Tipos de Funciones

Funciones a trozos

Las funciones a trozos o a tramos son funciones que se hallan definidas por varias reglas de correspondencia (Matemática básica, Espinoza E.).

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_{f_1} \\ f_2(x), & x \in D_{f_2} \end{cases}, \quad \text{donde } D_{f_1} \cap D_{f_2} = \phi$$

En las funciones definidas con dos o más reglas de correspondencia, su dominio y rango se determinan de la siguiente forma:

El dominio de f(x) se determinan así: $D_f = D_{f_1} \cup D_{f_2}$
El rango de la función f(x) se calcula por: $R_f = R_{f_1} \cup R_{f_2}$

Esta forma de calcular dominio y rango de una función con dos reglas de correspondencia, también se extiende a funciones de tres o más reglas de correspondencia.

Ejemplo:

Calcular el dominio y rango de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^2 - 2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Calculando su **dominio** se tiene:

$$\begin{cases} f_1(x) = 2x+1, & \text{si} \quad x \geq 1 \\ f_2(x) = x^2 - 2, & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{D_{f_1}} = [\mathbf{1}, +\infty) \\ \boldsymbol{D_{f_2}} = (-\infty, \mathbf{0}) \end{cases}$$

$$D_f = D_{f_1} \cup D_f = [1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$$

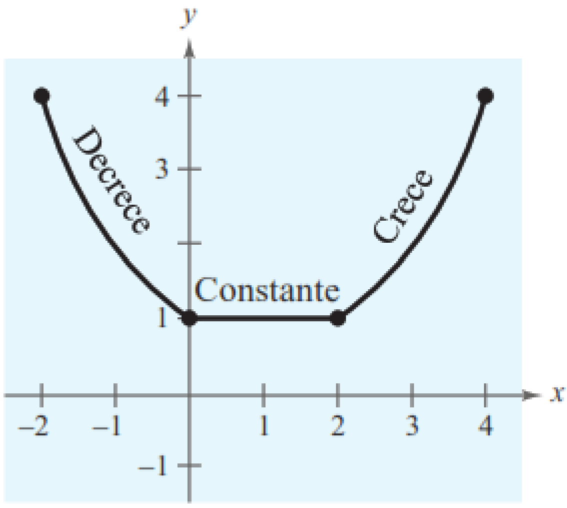
$$\therefore \boldsymbol{D_f} = (-\infty, \mathbf{0}) \cup [\mathbf{1}, +\infty)$$

Calculando su **rango** se tiene:

Si $x \geq 1 \Rightarrow y = 2x + 1$ despejamos x: $\quad x = \frac{y-1}{2} \geq 1 \Rightarrow y \geq 3$ de donde: $\boldsymbol{y} \in [\mathbf{3}, +\infty)$
Si x $< 0 \Rightarrow y = x^2 - 2$, despejando x se tiene: $x = -\sqrt{y+2} < 0 \Rightarrow \sqrt{y+2} > 0 \ \Rightarrow y > -2$ de donde: $\boldsymbol{y} \in (-\mathbf{2}, +\infty)$

$$\boldsymbol{R_f} = (-\mathbf{2}, +\infty) \cup [\mathbf{3}. +\infty) = (-\mathbf{2}. +\infty)$$

