 Determinar los puntos de intersección

Calcule los puntos de intersección de las gráficas de

$$x^2 - y = 3 \quad \text{y} \quad x - y = 1.$$

Solución Comience por representar las gráficas de ambas ecuaciones en el *mismo* sistema de coordenadas rectangulares, como se muestra en la figura P.10. De la figura, parece que las gráficas tienen dos puntos de intersección. Para determinarlos, puede proceder como sigue.

$$y = x^2 - 3 \quad \text{Despeje } y \text{ de la primera ecuación.}$$
$$y = x - 1 \quad \text{Despeje } y \text{ de la segunda ecuación.}$$
$$x^2 - 3 = x - 1 \quad \text{Iguale los valores obtenidos de } y.$$
$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \text{Escriba la ecuación en la forma general.}$$
$$(x - 2)(x + 1) = 0 \quad \text{Factorice.}$$
$$x = 2 \text{ o } -1 \quad \text{Despeje } x.$$



Dos puntos de intersección.
Figura P.10

Los valores correspondientes de y se obtienen sustituyendo $x = 2$ y $x = -1$ en cualquiera de las ecuaciones originales. Resultan así los dos puntos de intersección:

$$(2, 1) \quad \text{y} \quad (-1, -2). \quad \text{Puntos de intersección}$$

Se puede verificar los puntos de intersección del ejemplo 5 sustituyéndolos *tanto* en la ecuación original como usando la función de *intersección* de la herramienta de graficación.

Modelos matemáticos

Al aplicar las matemáticas en la vida real, con frecuencia se usan ecuaciones como **modelos matemáticos**. Si desarrolla un modelo matemático con el fin de representar datos reales, se debe esforzar para alcanzar dos objetivos (a menudo contradictorios): precisión y sencillez. Es decir, el modelo deberá ser lo suficientemente simple como para poder manejarlo, pero también preciso como para producir resultados significativos. La sección P.4 explora estos objetivos de forma más completa.

EJEMPLO 6 Comparar dos modelos matemáticos

El observatorio de Mauna Loa en Hawái ha estado monitoreando el aumento de la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera de la Tierra desde 1958.

El observatorio de Mauna Loa, Hawái, registra la concentración de dióxido de carbono y (en partes por millón) en la atmósfera terrestre. En la figura P.11 se muestran los registros correspondientes al mes de enero de varios años. En el número de julio de 1990 de *Scientific American*, se utilizaron éstos para pronosticar el nivel de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre en el año 2035, utilizando el modelo cuadrático:

$$y = 0.018t^2 + 0.70t + 316.2 \qquad \text{Modelo cuadrático para los datos de 1960 a 1990}$$

donde $t = 0$ representa a 1960, como se muestra en la figura P.11(a). Los datos mostrados en la figura P.11(b) representan los años 1980 hasta 2010 y se pueden modelar por

$$y = 1.68t + 303.5 \qquad \text{Modelo lineal para los datos de 1980-2010}$$

donde $t = 0$ representa a 1960. ¿Cuál fue el pronóstico dado en el artículo de *Scientific American* de 1990? Dados los datos más recientes de los años 1990 a 2010, ¿parece exacta esa predicción para el año 2035?

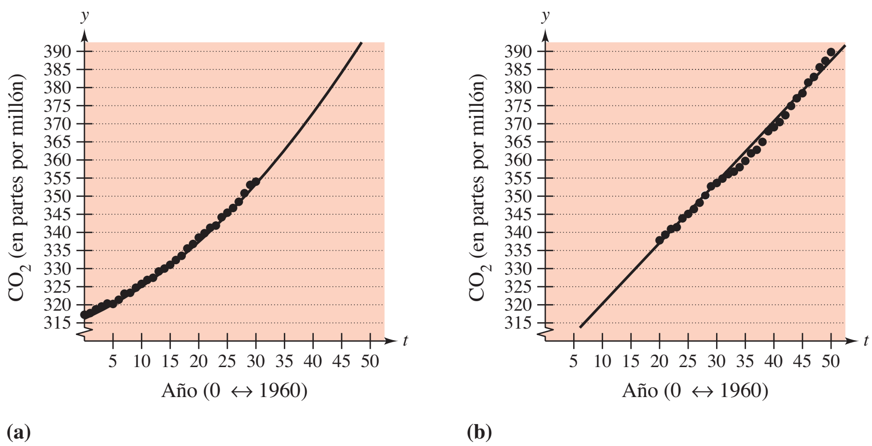


Figura P.11

Solución Para responder a la primera pregunta, sustituya $t = 75$ (para el año 2035) en el modelo cuadrático.

$$y = 0.018(75)^2 + 0.70(75) + 316.2 = 469.95 \qquad \text{Modelo cuadrático}$$

De tal manera, el pronóstico establecido en el artículo de la revista *Scientific American* fue que la concentración de dióxido de carbono en la atmósfera terrestre alcanzaría alrededor de 470 partes por millón en el año 2035. Utilizando el modelo lineal para los datos de 1980 a 2010, la predicción para el año 2035 es

$$y = 1.68(75) + 303.5 = 429.5. \qquad \text{Modelo lineal}$$

Por lo tanto, de acuerdo con el modelo lineal para los años 1980 a 2010, parece que el pronóstico de 1990 fue demasiado elevado.

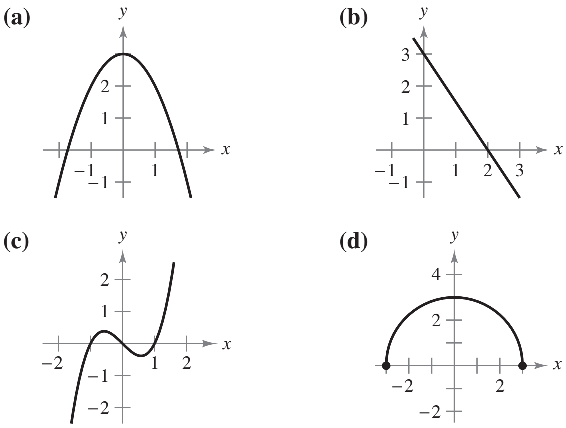
Los modelos del ejemplo 6 se desarrollaron utilizando un procedimiento llamado *ajuste de mínimos cuadrados* (ver la sección 13.9). El modelo lineal tiene una correlación dada por $r^2 = 0.997$ y el modelo cuadrático $r^2 = 0.994$, respectivamente. Cuanto más próximo es r^2 a 1, “mejor” es el modelo.

Gavriel Jecan/Terra/CORBIS

P.1 Ejercicios

Consulte **CalcChat.com** para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Correspondencia **En los ejercicios 1 a 4, relacione cada ecuación con su gráfica. [Las gráficas están etiquetadas (a), (b), (c) y (d).]**



1. $y = -\frac{3}{2}x + 3$ **2.** $y = \sqrt{9 - x^2}$

3. $y = 3 - x^2$ **4.** $y = x^3 - x$

Elaborar una gráfica mediante puntos de trazado **En los ejercicios 5 a 14, elabore la gráfica de la ecuación mediante el trazado de puntos.**

5. $y = \frac{1}{2}x + 2$ **6.** $y = 5 - 2x$

7. $y = 4 - x^2$ **8.** $y = (x - 3)^2$

9. $y = |x + 2|$ **10.** $y = |x| - 1$

11. $y = \sqrt{x} - 6$ **12.** $y = \sqrt{x + 2}$

13. $y = \dfrac{3}{x}$ **14.** $y = \dfrac{1}{x + 2}$

Solucionar puntos de aproximación **En los ejercicios 15 y 16, utilice una herramienta de graficación para representar la ecuación. Desplace el cursor a lo largo de la curva para determinar de manera aproximada la coordenada desconocida de cada punto solución, con una precisión de dos decimales.**

15. $y = \sqrt{5 - x}$
(a) $(2, y)$
(b) $(x, 3)$

16. $y = x^5 - 5x$
(a) $(-0.5, y)$
(b) $(x, -4)$

Encontrar la intersección **En los ejercicios 17 a 26, encuentre las intersecciones.**

17. $y = 2x - 5$ **18.** $y = 4x^2 + 3$

19. $y = x^2 + x - 2$ **20.** $y^2 = x^3 - 4x$

21. $y = x\sqrt{16 - x^2}$ **22.** $y = (x - 1)\sqrt{x^2 + 1}$

23. $y = \dfrac{2 - \sqrt{x}}{5x + 1}$ **24.** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{(3x + 1)^2}$

25. $x^2y - x^2 + 4y = 0$ **26.** $y = 2x - \sqrt{x^2 + 1}$

Pruebas de simetría **En los ejercicios 27 a 38, busque si existe simetría respecto a cada uno de los ejes y respecto al origen.**

27. $y = x^2 - 6$ **28.** $y = x^2 - x$

29. $y^2 = x^3 - 8x$ **30.** $y = x^3 + x$

31. $xy = 4$ **32.** $xy^2 = -10$

33. $y = 4 - \sqrt{x + 3}$ **34.** $xy - \sqrt{4 - x^2} = 0$

35. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **36.** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

