

UNIDADES

1. LONGITUD

Kilómetro	km	1000	m
Hectómetro	hm	100	m
Decámetro	dam	10	m
metro	m	1	m
decímetro	dm	0,1	m
centímetro	cm	0,01	m
milímetro	mm	0,001	m

2. SUPERFICIE

Kilómetro cuadrado	km ²	1.000.000	m ²
Hectómetro cuadrado	hm ²	10.000	m ² Hectárea
Decámetro cuadrado	dam ²	100	m ² Área
metro cuadrado	m²	1	m² centiárea
decímetro cuadrado	dm ²	0,01	m ²
centímetro cuadrado	cm ²	0,000 1	m ²
milímetro cuadrado	mm ²	0,000 001	m ²

3. VOLUMEN - CAPACIDAD

Kilómetro cúbico	km ³	1.000.000.000	m ³
Hectómetro cúbico	hm ³	1.000.000	m ³
Decámetro cúbico	dam ³	1.000	m ³
metro cúbico	m³	1	m³ kl
decímetro cúbico	dm ³	0,001	m ³ l
centímetro cúbico	cm ³	0,000 00 1	m ³ ml
milímetro cúbico	mm ³	0,000 000 001	m ³

m³			dm³			cm³
1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001
Kl	Hl	Dl	litro	dl	cl	ml

		1	4						
			-4	-2					
							7	10	

1.5. Obtener parejas diferentes de números que sumen...:

Pareja	Suma	Pareja	Suma
	-1		-2
	-1		-2
	-3		-4
	-3		-4

1.6. Completa las series:

-7	-4								
		1	3						
			-4	0					
							6	10	

1.7. Resuelve:

- En un depósito hay 800 L de agua. Por la parte superior entran al depósito 25 L por minuto, y por la parte inferior salen 30 L por minuto.
¿Cuántos litros de agua habrá en el depósito después de 90 minutos de funcionamiento?
- Pitágoras vivió entre los años 582 y 496 a.C. ¿A qué edad murió?
- Un día la temperatura mínima fue -12°C y la máxima 15°C .
¿Cuál es la diferencia entre ambas temperaturas?
- Un depósito de 10 000 litros está lleno. Cada día entran 2 000 litros y salen 2 500 litros. Indica el tiempo que tardará en vaciarse.

Sol. 1) 350 L; 2) 86 a; 3) 27° ; 4) 20 días;

2. OPERACIONES

SUMA Y RESTA

MISMO SIGNO:

se mantiene el signo
se suman los números

$$5 + 3 = 8$$

$$-5 - 3 = -8$$

DISTINTO SIGNO:

signo del mayor
se restan los números:

$$-5 + 3 = -2$$

$$5 - 3 = 2$$

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Regla de los signos:

$$\left. \begin{array}{l} + \cdot + \\ - \cdot - \end{array} \right\} = +$$

$$\left. \begin{array}{l} + \cdot - \\ - \cdot + \end{array} \right\} = -$$

2.1. Efectúa:

1) $-2 - 5 + 4 =$

2) $-5 + 3 + 10 =$

3) $-5 + 7 - 4 =$

4) $-10 + 6 - 1 =$

5) $-8 + 12 - 1 =$

6) $3 - 4 - 1 =$

7) $5 - 3 - 2 =$

8) $6 - 4 - 5 =$

9) $3 - 2 + 3 =$

10) $3 - 7 + 6 =$

Sol.: 1) -3; 2) 8; 3) -2; 4) -5; 5) 3; 6) -2; 7) 0; 8) -3; 9) 4; 10) 2

PARENTESISIS

Signo ante paréntesis:

$$9 - (-5 + 3 - 2) = 9 + 5 - 3 + 2;$$

$$9 + (-5 + 3 - 2) = 9 - 5 + 3 - 2$$

2.2. Quita paréntesis y obtén el resultado final:

1) $(5-8) - (-8+1) =$

2) $5 - (12-3) + (-5+8) =$

3) $-10 + (-15+8) - (-8+19) =$

4) $14 - (-8+10) =$

5) $18 + (-4) - (-15+9) =$

6) $(-40+18) - (-16+29) =$

Sol.: 1) 4; 2) -1; 3) -28; 4) 12; 5) 20; 6) -35

3. PRIORIDADES ENTRE OPERACIONES

- (1°) Potencia
- (2°) Multiplicación – división
- (3°) Suma - resta

Cuando tienen la misma prioridad, operamos de izquierda a derecha.

Ejemplos:

$$3 + 2^2 \cdot 4 = 5^2 \cdot 4 = 100$$

$$3 + 2^2 \cdot 4 = 3 + 4 \cdot 4 = 3 + 16 = 19$$

mal (se ha sumado antes de hacer la potencia)

bien

Las **calculadoras científicas** respetan la prioridad de las operaciones.

Si introduces en ellas las operaciones de los ejemplos obtendrás los resultados correctos

3.1. Efectúa:

1) $3 + 5 \cdot 2 =$

2) $4 + 7 \cdot 3 =$

3) $2 \cdot (-3) + 4 \cdot 3 =$

4) $-3 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) =$

5) $4 \cdot 2 + 5 - 3 =$

6) $-4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 =$

7) $3 \cdot 8 - 1 - 6 =$

8) $20 - 8 \cdot 2 - 6 =$

Sol.: 1) 13; 2) 21; 3) 6; 4) -18; 5) 10; 6) 14; 7) 17; 8) -2

3.2. Efectúa:

1) $3 + 5 \cdot 4 =$

2) $25 - 3^2 \cdot 2 =$

3) $(3+4) \cdot 2^2 =$

4) $4 \cdot 2 - 3 =$

5) $6 \cdot 2 : 3 : 2 =$

6) $5 \cdot 6 - 4 \cdot 2 =$

7) $(2+3) \cdot 5 \cdot 2^2 =$

8) $(6+4) \cdot 2 : 4 =$

Sol.: 1) 23; 2) 7 ; 3) 28; 4) 5; 5) 2; 6) 22; 7) 100; 8) 5

3.3. Calcula valor numérico de la última columna:

	x	y	$4x - 3y + xy$	$x - xy - 3$	$5 - 2x + xy$
a)	1	2			
b)	2	3			
c)	-3	2			
d)	-2	-4			
e)	-1	3			

3.4. Calcula

1) $4 + 8 : 2 =$

2) $(4 + 8) : 2 =$

3) $12 : 4 - 2 =$

4) $12 : (4 - 2) =$

5) $12 - 8 : 4 =$

6) $(12 - 8) : 4 =$

Sol.: 1) 8; 2) 6; 3) 1; 4) 6; 5) 10; 6) 1

3.5. Calcula

1) $25 : 5 + 3 \cdot 2 =$

2) $7 + 2 \cdot 3 - 4 =$

3) $3 + 5 \cdot (4 + 8) =$

4) $5 - 3 \cdot 3 + 2 =$

5) $5 + 3 \cdot (3 + 2) =$

6) $(5 + 3) \cdot (3 + 2) =$

Soluc.: 1) 11; 2) 9; 3) 63; 4) -2; 5) 20; 6) 40

3.6. Calcula:

1) $10 - 20 : 5 + 1 =$

2) $(10 - 20) : 5 + 1 =$

3) $(10 - 20) : (5 - 7) =$

4) $5 - 20 : 5 + 7 =$

5) $(30 - 20) : (15 - 5) =$

6) $8 + 4 \cdot 2 - 15 : 3 =$

7) $(1 + 4) \cdot 2 - 15 : 3 + 2 =$

8) $(8 + 4) \cdot 2 - 15 : (3 + 2) =$

Soluc.: 1) 7; 2) -1; 3) 5; 4) 8; 5) 1; 6) 11; 7) 7; 8) 21.

3.7. Realiza las operaciones:

1) $3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 =$

2) $4 \cdot 2 - 3 \cdot 5 + 7 \cdot 3 =$

3) $(-6) \cdot (-3) + 4 \cdot 3 =$

4) $-3 \cdot 4 + 2 \cdot (-3) - 10 =$

$$5) \quad 4 \cdot 2 + 5 - 3 =$$

$$6) \quad -4 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 =$$

Sol.: 1) 19; 2) 14; 3) 30; 4) -28; 5) 10; 6) 14 2

3.8. Realiza las operaciones:

$$1) \quad 12 : (3+1) =$$

$$2) \quad 12 : 3 + 1 =$$

$$3) \quad (24 - 8) : 4 + 4 =$$

$$4) \quad (24 - 8) : (4+4) =$$

$$5) \quad 4 \cdot 2 + 5 =$$

$$6) \quad 4 \cdot (2 + 5) =$$

Sol.: 1) 3; 2) 5; 3) 8; 4) 2; 5) 13; 6) 28.

4. POTENCIAS

Multiplicación. Bases iguales	Cociente. Bases iguales	Potencia elevada a otra
$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$	$a^m : a^n = a^{(m-n)}$	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$$(-3)^2 = 9$$

$$-3^2 = -9$$

4.1. Calcula el resultado en forma de potencia:

$$1) \quad (-3)^2 =$$

$$2) \quad (-1)^2 =$$

$$3) \quad -3^2 =$$

$$4) \quad (-1)^3 =$$

$$5) \quad (-5)^2 =$$

$$6) \quad (-1)^4 =$$

$$7) \quad -5^2 =$$

$$8) \quad (-1)^5 =$$

Sol.: 1) 9; 2) 1; 3) -9; 4) -1; 5) 25; 6) 1; 7) -25; 8) -1.

4.2. Expresa el resultado en forma de potencia:

1) $x \cdot x =$	2) $a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b =$
3) $x \cdot x \cdot x =$	4) $a \cdot a =$
5) $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b =$	6) $b \cdot b \cdot b \cdot c \cdot c \cdot c =$
7) $x \cdot x \cdot x \cdot x =$	8) $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b =$

4.3. Aplica las propiedades, y expresa el resultado en forma de potencia:

1) $3^5 \cdot 3^2 =$	2) $7^6 : 7^5 =$
3) $3^5 \cdot 3^5 =$	4) $(2^3)^2 =$
5) $3^2 \cdot 3^3 =$	6) $(7^5)^3 =$
7) $4^9 : 4^7 =$	8) $(2^3 \cdot 2^4)^2 =$
9) $4^6 : 4^5 =$	10) $(2^9 : 2^5)^3 =$

4.4. Aplica las propiedades, y expresa el resultado en forma de potencia:

1) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3$	2) $[(5^3)^4]^2 =$
3) $5^7 : 5$	4) $(3^2) \cdot (3^2) \cdot (3^4) =$
5) $5 \cdot (5^3)^4 =$	6) $9 \cdot (9^3) \cdot 9 \cdot (9^3) =$
7) $(3^2) \cdot (3^2)^5 =$	8) $(2^5 \cdot 2^4 \cdot 2)^2 =$
9) $(3^4)^4 =$	10) $(2^7 : 2^6) \cdot (2^2) =$

4.5. Efectúa las potencias y da el resultado final:

1) $(-2)^3 =$	2) $(-2)^3 \cdot (-1) =$
3) $-4^2 =$	4) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 =$
5) $-2^2 \cdot (-1)^3 =$	6) $(-5)^3 : (-5)^2 =$

Potencia de exponente cero

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a^n}{a^n} = 1 \\ \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{a^0 = 1}$$

4.6. Calcula...

a) Calcula sin aplicar propiedades potencias: $\frac{5^3}{5^3} =$

b) Aplica propiedad cociente de potencias: $\frac{5^3}{5^3} =$

4.7. Calcula:

$5^0 =$

$1,25^0 =$

$1^0 =$

$0,1^0 =$

$2^0 =$

$\sqrt{2}^0 =$

5. POTENCIA DE EXPONENTE NEGATIVO

Elevar a una potencia negativa = a una fracción con numerador uno y denominador la misma potencia, positiva:

$$a^{-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} \Rightarrow \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