Funciones crecientes y decrecientes

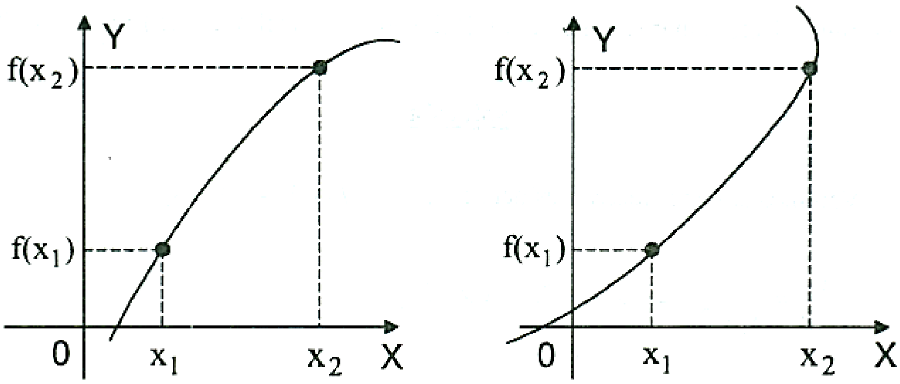


Entre más se conozca acerca de la gráfica de una función, más se conoce la función. Considere la gráfica que se muestra en la figura. A medida que se avanza de **izquierda a derecha**, la gráfica decrece de x = −2 a x = 0; es constante de x = 0 a x = 2; y crece de x = 2 a x = 4.

(Precálculo de Larson)

Función creciente

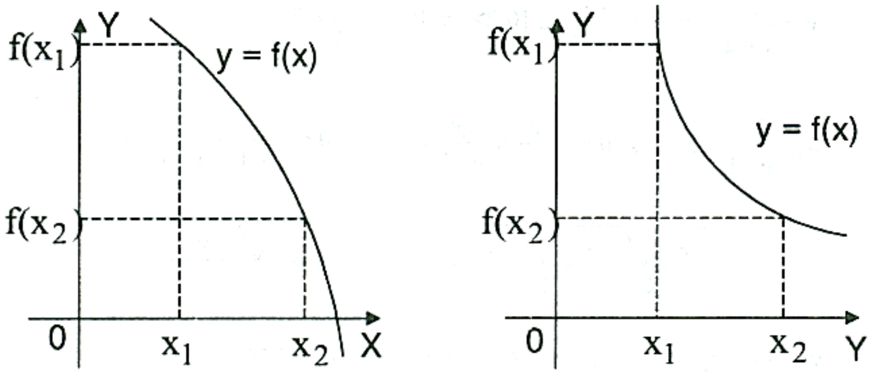
Una función, f, es creciente en un intervalo si, para cualquier x_1 y x_2, en ese intervalo se tiene que $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) < f(x_2)$.
(Precálculo de Larson)



(Análisis matemático I, Eduardo Espinoza Ramos)

Función decreciente

Una función, f, es decreciente en un intervalo si, para cualquier x_1 y x_2 en ese intervalo, $x_1 < x_2$ implica $f(x_1) > f(x_2)$. (Precálculo de Larson)



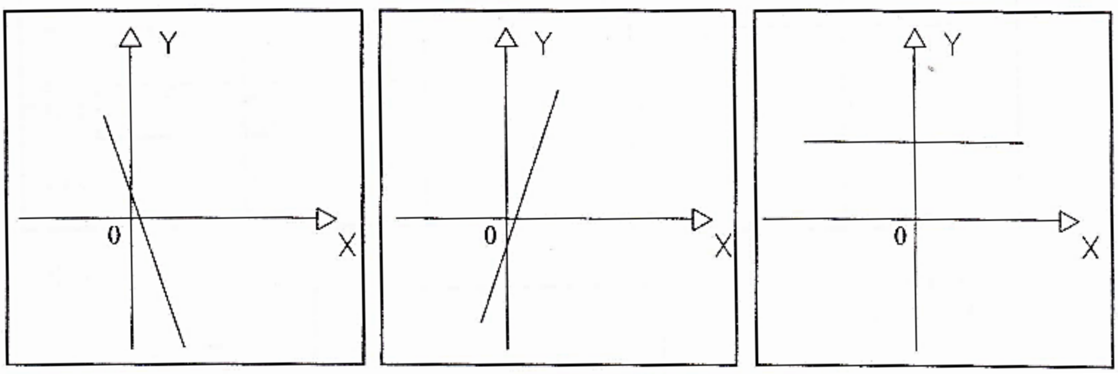
(Análisis matemático I, Eduardo Espinoza Ramos)

Función constante

Una función, f, es constante en un intervalo si, para cualquier x_1 y x_2 en el intervalo, $f(x_1) = f(x_2)$.

Ejemplos:

1) Sean $f(X) = -3X + 1$, $g(X) = 3X - 1$, $h(X) = 3$



(Algebra Superior, Salinas)

Monotonía de una función

Se refiere a su comportamiento en términos de crecimiento o decrecimiento a lo largo de su dominio. En otras palabras, nos indica si los valores de la función aumentan, disminuyen o permanecen constantes a medida que la variable independiente.