37. $y = |x^3 + x|$ **38.** $|y| - x = 3$

Utilizar una gráfica para dibujar la intersección y simetría **En los ejercicios 39 a 56, encuentre la intersección y pruebe la simetría. Después dibuje la gráfica de la ecuación.**

39. $y = 2 - 3x$ **40.** $y = \frac{2}{3}x + 1$

41. $y = 9 - x^2$ **42.** $y = 2x^2 + x$

43. $y = x^3 + 2$ **44.** $y = x^3 - 4x$

45. $y = x\sqrt{x + 5}$ **46.** $y = \sqrt{25 - x^2}$

47. $x = y^3$ **48.** $x = y^2 - 4$

49. $y = \dfrac{8}{x}$ **50.** $y = \dfrac{10}{x^2 + 1}$

51. $y = 6 - |x|$ **52.** $y = |6 - x|$

53. $y^2 - x = 9$ **54.** $x^2 + 4y^2 = 4$

55. $x + 3y^2 = 6$ **56.** $3x - 4y^2 = 8$

Encontrar los puntos de intersección **En los ejercicios 57 a 62, encuentre los puntos de intersección de las gráficas de las ecuaciones.**

57. $x + y = 8$
$4x - y = 7$

58. $3x - 2y = -4$
$4x + 2y = -10$

59. $x^2 + y = 6$
$x + y = 4$

60. $x = 3 - y^2$
$y = x - 1$

61. $x^2 + y^2 = 5$
$x - y = 1$

62. $x^2 + y^2 = 25$
$-3x + y = 15$

Encontrar puntos de intersección **En los ejercicios 63 a 66, utilice una herramienta de graficación para encontrar los puntos de intersección de las gráficas. Verifique los resultados de manera analítica.**

63. $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$
$y = -x^2 + 3x - 1$

64. $y = x^4 - 2x^2 + 1$
$y = 1 - x^2$

65. $y = \sqrt{x + 6}$
$y = \sqrt{-x^2 - 4x}$

66. $y = -|2x - 3| + 6$
$y = 6 - x$

El símbolo indica los ejercicios donde se pide utilizar la tecnología para graficar o un sistema de álgebra computacional. La resolución de los demás ejercicios también puede simplificarse mediante el uso de la tecnología adecuada.

67. Modelar datos La tabla muestra el producto interno bruto o PIB (en billones de dólares), en determinados años. (*Fuente: Oficina de Análisis Económico de E.U.*)

Año	1980	1985	1990	1995
PIB	2.8	4.2	5.8	7.4

Año	2000	2005	2010
PIB	10.0	12.6	14.5

(a) Utilice una herramienta de graficación para encontrar un modelo matemático de la forma $y = at^2 + bt + c$ de los datos. En el modelo, y representa el PIB (en billones de dólares) y t representa el año, con $t = 0$ correspondiendo a 1980.

(b) Utilice una herramienta de graficación para trazar los datos y graficar el modelo. Compare los datos con el modelo.

(c) Utilice el modelo para predecir el PIB en el año 2020.

68. Modelar datos

La tabla muestra el número de suscriptores de teléfonos móviles (en millones) en Estados Unidos para años seleccionados. (*Fuente: CTIA—The Wireless*)

Año	1995	1998	2001	2004	2007	2010
Número	34	69	128	182	255	303

(a) Utilice la función de regresión de una herramienta de graficación y encuentre así un modelo matemático de la forma $y = at^2 + bt + c$ de los datos. En este modelo, y representa el número de usuarios (en millones) y t representa el año, con $t = 5$ correspondiendo a 1995.

(b) Utilice una herramienta de graficación para trazar los datos y graficar el modelo. Compare los datos con el modelo.

(c) Utilice el modelo para predecir el número de suscriptores de teléfonos móviles en Estados Unidos en el año 2020.

69. Punto de equilibrio Encuentre las ventas necesarias para alcanzar el equilibrio ($R = C$), si el costo C de producción de x unidades es $C = 2.04x + 5600$ y el ingreso R por vender x unidades es $R = 3.29x$.

70. Alambre de cobre La resistencia y en ohms de 1000 pies de alambre de cobre a 77°F se puede aproximar con el modelo matemático

$$y = \frac{10{,}770}{x^2} - 0.37, \quad 5 \le x \le 100$$

donde x es el diámetro del alambre en milésimas de pulgada (0.001 pulg.). Utilice una herramienta de graficación para trazar el modelo. Si se duplica el diámetro del alambre, ¿en qué factor aproximado varía la resistencia?

71. Usar puntos solución ¿Para qué valores de k la gráfica de $y = kx^3$ pasan por el punto?

(a) $(1, 4)$ (b) $(-2, 1)$ (c) $(0, 0)$ (d) $(-1, -1)$

72. Usar puntos solución ¿Para qué valores de k la gráfica de $y^2 = 4kx$ pasan por el punto?

(a) $(1, 1)$ (b) $(2, 4)$ (c) $(0, 0)$ (d) $(3, 3)$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

Escritura de ecuaciones **En los ejercicios 73 y 74, escriba una ecuación cuya gráfica tenga la propiedad que se indica. (Puede existir más de una respuesta correcta.)**

73. La gráfica tiene intersecciones en $x = -4$, $x = 3$ y $x = 8$.

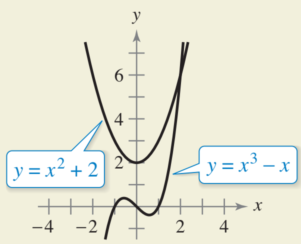
74. La gráfica tiene intersecciones en $x = -\frac{3}{2}$, $x = 4$ y $x = \frac{5}{2}$.

75. Demostración

(a) Demuestre que si una gráfica es simétrica con respecto al eje x y al eje y, entonces es simétrica con respecto al origen. Dé un ejemplo que demuestre que lo contrario no es cierto.

(b) Demuestre que si una gráfica es simétrica con respecto a cualquiera de los ejes y al origen, entonces es simétrica con respecto al otro eje.

76. ¿CÓMO LO VE? Utilice las gráficas de dos ecuaciones para contestar las siguientes preguntas.



(a) ¿Cuáles son las intersecciones de cada ecuación?

(b) Determine la simetría de cada ecuación.

(c) Determine el punto de intersección de dos ecuaciones.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 77 a 80, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o proporcione un ejemplo que demuestre que es falso.**

77. Si $(-4, -5)$ es el punto en una gráfica que es simétrica con respecto al eje x, entonces $(4, -5)$ también es un punto en dicha gráfica.

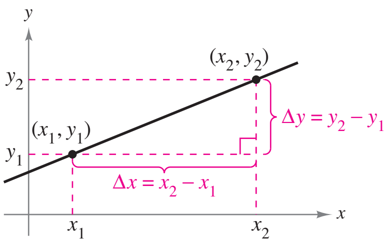
78. Si $(-4, -5)$ es el punto en una gráfica que es simétrica con respecto al eje y, entonces $(4, -5)$ también es un punto en la gráfica.

79. Si $b^2 - 4ac > 0$ y $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ tiene dos intersecciones x.

80. Si $b^2 - 4ac = 0$ y $a \neq 0$, entonces la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ sólo tiene una intersección con x.

P.2 Modelos lineales y razones de cambio

- **Encontrar la pendiente de una recta que pasa por dos puntos.**
- **Escribir la ecuación de recta dados un punto y su pendiente.**
- **Interpretar pendiente como una razón en aplicaciones cotidianas.**
- **Trazar la gráfica de una ecuación lineal en la forma de pendiente-intersección.**
- **Escribir las ecuaciones de rectas que son paralelas o perpendiculares a una recta dada.**



$\Delta y = y_2 - y_1 =$ cambio en y
$\Delta x = x_2 - x_1 =$ cambio en x
Figura P.12

La pendiente de una recta

La **pendiente** de una recta no vertical es una medida del número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de cambio horizontal de izquierda a derecha. Considere los dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la recta de la figura P.12. Al desplazarse de izquierda a derecha por la recta se produce un cambio vertical de,

$$\Delta y = y_2 - y_1 \qquad \text{Cambio en } y$$

unidades por cada cambio horizontal de

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad \text{Cambio en } x$$

unidades (Δ es la letra griega *delta* mayúscula y los símbolos Δy y Δx se leen "delta de y" y "delta de x").