5.1. Calcula el resultado, presentado como fracción

$2^{-1} =$

$4^{-1} =$

$2^{-2} =$

$4^{-2} =$

$2^{-3} =$

$4^{-3} =$

5.2. Calcula el resultado, presentado como decimal:

$10^1 =$

$10^{-1} =$

$10^2 =$

$10^{-2} =$

$10^3 =$

$10^{-3} =$

$10^4 =$

$10^{-4} =$

$10^5 =$

$10^{-5} =$

$10^6 =$

$10^{-6} =$

$10^7 =$

$10^{-7} =$

$10^8 =$

$10^{-8} =$

$10^9 =$

$10^{-9} =$

5.3. Calcula el resultado, presentado como fracción

$1^{-1} =$

$1^{-2} =$

$1^{-3} =$

$1^{-4} =$

$3^{-1} =$

$3^{-2} =$

$3^{-3} =$

$3^{-4} =$

5.4. Calcula el resultado, presentado como fracción

$(-1)^{-1} =$

$(-1)^{-2} =$

$(-1)^{-3} =$

$(-1)^{-4} =$

$(-2)^{-1} =$

$(-2)^{-2} =$

$(-2)^{-3} =$

$(-2)^{-4} =$

5.5. Efectúa las siguientes operaciones, dejando el resultado en forma de potencia

***Apartados g, h:** consigue misma base cambiando 4 por 2^2 ; 8 por 2^3 , 16 por 2^4

$a) (4^{-3} \cdot 4^2)^3 =$

$b) (5^3 \div 5^{-2})^{-2} =$

$e) (7^{-3} \div 7^{-5})^2 =$

$f) (9^3)^{-3} =$

$c) (7^{-4})^{-2} =$

$d) (7^3 \div 7^{-4})^2 =$

$g^*) (8^2 \div 4^3)^2 =$

$h^*) (16^3 \div 8^3)^4 =$

5.6. Calcula en cada caso el valor de “a” para que se cumplan las igualdades:

$a) (3^a \cdot 3^5)^2 = 3^{14}$

$b) (2^5 \div 2^a)^{-2} = 2^6$

$c) ((-5)^a \cdot (-5)^5)^2 = (-5)^{20}$

$d) (a^4)^2 = 11^{-8}$

$e) \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 49$

5.7. Ejercicios de repaso

1. Calcula mentalmente dos enteros que sumen 5 y que su producto sea 4
2. Calcula mentalmente:
 - a) dos enteros que sumen 5 y su producto sea -6
 - b) dos enteros que sumen -1 y su producto sea -6.
3. Escribe:
 - a) El número (+15) como suma de dos enteros positivos:
 - b) El número (-10) como suma de dos enteros negativos:
 - c) El número (-2) como suma de un entero positivo y otro negativo:
 - d) El número (+13) como suma de un entero negativo y otro positivo:
4. Rellena la siguiente tabla (cálculo mental):

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto	¿Exacta?
84	20			
	25	3		Sí
50		2	4	
	5	3	2	
95		19		Sí

5. Calcula el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
 - a) 48 y 32
 - b) 24, 16 y 40
 - c) 64 y 90
 - d) 36, 60 y 96

M.C.M. = factores comunes y no comunes, con mayor exponente

m.c.d. = factores comunes con menor exponente

Lecc. 2. FRACCIONES

1. Concepto de fracción; 2. Fracciones equivalentes; 3. Operaciones con fracciones;
4. Número mixto. 5. Fracción y porcentaje.

1. CONCEPTO DE FRACCIÓN

El concepto intuitivo de fracción corresponde a la idea de dividir una totalidad en n partes iguales, tomando m de ellas.

$$\frac{m}{n}$$

1.1. Completa la tabla:

		12	24	60	96	108
$\frac{1}{2}$ de						
$\frac{1}{4}$ de						
$\frac{1}{3}$ de						
$\frac{2}{3}$ de						

1.2. Completa la tabla:

		20	35	40	45	60
$\frac{1}{5}$ de						
$\frac{2}{5}$ de						
$\frac{3}{5}$ de						
$\frac{4}{5}$ de						

1.3. Completa la tabla, rellenando la segunda fila:

1 kg	1/2 kg	1/4 kg	1/5 kg	3/5 kg	4/5 kg
1000 g					

1.4. Completa la tabla, rellenando la segunda fila:

1 L	1/2 L	1/3 L	2/3 L	1/5 L	2/5 L
100 cl					

1.5. Completa la tabla, rellenando la segunda fila:

1 L	1/2 L	3/2 L	1/4 L	2/4 L	3/4 L
1000 ml					

1.6.

1. Un depósito contiene 150 litros de agua. Se consumen los $\frac{2}{5}$ de su contenido. ¿Cuántos litros de agua se han consumido? ¿Cuántos litros quedan?
2. He recorrido 63 Km., que son los $\frac{3}{4}$ del camino. ¿Cuántos Km. tiene el camino completo?
3. De una aldea han emigrado $\frac{2}{5}$ de la población, quedando 150 habitantes. ¿Cuántos han emigrado? ¿Cuántos habitantes había en la aldea en un principio?
4. ¿Cuántos tercios de litro hay en 2 l? ¿y en 4 l?
¿Cuántos quintos de litro hay en 2 l? ¿y en 4 l?
5. Queremos cortar un cable de 95 m de longitud en tres trozos. Dos de ellos deben medir lo mismo, y el otro la mitad. ¿Cuánto medirá cada trozo?
6. La quinta parte de un capital son 150 € ¿De qué capital se trata?
7. Un vehículo ha consumido $\frac{3}{4}$ de su combustible y aun le quedan 12 litros. ¿Cuántos litros le caben al depósito?
8. Un vehículo circula a 160 km/h, lo que supone $\frac{1}{3}$ por encima del límite de circulación. ¿Cuál es la velocidad máxima permitida?

Sol.: 1) 60L – 90L; 2) 84 km 3) 100; 250; 4) 6 - 12 - 10 - 20;
5) 38 m-38m-19m; 6) 750 €; 7) 48 litros; 8) 120 ;

1.7.

1. Calcula cuantos gramos son:
 $\frac{1}{2}$ de kg; $\frac{2}{4}$ de Kg; Observa que estas dos fracciones son equivalentes
2. Calcula cuantos cl son:
 $\frac{2}{5}$ de litro; $\frac{4}{10}$ de litro; Observa que estas dos fracciones son equivalentes

2. FRACCIONES EQUIVALENTES

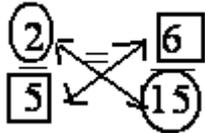
Ejemplo:

$$\boxed{\frac{2}{5} \text{ de } 60 = 24} \quad \text{-----} \quad \boxed{\frac{6}{15} \text{ de } 60 = 24}$$

mismo resultado $\Rightarrow \frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$ son **fracciones equivalentes**

PRODUCTO CRUZADO:

Dos fracciones son equivalentes \Leftrightarrow los "productos cruzados" son iguales



Los productos cruzados: $2 \times 15 = 5 \times 6$ son iguales

Luego $\frac{2}{5}$ y $\frac{6}{15}$ son equivalentes

2.1. Completa el término que falta, mediante la igualdad del producto cruzado: .

1) $\frac{5}{10} = \frac{3}{x}$

2) $\frac{4}{5} = \frac{8}{x}$

3) $\frac{4}{x} = \frac{8}{12}$

4) $\frac{10}{x} = \frac{5}{6}$

5) $\frac{2}{12} = \frac{x}{18}$

6) $\frac{12}{15} = \frac{x}{20}$

7) $\frac{x}{15} = \frac{4}{20}$

8) $\frac{x}{40} = \frac{9}{24}$

SIMPLIFICAR UNA FRACCIÓN:

Es obtener una fracción equivalente lo más reducida posible.

Simplificación en un solo paso:

Divide numerador y denominador por su m.c.d.:

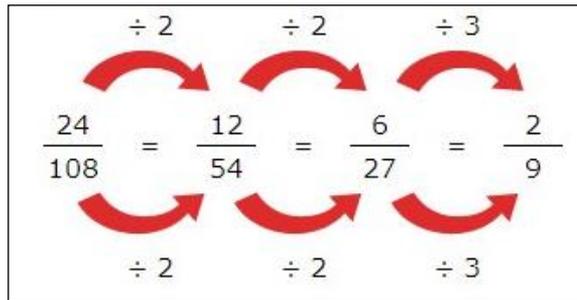
Ejemplo: $\text{mcd}(36, 60) = 12$

$$\frac{36}{60} = \frac{36:12}{60:12} = \frac{3}{5}$$

Simplificación en pasos sucesivos:

Dividimos sucesivamente numerador y denominador... (prueba por 2, por 3, ... etc.)

Ejemplo:



Si los términos de la fracción **terminan en ceros**, empezaremos quitando los ceros y después continuamos simplificando

Simplificar con la calculadora:

Escribes el numerador / Pulsas la tecla $a \frac{b}{c}$
 Escribes el denominador / Pulsa la tecla =

2.2. Simplifica con divisiones sucesivas y suprimiendo ceros:

1) $\frac{6}{12} =$

2) $\frac{18}{27} =$

3) $\frac{16}{24} =$

4) $\frac{36}{60} =$

5) $\frac{25}{75} =$

6) $\frac{25}{40} =$

7) $\frac{30}{35} =$

8) $\frac{108}{162} =$

9) $\frac{600}{900} =$

10) $\frac{16000}{50000} =$

11) $\frac{60}{600} =$

12) $\frac{1000}{3000} =$

2.3. Simplifica dividiendo por m.c.d.:

a) $\frac{30}{45} =$

b) $\frac{20}{60} =$

c) $\frac{56}{80} =$

d) $\frac{20}{72} =$

e) $\frac{300}{140} =$

f) $\frac{165}{330} =$

3. OPERACIONES CON FRACCIONES

Sumas y restas

Con mismo denominador

Se suman o se restan los numeradores y se mantiene el denominador.

$$\text{Ejemplo 1: } \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\text{Ejemplo 2: } \frac{7}{5} - \frac{4}{5} = \frac{7-4}{5} = \frac{3}{5}$$

Con distinto denominador

Se reducen los denominadores a común denominador (mcm)...

$$\text{Ejemplo 1: } \frac{3}{4} + \frac{1}{6} = \frac{9+2}{12} = \frac{11}{12}$$

$$\text{Ejemplo 2: } \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9-2}{12} = \frac{7}{12}$$

3.1. Operaciones (calcula mentalmente el denominador común)

$$1) \frac{1}{12} + \frac{3}{4} =$$

$$2) \frac{2}{5} + \frac{2}{3} =$$

$$3) \frac{1}{2} - \frac{1}{6} =$$

$$4) \frac{2}{5} + \frac{1}{4} =$$

$$5) \frac{3}{2} + \frac{2}{3} =$$

$$6) \frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$$

3.2. Operaciones (calcula mentalmente el denominador común)

$$1) \frac{1}{6} - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} =$$

$$\text{S: } \frac{-25}{12}$$

$$2) \frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} =$$

$$\text{S. } \frac{23}{12}$$

$$2) \frac{7}{6} - \frac{5}{2} + \frac{1}{3} =$$

$$\text{S: } -1$$

$$4) \frac{2}{5} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} =$$

$$\text{S. } \frac{59}{60}$$

$$5) \frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2} =$$

$$\text{S. } \frac{2}{3}$$

$$6) \frac{2}{5} - \frac{3}{4} + \frac{7}{6} =$$

$$\text{S. } \frac{49}{60}$$

OPERACIONES RÁPIDAS

Ten en cuenta $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \dots$ etc. y podrás sumar y restar mentalmente:

$$\begin{array}{c} \text{Dos medios} \quad 1 + \frac{1}{2} = \quad \frac{3}{2} \\ \text{Un medio} \quad \text{Tres medios} \end{array}$$

3.3. Sumas rápidas (mentalmente):

a) $1 + \frac{1}{2} =$	S. $\frac{3}{2}$
b) $1 + \frac{1}{3} =$	S. $\frac{4}{3}$
c) $1 + \frac{1}{4} =$	S. $\frac{5}{4}$
d) $1 + \frac{1}{5} =$	S. $\frac{6}{5}$
e) $1 + \frac{1}{6} =$	S. $\frac{7}{6}$
f) $1 + \frac{1}{7} =$	S. $\frac{8}{7}$

3.4. Restas rápidas

a) $1 - \frac{1}{2} =$	S. $\frac{1}{2}$
b) $1 - \frac{1}{3} =$	S. $\frac{2}{3}$
c) $1 - \frac{1}{4} =$	S. $\frac{3}{4}$
d) $1 - \frac{1}{5} =$	S. $\frac{4}{5}$
e) $1 - \frac{1}{6} =$	S. $\frac{5}{6}$
f) $1 - \frac{1}{7} =$	S. $\frac{6}{7}$

$$1 + \frac{2}{5} =$$

$$1 - \frac{2}{5} =$$

$$3 + \frac{2}{7} =$$

$$3 - \frac{2}{7} =$$

Multiplicación

Se multiplica

[numerador x numerador] y

[denominador x denominador]. Ejemplo:

$$\frac{4}{9} \times \frac{5}{4} = \frac{4 \times 5}{9 \times 4} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

División

Se multiplica “en cruz”:

Ejemplo:

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{8} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{16}{15}$$

3.5. Multiplicaciones y divisiones

1) $\frac{2}{7} \cdot \frac{12}{14} =$	S. $\frac{12}{49}$
2) $\frac{1}{6} : \frac{3}{4} =$	S. $\frac{2}{9}$
3) $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} : \frac{3}{7} =$	S. $\frac{14}{15}$
4) $\frac{3}{2} : \frac{4}{5} : \frac{3}{4} =$	S. $\frac{5}{2}$

3.6. Realiza las siguientes operaciones: (simplifica resultado)**PRIMERO**

a) $\frac{15}{24} + \left(\frac{13}{6} - \frac{1}{4}\right)$

b) $6 - \left(\frac{9}{5} - \frac{8}{3}\right)$

c) $\frac{7}{6} - \left(\frac{3}{2} + 4\right)$

d) $-1 - \left(3 - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{3} - 6\right)$

e) $\frac{2}{3} - \frac{5}{6} + 2 - \frac{1}{2}$

f) $\left(2 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$

SEGUNDO

a) $\frac{5}{24} : \left(\frac{7}{42} + \frac{9}{14}\right)$

b) $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) : \frac{2}{6}$

c) $\left(\frac{3}{10} + \frac{12}{4}\right) : \left(\frac{13}{9} - \frac{4}{8}\right)$

d) $\left(\frac{9}{4} - \frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{17}{4} - \frac{15}{6}\right)$

3.7. Realiza las siguientes operaciones: (simplifica resultado)

$\frac{3}{7} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2} \right) =$	Sol: 9/70
$\frac{7}{5} \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{15} \right) =$	Sol: 49/150
$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) \cdot \frac{1}{4} =$	Sol: 23/240
$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} \right)$	Sol: 37/180
$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) =$	Sol: 7/32

3.8. Ejercicios

1. Un cuarto de Kg. de queso cuesta 3,50 €.
¿Cuánto costarán 125 g?
¿Cuánto costará 1 kg?
2. Compro 3/4 de Kg. de fruta por 2,40 Euros
¿Cuál es el precio del Kg.?
3. Una familia ha consumido en un día de verano:
Dos botellas de litro y medio de agua.
6 botes de 1/3 de litro de zumo.
8 limonadas de 1/4 de litro.
¿Cuántos litros de líquido han bebido?
4. ¿Cuántas botellas de 3/4 de litro se pueden llenar con 60 litros de vino?
(Sugerencia: si las botellas fueran de 2 litros harías **60:2**... si son de 3/4 **60:3/4**)
5. Un Kg. de queso cuesta 24 Euro.
¿Cuántos céntimos cuesta un gramo?
¿Cuánto cuesta 75 g? ¿Y 110 g?