Tipos de monotonía:

- Función Creciente
- Función Decreciente
- Función constante

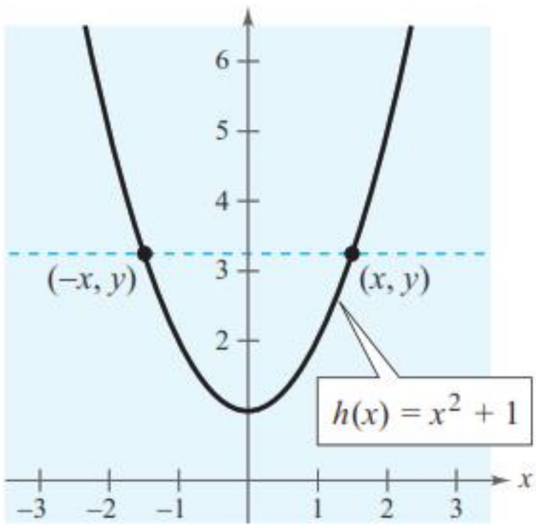
Funciones pares

Una función $y = f(x)$ es par, si para cada x en el dominio de f se tiene,

$$f(-x) = f(x).$$

La función $h(x) = x^2 + 1$ es par, debido a que $h(-x) = h(x)$, véase:

$$\begin{aligned} h(-x) &= (-x)^2 + 1 && \text{Sustituya } x \text{ por } -x. \\ &= x^2 + 1 && \text{Simplifique.} \\ &= h(x) && \text{Prueba para función par} \end{aligned}$$



(b) Simétrica respecto al eje y: función par.

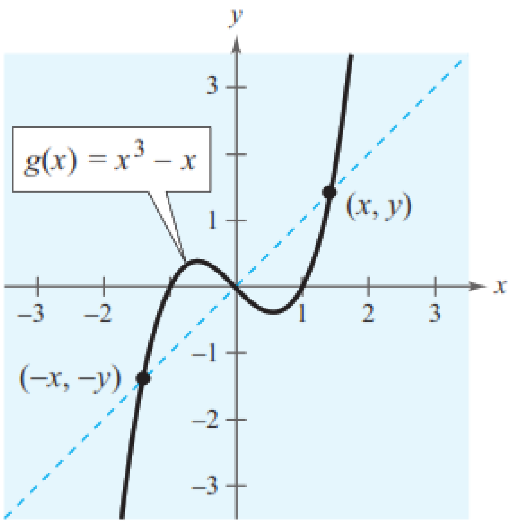
Funciones impares

Una función $y = f(x)$ es impar, si para cada x en el dominio de f se tiene,

$$f(-x) = -f(x).$$

La función $g(x) = x^3 - x$ es impar, debido a que $g(-x) = g(x)$, véase:

$g(-x) = (-x)^3 - (-x)$	Sustituya x por $-x$.
$= -x^3 + x$	Simplifique.
$= -(x^3 - x)$	Propiedad distributiva
$= -g(x)$	Prueba para función impar



(a) Simétrica respecto al origen: función impar.

Función Periódica

Una función, f, es periódica si existe un número positivo, c, tal que

$$f(t + c) = f(t)$$

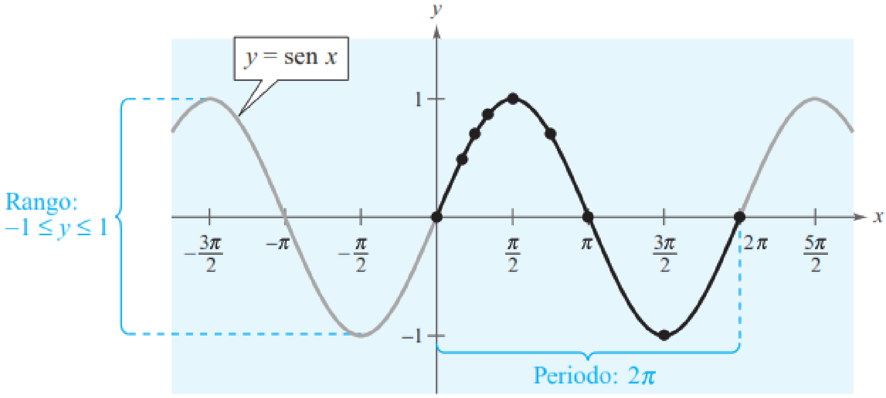
para toda t en el dominio de f. El menor número, c, para el que f es periódica se denomina periodo de f.