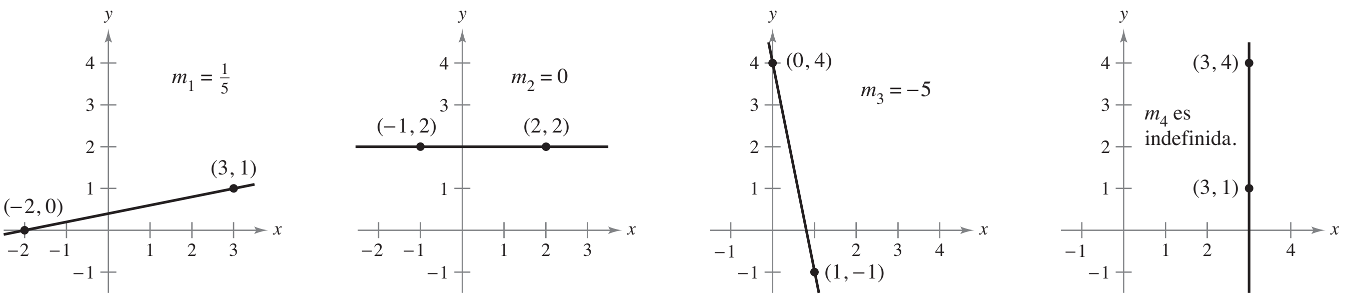
> **Definición de la pendiente de una recta**
>
> La **pendiente** m de una recta no vertical que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es
>
> $$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2.$$
>
> La pendiente no está definida por rectas verticales.

Al aplicar la fórmula de la pendiente, observe que

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}.$$

Por tanto, no importa el orden en que se reste, *siempre* que sea coherente y las dos "coordenadas restadas" provengan del mismo punto.

En la figura P.13 se muestran cuatro rectas con pendiente: una positiva, otra cero, otra negativa y otra "indefinida". En general, cuanto mayor sea el valor absoluto de la pendiente de una recta, mayor es su inclinación. Por ejemplo, en la figura P.13, la recta con una pendiente –5 está más inclinada que la pendiente $\frac{1}{5}$.



Si m es positiva, la recta sube de izquierda a derecha.

Si m es cero, la recta es horizontal.

Si m es negativa, la recta baja de izquierda a derecha.

Si m es indefinida, la recta es vertical.

Figura P.13

Exploración

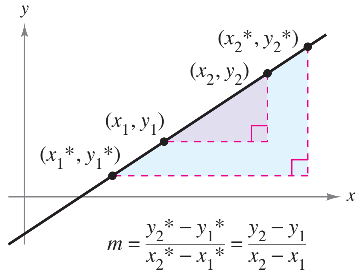
Investigación de ecuaciones de las rectas Utilice una herramienta de graficación para dibujar cada una de las siguientes ecuaciones lineales. ¿Qué punto es común a las siete rectas? ¿Qué número determina la pendiente de la recta en cada ecuación?

a. $y - 4 = -2(x + 1)$
b. $y - 4 = -1(x + 1)$
c. $y - 4 = -\frac{1}{2}(x + 1)$
d. $y - 4 = 0(x + 1)$
e. $y - 4 = \frac{1}{2}(x + 1)$
f. $y - 4 = 1(x + 1)$
g. $y - 4 = 2(x + 1)$

Utilice los resultados para construir la ecuación de una recta que pase por $(-1, 4)$ con una pendiente m.

Ecuaciones de las rectas

Para calcular la pendiente de una recta pueden utilizarse dos de sus puntos *cualesquiera*. Esto puede verificarse con ayuda de los triángulos semejantes de la figura P.14. (Recuerde que los cocientes de los lados correspondientes de dos triángulos semejantes son todos iguales.)



Cualquier par de puntos de una recta no vertical determina su pendiente.
Figura P.14

Si (x_1, y_1) es un punto sobre una recta no vertical con pendiente m y (x, y) es *cualquier otro* punto de la recta, entonces

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m.$$

Esta ecuación, que involucra las dos variables x y y, se puede escribir en la forma

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

que es conocida como la **forma punto-pendiente** de la ecuación de una recta.

Ecuación punto-pendiente de una recta

La **forma punto-pendiente** de la ecuación de la recta con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) está dada por

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

COMENTARIO Recuerde que la pendiente se puede usar sólo para describir una recta no vertical. De tal manera, las rectas verticales no se pueden expresar mediante ecuaciones punto-pendiente. Por ejemplo, la ecuación de la recta vertical que pasa por el punto $(1, -2)$ es $x = 1$.

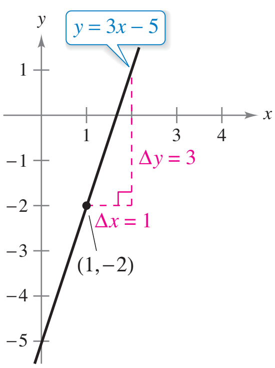
EJEMPLO 1 Determinar la ecuación de una recta

Encuentre la ecuación de la recta con pendiente 3 que pasa por el punto $(1, -2)$. Luego trace la recta.

Solución

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) && \text{Forma punto-pendiente.} \\ y - (-2) &= 3(x - 1) && \text{Sustituya } -2 \text{ por } y_1, 1 \text{ por } x_1 \text{ y } 3 \text{ por } m. \\ y + 2 &= 3x - 3 && \text{Simplifique.} \\ y &= 3x - 5 && \text{Despeje } y. \end{aligned}$$

Para dibujar la recta, primero trace el punto $(1, -2)$. Entonces, como la pendiente es $m = 3$, puede localizar un segundo punto de la recta moviendo una unidad a la derecha y tres unidades hacia arriba, como se muestra en la figura P.15.



La recta de pendiente 3 que pasa por el punto $(1, -2)$.
Figura P.15

Cocientes y razones de cambio

La pendiente de una recta puede interpretarse ya sea como un *cociente* o como una *razón*. Si los ejes x y y tienen la misma unidad de medida, la pendiente no tiene unidades y es un **cociente**. Si los ejes x y y tienen distintas unidades de medida, la pendiente es una **razón** o **razón de cambio**. Al estudiar cálculo, encontrará aplicaciones relativas a ambas interpretaciones de la pendiente.

EJEMPLO 2 Usar una pendiente como una razón

La pendiente máxima recomendada de una rampa para sillas de ruedas es $\frac{1}{12}$. Un negocio instala una rampa para sillas de ruedas que se eleva a una altura de 22 pulgadas sobre una longitud de 24 pies, como se muestra en la figura P.16. ¿Está la rampa más pronunciada de lo recomendado? (*Fuente: Normas de Diseño Accesible de la ADA*)

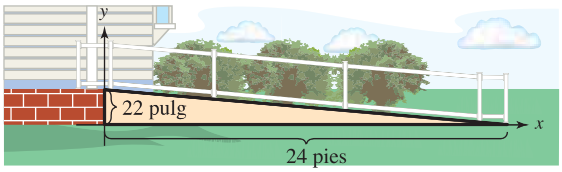


Figura P.16

Solución La longitud de la rampa es de 24 pies o $12(24) = 288$ pulgadas. La pendiente de la rampa es la razón de su altura (ascenso) a su longitud (avance).

$$\begin{aligned}\text{Pendiente de la rampa} &= \frac{\text{ascenso}}{\text{avance}}\\ &= \frac{22 \text{ pulg.}}{288 \text{ pulg.}}\\ &\approx 0.076\end{aligned}$$

Debido a que la pendiente de la rampa es menor que $\frac{1}{12} \approx 0.083$, la rampa no está más empinada de lo recomendado. Observe que la pendiente es un cociente y no tiene unidades.

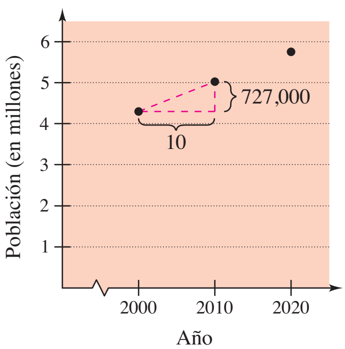
EJEMPLO 3 Usar una pendiente como una razón de cambio

La población de Colorado era de 4,302,000 en el año 2000 y en el año 2010 de 5,029,000 aproximadamente. Encuentre la razón de cambio promedio de la población durante este periodo de 10 años. ¿Cuál será la población de Colorado en 2020? (*Fuente: Oficina del Censo de E.U.*)

Solución Durante el periodo de 10 años, la razón de cambio promedio de la población en Colorado fue

$$\begin{aligned}\text{Razón de cambio} &= \frac{\text{cambio en la población}}{\text{cambio en años}}\\ &= \frac{5{,}029{,}000 - 4{,}302{,}000}{2010 - 2000}\\ &= 72{,}700 \text{ personas por año}\end{aligned}$$

Suponiendo que la población de Colorado continúe creciendo a este mismo ritmo durante los próximos 10 años, en el 2020 tendrá una población de alrededor de 5,756,000 (vea la figura P.17).



Población de Colorado.
Figura P.17

La razón de cambio hallada en el ejemplo 3 es una **razón promedio de cambio**. Una razón promedio de cambio se calcula siempre sobre un intervalo. En este caso, el intervalo es [2000, 2010]. En el capítulo 2 se estudiará otro tipo de razón de cambio llamada *razón de cambio instantánea*.

Modelos gráficos lineales

Muchos de los problemas en la geometría de coordenadas se pueden clasificar en dos categorías básicas.