S: 1) 1,75 €; 14 €; 2) 3,20 €; 3) 7 litros 4) 80 botellas; 5) 2,4 cts.- 1,80 Eur.- 2,64 Eur.

4. NÚMERO MIXTO

Fracción propia: fracción con numerador \leq denominador.

Su valor es ≤ 1

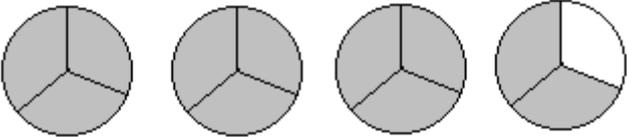
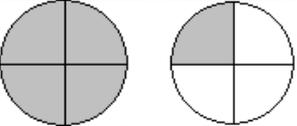
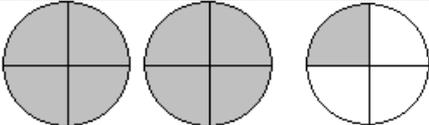
Fracción impropia: fracción con numerador $>$ denominador.

Su valor es > 1

Más pequeño \rightarrow $\frac{3}{5}$
Más grande \rightarrow $\frac{5}{3}$
Fracción propia

Número mixto es una presentación de la fracción impropia en la que separamos las unidades:

Ejemplo:

Fracción $\frac{11}{3}$		Número mixto: $3\frac{2}{3}$
$\frac{5}{4}$		$\frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$
$\frac{9}{4}$		$\frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

CONVERTIR FRACCIÓN EN NÚMERO MIXTO:

$$\begin{array}{r} 9 \overline{) 4} \\ 1 \quad 2 \end{array} \Rightarrow \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{r} 11 \overline{) 3} \\ 2 \quad 3 \end{array} \Rightarrow \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$

4.1. Convierte en número mixto:

1) $\frac{10}{8} =$

2) $\frac{9}{4} =$

3) $\frac{5}{2} =$

4) $\frac{7}{5} =$

5) $\frac{3}{2} =$

6) $\frac{17}{5} =$

7) $\frac{25}{4} =$

8) $\frac{9}{2} =$

CONVERTIR NÚMERO MIXTO EN FRACCIÓN:

$$a\frac{m}{n} = \frac{a \cdot n + m}{n}$$

$$2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{13}{5}$$

4.2. Convierte en fracción:

1) $2\frac{1}{5} =$

2) $2\frac{2}{5} =$

3) $2\frac{3}{5} =$

4) $4\frac{1}{3} =$

5) $3\frac{1}{4} =$

6) $4\frac{2}{3} =$

7) $1\frac{3}{8} =$

8) $3\frac{7}{4} =$

NÚMERO MIXTO Y CALCULADORA:

La calculadora puede configurarse para que presente los resultados como número mixto.

Las calculadoras de una línea en pantalla muestran: $2 _ | 3 _ | 5$ en vez de $2\frac{3}{5}$

Pulsando Shift + $a\frac{b}{c}$ conviertes el número mixto en fracción

5. FRACCIÓN Y PORCENTAJE

FRACCIÓN DE UNA CANTIDAD:

Se multiplica "fracción x cantidad"

Ejemplos:

1º) Calcula $\frac{2}{3}$ de 60 €: $\frac{2}{3} \times 60 \text{ €} = \frac{2 \times 60}{3} = 40 \text{ €}$

2º) Calcula $\frac{3}{4}$ de 100 g.: $\frac{3}{4} \times 100 \text{ g} = \frac{3 \times 100}{4} = 75 \text{ g}$

5.1. Calcula:

1) $\frac{2}{3}$ de 15.000 Euros

2) $\frac{1}{5}$ de 3.800 g

3) $\frac{3}{4}$ de 60 minutos

4) $\frac{4}{5}$ de 4.200 votos

S: 1) 10.000 €; 2) 760 g; 3) 45 m; 4) 3.360 votos.

CALCULO DE PORCENTAJES:

Porcentaje = fracción con denominador 100,

$$r\% = \frac{r}{100}$$

Un % se calcula multiplicando, como cualquier otra fracción

Ejemplo: **12% de 300 euros:** $300 \times 12\% = 300 \times \frac{12}{100} = 36$ Euros

5.2. Calculo de un porcentaje de una cantidad:

Cantidad	%	Resultado
300	12	$300 \times 0,12 = 36$
900	15	
1.200	16	
800	5	$800 \times 0,05 = 40$
1.500	8	
650	4	

PARTE Y TOTAL:

PARTE COMO FRACCIÓN DEL TOTAL	PARTE COMO PORCENTAJE DEL TOTAL
<p>Parte como fracción del total: Se divide "parte/total" y se simplifica la fracción resultante</p> $\frac{\text{parte}}{\text{total}}$	<p>Parte como porcentaje del total: se divide "parte/total" y se multiplica por 100 el número decimal resultante</p> $\frac{\text{parte}}{\text{total}} \times 100$

Ejemplo 1:

15 Euros de un total de 60 Euros

EXPRESADO COMO FRACCIÓN	EXPRESADO COMO PORCENTAJE
$\frac{\text{Parte}}{\text{total}} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4} \text{ del total}$ <p>(1 euro de cada 4 euros)</p>	$\frac{\text{Parte}}{\text{total}} \times 100 = \frac{15}{60} \times 100 = 25\% \text{ del total}$ <p>(25 euros de cada 100 euros)</p>

(Vemos que cuarta parte y 25% es lo mismo)

Ejemplo 2:

30 gramos de un total de 40 gramos

EXPRESADO COMO FRACCIÓN	EXPRESADO COMO PORCENTAJE
$\frac{\text{Parte}}{\text{total}} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$ <p>(3g de cada 4g)</p>	$\frac{\text{Parte}}{\text{total}} \times 100 = \frac{30}{40} \times 100 = 75\%$ <p>(75g de cada 100g)</p>

(Vemos que tres cuartos y el 75% es lo mismo)

5.3.

- a) En 60 personas hay 12 franceses ¿Qué fracción y porcentaje suponen?
- b) De 600 € llevo gastado 180 € ¿Qué fracción y porcentaje de € he gastado?
- c) Un pastel de 125 g. contiene 25 g. de grasa. ¿Qué fracción y porcentaje de grasa contiene?
- d) En una población de 12.000 habitantes, en el barrio de abajo viven 1440.
¿Qué fracción y porcentaje de habitantes viven en ese barrio?

5.4. Completa la siguiente tabla:

Fracción	Porcentaje	Porcentaje	Fracción
1/2		20%	
3/5		50%	
3/4		60%	
4/5		25%	
1/4		40%	
1/25		75%	

5.5.

- a) En 360 personas hay 96 ingleses ¿Qué fracción y porcentaje suponen?
- b) De 1200 € llevo gastado 240 € ¿Fracción y porcentaje de € gastados?
- c) De los 365 días del año han transcurrido 35 ¿Qué fracción y porcentaje supone?
- d) En 24 votos he obtenido 9. ¿Qué fracción y porcentaje suponen?

5.6.

- a) En una playa hay 80 franceses y 120 ingleses ¿Qué fracción y porcentaje suponen? (nota: aquí el total no te lo dan. Debes obtenerlo sumando)
- b) En un pastel hay 120 g de harina, 80 g de mantequilla y 50 g de azúcar ¿Qué fracción y porcentaje hay de cada cosa?
- c) Por aplazar el pago de 3200 euros tengo gastos de 260 euros ¿Qué porcentaje supone?
- d) En un colegio titulan 92 alumnos y no titulan 158. ¿Qué fracción y porcentaje de alumnos han titulado?

Lecc. 3. PROPORCIONALIDAD. INTERÉS SIMPLE

1. Proporción; 2. Reparto proporcional; 3. Regla de tres compuesta; 4. Interés simple

1. PROPORCIÓN

Magnitud es una propiedad o característica que se puede medir.

La longitud, el peso,... son magnitudes. La belleza, la inteligencia... no son magnitudes

Razón es el cociente de dos magnitudes. Al numerador se le llama **antecedente**. Al denominador se le llama **consecuente**.

Ejemplos: $\frac{9 \text{ Eur}}{3 \text{ Kg}} = 3 \text{ Euro/Kg}$ (razón **precio**); $\frac{180 \text{ Km}}{2 \text{ h}} = 90 \text{ Km/h}$ (razón **velocidad**)

En la fracción: numerador y denominador son enteros. En la razón antecedente y consecuente pueden ser decimales.

1.1. Ejercicios:

1. Calcula a, b y c: $\frac{1}{a} = \frac{3}{b} = \frac{6}{18} = \frac{c}{36}$

2. Calcula a, b y c: $\frac{1}{a} = \frac{2}{10} = \frac{3b}{15} = \frac{4b}{c}$

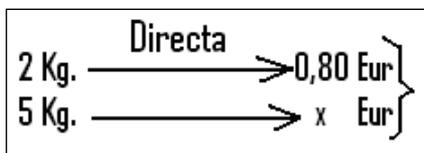
Proporcionalidad directa. Hay proporcionalidad directa entre dos magnitudes cuando se mantiene la razón entre ellas. O sea, cuando al aumentar (o disminuir) una, la otra aumenta (o disminuye) en la misma proporción.

Ejemplo: Peso y precio: $\frac{0,40 \text{ Eur}}{1 \text{ Kg}} = \frac{0,80 \text{ Eur}}{2 \text{ Kg}} = \frac{1,20 \text{ Eur}}{3 \text{ Kg}} = \dots$ 0,40 Euro/Kg (razón **precio**);

REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

Es la forma tradicional de plantear, para que a partir de una razón de magnitudes directamente proporcionales, obtengamos el término desconocido de una segunda razón.

Ejemplo: Si 2 Kg. de patatas cuestan 0.80 €, ¿cuánto costarán 5 Kg.?



$$x = \frac{5 \cdot 0,80}{2} = 2 \text{ Euros}$$

1.2. Ejercicios:

1. Si 32 metros de cuerda han costado 48 €, ¿Cuánto costarán 50 metros?

2. Si 5 personas consumen 18 m³ de agua en un mes ¿Cuántos m³ consumirán 8 personas?

Magnitudes inversamente proporcionales: hay proporcionalidad inversa entre dos magnitudes cuando al aumentar (o disminuir) una, la otra disminuye (o aumenta) en la misma proporción. Es decir, si una se multiplica por dos la otra se divide por dos; Si una se multiplica por 3 la otra se divide por 3; etc.

Ejemplo: Si 8 vacas tienen pienso para 6 días, 12 vacas tendrán pienso proporcionalmente para menos días (x días):

$$\text{Inversa} \quad \frac{8 \text{ vacas}}{6 \text{ días}} = \frac{12 \text{ vacas}}{x \text{ días}} \Rightarrow \boxed{\frac{8 \text{ vacas}}{x \text{ días}} = \frac{12 \text{ vacas}}{6 \text{ días}}}$$

Solución: $x = 8 \times 6 / 12 = 4$ días

REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

Es la forma tradicional de plantear, para que a partir de una razón de magnitudes inversamente proporcionales, obtengamos el término desconocido de una segunda razón.