Entre las funciones periódicas más importantes tenemos a las funciones seno y coseno

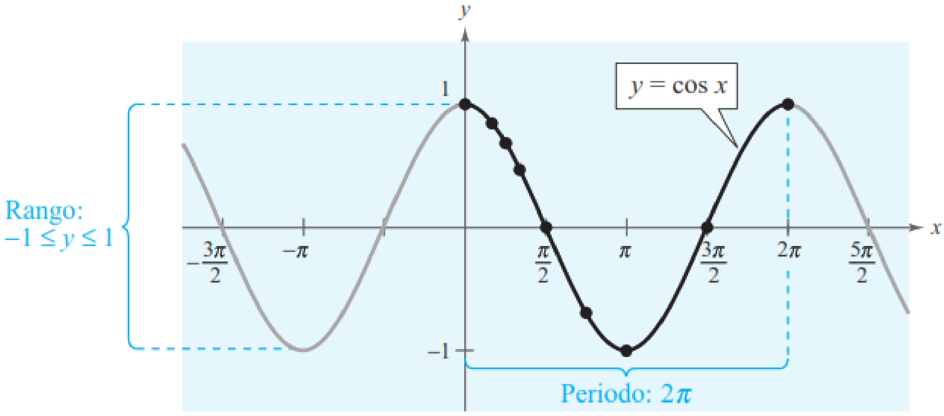
Para ayudarnos a trazar las gráficas de las funciones seno y coseno, primero observamos que estas funciones repiten sus valores en forma regular. Para ver exactamente cómo ocurre esto, recuerde que la circunferencia del círculo unitario es 2π. Es decir, los valores que toman el seno y el coseno se repiten periódicamente cada 2 π, siendo este el denominado periodo.

(Precálculo, Stewart James)

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{para cualquier entero } n$$



$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

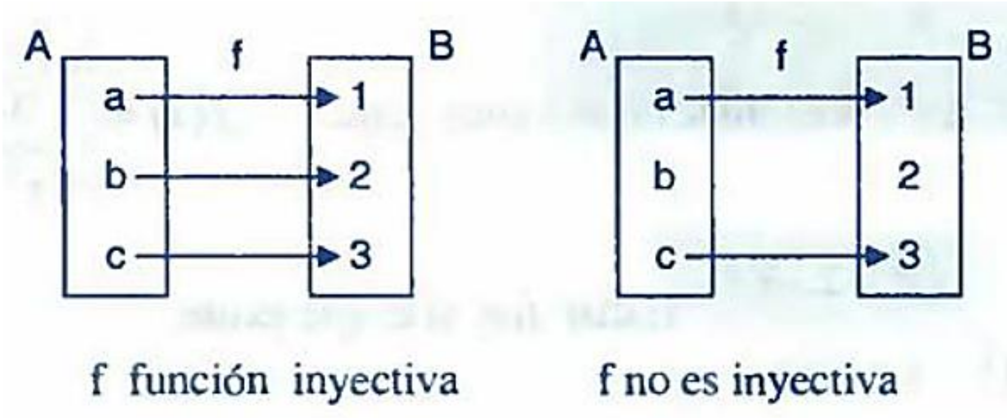


Funciones: inyectivas, sobreyectivas (o suryectivas) y biyectivas

Función inyectiva

La función f: $A \to B$ es inyectiva (univalente) si a cada elemento del rango le corresponde un único elemento en el dominio, es decir, si existen dos elementos $x_1, x_2 \in D_f$ distintos $x_1 \neq x_2$ cuyas imágenes son distintas $f(x_1) \neq f(x_2)$ lo que es equivalente a decir:

Si $x_1, x_2 \in D_f: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ que es la forma más práctica para determinar si una función es inyectiva.