1. Dada una gráfica (o partes de ella), determinar su ecuación.
2. Dada una ecuación, trazar su gráfica.

La forma punto-pendiente de una recta puede emplearse para resolver ciertos problemas de la primera categoría. No obstante, esta forma no resulta útil para resolver problemas de la segunda categoría. La forma que mejor se adapta al trazado de la gráfica de una recta es la forma **pendiente-intersección** de la ecuación de una recta.

Ecuación pendiente-intersección de una recta

La gráfica de la ecuación lineal

$y = mx + b$ Forma pendiente-intersección

es una recta que tiene *pendiente m* y una *intersección* con el eje y en $(0, b)$.

EJEMPLO 4 Trazar rectas en el plano

Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $y = 2x + 1$

b. $y = 2$

c. $3y + x - 6 = 0$

Solución

a. Puesto que $b = 1$, la intersección en y es $(0, 1)$. Como la pendiente es $m = 2$, se sabe que la recta asciende dos unidades por cada unidad que se mueve hacia la derecha, como se muestra en la figura P.18(a).

b. Al escribir la ecuación $y = 2$ en la forma de pendiente-intersección

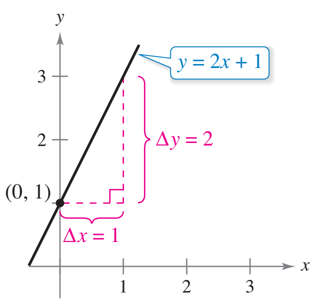
$$y = (0)x + 2$$

se puede ver que la pendiente es $m = 0$ y la intersección con el eje y es $(0, 2)$. Dado que la pendiente es cero, se sabe que es horizontal, como se muestra en la figura P.18(b).

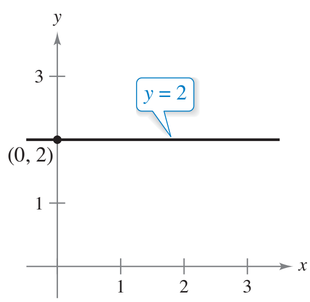
c. Se comienza por escribir la ecuación en la forma pendiente-intersección.

$$3y + x - 6 = 0 \qquad \text{Ecuación original}$$
$$3y = -x + 6 \qquad \text{Despejar el término en } y.$$
$$y = -\tfrac{1}{3}x + 2 \qquad \text{Forma pendiente-intersección}$$

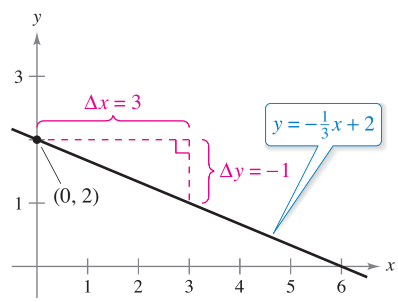
De esta forma, se puede ver que la intersección en y es $(0, 2)$ y la pendiente $m = -\frac{1}{3}$. Esto quiere decir que la recta desciende una unidad por cada tres unidades que se mueve hacia la derecha, como se muestra en la figura P.18(c).



(a) $m = 2$; la recta sube



(b) $m = 0$; la recta es horizontal



(c) $m = -\frac{1}{3}$; la recta baja

Figura P.18

Dado que la pendiente de una recta vertical no está definida, su ecuación no puede escribirse en la forma pendiente-intersección. Sin embargo, la ecuación de cualquier recta puede escribirse en la **forma general.**

$$Ax + By + C = 0$$ Forma general de la ecuación de una recta

donde A y B no son *ambos* cero. Por ejemplo, la recta vertical

$x = a$ Recta vertical

puede representarse por la ecuación general

$x - a = 0.$ Forma general

RESUMEN DE ECUACIONES DE LAS RECTAS

1. Forma general: $Ax + By + C = 0$
2. Línea vertical: $x = a$
3. Línea horizontal: $y = b$
4. Forma pendiente-intersección: $y = mx + b$
5. Forma punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$

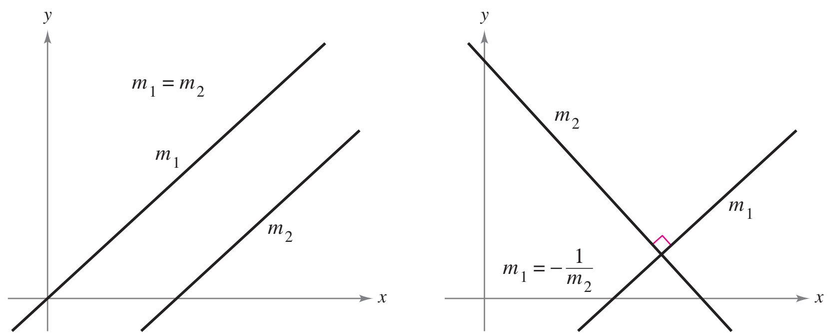
Rectas paralelas y perpendiculares

La pendiente de una recta es útil para determinar si dos rectas son paralelas o perpendiculares, como se muestra en la figura P.19. En específico, dos rectas no verticales con la misma pendiente son paralelas, y dos rectas no verticales cuyas pendientes son recíprocas negativas son perpendiculares.

COMENTARIO En matemáticas, la expresión "si y solo si" es una manera de establecer dos implicaciones en una misma afirmación. Por ejemplo, la primera afirmación de la derecha equivale a las dos implicaciones siguientes:

a. Si dos rectas no verticales distintas son paralelas, entonces sus pendientes son iguales.

b. Si dos rectas no verticales distintas tienen pendientes iguales, entonces son paralelas.



Rectas paralelas Rectas perpendiculares

Figura P.19

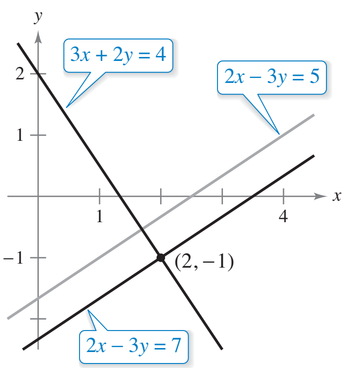
Rectas paralelas y rectas perpendiculares

1. Dos rectas no verticales distintas son **paralelas** si y sólo si sus pendientes son iguales, es decir, si y sólo si

$m_1 = m_2.$ Las paralelas ⇔ Tienen pendientes iguales

2. Dos rectas no verticales distintas son **perpendiculares** si y sólo si sus pendientes son recíprocas negativas, es decir, si y sólo si

$m_1 = -\dfrac{1}{m_2}.$ Las perpendiculares ⇔ Sus pendientes no son iguales.



Rectas paralela y perpendicular a $2x - 3y = 5$.
Figura P.20

EJEMPLO 5 Rectas paralelas y rectas perpendiculares

Consulte LarsonCalculus.com para una versión interactiva de este tipo de ejemplo.

Encuentre la forma general de las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $(2, -1)$ y son (a) paralela a y (b) perpendicular a la recta $2x - 3y = 5$.

Solución Se comienza por escribir la ecuación lineal $2x - 3y = 5$ en forma de pendiente-intersección.

$$2x - 3y = 5 \qquad \text{Escriba la ecuación original.}$$
$$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \qquad \text{Forma pendiente-intersección}$$

Por lo tanto, la recta dada tiene una pendiente de $m = \frac{2}{3}$. (Vea la figura P.20.)

a. La recta que pasa por $(2, -1)$ que es paralela a la recta dada tiene pendiente de $\frac{2}{3}$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente}$$
$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 2) \qquad \text{Sustituya.}$$
$$3(y + 1) = 2(x - 2) \qquad \text{Simplifique.}$$
$$3y + 3 = 2x - 4 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$
$$2x - 3y - 7 = 0 \qquad \text{Forma general}$$

Observe la similitud con la ecuación de la recta dada, $2x - 3y = 5$.