Ejemplo: Si 8 vacas tienen pienso para 6 días, ¿Para cuánto tiempo tendrán pienso 12 vacas?

$$\left. \begin{array}{l} 8 \text{ vacas} \xrightarrow{\text{Inversa}} 6 \text{ días} \\ 12 \text{ vacas} \xrightarrow{\quad\quad\quad} x \text{ días} \end{array} \right\} \quad x = \frac{8 \times 6}{12} = 4 \text{ días}$$

1.3. Ejercicios:

1. Si a 60 km/h tardo tres horas en un trayecto, ¿Cuánto tardaré a 80 km/h?
2. Si 15 personas hacen un trabajo en 4 días ¿Cuánto tardarán 6 personas?

PROPIEDAD DE LAS PROPORCIONES

RAZÓN SUMA O RESTA DE ANTECEDENTES Y CONSECUENTES

$$\boxed{\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x+y}{a+b}} \quad \boxed{\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{x-y}{a-b}}$$

Ejemplo: La suma de dos números es igual a 12 y son proporcionales a 1 y 2 .
¿Cuáles son los números?

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{x+y}{1+2} = \frac{12}{3} \Rightarrow x=4; y=8$$

2. REPARTO PROPORCIONAL DIRECTO

Ejemplo. Tres personas trabajaron respectivamente 30 horas, 65 horas y 85 horas.
Reparte entre ellos 4.500 Euros.

Solución: les corresponde x , y , z euros respectivamente.

Tras las tres proporciones escribimos la proporción suma:

$$\frac{x\text{€}}{30h} = \frac{y\text{€}}{65h} = \frac{z\text{€}}{85h} = \frac{4500\text{€}}{180h} \Rightarrow$$

$$x = \frac{4500 \cdot 30}{180} = 750 \text{ Euro}; \quad y = \frac{4500 \cdot 65}{180} = 1625 \text{ Euro}; \quad z = \frac{4500 \cdot 85}{180} = 2125 \text{ Euro}$$

Otra forma de hacer este problema, que en realidad es la misma forma: hay 4.500 Euros para un total de 180 horas, y por tanto sale a 25 Euros la hora. Finalmente pagas a cada uno las horas trabajadas.

2.1. Ejercicios:

1. Queremos gastar 1200 € en tres viajes, de 4 días, 7 días y 9 días respectivamente..
¿Cuál es el reparto proporcional a cada viaje en función de su duración?
2. Tres socios aportan a un negocio 5000, 7500 y 9000 €. Al cabo de un año han ganado 6 450 €. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno si hacen un reparto directamente proporcional a los capitales aportados?
3. Repartimos una cantidad de dinero entre tres personas, en partes directamente proporcionales a 3, 5 y 7. Sabiendo que a la segunda le corresponden 735 €. Hallar lo que le corresponde a la primera y tercera.
4. Se reparte dinero en proporción a 5, 10 y 13; al menor le corresponden 2500 €. ¿Cuánto corresponde a los otros dos?
5. Se quiere repartir unos beneficios de 40.000 € entre tres trabajadores proporcionalmente a los años que llevan en la empresa, que son 10, 12 y 18 años. ¿Cuánto recibirá cada uno?.
6. Una fuente cuenta con cuatro grifos que han arrojado un total de 12600 litros. El primero ha estado abierto 1 hora y 20 minutos; el segundo, 90 minutos; el tercero, una hora y cuarto, y el cuarto, dos horas menos cuarto. ¿Cuántos litros ha arrojado cada grifo?.

3. REGLA DE TRES COMPUESTA

Se emplea para relacionar tres o más magnitudes

Ejemplo modelo:

Once obreros labran 10.560 m^2 en seis días.

¿Cuántos obreros serán necesarios para labrar 16.800 m^2 en cinco días?

Solución:

1º Copiamos los datos del enunciado:



2º Clasificación:

Columna m²
respecto a la columna x:

A más m² necesitamos más obreros.

Directa: anotamos “D”
sobre la columna de los m²

Columna días
respecto a la columna x:

A más días necesitamos menos obreros.

Inversa: anotamos “I”
sobre la columna de los días.



3º A continuación colocamos los datos:

$$\frac{11}{x} = \frac{10560}{16800} \cdot \frac{5}{6}$$

La columna de la x

Los m², en el mismo orden por ser directa

Los días, “al revés” (5/6) por ser inversa

Solución:

$$\frac{11}{x} = \frac{52.800}{100.800} \Rightarrow x = \frac{11 \cdot 100.800}{52.800} = 21 \text{ obreros}$$

3.1. Ejercicios:

1. Si 8 obreros realizan en 9 días un muro de 30 m., ¿Cuántos días necesitarán 12 obreros para realizar 50 m. de muro? S: 10.
2. Seis grifos tardan 10 horas en llenar un depósito de 400 l. ¿Cuántas horas tardarán 4 grifos en llenar un depósito de 1000 l. S: 37,5.
3. En 30 días un equipo de 12 hombres ha realizado una calle de 1.600 m. ¿Cuántos metros realizarán 20 hombres en 10 días? S: 888,89.
4. Una familia de 7 miembros gasta trimestralmente 105 euros en agua. ¿Cuál será el gasto diario de una población de 150 personas? S: 25€.
5. Por 20 jornales de 8 horas diarias un obrero percibió 1.600 euros. ¿Cuánto percibirá por 60 días trabajando 6 horas diarias? S: 3600 €.
6. Seis obreros trabajando durante un mes en una reparación han cobrado 17.685 euros. Calcular cuánto cobrarán por otra reparación 10 obreros trabajando durante siete días. S: 6877,5 €.
7. ¿Cuántas personas se necesitan para realizar un trabajo en 2 días, si se han precisado 15 personas durante 4 días para realizar 10 trabajos? S: 3 personas.
8. Seis personas pueden vivir en un hotel durante 12 días por 792 €. ¿Cuánto costará el hotel de 15 personas durante ocho días? S: 1320 €
9. Seis grifos, tardan 10 horas en llenar un depósito de 400 m³ de capacidad. ¿Cuántas horas tardarán cuatro grifos en llenar 2 depósitos de 500 m³ cada uno? S. 37,5 h
10. El transporte de 150 toneladas de mineral de hierro a la distancia de 650 km, ha costado 2 600 €. ¿Cuánto costará el transporte de 225 toneladas de la misma mercancía a la distancia de 200 km? S.: 1200€
11. Se necesitan 480 kg de pienso para mantener 12 caballos durante 20 días. ¿Qué cantidad de pienso se necesitará para mantener 7 caballos durante 36 días? S: 504 kg

4. INTERÉS SIMPLE

Llamamos interés:

- Si depositamos dinero: al beneficio que nos produce
- Si nos prestan dinero: al dinero que pagamos, además de la cantidad prestada.

En un préstamo:

Cantidad prestada	Capital	C	
Tiempo del préstamo	Tiempo	t	
Porcentaje %	Rédito o tasa	r	
Beneficio del prestamista	Interés	I	

Nota: en lenguaje coloquial a veces se dice “al 2 por ciento de interés...”

CÁLCULO DEL INTERÉS (fórmula del “carrete”):

t en años	t en meses	t en días
$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100}$	$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{1.200}$	$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{36.000}$

Ejemplos

<p>a) Hallar el interés producido durante cinco años, por 30 000 €, al 6%</p>	<p>Solución:</p> $I = \frac{30.000 \cdot 5 \cdot 6}{100} = 9.000€$
<p>b) Calcular el interés producido en seis meses por 10.000 € al 3.5%.</p>	<p>Solución:</p> $I = \frac{10.000 \cdot 3,5 \cdot 6}{1.200} = 175€$

4.1. Ejercicios:

1. Por 65.000 euros, a devolver en 5 años, al 6'5 % , ¿cuánto pagaremos de interés?
(Sol: 21.125 Euros)
2. Un Banco presta 12.000 euros a devolver en 10 años al 7%. Calcula los intereses
(Sol: 8.400 Euros)
3. Compramos un vehículo. Aplazamos el pago de 8.000 euros, a pagar dentro de 18 meses, al 5'5%. Calcula los intereses a pagar
(Sol: 660 Euros)
4. Tenemos un préstamo de 9.000 euros a devolver en 25 días. La tasa es el 4%, ¿a cuánto ascenderán los intereses?
(Sol: 25 Euros)
5. Una empresa solicita un préstamo de 20.000 euros al 6% anual durante 25 meses. Averigua los intereses del préstamo
(Sol: 2500 Euros)

CÁLCULO DE CAPITAL, RÉDITO Y TIEMPO:

$I = \frac{C \cdot r \cdot t}{100} \Rightarrow 100 \cdot I = C \cdot r \cdot t \Rightarrow$	$\begin{cases} C = \frac{100 \cdot I}{r \cdot t} \\ r = \frac{100 \cdot I}{C \cdot t} \\ t = \frac{100 \cdot I}{C \cdot r} \end{cases}$	Años: 100 Meses: 1200 Días: 36.000
---	---	--

4.2. Ejercicios:

1. ¿Qué capital debo poner al 5% para producir 3.000 euros en 3 años?
2. Una empresa pide un préstamo de 60.000 euros durante 4 años, pagando de intereses 12.000 euros. ¿Cuál fue el %?

1) 20.000 €; 2) 5%;

4.3. Ejercicios:

1. ¿Cuánto tiempo es necesario para que 10.000 euros al 3% produzcan 2.400 euros de interés?
2. ¿Durante cuánto tiempo ha de imponerse un capital de 25 000 € al 5% para que se convierta en 30.000 €? (Pista: deberá producir 5.000 €)
3. ¿Durante cuánto tiempo ha de imponerse un capital de 60 000 € al 2% para que se convierta en 63.000 €?

1) 8 años; 2) 4 años; 3) 2,5 años

4.4. Ejercicios:

1. Se prestan 45 000 € y al cabo de 6 meses hay que devolver 47 250 €. Calcular el tanto por ciento aplicado.
2. ¿En cuánto tiempo se triplica un capital colocado al 4%?

1) 10%; 2) 50 años

INTERÉS COMPUESTO: El interés simple es adecuado para un periodo de tiempo, que finaliza con un pago o un cobro. Por ejemplo, una letra a 90 días. No es adecuado para varios periodos de tiempo. Por ejemplo, en una imposición de dinero, en cada periodo de tiempo los intereses se acumularán al capital. O si es un préstamo, con cada pago vas debiendo menos y por tanto también los intereses deben ir disminuyendo.

Hay fórmulas adecuadas para todos los casos. Para obtener el capital obtenido al cabo de n años, al r% anual, y con aportación inicial C_0 sería: $C_n = C_0(1 + r/100)^n$

FUNCIÓN PAGO: es una función de la hoja de cálculo. Calcula la cuota a pagar por un préstamo. Debes introducir Capital prestado, tasa por periodo de pago (ejemplo, 8%/12 si es al 8% anual y hacemos pagos mensuales), y número de pagos (ejemplo, 120 pagos si son pagos mensuales y el préstamo es a 10 años)

Lecc. 4. POLINOMIOS

1. Monomios; 2. Polinomios; 3. Valor numérico; 4. Factor común; 5. Identidades notables

1. MONOMIOS

Monomio es una expresión en la que las únicas operaciones que aparecen son la *multiplicación* y la *potencia* (no aparecen sumas o restas).

Ejemplo: $5x^2$; $4x$; $3x^3$ son monomios

Coficiente del monomio es el número que aparece multiplicando a la incógnita.

Grado de un monomio es el exponente de la incógnita.

Monomios semejantes

Si tienen el mismo exponente.

Ejemplo: $5x^2$, $9x^2$ y $4x^2$ son semejantes.

SUMA - RESTA

Sólo podemos sumar o restar monomios semejantes.

Se mantiene el exponente y se suman o restan los coeficientes.

$$2x^3 + 9x^3 - 8x^3 = 3x^3$$

1.1. Sumas y restas

1) $x + x =$	2) $x + 3x - 5x =$
3) $x + x + x =$	4) $x + 3x + 5x =$
5) $x^2 + 2x^2 + 3x^2 + 4x^2 =$	6) $x^2 + 3x^2 + 6x^2 =$
7) $x + 5x + x + 5x =$	8) $x + 2x - 7x =$

1.2. Sumas y restas

1) $x^3 + 2x^3 =$	2) $x^3 + 2x^3 - x^3 =$
3) $x^4 - 4x^4 =$	4) $x^4 - 2x^4 + 3x^4 =$
5) $5x^3 - 2x^3 - 3x^3 =$	6) $4x^3 - 3x^3 - x^3 =$
7) $8x^4 + x^4 - 12x^4 =$	8) $2x^4 - 4x^4 + x^4 =$

1.3. Sumas y restas

1) $5x^2 - 2x^2 + 3x - x =$	2) $5x^2 + 2x^2 + 3x - 3x =$
3) $4x^2 - x - 2x^2 - 5x =$	4) $5x^2 - 6x^2 + 2x - 5x =$
5) $5x - 5x^2 - 2x^2 + 3x =$	6) $4x - 3x^2 - 3x + 4x^2 =$
7) $2x^2 + 2x^2 + 2x + 2x =$	8) $2x^2 - 2x^2 + x - x =$

1.4. Sumas y restas

1) $3x^3 - x^2 + 4x^3 - x^2 =$	2) $3x^3 + 5x^2 - 3x^3 - x^2 =$
3) $2x^2 - 5x + 2x^2 + x^2 - 3x^2 =$	4) $x^2 - 5x^2 + x - 3x^2 - x^2 + 2x =$
5) $x^2 + x^2 - 3 - 2x - x^2 - 1 =$	6) $4 - 2x^2 - 3x^2 + x^2 - 3 =$
7) $-3x^2 - 1 + x^2 - 2 + x^2 =$	8) $7x^2 + 4x + 5 - 4x^2 - 3x - 2 =$

MULTIPLICACIÓN - DIVISIÓN POR UN NÚMERO

Se multiplica o divide el coeficiente por el número.