OBSERVACIÓN. - Si la función f(x) tiene varias reglas de correspondencia, es decir:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in D_{f_1} \\ f_2(x), & x \in D_{f_2} \\ \vdots & \\ f_n(x), & x \in D_{f_n} \end{cases}$$

diremos que es inyectiva si y solo si cada función $f_1, f_2, \dots, f_n$ deben ser inyectivas y además $R_{f_i} \cap R_{f_j} = \phi$ $\forall$i $\neq$ j

Ejemplo:

Determinar que la función $f(x) = 5x + 3$ es inyectiva.

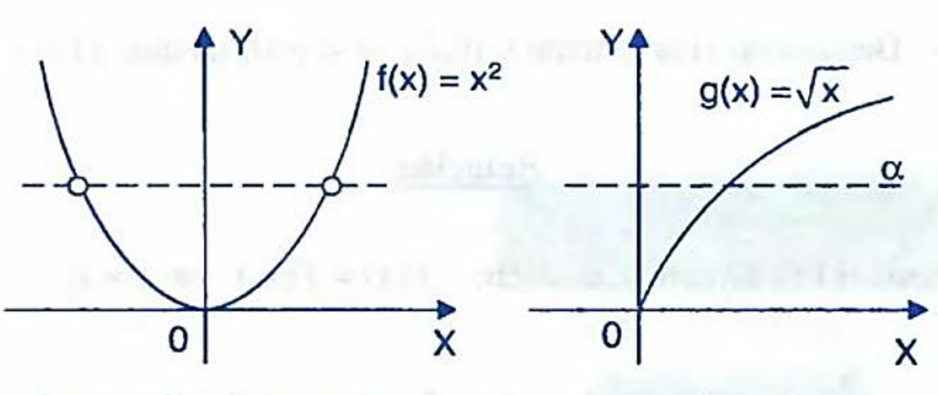
f es inyectiva si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 5x_1 + 3 = 5x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$$
$$\therefore f(x) = 5x + 3 \text{ es inyectiva}$$

En forma gráfica se puede determinar si una función es inyectiva o no, para esto tracemos una recta paralela al eje X, si dicha recta corta a la gráfica en dos partes o más, entonces la función f no es inyectiva y si corta en un sólo punto, entonces la función f es inyectiva.

Ejemplo:

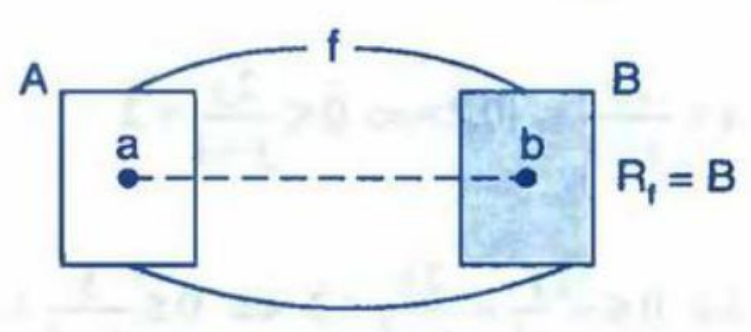
$$f(x) = x^2 \text{ y } g(x) = \sqrt{x}$$



f no es función inyectiva g es inyectiva

Función sobreyectiva (o suryectiva)

La función f: $A \to B$, es sobreyectiva (o suryectiva) si y sólo si, $\forall\, y \in B$, existe $x \in$ A tal que $\mathrm{y} = \mathrm{f(x)}$; esto quiere decir que todo elemento de B es imagen por lo menos de un elemento de A es decir que $\mathrm{f}: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ es suryectiva si $R_f = B$



Ejemplo:

La función f: $[0, \infty > \to [0, \infty >$ tal que $f(x) = \sqrt{x}$ es suryectiva puesto que $R_f = [0, \infty >$

Función Biyectiva

La función f: $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ se llama función biyectiva, si la función f es inyectiva y suryectiva simultáneamente.