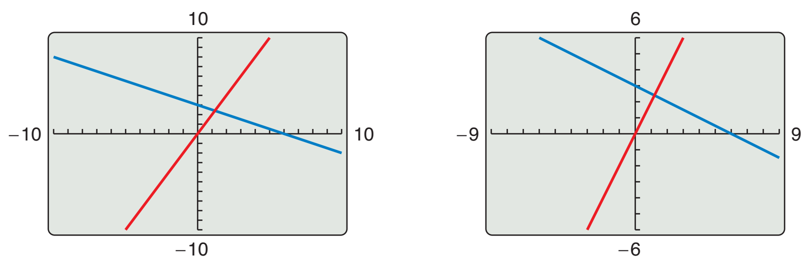
b. Al calcular el recíproco negativo de la pendiente de la recta dada, se puede determinar que la pendiente de toda recta perpendicular a la recta inicial es $-\frac{3}{2}$.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \qquad \text{Forma punto-pendiente}$$
$$y - (-1) = -\frac{3}{2}(x - 2) \qquad \text{Sustituya.}$$
$$2(y + 1) = -3(x - 2) \qquad \text{Simplifique.}$$
$$2y + 2 = -3x + 6 \qquad \text{Propiedad distributiva}$$
$$3x + 2y - 4 = 0 \qquad \text{Forma general}$$

CONFUSIÓN TECNOLÓGICA La pendiente de una recta parece distorsionada si se utilizan diferentes escalas en los ejes x y y. Por ejemplo, las dos pantallas de calculadora graficadora de las figuras P.21(a) y P.21(b) muestran las rectas dadas por

$$y = 2x \quad \text{y} \quad y = -\frac{1}{2}x + 3.$$

Puesto que las pendientes de estas rectas son una el negativo del inverso de la otra, las rectas son perpendiculares. Sin embargo, en la figura P.21(a) no lo parecen, debido a que la escala del eje x no es la misma que la escala del eje y. En la figura P.21(b) parecen perpendiculares debido a que la escala utilizada del eje x es igual a la empleada para el eje y. Este tipo de ventanas se denomina *ventanas cuadradas.*



(a) La escala del eje x no es la misma que la del eje y.

(b) La escala del eje x es la misma que la del eje y.

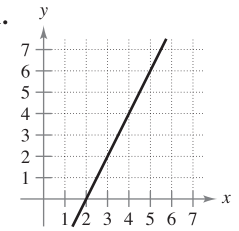
Figura P.21

P.2 Ejercicios

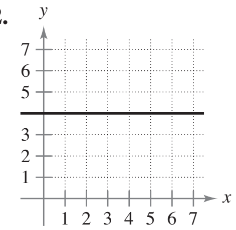
Consulte CalcChat.com para un tutorial de ayuda y soluciones trabajadas de los ejercicios con numeración impar.

Estimar la pendiente **En los ejercicios 1 a 4, estime la pendiente de la recta a partir de su gráfica. Para imprimir una copia ampliada de la gráfica, visite *MathGraphs.com*.**

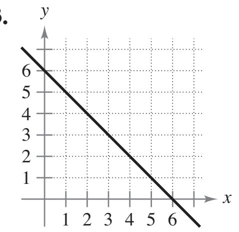
1.



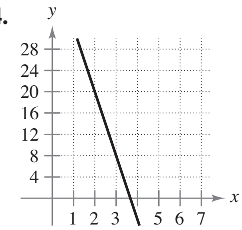
2.



3.



4.



Encontrar la pendiente de una recta **En los ejercicios 5 a 10, grafique el par de puntos y encuentre la pendiente de la recta que pasa por ellos.**

5. $(3, -4), (5, 2)$ **6.** $(1, 1), (-2, 7)$

7. $(4, 6), (4, 1)$ **8.** $(3, -5), (5, -5)$

9. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{6}\right)$ **10.** $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Dibujar rectas **En los ejercicios 11 y 12, trace las rectas a través del punto con las pendientes indicadas. Realice los dibujos en el mismo conjunto de ejes de coordenadas.**

	Puntos	Pendientes			
11.	$(3, 4)$	(a) 1	(b) -2	(c) $-\frac{3}{2}$	(d) Indefinida
12.	$(-2, 5)$	(a) 3	(b) -3	(c) $\frac{1}{3}$	(d) 0

Encontrar la pendiente de una recta **En los ejercicios 13 a 16, utilice el punto sobre la recta y su pendiente para determinar otros tres puntos por los que pase la recta (hay más de una respuesta correcta).**

	Punto	Pendiente		Punto	Pendiente
13.	$(6, 2)$	$m = 0$	**14.**	$(-4, 3)$	m no está definida.
15.	$(1, 7)$	$m = -3$	**16.**	$(-2, -2)$	$m = 2$

Encontrar la pendiente de una recta **En los ejercicios 17 a 22, encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto y tiene la pendiente indicada. Luego trace la recta.**

	Punto	Pendiente		Punto	Pendiente
17.	$(0, 3)$	$m = \frac{3}{4}$	**18.**	$(-5, -2)$	m es indefinida
19.	$(0, 0)$	$m = \frac{2}{3}$	**20.**	$(0, 4)$	$m = 0$
21.	$(3, -2)$	$m = 3$	**22.**	$(-2, 4)$	$m = -\frac{3}{5}$

xtrekx/Shutterstock.com

23. Diseñar una banda transportadora

Una banda transportadora en movimiento se construye para que suba 1 metro por cada 3 metros de cambio horizontal.

(a) Encuentre la pendiente de la cinta transportadora.

(b) Suponga que la banda transportadora se extiende entre dos plantas en una fábrica. Encuentre la longitud de la banda transportadora cuando la distancia vertical entre los pisos es de 10 pies.

24. Modelar datos La siguiente tabla muestra las poblaciones (en millones) de Estados Unidos desde 2004 hasta el 2009. La variable t representa el tiempo en años, con $t = 4$ correspondiente a 2004 (*Fuente: Oficina del Censo de E.U.*)

t	4	5	6	7	8	9
y	293.0	295.8	298.6	301.6	304.4	307.0

(a) Dibuje los datos a mano y una los puntos adyacentes con un segmento de recta.

(b) Utilice la pendiente de cada segmento de recta para determinar el año en que la población aumentó con menor rapidez.

(c) Calcule la razón de cambio promedio de la población de Estados Unidos de 2004 a 2009.

(d) Utilice la razón de cambio promedio de la población para predecir la población de Estados Unidos en 2020.

Encontrar la pendiente y la intersección **En los ejercicios 25 a 30, calcule la pendiente y la intersección en y (si es posible) de la recta.**

25. $y = 4x - 3$ **26.** $-x + y = 1$

27. $x + 5y = 20$ **28.** $6x - 5y = 15$

29. $x = 4$ **30.** $y = -1$

Dibujar una recta en el plano **En los ejercicios 31 a 38, trace la gráfica de la ecuación.**

31. $y = -3$ **32.** $x = 4$

33. $y = -2x + 1$ **34.** $y = \frac{1}{3}x - 1$

35. $y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$ **36.** $y - 1 = 3(x + 4)$

37. $2x - y - 3 = 0$ **38.** $x + 2y + 6 = 0$

Encontrar una ecuación de una recta **En los ejercicios 39 a 46, encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos. Luego trace la recta.**

39. $(0, 0), (4, 8)$ **40.** $(-2, -2), (1, 7)$

41. $(2, 8), (5, 0)$

42. $(-3, 6), (1, 2)$

43. $(6, 3), (6, 8)$

44. $(1, -2), (3, -2)$

45. $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right), \left(0, \frac{3}{4}\right)$

46. $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

47. Encuentre una ecuación de la recta vertical con intersección en 3.

48. Demuestre que la recta con intersecciones $(a, 0)$ y $(0, b)$ tiene la siguiente ecuación.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad a \neq 0, b \neq 0$$

Escribir una ecuación en forma general **En los ejercicios 49 a 54, utilice el resultado del ejercicio 48 para escribir una ecuación de la recta en forma general.**

49. Intersección con el eje x: $(2, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, 3)$

50. Intersección con el eje x: $(-2/3, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, -2)$

51. Punto de la recta $(1, 2)$
Intersección con el eje x: $(a, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, a)$
$(a \neq 0)$

52. Punto de la recta: $(-3, 4)$
Intersección con el eje x: $(a, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, a)$
$(a \neq 0)$

53. Punto de la recta: $(9, -2)$
Intersección con el eje x: $(2a, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, a)$
$(a \neq 0)$

54. Punto de la recta: $\left(-\frac{2}{3}, -2\right)$
Intersección con el eje x: $(a, 0)$
Intersección con el eje y: $(0, -a)$
$(a \neq 0)$

Encontrar rectas paralelas y perpendiculares **En los ejercicios 55 a 62, escriba la ecuación de la recta que pasa por el punto y que sea: (a) paralela a la recta dada, y (b) perpendicular a la recta dada.**

	Punto	Recta		Punto	Recta
55.	$(-7, -2)$	$x = 1$	**56.**	$(-1, 0)$	$y = -3$
57.	$(2, 5)$	$x - y = -2$	**58.**	$(-3, 2)$	$x + y = 7$
59.	$(2, 1)$	$4x - 2y = 3$	**60.**	$\left(\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}\right)$	$7x + 4y = 8$
61.	$\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$	$5x - 3y = 0$	**62.**	$(4, -5)$	$3x + 4y = 7$

Razón de cambio **En los ejercicios 63 a 66 se da el valor de un producto, en dólares, durante 2004 y la razón a la que se espera que varíe su valor durante los próximos 5 años. Utilice esta información para escribir una ecuación lineal que proporcione el valor en dólares *V* del producto en términos del año *t*. (Sea $t = 0$ representativo del año 2010.)**

	Valor en 2012	Razón de cambio
63.	\$1850	\$250 aumento anual
64.	\$156	\$4.50 aumento anual
65.	\$17,200	\$1600 reducción anual
66.	\$245,000	\$5600 reducción anual

Puntos colineales **En los ejercicios 67 y 68, determine si los puntos son colineales. (Se dice que tres puntos son *colineales* si pertenecen a una misma recta.)**

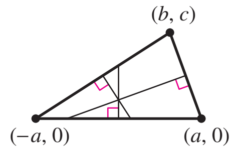
67. $(-2, 1), (-1, 0), (2, -2)$

68. $(0, 4), (7, -6), (-5, 11)$

DESARROLLO DE CONCEPTOS

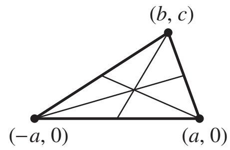
Encontrar puntos de intersección **En los ejercicios 69 a 71, encuentre las coordenadas de los puntos de intersección de los segmentos dados. Explique su razonamiento.**

69.