Ejemplos: $2 \cdot 3x = 6x$; $15x : 3 = 5x$

1.5. Multiplicaciones:

1) $2 \cdot 4x =$	2) $15x^2 : 3 =$
3) $3 \cdot 2x^2 =$	4) $10x^3 : 2 =$
5) $3 \cdot 2x^3 =$	6) $8x^2 : 4 =$
7) $4x \cdot 2 \cdot 5 =$	8) $9x : 3 =$
9) $3 \cdot 2x^2 \cdot 2 =$	10) $3x : 3 =$

MULTIPLICACIÓN - DIVISIÓN DE MONOMIOS

Se multiplican (o dividen) los coeficientes y se suman (o restan) los exponentes.

Ejemplos:

$$2x^3 \cdot 3x^5 = 6x^8 \quad ; \quad 12x^5 : 4x^2 = 3x^3$$

$$\frac{6x^3 \cdot 3x^2}{9x^3} = \frac{18x^5}{9x^3} = 2x^2$$

1.6. Multiplicaciones:

1) $3x^3 \cdot 5x^2 =$	4) $(-3x^4) \cdot (-2x^2) \cdot (-2x) =$
2) $4x^4 \cdot 2x^2 =$	5) $2x^3 \cdot 5x \cdot 3x =$
3) $-2x^3 \cdot 5x =$	6) $2x \cdot 2x^2 \cdot 5x =$

1.7. Divisiones:

$$1) (12x^2):(4x) =$$

$$2) (18x^3):(6x) =$$

$$3) (30x^5):(6x^2) =$$

$$4) (8x):(12x) =$$

$$5) (12x^6):(8x^3) =$$

$$6) (2x^3):(5x^2) =$$

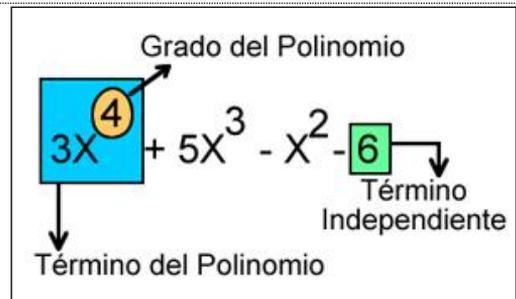
2. POLINOMIOS

Polinomio: es una suma de monomios

Grado: es el mayor exponente que contiene

Término: es cada uno de los sumandos

Término independiente: término sin x



SUMA - RESTA

a) Modo tradicional. Colocando en filas, uno bajo otro

Suma $P(x) + Q(x)$:

$$\begin{array}{r} P(x) = 4x^2 + 2x + 6 \\ Q(x) = 2x^2 - 5x - 7 \\ \hline P(x)+Q(x) = 6x^2 - 3x - 1 \end{array}$$

Resta $P(x) - Q(x)$:

Cambia los signos a $Q(x)$ y sumas:

$$\begin{array}{r} P(x) = 4x^2 + 2x + 6 \\ -Q(x) = -2x^2 + 5x + 7 \\ \hline P(x)-Q(x) = 2x^2 + 7x + 13 \end{array}$$

2.1. Calcula:

$$\begin{array}{r} + 5x^2 + 3x + 2 \\ + 3x^2 - 2x - 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 5x^2 + 3x + 2 \\ + 2x^3 + 4x^2 - 5x - 1 \\ \hline \end{array}$$

2.2. Calcula:

1) Siendo $A(x) = -2x^2 - 3x - 8$ $B(x) = 6x^2 + 3x - 10$ Calcula $A(x) - B(x)$	2) Siendo $A(x) = -3x^2 + 5x - 4$ $B(x) = -5x^2 + 2x + 1$ Calcula $A(x) - 2 \cdot B(x)$
3) Siendo $A(x) = 4x^2 + 3x + 5$ $B(x) = -2x^2 + x - 1$ Calcula $-2 \cdot A(x) + 4 \cdot B(x)$	4) Siendo $A(x) = -3x + 2x^2 - 2$ $B(x) = -10 + 3x^2 + 7x$ Ordena los polinomios y calcula $-3 \cdot A(x) - 4 \cdot B(x)$

b) En la misma línea. Colocando uno tras otro, sin filas

Dados los polinomios: $P(x) = 7x^2 - 7x + 3$; $Q(x) = -5x^2 + 2x - 5$

a) $P(x) + Q(x) = 7x^2 - 7x + 3 - 5x^2 + 2x - 5 = \boxed{2x^2 - 5x - 2}$

b) $P(x) - Q(x) = 7x^2 - 7x + 3 - (-5x^2 + 2x - 5) = 7x^2 - 7x + 3 + 5x^2 - 2x + 5 = \boxed{12x^2 - 9x + 8}$

2.3. Calcula:

1) $(-3x^2 + 5x - 2) + (2x^2 - 3x + 1) =$
2) $(-2x^2 - 6x - 1) + (-2x^2 - 6x + 9) =$
3) $(x^2 - 2x) - (6x - 1) - (x^2 - 6x + 1) =$
4) $(x^2 + 5x) - (2x + 1) - (-6x^2 + 4) =$

2.4. Calcula:

1) $(-3x^2 + 2x - 6) - (2x^2 + x + 2) =$
2) $(2x^2 - 5x + 3) - (-3x^2 + x) =$
3) $(x^2 - 3x + 2) - (x - x^2) + 3x =$
4) $(x^2 - x + 2) - (2x^2 - 4x + 3) =$

MULTIPLICACIÓN

a) Modo tradicional

$$\begin{array}{r} -4x^3 + 5x^2 + x - 1 \\ 3x^2 - x \\ \hline -12x^5 + 15x^4 + 3x^3 - 3x^2 \\ 4x^4 - 5x^3 - x^2 + x \\ \hline -12x^5 + 19x^4 - 2x^3 - 4x^2 + x \end{array}$$

2.4. Multiplica los polinomios:

1) $(-2x^3 - 3x^2 - 3x - 8) \cdot (5x + 2) =$

2) $(-3x^2 + 5x - 4) \cdot (2x^2 + 3) =$

3) $(4x^3 - 2x + 3x^2 + 1) \cdot (-2x + x^2)$ Ordena los polinomios antes de multiplicarlos

4) $(-3x^2 + 2x^3 + 2 - 5x) \cdot (3 - 2x^2)$ Ordena los polinomios antes de multiplicarlos

b) En la misma línea

Se suele aplicar para multiplicaciones “cortas”

Ejemplo: $(3x - 1) \cdot (x + 2) = 3x^2 - x + 6x - 2 = 3x^2 + 5x - 2$

Ejemplo: $(x^2 + x + 1) \cdot (x - 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1$

2.5. Multiplica los polinomios:

1) $(2x + 5) \cdot (2x + 3) =$

2) $(5x^2 + 2x - 3) \cdot (4x - 2) =$

3) $(-5x + 6) \cdot (4x - 3) =$

4) $(9x^2 + x + 5) \cdot (-2x + 3) =$

2.6. Multiplica:

1) $(x^2 - 2x + 2) \cdot (2x^2 + 3) =$

2) $(3x^2 - 5x + 1) \cdot (x^2 - 7) =$

3) $(2x^2 - 5x + 6) \cdot (4x - 3) =$

4) $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + 1) =$

2.7. Realiza las operaciones. Ordena los resultados:

1) $2x \cdot (5x - 6) - 2x \cdot (4x + 2) =$

2) $3x \cdot (x - 1) - x \cdot (x + 2) =$

3) $5x - 3x(x+1) + x(x+2) =$

4) $x \cdot (3x+2) - x \cdot (4x-2) + 3x =$

3. VALOR NUMÉRICO

3.1. Dado el valor de x, rellena la tabla con los valores numéricos:

x	3x	3x - 4	x ² + 5	x ² - 3
2	6	2	9	1
5				
-3				
4				
1				
-2				

3.2. Dado el valor de x, rellena la tabla:

x	-2x - 3	-7x + 3	x ³ + 1	-x ³ + 1
3	-9	-18	28	-26
6				
-2				
5				
-3				
0				

4. FACTOR COMÚN

Extraemos los factores comunes y ponemos entre paréntesis el resto de factores

Ejemplo: $12x^3 + 6x^2 = 6x^2(2x + 1)$

4.1. Extrae factor común

1) $9x^3 + 6x^2 =$	4) $x^3 - x^2 =$
2) $14x^3 + 7x^2 =$	5) $x^3 + x =$
3) $8x^2 + 4x =$	6) $5x^3 + 15x^2$

4.2. Extrae factor común

1) $3x^3 + 12x^2 =$	4) $6x^3 - 12x^2 =$
2) $x^3 + x^2 =$	5) $2x^2 + 9x =$
3) $18x^2 + 9x^2 =$	6) $10x^3 + 15x^2$

4.3. Extrae factor común

1) $3x^3 + 6x^2 =$	4) $6x^3 - 3x^2 + 12x =$
2) $2x^3 + 4x^2 + 8x =$	5) $12x^3 - 6x^2 + 9x$
3) $8x^2 - 4x + 4x^2 + 12x =$ (agrupa antes)	6) $25x^3 + 30x^2$

4.4. Extrae factor común

1) $x^3 + x^2 + x =$	4) $x^3 + x^2$
2) $2x^3 + 24x^2 =$	5) $4x^3 - 2x^2 + 5x$
3) $x^3 - x =$	6) $8x^3 + 12x^4 - 16x^2 =$

5. IDENTIDADES NOTABLES

Cuadrado de una suma:	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Cuadrado de una diferencia	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma por diferencia:	$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

5.1. Desarrolla:

a) $(3x + 2)^2 =$

b) $(2x + 5)^2 =$

c) $(5x + 1)^2 =$

d) $(x + 4)^2 =$

e) $(3x - 2)^2 =$

f) $(2x - 5)^2 =$

g) $(3x - 4)^2 =$

h) $(2x - 1)^2 =$

Soluc.: (a) $9x^2 + 12x + 4$; (b) $4x^2 + 20x + 25$; (c) $25x^2 + 10x + 1$. (d) $x^2 + 8x + 16$;
(e) $9x^2 - 12x + 4$; (f) $4x^2 - 20x + 25$; (g) $9x^2 - 24x + 16$; (h) $4x^2 - 4x + 1$.

5.2. Desarrolla:

a) $(5x + 2) \cdot (5x - 2) =$

b) $(2x - 4) \cdot (2x + 4) =$

c) $(3x - 2) \cdot (3x + 2) =$

d) $(x + 1) \cdot (x - 1) =$

e) $(x + 3) \cdot (x - 3) =$

f) $(2x - 1) \cdot (2x + 1) =$

Soluc.: (a) $25x^2 - 4$; (b) $4x^2 - 16$; (c) $9x^2 - 4$; (d) $x^2 - 1$; (e) $x^2 - 9$; (f) $4x^2 - 1$.

5.3. Desarrolla:

a) $(x + 1)^2 =$

b) $(x - 1)^2 =$

c) $(x^2 - 2)^2 =$

d) $(3x^2 - 2x)^2 =$

e) $\left(\frac{3}{2} + \frac{x}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{3}\right)$

5.4. Expresa como una identidad notable:

a) $x^2 + 6x + 9 =$

b) $x^2 - 10x + 25 =$

c) $4x^2 - 25 =$

d) $9x^2 + 24x + 16 =$

e) $25x^2 - 20x + 4 =$

f) $x^2 - 1 =$

Soluc.: (a) $(x + 3)^2$; (b) $(x - 5)^2$; (c) $(2x + 5) \cdot (2x - 5)$; (d) $(3x + 4)^2$; (e) $(5x - 2)^2$; (f) $(x + 1) \cdot (x - 1)$.

Lecc. 5. ECUACIONES Y SISTEMAS

1. Ecuaciones de primer grado; 2. Problemas con ecuaciones; 3. Sistemas (reducción, sustitución, igualación). 4. Ecuación de segundo grado

1. ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Ecuación: es una igualdad entre expresiones algebraicas.

Solución: es el valor de x para el que se verifica la ecuación:

Miembros de la ecuación: son las expresiones que aparecen a ambos lados del signo igual.

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Primer miembro} & & \text{Segundo miembro} \\
 \boxed{5x - 2} & = & \boxed{2x + 7} \\
 & \uparrow & \\
 & \text{Igualdad} &
 \end{array}$$

Términos: son los sumandos que forman los miembros:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \boxed{5x} & - & \boxed{2} & = & \boxed{2x} & + & \boxed{7} \\
 & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow \\
 & & \text{Términos} & & \text{Términos} & & \text{Términos}
 \end{array}$$

1.1. Resuelve mentalmente las siguientes ecuaciones:

Ecuación	Solución
1) $2x + 1 = 7$	
2) $2x - 1 = 5$	
3) $2x - 1 = 7$	
4) $5 + 2x = 7$	
5) $5 + 2x = 9$	
6) $5 + 2x = 11$	

1.2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $5x = 2(2x - 3) - 4$	$x = -10$
2) $2(x - 6) = 3x - 19$	$x = 7$
3) $5 + 5(x - 13) = x$	$x = 15$
4) $x - 2 = -3(4 - 2x)$	$x = 2$
5) $2(9x - 49) = 15x + 10$	$x = 36$
6) $120 = 2x - (15 - 7x)$	$x = 15$

1.3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

1) $6x - 3 = 3(3 + x)$	$x = 4$
2) $15(x - 1) + 20(x + 1) = 75$	$x = 2$
3) $4x + 7(2x - 1) = x + 163$	$x = 10$
4) $3 - 4x(25 - 2x) = 8x^2 + x - 300$	$x = 3$
5) $14x + 3(8x - 3) - 295 = 0$	$x = 8$
6) $5[2x - 4(25 - 2x)] = -10x + 20$	$x = 26/3$

ECUACIONES CON DENOMINADORES

Ejemplo: $\frac{3x}{2} + 2 = \frac{5x}{6} + 10$ MCM. 6

Solución:

$$\begin{aligned}9x + 12 &= 5x + 60 \\9x - 5x &= 60 - 12 \\4x &= 48 \\x &= 48/4 = 12 \\x &= \mathbf{12}\end{aligned}$$

1.4. Resuelve:

1) $\frac{3x}{2} + 2 = x + 4$	6) $\frac{5x}{6} - \frac{3x}{4} = x - 11$
2) $x - 8 = \frac{x}{2}$	7) $\frac{3x}{5} - 7 = \frac{2x}{6} + 1$
3) $x - \frac{3x}{4} = \frac{x}{7} + 3$	8) $x - 10 = \frac{5x}{9} - \frac{10}{3}$
4) $\frac{2x+10}{3} = x + 3$	9) $\frac{x}{3} + x = 10 + \frac{2x}{9}$
5) $\frac{9x}{4} - 6 = \frac{2x}{3} + \frac{1}{3}$	10) $\frac{3x}{2} + 1 = 12 - \frac{x}{3}$

Soluciones. (1) 4; (2) 16; (3) 28; (4) 1; (5) 4; (6) 12; (7) 30; (8) 15; (9) 9; (10) 6

2. PROBLEMAS CON ECUACIONES

2.1. Completa la segunda columna:

Un número:	x
El doble de un número	
El triple de un número	
La mitad de un número	
Un tercio de un número	
Dos números consecutivos	
Dos números que sumen 24	
Dos números cuya diferencia sea 24	
Dos números cuyo producto sea 24	

2.2. Ejercicios

- Halla 3 números enteros consecutivos cuya suma sea 96
- Reparte 25 Euros entre dos personas, dando a una 11 Euros más que a la otra.
- Dos hermanos tienen 11 y 9 años, y su madre 35. Halla el número de años que han de pasar para que la edad de la madre sea igual a la suma de las edades de los hijos.
- Juan tiene 10 años más que su hermana. Dentro de 6 años tendrá el doble. Halla sus edades.
- Víctor tiene 3 años más que su hermano. Dentro de 4 años sus edades sumarán 33 años. Halla sus edades actuales.
- Un padre tiene triple edad que su hijo. Dentro de 12 años será el doble. Halla sus edades.
- Reparte 300 euros entre A,B,C de modo que B reciba el doble de A y C el triple de A.
- Un lápiz y una lámina costaron juntos 8 euros. Si el lápiz cuesta 3 euros más que la lámina ¿Cuánto costará cada cosa?
- Una parcela rectangular tiene 123 metros de perímetro y es doble de larga que de ancha. ¿Qué área tiene la parcela?
- Reparte 130 euros entre A, B y C de modo que C reciba el doble de A y 15 euros menos de lo que recibe B.
- Tengo 1,85 euros en monedas de 10 céntimos y 5 céntimos. En total tengo 22 monedas ¿cuántas tengo de cada clase?

Soluciones: (1) 31, 32, 33. (2) 7 y 18. (3) 15 años. (4) 4 y 14. (5) 11 y 14. (6) 36 y 12.
(7) A: 50; B:100; C: 150. (8) 2,50 y 5,50. (9) $41 \cdot 20,5 = 840,5 \text{ m}^2$; (10) A: 23, B: 61 y C: 46.;
(11) 15 de 10cts y 7 de 5cts

3. SISTEMAS DE ECUACIONES

Están formados por varias ecuaciones con solución común.

Estudiaremos sistemas 2x2 (dos ecuaciones y dos incógnitas).

3.1. Empareja cada sistema con su solución.

a) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$	b) $\begin{cases} x + 4 = 2y \\ x - y = -1 \end{cases}$	c) $\begin{cases} x = y - 7 \\ x + 5 = y \end{cases}$	d) $\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ x + 6y = 15 \end{cases}$
--	---	---	---

S1) $x = 3, y = 2;$	S2) $x = -2, y = 5;$	S3) $x = 2, y = 3;$	S4) $x = 1, y = 3$
---------------------	----------------------	---------------------	--------------------

MÉTODO DE REDUCCIÓN

1. Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.
2. Las sumamos y desaparece una de las incógnitas. Se resuelve.
3. Se sustituye en una de las ecuaciones iniciales obteniendo el valor de la otra incógnita.

3.2. Resuelve los siguientes sistemas por reducción:

1. $\begin{cases} 4x + 3y = 7 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ -2x + y = -2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -3x + 2y = -8 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + 3y = 3 \\ 2x - 4y = -4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ -x + 3y = -1 \end{cases}$

Soluciones: 1. $x=1, y=1$; 2. $x=1, y=0$; 3. $x=2, y=-1$; 4. $x=3, y=-2$; 5. $x=0, y=1$; 6. $x=4, y=1$

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se sustituye esta incógnita en la otra ecuación. Se resuelve.
3. Sustituyendo la solución en la incógnita despejada, obtenemos la otra incógnita.

3.3. Resuelve por sustitución:

1. $\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} -3x + 2y = -13 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

Soluciones: 1. $x=2, y=3$; 2. $x=2, y=-3$; 3. $x=5, y=1$; 4. $x=-2, y=3$

MÉTODO DE IGUALACIÓN

1. Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Se despeja la misma incógnita en la otra ecuación
3. Se iguala

3.4. Resuelve por igualación:

$$1. \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -3x + 2y = -13 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Soluciones: 1. $x=2, y=3$; 2. $x=2, y=-3$; 3. $x=5, y=-1$; 4. $x=-2, y=3$

3.5. Problemas con sistemas

1. En un corral de conejos y gallinas hay 25 cabezas y 80 patas. ¿Cuántos animales de cada clase hay?
2. La suma de dos números es 14 y su diferencia 4 ¿Cuáles son esos números?
3. En una granja se han envasado 300 litros de leche en 120 botellas de dos y cinco litros. ¿Cuántas botellas de cada clase se han utilizado?
4. Se quieren mezclar vino de 6 euros con otro de 3,50 euros, de modo que resulte vino con un precio de 5 euros el litro. ¿Cuántos litros de cada clase deben mezclarse para obtener 200 litros de la mezcla?
5. El perímetro de un rectángulo es de 22 cm, y sabemos que su base es 5 cm más larga que su altura. Plantea un sistema de ecuaciones y resuélvelo para hallar las dimensiones del rectángulo.

3.6. Resuelve por cualquier método:

$$a) \begin{cases} y = 30 - x \\ 2x + y = 50 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 7y = 6 \\ -5x + 3y = -10 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} y = 5 - x \\ -y = -3(x - 1) \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 2(x - 1) + y = 5 \\ 3(x + 1) - 2(y - 2) = 7 \end{cases}$$

4. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{Tiene dos soluciones: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

4.1. Resuelve las siguientes ecuaciones de 2° grado, usando la fórmula:

- | | |
|----------------------------|----------------------|
| 1) $x^2 - 7x + 12 = 0$ | Sol: $x=3; x=4$ |
| 2) $x^2 - 2x - 3 = 0$ | Sol: $x=3; x=-1$ |
| 3) $x^2 - 5x + 6 = 0$ | Sol: $x=2; x=3$ |
| 4) $x^2 - 2x - 15 = 0$ | Sol: $x=5; x=-3$ |
| 5) $x^2 + x - 6 = 0$ | Sol: $x=-3; x=2$ |
| 6) $x^2 - 6x + 9 = 0$ | Sol: $x=3$ (doble) |
| 7) $6x^2 + x - 2 = 0$ | Sol: $x=1/2; x=-2/3$ |
| 8) $4x^2 = 3 - 4x$ | Sol: $x=1/2; x=-3/2$ |
| 9) $2x^2 = 5x - 2 = 0$ | Sol: $x=1/2; x=2$ |
| 10) $3x^2 + 5x - 2 = 0$ | Sol: $x=1/3; x=-2$ |
| 11) $2x^2 + 10x - 48 = 0$ | Sol: $x=3; x=-8$ |
| 12) $x^2 - x = 20$ | Sol: $x=-4; x=5$ |
| 13) $x^2 = 5x + 6$ | Sol: $x=6; x=-1$ |
| 14) $2x^2 - 5x + 3 = 0$ | Sol: $x=1; x=3/2$ |
| 15) $x^2 + 10x + 25 = 0$ | Sol: -5 (doble) |
| 16) $x^2 + 9 = 10x$ | Sol: 1 y 9 |
| 17) $3x^2 - 39x + 108 = 0$ | Sol: 4 y 9 |
| 18) $2x^2 - 9x + 9 = 0$ | Sol: 3 y $3/2$ |
| 19) $3x^2 + 2x = 8$ | Sol: -2 y $4/3$ |
| 20) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ | Sol: $-3/2$ (doble) |

4.2. Resuelve las siguientes ecuaciones a la vista de su descomposición:

- | | |
|-------------------------|-------------------|
| 1) $(x-2).(x-3)=0$ | Sol: 2 y 3 |
| 2) $x.(2x-4)=0$ | Sol: 0 y 2 |
| 3) $(x+1).(2x-1)=0$ | Sol: -1 y $1/2$ |
| 4) $(x-2)^2 = 0$ | Sol: 2 (doble) |
| 5) $7.(2x-6).(x+3) = 0$ | Sol: 3 y -3 |
| 6) $(x-4).(x+3) = 0$ | Sol: 4 y -3 |

ECUACIONES 2º GRADO SIN TÉRMINO X:

Despejamos la x^2 y extraemos la raíz cuadrada

Ejemplos:

a) $x^2 = 36$

b) $3x^2 - 12 = 0$

c) $x^2 - 3x = 0$

Solución:

a) $x^2 = 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{36} \rightarrow x = 6 \text{ y } x = -6$

b) $3x^2 - 12 = 0 \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = 2 \text{ y } x = -2$

c) $x^2 - 3x = 0 \rightarrow x(x-3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

4.3. Ecuaciones 2º grado sin término de x:

a) $3x^2 - 27 = 0$ Sol: ± 3

b) $2x^2 - 8 = 0$ Sol: ± 2

c) $2x^2/3 - 6 = 0$ Sol: ± 3

d) $9x^2 = 4$ Sol: $\pm 2/3$.

ECUACIONES 2º GRADO SIN TÉRMINO INDEPENDIENTE:

Factorizamos e igualamos a cero cada factor

Ejemplos:

$$2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(2x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases}$$

4.4. Ecuaciones 2º grado sin término independiente

a) $x^2 - 5x = 0$ Sol: 0 y 5

b) $x^2 + 16x = 0$ Sol: 0 y -16

c) $x^2 + x = 0$ Sol: 0 y -1

d) $x^2 - x = 0$ Sol: 0 y 1

Lecc. 6. GEOMETRÍA

GEOMETRÍA PLANA: 1. Polígonos; 2. Triángulos. 3. Cuadriláteros. 4. Polígono regular;
5. Circunferencia y círculo

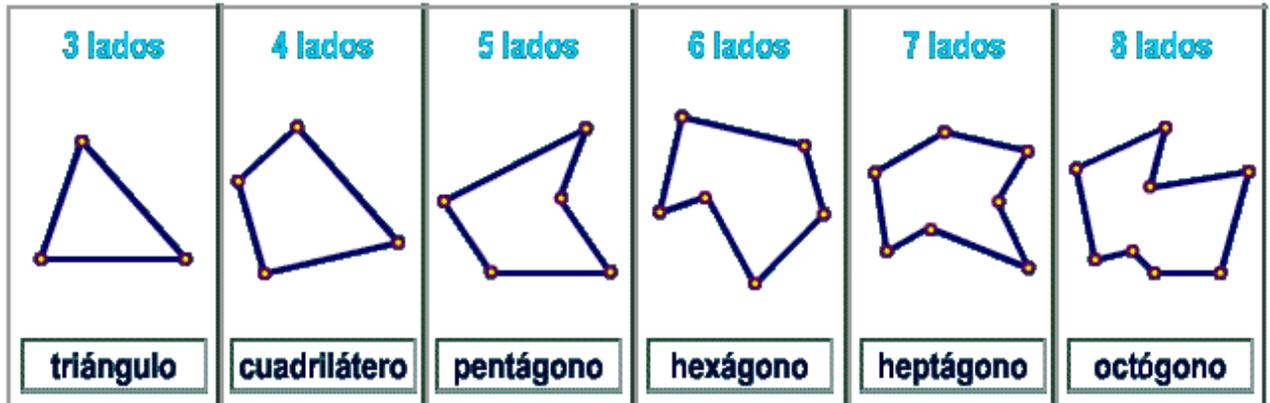
GEOMETRÍA EN EL ESPACIO: 6. Cuerpos en el espacio, Áreas; 7. Volúmenes

GEOMETRÍA PLANA

1. POLÍGONOS

Polígono es una figura plana, cerrada y limitada por segmentos.