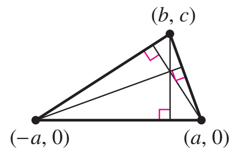
Bisectrices perpendiculares

70.



Medianas

71.



Alturas

72. Demuestre que los puntos de intersección en los ejercicios 69, 70 y 71 son colineales.

73. Analizar una recta Una recta está representada por la ecuación $ax + by = 4$.

(a) ¿Cuándo la recta es paralela al eje x?

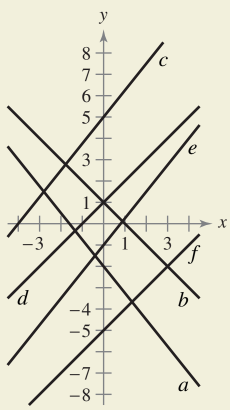
(b) ¿Cuándo la recta es paralela al eje y?

(c) Dé valores para a y b de manera que la recta tenga una pendiente de $\frac{5}{8}$.

(d) Dé valores para a y b de manera que la recta sea perpendicular a la recta $y = \frac{2}{5}x + 3$.

(e) Dé valores para a y b de manera que la recta coincida con la gráfica de $5x + 6y = 8$.

74. **¿CÓMO LO VE?** Utilice las gráficas de las ecuaciones para contestar las siguientes preguntas.



(a) ¿Qué rectas tienen una pendiente positiva?

(b) ¿Qué rectas tienen una pendiente negativa?

(c) ¿Qué rectas aparecen paralelas?

(d) ¿Qué rectas aparecen perpendiculares?

75. **Convertir temperaturas** Encuentre la ecuación lineal que exprese la relación que existe entre la temperatura en grados Celsius C y la temperatura en grados Fahrenheit F. Utilice el hecho de que el agua se congela a 0°C (32°F) y hierve a 100°C (212°F) para convertir 72°F a grados Celsius.

76. **Reembolso de gastos** Una compañía reembolsa a sus representantes de ventas $200 diarios por alojamiento y comidas, más $0.51 por milla recorrida. Escriba una ecuación lineal que exprese el costo diario C para la compañía en términos de x, el número de millas recorridas. ¿Cuánto le cuesta a la empresa que uno de sus representantes de ventas recorra 137 millas en un día cualquiera?

77. **Elección profesional** Como vendedor, usted recibe un salario mensual de 2000 dólares, más una comisión del 7% de las ventas. Se le ofrece un nuevo trabajo con $2300 por mes, más una comisión del 5% de las ventas.
   (a) Escriba ecuaciones lineales para su salario mensual W en términos de sus ventas mensuales por su trabajo actual y su oferta de trabajo.
   (b) Utilice una herramienta de graficación para trazar una ecuación lineal y encontrar el punto de intersección. ¿Qué significa?
   (c) ¿Considera poder vender $20,000 mensuales de producto? ¿Debería cambiar de trabajo? Explique.

78. **Amortización lineal** Una pequeña empresa compra una pieza de equipo por $875. Después de 5 años el equipo será obsoleto, sin valor.
   (a) Escriba una ecuación lineal que indique el valor de los equipos en términos de tiempo x (en años), $0 \leq x \leq 5$.
   (b) Encuentre el valor de los equipos cuando $x = 2$.
   (c) Estime (a dos lugares decimales de precisión) el momento en que el valor del equipo es de $200.

79. **Alquiler de departamentos** Una agencia inmobiliaria maneja un complejo de 50 departamentos. Cuando el alquiler es de $780 mensuales, los 50 departamentos están ocupados. Sin embargo, cuando el alquiler es de $825, el número promedio de departamentos ocupados desciende a 47. Suponga que la relación entre el alquiler mensual p y la demanda x es lineal. (*Nota*: Aquí se usa el término *demanda* para referirse al número de unidades ocupadas.)
   (a) Escriba una ecuación lineal que proporcione la demanda x en términos de alquiler p.
   (b) *Extrapolación lineal* Utilice una herramienta de graficación para representar la ecuación de la demanda y use la función *trace* para pronosticar el número de departamentos ocupados si el alquiler aumenta a $855.
   (c) *Interpolación lineal* Pronostique el número de departamentos ocupados si el alquiler baja a $795. Verifique el resultado gráficamente.

80. **Modelar datos** Un profesor pone cuestionarios de 20 puntos y exámenes de 100 puntos a lo largo de un curso de matemáticas. Las calificaciones promedio de seis estudiantes, dadas como pares ordenados (x, y), donde x es la calificación media en los cuestionarios y la calificación media en los cuestionarios, y y la calificación media en los exámenes, son (18, 87), (10, 55), (19, 96), (16, 79), (13, 76) y (15, 82).
   (a) Utilice las capacidades de regresión de una herramienta de graficación para encontrar la regresión por mínimos cuadrados para los datos.
   (b) Utilice una herramienta de graficación para trazar los puntos y graficar la recta de regresión en una misma ventana.
   (c) Utilice la recta de regresión para pronosticar la calificación promedio en los exámenes de un estudiante cuya calificación promedio en los cuestionarios es 17.
   (d) Interprete el significado de la pendiente de la recta de regresión.
   (e) Si el profesor añade 4 puntos a la calificación promedio en los exámenes de cada alumno, describa el cambio de posición de los puntos trazados y la modificación en la ecuación de la recta.

81. **Recta tangente** Determine la ecuación de la recta tangente al círculo $x^2 + y^2 = 169$ en el punto (5, 12).

82. **Recta tangente** Encuentre la ecuación de la recta tangente al círculo $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 25$ en el punto $(4, -3)$.

Distancia **En los ejercicios 83 a 86, calcule la distancia que existe entre el punto y la recta o entre las rectas, utilizando la fórmula para la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$.**

$$\textbf{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

83. Punto: $(-2, 1)$
    Recta: $x - y - 2 = 0$

84. Punto: $(2, 3)$
    Recta: $4x + 3y = 10$

85. Recta: $x + y = 1$
    Recta: $x + y = 5$

86. Recta: $3x - 4y = 1$
    Recta: $3x - 4y = 10$

87. **Distancia** Demuestre que la distancia entre el punto (x_1, y_1) y la recta $Ax + By + C = 0$ es

$$\text{Distancia} = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

88. **Distancia** Escriba la distancia d entre el punto (3, 1) y la recta $y = mx + 4$ en términos de m. Use una herramienta de graficación para representar la ecuación. ¿Cuándo la distancia es 0? Explique su resultado de manera geométrica.

89. **Demostración** Demuestre que las diagonales de un rombo se cortan perpendicularmente. (Un rombo es un cuadrilátero con lados de igual longitud.)

90. **Demostración** Demuestre que la figura que se obtiene uniendo los puntos medios de los lados consecutivos de cualquier cuadrilátero es un paralelogramo.

91. **Demostración** Demuestre que si los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la misma recta que (x_1^*, y_1^*) y (x_2^*, y_2^*), entonces:

$$\frac{y_2^* - y_1^*}{x_2^* - x_1^*} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Suponga $x_1 \neq x_2$ y $x_1^* \neq x_2^*$.

92. **Demostración** Demuestre que si las pendientes de dos rectas son recíprocas negativas de la otra, entonces las rectas son perpendiculares.

¿Verdadero o falso? **En los ejercicios 93 a 96, determine si el enunciado es verdadero o falso. Si es falso, explique por qué o dé un ejemplo que demuestre que es falso.**

93. Las rectas de ecuaciones $ax + by = c_1$ y $bx - ay = c_2$ son perpendiculares. Suponga que $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

94. Dos rectas con pendientes positivas pueden ser perpendiculares entre sí.

95. Si una recta contiene puntos tanto en el primero y tercer cuadrantes, entonces su pendiente debe ser positiva.

96. La ecuación de cualquier recta puede ser escrita en forma general.

P.3 Funciones y sus gráficas

- **Usar la notación de función para representar y evaluar funciones.**
- **Encontrar el dominio y el rango de una función.**
- **Trazar la gráfica de una función.**
- **Identificar los diferentes tipos de transformaciones de las funciones.**
- **Clasificar funciones y reconocer combinaciones de ellas.**

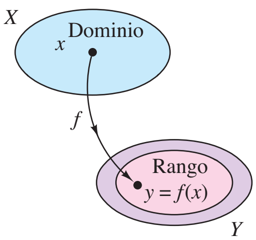
Funciones y notación de funciones

Una **relación** entre dos conjuntos X y Y es un conjunto de pares ordenados, cada uno de la forma (x, y), donde x es un elemento de X y y un elemento de Y. Una **función** de X y Y es una relación entre X y Y con la propiedad de que si dos pares ordenados tienen el mismo valor de x, también tienen el mismo valor de y. La variable x se denomina **variable independiente**, mientras que la variable y se denomina **variable dependiente**.