Clasificación según número de lados



Lados: son los segmentos que forman el polígono

Vértices: son los extremos de los lados

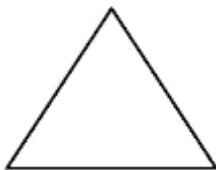
Diagonales: son los segmentos determinados por cada dos vértices no consecutivos

2. TRIÁNGULOS

Triángulo es el polígono de tres lados.

Teorema: En todo triángulo, la suma de sus ángulos interiores es igual a 180°

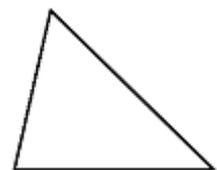
Clasificación según sus lados:



Equilátero:
3 lados iguales



Isósceles:
2 lados iguales



Escaleno:
3 lados desiguales

Clasificación según sus ángulos:



Rectángulo:
tiene un ángulo recto

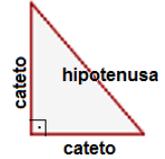


Acutángulo:
los tres ángulos agudos



Obtusángulo:
un ángulo obtuso

En el triángulo rectángulo llamamos:
Catetos, a los lados del ángulo recto.
Hipotenusa, al lado opuesto al ángulo recto



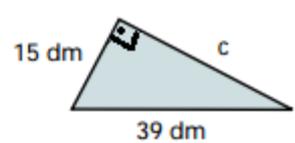
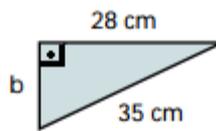
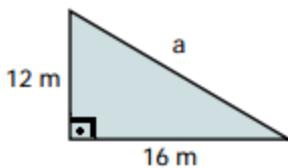
TEOREMA DE PITÁGORAS

En todo triángulo rectángulo:

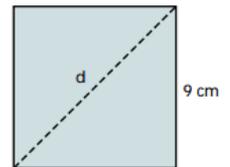
$$\text{cateto}^2 + \text{cateto}^2 = \text{hipotenusa}^2$$

2.1. Ejercicios:

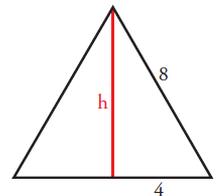
a) Calcula en cada figura el lado que falta



b) Calcula la diagonal de un cuadrado de 9 cm de lado.



c) Calcula la altura del triángulo equilátero de 8 cm lado.



d) Completa las siguientes ternas pitagóricas: (cat, cat, hip);

(3, 4, h); (5, c, 13); (c, 8, 17);
 (c, 24, 25); (20, 21, h); (9, c, 41).

2.2. Determina si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

Sugerencia: aplica Pitágoras considerando catetos los lados más cortos; Compara con el tercer lado.

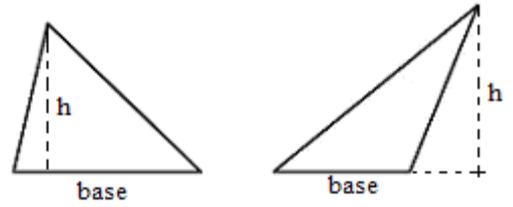
- a) a = 15 cm, b = 10 cm, c = 11 cm
- b) a = 35 m, b = 12 m, c = 37 m
- c) a = 23 dm, b = 30 dm, c = 21 dm
- d) a = 15 m, b = 20 m, c = 25 m
- e) a = 11 m, b = 10 m, c = 7 m
- f) a = 14 cm, b = 28 cm, c = 14 cm

Soluciones: a) Obtusángulo. b) Rectángulo. c) Acutángulo. d) Rectángulo. e) Acutángulo. f) Obtusángulo.

ÁREA DEL TRIÁNGULO

Altura de un triángulo es la recta perpendicular trazada desde un vértice al lado opuesto (o su prolongación).

Hay una altura sobre cada lado



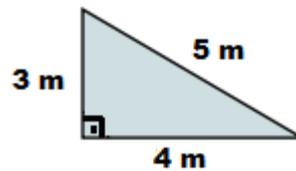
$$\text{Área} = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

2.3. Calcula:

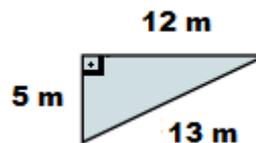
- El área de un triángulo de base = 12 cm y altura = 8 cm
- La base de un triángulo que tiene 14 cm^2 de área y 4 cm de altura
- La altura de un triángulo que tiene 735 cm^2 de área y 42 cm de base
- Área de un triángulo isósceles cuyos lados iguales miden 13 cm, y el desigual, 10 cm.

2.4. Calcula:

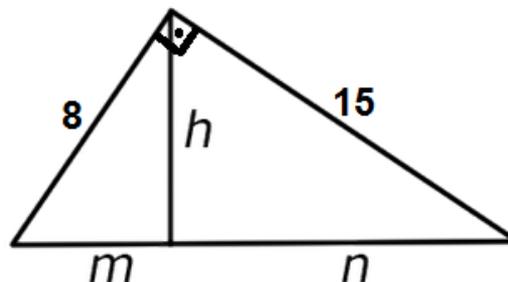
- Calcula la altura sobre la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo:



- Calcula la altura sobre la hipotenusa del siguiente triángulo rectángulo:



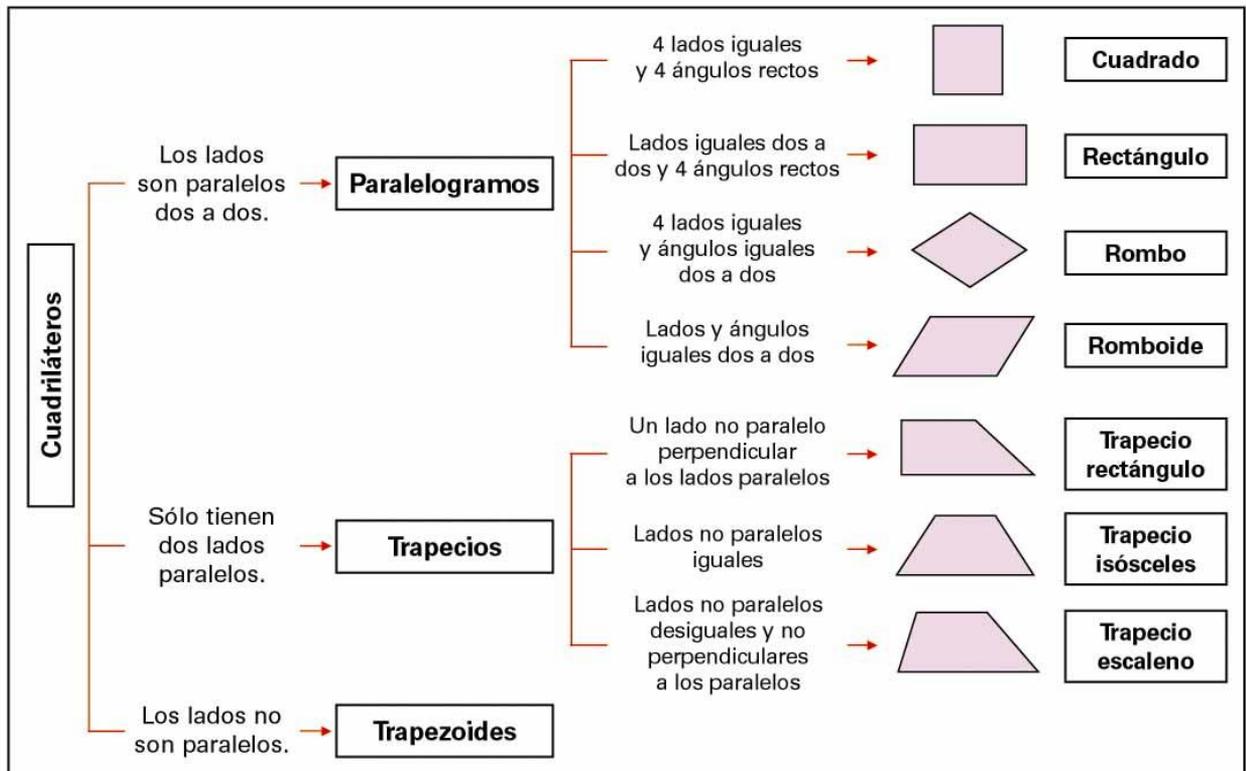
- Calcula la hipotenusa, la altura h y los segmentos m y n



3. CUADRILÁTEROS

Cuadrilátero es el polígono de cuatro lados

Tipos:



Área de los Cuadriláteros:

Rectángulo (y cualquier paralelogramo):

$$A = \text{base} \cdot \text{altura}$$

En el **cuadrado**, base y altura coinciden con el lado, por lo que se puede expresar:

$$A = \text{lado} \cdot \text{lado}$$

El **Rombo** es un paralelogramo y sirve $A = \text{base} \times \text{altura}$, pero también se puede calcular conociendo las diagonales:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

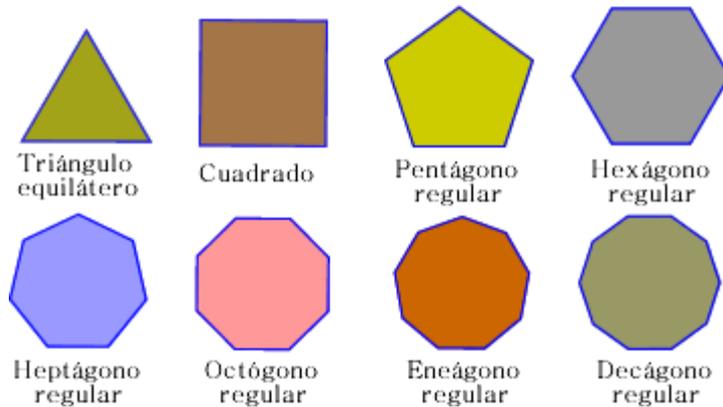
Trapezio: $A = \frac{B + b}{2} \cdot h$

3.1. Ejercicios:

- Halla el área de un rectángulo de 12 m de base y 8 m de altura
- Halla el área de un rombo de diagonal mayor $D = 9$ m y diagonal menor $d = 6$ m
- En un rombo $d = 8$ m y Área = 60 m^2 , obtener la diagonal mayor D
- Halla el área de un trapezio isósceles de bases $B = 18$ m; $b = 12$ m y lado oblicuo 5 m
- Halla la base de un rectángulo que tiene 52 dm^2 de área y 4 dm de altura
- Halla el área de un trapezio rectángulo de bases 30 cm y 38 cm y lado oblicuo 17 cm.

4. POLÍGONO REGULAR

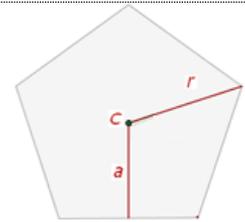
Polígono regular es el polígono que tiene sus ángulos y lados iguales



Centro C: Punto interior que equidista de cada vértice

Radio r: segmento que une el centro con cada vértice.

Apotema a: segmento que une el centro con el punto medio de un lado.



4.1. Ejercicios:

- Calcula el perímetro, la apotema y el radio y de un cuadrado de lado 10 cm. Calcula su área usando la fórmula del cuadrado y la del polígono regular.
- Calcula la apotema y el área de un octógono regular de 7,84 m de radio y 6 m de lado
- Calcula la apotema y el área de un pentágono regular de 5 m de radio y 5,30 m de lado

ÁREA DEL POLÍGONO REGULAR:

$$A = \frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

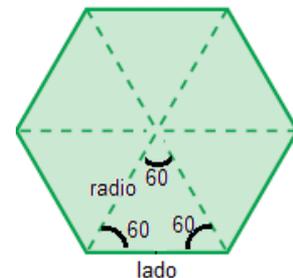
Un hexágono regular se descompone en seis triángulos.

El ángulo central vale 60° , por tanto los otros ángulos de cada triángulo miden también $120/2 = 60^\circ$.

Entonces **cada triángulo es equilátero**

Por tanto, en el hexágono regular, **lado = radio**

Esta particularidad solo la tiene el hexágono



4.2. Ejercicios:

- Calcula el área del hexágono regular de lado 4 cm
- Calcula el área del hexágono regular de radio 6 m

5. CIRCUNFERENCIA Y CÍRCULO

Circunferencia es la *línea* formada por puntos equidistantes de otro punto llamado centro

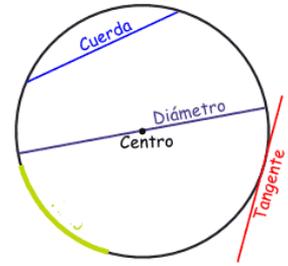
$$\text{longitud} = 2 \cdot \pi \cdot r \quad (\pi=3,14)$$

Radio: une el centro con cualquier punto de la circunferencia

Diámetro: une dos puntos de la circunf. y pasa por el centro

Cuerda: une dos puntos cualquiera de la circunferencia

Tangente: Recta exterior con un punto de contacto



El número π lo da la naturaleza:

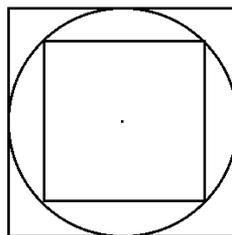
π es el cociente entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro

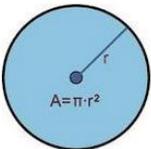


$$\pi = 3,14159265358979323846\dots$$

5.1. Ejercicios:

- Calcula la longitud de una circunferencia de 12 cm de radio.
- Una rueda de bicicleta recorre 2,512 metros cuando da una vuelta.
¿Qué radio tiene la rueda? S: 40 cm.
- Una rueda de un coche tiene de radio 20 cm.
¿Cuántos metros habrá recorrido cuando haya dado 15.000 vueltas? S: 18.840 m
- La Tierra tiene aproximadamente 40.000 Kilómetros de contorno, medido sobre el ecuador.
¿Cuál es su radio? S: 6.369 km.
- Una rueda tiene 25 cm de radio. ¿Cuántas vueltas debe dar para recorrer 20 km? S: 12738 v
- La longitud de una circunferencia es de 30 m. ¿Cuál es su diámetro? S: 9,55
- Una rueda dio 4000 vueltas para recorrer 10 km. Calcula su radio (en cm). S: 39,8 cm
- La rueda de los caballitos ha dado 15 vueltas. ¿Qué distancia ha recorrido un caballito que está a 6 m del centro de giro. S: 565 m
- Calcula el área de cada uno de los dos cuadrados de la figura, sabiendo que el radio de la circunferencia es de 2 m



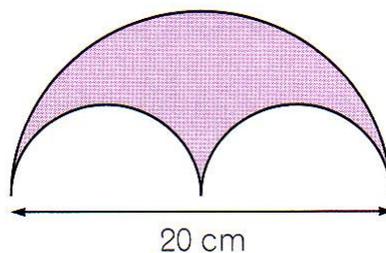
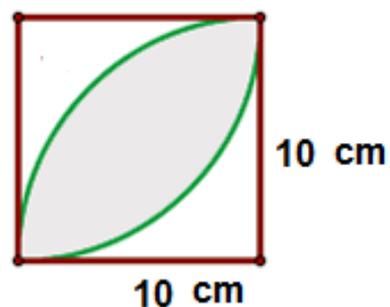
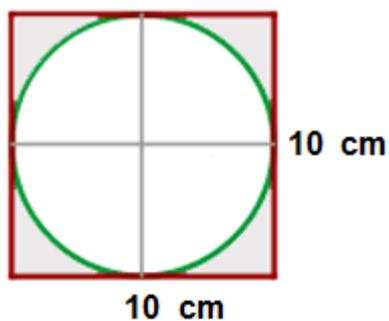
<p>Círculo es la <i>superficie</i> encerrada por la circunferencia</p> $\text{Área} = \pi \cdot r^2$	
<p>Corona circular Porción de círculo limitada por dos círculos concéntricos</p> $\text{Área} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$	

5.2. Ejercicios:

- a) Calcula el área de un círculo de 12 cm de radio
- b) Calcula el área de una plaza circular de 30 m de diámetro (antes calcula el radio)
- c) Calcula el área de una corona circular de radio mayor = 30 cm y de radio menor 15 cm
- d) Calcula el área de una corona circular de radio mayor = 50 cm y de radio menor 35 cm

5.3. Ejercicios:

- a) En un parque de forma circular de 40 m de radio hay situada en el centro una fuente, también de forma circular, de 5 m de radio. Calcula el área de la zona de paseo.
- b) Calcula el área de la parte sombreada de la figura 1, si el lado del cuadrado mide 20 cm
- c) Calcula el área de la parte sombreada de las siguientes figuras



GEOMETRÍA EN EL ESPACIO

6. CUERPOS EN EL ESPACIO. ÁREAS

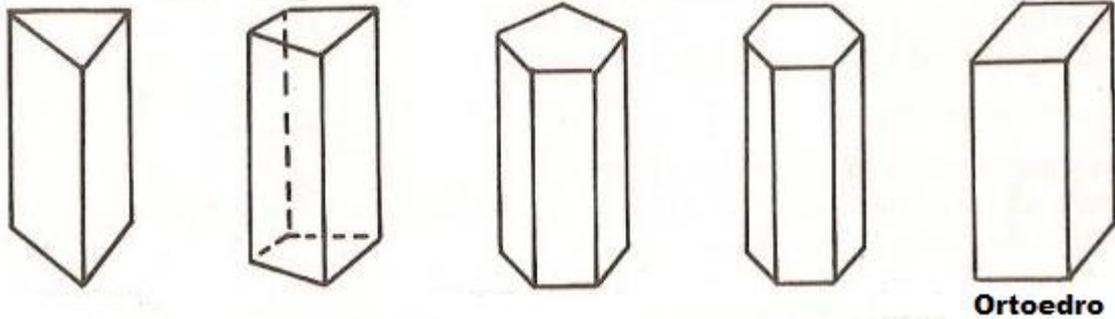
Poliedro es un cuerpo cerrado, limitado por superficies planas.



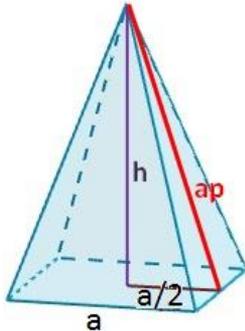
Prisma es el poliedro que tiene dos caras iguales y paralelas (llamadas bases) y cuyas caras laterales son paralelogramos

Se llama “**prisma recto**” si las caras son perpendiculares a la base

Si bases y caras son rectángulos, recibe el nombre de “**Ortoedro**”.



Pirámide es el poliedro con una cara polígono (**base de la pirámide**), y el resto de caras son triángulos que se unen en un punto llamado vértice de la pirámide

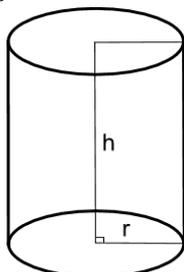


$$\begin{aligned} \text{Área total} &= A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = \\ &a^2 + \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2} \end{aligned}$$

Cuerpos redondos son las figuras del espacio cerradas no limitadas por caras planas.

Cilindro:

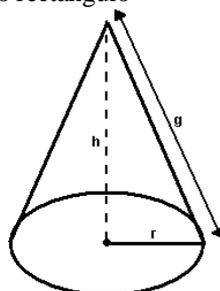
Se obtiene con la revolución de un rectángulo



$$\begin{aligned} \text{Área total} &= 2 \cdot A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = \\ &2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \end{aligned}$$

Cono:

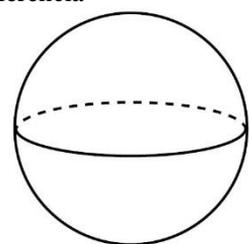
Se obtiene con la revolución de un triángulo rectángulo



$$\begin{aligned} \text{Área total} &= A_{\text{base}} + A_{\text{lateral}} = \\ &\pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g \end{aligned}$$

Esfera:

Se obtiene por revolución de una circunferencia

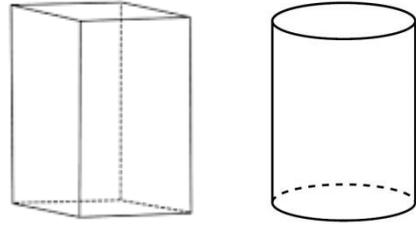


$$\text{Área} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

7. VOLÚMENES

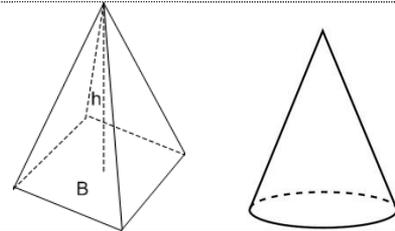
Volumen del prisma y del cilindro:

$$V = S_B \cdot h$$



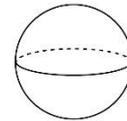
Volumen de la pirámide y del cono:

$$V = \frac{S_B \cdot h}{3}$$



Volumen de la esfera:

$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$



Recuerda las unidades volumen y capacidad:

m^3			dm^3			cm^3
1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001
Kl	Hl	Dl	litro	dl	cl	ml

7.1. Ejercicios - prisma:

- Calcula el volumen (en litros) y área total de una habitación que tiene 3 m de largo, 5 m de ancho y 2,5 m de altura.
- Calcula el volumen (en litros) y área total de un tetrabrik de leche que tiene una base de 9 cm de largo y 6 cm de ancho y una altura de 19 cm.
- Calcula el volumen (en litros) y área lateral de una piscina de 10 m de largo, 6 m de ancho y 1,60 m de profundidad.

a) $A = 70 m^2$; $V = 37500$ litros. b) $A = 678 cm^2$. $V = 1,02$ litros; c) $A = 51,2 m^2$. $V = 96000$ litros;

7.2. Ejercicios - cilindro:

- Calcula el volumen (en litros) y área total de un cilindro que tiene una base de 2 m de radio y una altura de 5 m.
- Calcula el volumen (en litros) y área total de un cilindro que tiene una base de 2,5 m de radio y una altura de 6 m.

a) $A = 87,92 \text{ m}^2$; $V = 62800$ litros. b) $A = 117,75 \text{ m}^2$. $V = 117750$ litros;

7.3. Ejercicios - pirámide:

- Calcula la apotema, el volumen (en litros) y área total de una pirámide que tiene una base cuadrada de 3 m de lado y una altura de 4 m.
- Calcula la apotema, el volumen (en litros) y área total de una pirámide que tiene una base cuadrada de 4,5 m de lado y una altura de 5 m.
- Calcula la apotema, el volumen (en litros) y área total de una pirámide de base cuadrada de 6 m de lado y con una apotema de la cara lateral de 5 m

a) $\text{Apot} = 4,27$; $A = 34,62 \text{ m}^2$; $V = 12000$ litros. b) $\text{Apot} = 5,48$; $A = 49,32 \text{ m}^2$. $V = 33750$ litros;

7.4. Ejercicios - cono:

- Calcula el volumen (en litros) y Área de un cono de radio base 3 m y altura 5 m.
- Calcula el volumen (en litros) y Área de un cono de radio base 2,5 m altura 4 m.
- Un cono tiene de volumen 1000 litros, y un radio de la base de 80 cm. Calcula su altura.

a) $V = 47100$ litros; $g = 5,83 \text{ m}$; $A = 83,18 \text{ m}^2$.

7.5. Ejercicios - esfera:

- Obtener el área y el volumen (en litros) de una esfera de 1 m de radio.
- Calcula el área y el volumen (en litros) de una esfera de diámetro 80 cm.
- El balón reglamentario de fútbol es de cuero o similar, con un perímetro de 68 cm. Calcula su radio y su volumen

a) $A = 12,56 \text{ m}^2$; $V = 4,18 \text{ m}^3$. b) $A = 80384 \text{ cm}^2$. $V = 2.143.573 \text{ cm}^3$; c) $R = 10,82 \text{ cm}$, $V = 5303 \text{ cm}^3$

7.6. Ejercicios repaso:

- Una caja en forma de ortoedro tiene 9 cm de larga y 6 cm de ancha. Su área total es 228 cm^2 . Halla su altura y su volumen.
- El área total de un cubo es 150 cm^2 . Halla su arista y su volumen.
- Una esfera tiene un área de $452,16 \text{ cm}^2$. Calcula el radio y su volumen.
- Un depósito cilíndrico de 10.000 litros tiene un diámetro de la base de 1,80 m ¿Cuál es su altura?

a) $h = 4 \text{ cm}$. $V = 216 \text{ cm}^3$. b) $a = 5 \text{ cm}$. $V = 125 \text{ cm}^3$; c) $R = 6 \text{ cm}$, $V = 904,32 \text{ cm}^3$; d) 3,931 m