Muchas situaciones de la vida real pueden describirse mediante funciones. Por ejemplo, el área de A de un círculo es una función de su radio r.

$$A = \pi r^2$$ *A es una función de r.*

En este caso, r es la variable independiente, y A la variable dependiente.



Una función real f de una variable real.
Figura P.22

Definición de función real de una variable real

Sean X y Y conjuntos de números reales. Una **función real f de una variable real x** de X a Y es una regla de correspondencia que asigna a cada número un número x en X exactamente en número de y de Y.

El **dominio** de f es el conjunto X. El número y es la **imagen** de x bajo f y se denota mediante $f(x)$, a lo cual se llama el **valor de f en x**. El **rango** de f se define como el subconjunto de Y formado por todas las imágenes de los números en X (vea la figura P.22).

Las funciones pueden especificarse de muchas formas. No obstante, este texto se concentra fundamentalmente en funciones dadas por ecuaciones que contienen variables dependientes e independientes. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + 2y = 1$$ Ecuación en forma implícita

define y, la variable dependiente, como función de x, la variable independiente. Para **evaluar** esta función (esto es, para encontrar el valor de y correspondiente a un valor de x dado) resulta conveniente despejar y en el lado izquierdo de la ecuación.

$$y = \tfrac{1}{2}(1 - x^2)$$ Ecuación en forma explícita

Utilizando f como nombre de la función, esta ecuación puede escribirse como:

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(1 - x^2).$$ Notación de funciones

La ecuación original

$$x^2 + 2y = 1$$

define **implícitamente** a y como una función de x. Cuando se despeja y, se obtiene la ecuación en forma **explícita**.

La notación de funciones tiene la ventaja de que permite identificar claramente la variable dependiente como $f(x)$, informando al mismo tiempo que la variable independiente es x y que la función se denota por "f". El símbolo $f(x)$ se lee "f de x". La notación de funciones permite ahorrar palabras. En lugar de preguntar "¿Cuál es el valor de y que corresponde a $x = 3$?", se puede preguntar "¿Cuánto vale $f(3)$?".

NOTACIÓN DE FUNCIONES

Gottfried Wilhelm Leibniz fue el primero que utilizó la palabra *función*, en 1694, para denotar cualquier cantidad relacionada con una curva, como las coordenadas de uno de sus puntos o su pendiente. Cuarenta años más tarde, Leonhard Euler empleó la palabra "función" para describir cualquier expresión construida con una variable y varias constantes. Fue él quien introdujo la notación $y = f(x)$.

En una ecuación que define a una función de x el papel de la variable x es simplemente el de un hueco a llenar. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = 2x^2 - 4x + 1$$

puede describirse como

$$f(\quad) = 2(\quad)^2 - 4(\quad) + 1$$

donde se usan huecos entre paréntesis en lugar de x. Para evaluar $f(-2)$, basta con colocar –2 dentro de cada paréntesis.

$$\begin{aligned} f(-2) &= 2(-2)^2 - 4(-2) + 1 && \text{Sustituya } -2 \text{ en lugar de } x. \\ &= 2(4) + 8 + 1 && \text{Simplifique.} \\ &= 17 && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

Aunque es frecuente usar f como un símbolo adecuado para denotar una función y x para la variable independiente, se pueden utilizar otros símbolos. Por ejemplo, todas las ecuaciones siguientes definen la misma función.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 7 && \text{El nombre de la función es } f\text{, el de la variable independiente es } x. \\ f(t) &= t^2 - 4t + 7 && \text{El nombre de la función es } f\text{, el de la variable independiente es } t. \\ g(s) &= s^2 - 4s + 7 && \text{El nombre de la función es } g\text{, el de la variable independiente es } s. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1 Evaluar una función

Para la función f definida por $f(x) = x^2 + 7$, evalúe cada expresión:

a. $f(3a)$ **b.** $f(b - 1)$ **c.** $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Solución

a. $$\begin{aligned} f(3a) &= (3a)^2 + 7 && \text{Sustituya } x \text{ por } 3a. \\ &= 9a^2 + 7 && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} f(b - 1) &= (b - 1)^2 + 7 && \text{Sustituya } x \text{ por } b - 1. \\ &= b^2 - 2b + 1 + 7 && \text{Desarrolle el binomio.} \\ &= b^2 - 2b + 8 && \text{Simplifique.} \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \frac{[(x + \Delta x)^2 + 7] - (x^2 + 7)}{\Delta x} \\ &= \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 7 - x^2 - 7}{\Delta x} \\ &= \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \frac{\cancel{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} \\ &= 2x + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0 \end{aligned}$$

COMENTARIO La expresión en el ejemplo 1(c) se llama *cociente de diferencias* y tiene un significado especial en el cálculo. Se aprenderá más sobre esto en el capítulo 2.

En cálculo es importante especificar con claridad el dominio de una función o expresión. Por ejemplo, en el ejemplo 1(c), las expresiones

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{y} \quad 2x + \Delta x, \quad \Delta x \neq 0$$

son equivalentes, ya que $\Delta x = 0$ se excluye del dominio de la función o expresión. Si no se estableciera esa restricción del dominio, las dos expresiones no serían equivalentes.

Dominio y rango de una función

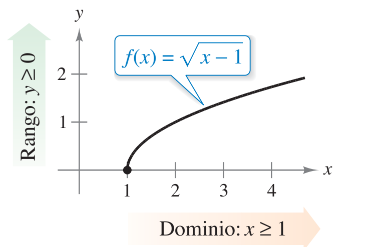
El dominio de una función puede describirse de manera explícita, o bien de manera *implícita* mediante la ecuación empleada para definir la función. El dominio implícito es el conjunto de todos los números reales para los que está definida la ecuación, mientras que un dominio definido explícitamente es el que se da junto con la función. Por ejemplo, la función dada por

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}, \quad 4 \le x \le 5$$

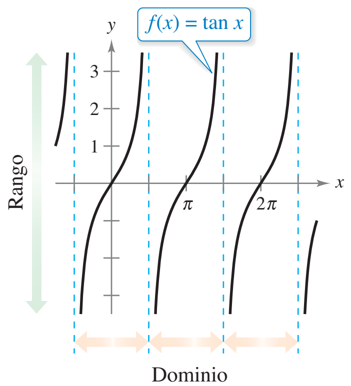
tiene un dominio definido de manera explícita dado por $\{x\colon\ 4 \le x \le 5\}$. Por otra parte, la función dada por

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

tiene un dominio implícito que es el conjunto $\{x\colon\ x \ne \pm 2\}$.



(a) El dominio de f es $[1, \infty)$, y el rango es $[0, \infty)$.



(b) El dominio de f lo constituyen todos los valores reales de x tales que $x \ne \frac{\pi}{2} + n\pi$, y el rango es $(-\infty, \infty)$.

Figura P.23

EJEMPLO 2 Calcular el dominio y rango de una función

a. El dominio de la función

$$f(x) = \sqrt{x - 1}$$

Es el conjunto de los valores de $x - 1 \ge 0$; es decir, el intervalo $[1, \infty)$. Para encontrar el rango, observe que $f(x) = \sqrt{x-1}$ nunca es negativa. Por tanto, el rango es el intervalo $[0, \infty)$, como se muestra en la figura P.23(a).

b. El dominio de la función tangente

$$f(x) = \tan x$$

es el conjunto de los valores de x tales que

$$x \ne \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \text{ es un entero.}$$

Dominio de la función tangente

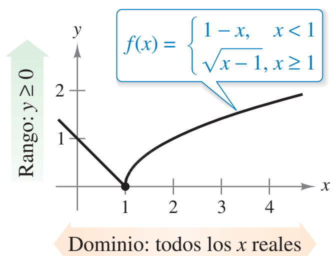
El rango de esta función es el conjunto de todos los números reales, como se muestra en la figura P.23(b). Para un repaso de las características de esta y otras funciones trigonométricas, consulte el apéndice C.

EJEMPLO 3 Una función definida por más de una ecuación

Determine el dominio y rango de la función

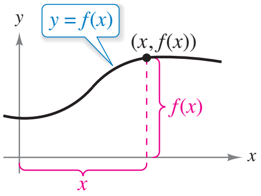
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 1 \\ \sqrt{x - 1}, & x \ge 1 \end{cases}$$

Puesto que f está definida para $x < 1$ y $x \ge 1$, su dominio es todo el conjunto de los números reales. En la parte del dominio donde $x \ge 1$, la función se comporta como en el ejemplo 2(a). Para $x < 1$, todos los valores de $1 - x$ son positivos. Por consiguiente, el rango de la función es el intervalo $[0, \infty)$. (Vea la figura P.24.)



El dominio de f es $(-\infty, \infty)$, y el rango es $[0, \infty)$.
Figura P.24

Una función de X a Y es inyectiva o **uno a uno** si a cada valor de y perteneciente al rango le corresponde exactamente un valor x del dominio. Por ejemplo, la función dada en el ejemplo 2(a) es inyectiva, mientras que las de los ejemplos 2(b) y 3 no lo son. Se dice que una función de X a Y es suprayectiva (o sobreyectiva) si su rango es todo Y.



Gráfica de una función.
Figura P.25

Gráfica de una función

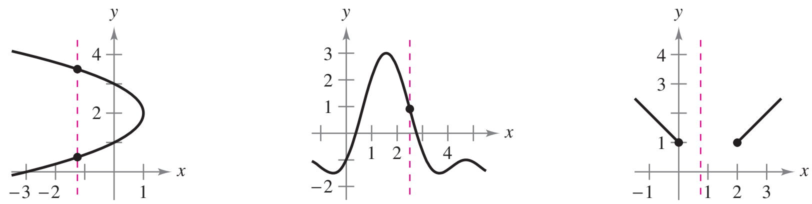
La gráfica de una función $y = f(x)$ está formada por todos los puntos $(x, f(x))$, donde x pertenece al dominio de f. En la figura P.25 se puede observar que

$x =$ distancia dirigida desde el eje y

y

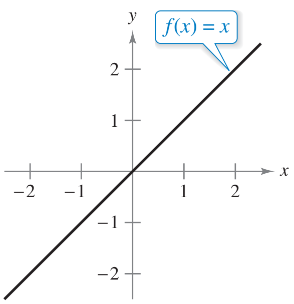
$f(x) =$ distancia dirigida desde el eje x.

Una recta vertical puede cortar la gráfica de una función de x a lo más *una vez*. Esta observación proporciona un criterio visual adecuado, llamado **criterio de la recta vertical**, para funciones de x si y sólo si ninguna recta vertical hace intersección con ella en más de un punto. Por ejemplo, en la figura P.26(a) se puede ver que la gráfica no define a y como función de x, ya que hay una recta vertical que corta a la gráfica dos veces, mientras que en las figuras P.26(b) y (c) las gráficas sí definen a y como función de x.

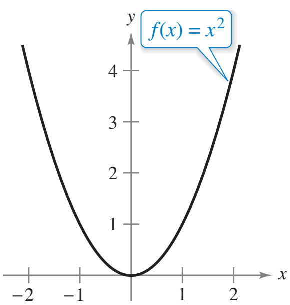


(a) No es una función de x **(b)** Es función de x **(c)** Es función de x
Figura P.26

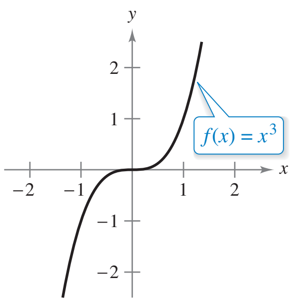
En la figura P.27 se muestran las gráficas de ocho funciones básicas, las cuales hay que conocer bien. (Las gráficas de las otras cuatro funciones trigonométricas básicas se encuentran en el apéndice C.)



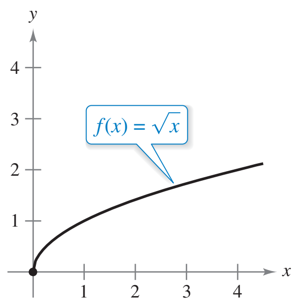
Función identidad



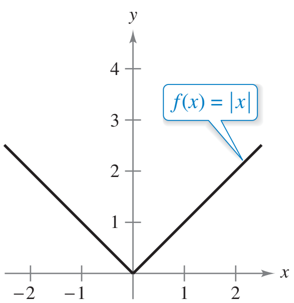
Función cuadrática



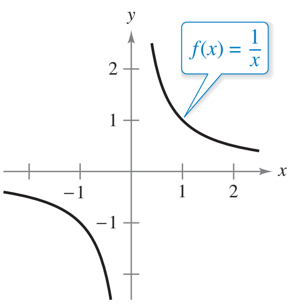
Función cúbica



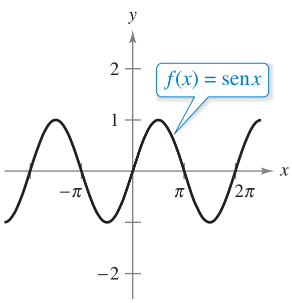
Función raíz cuadrada



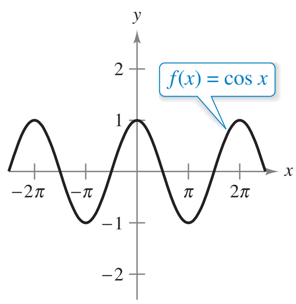
Función valor absoluto



Función racional



Función seno

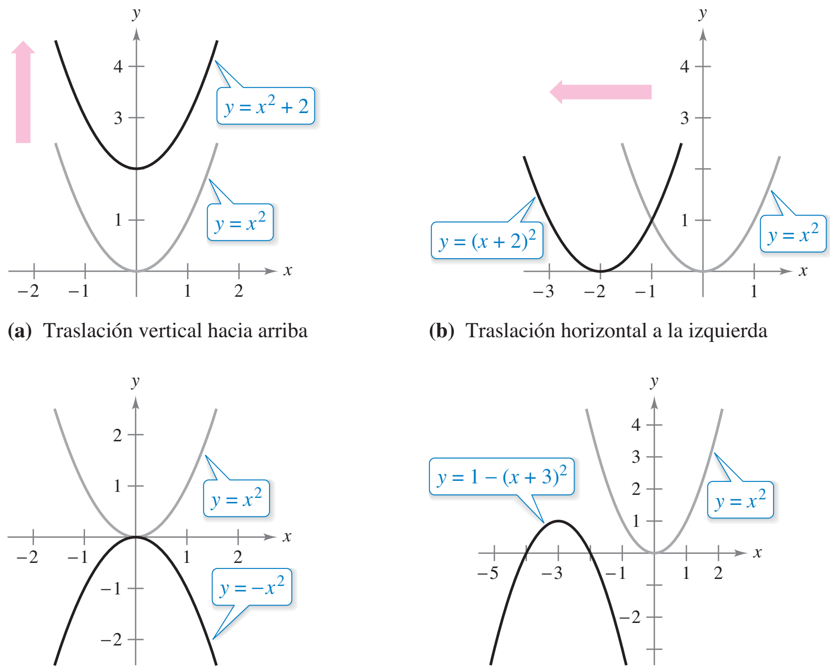


Función coseno

Gráficas de las ocho funciones básicas
Figura P.27

Transformaciones de las funciones

Algunas familias de gráficas tienen la misma forma básica. Por ejemplo, compare la gráfica de $y = x^2$ con las gráficas de las otras cuatro funciones cuadráticas de la figura P.28.



(a) Traslación vertical hacia arriba

(b) Traslación horizontal a la izquierda

(c) Reflexión

(d) Traslación a la izquierda, reflexión y traslación hacia arriba

Figura P.28

Cada una de las gráficas de la figura P.28 es una **transformación** de la gráfica de $y = x^2$. Los tres tipos básicos de transformaciones ilustrados por estas gráficas son las traslaciones verticales, las traslaciones horizontales y las reflexiones. La notación de funciones es adecuada para describir transformaciones de gráficas en el plano. Por ejemplo, usando

$f(x) = x^2$ Función original

como la función original, las transformaciones mostradas en la figura P.28 se pueden representar por medio de las siguientes ecuaciones.

a. $y = f(x) + 2$ Traslación vertical de 2 unidades hacia arriba

b. $y = f(x + 2)$ Traslación horizontal de 2 unidades a la izquierda

c. $y = -f(x)$ Reflexión respecto al eje x

d. $y = -f(x + 3) + 1$ Traslación de 3 unidades a la izquierda, reflexión respecto al eje x y traslación de 1 unidad hacia arriba

Tipos básicos de transformaciones ($c > 0$)

Gráfica original:	$y = f(x)$
Traslación horizontal de c unidades a la **derecha:**	$y = f(x - c)$
Traslación horizontal de c unidades a la **izquierda:**	$y = f(x + c)$
Traslación vertical de c unidades **hacia abajo:**	$y = f(x) - c$
Traslación vertical de c unidades **hacia arriba:**	$y = f(x) + c$
Reflexión (respecto al eje x):	$y = -f(x)$
Reflexión (respecto al eje y):	$y = f(-x)$
Reflexión (respecto al origen):	$y = -f(-x)$