

Funciones principales de variable real

FUNCIÓN CONSTANTE.-

A la función f , le llamaremos función constante, si su regla de correspondencia es:

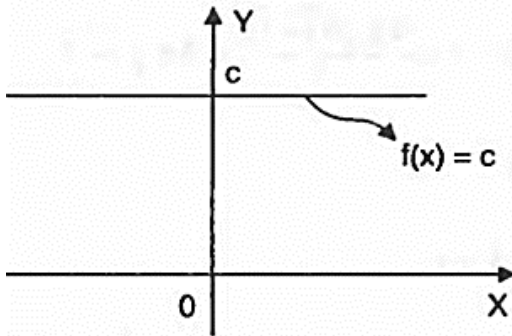
$$f(x) = c, \text{ donde } c \text{ es una constante.}$$

También a la función constante, se puede definir por:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = c, c \text{ constante}\}$$

donde su dominio es $D_f = \mathbb{R}$, su rango es $R_f = \{c\}$

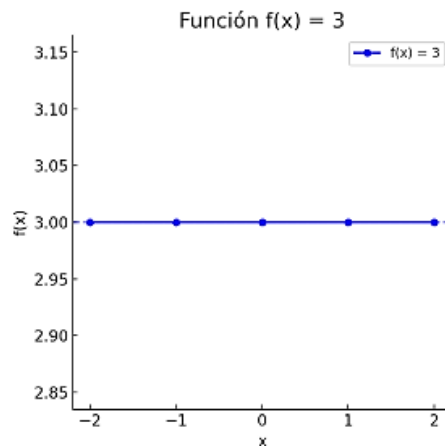
y su gráfica es:



Ejemplos:

$$f(x) = 3$$

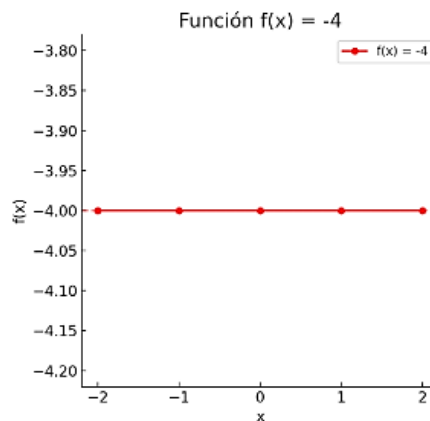
x	f(x)
-2	3
-1	3
0	3
1	3
2	3



Ejemplos:

$$f(x) = -4$$

x	f(x)
-2	-4
-1	-4
0	-4
1	-4
2	-4



FUNCIÓN IDENTIDAD.-

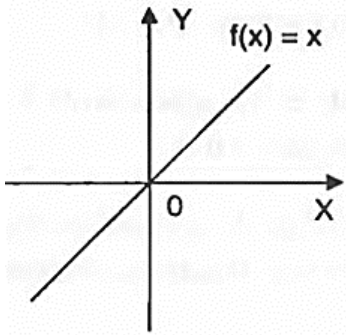
A la función f , le llamaremos función identidad, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = x$$

También a la función identidad se define:

$f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = x\}$, donde $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}$

y su gráfica es:

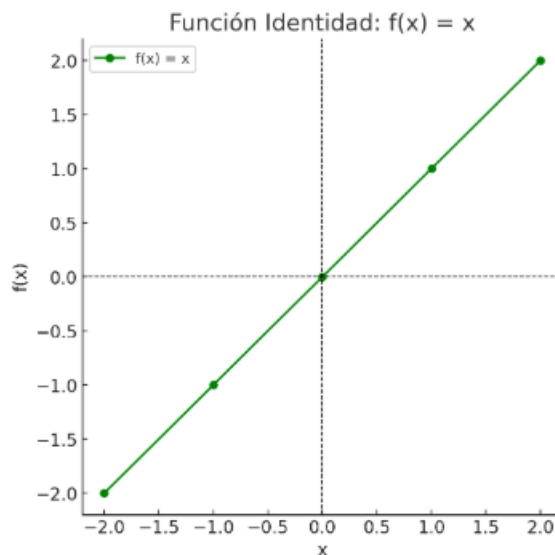


Su pendiente m es igual a 1

$$m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 1$$

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 1$$

$f(x) = x$	
x	$f(x)$
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
2	2



Función lineal

Una función lineal es una función de la forma $f(x) = mx + b$. La gráfica de una función lineal es una recta con pendiente m y punto de intersección y igual a b . La pendiente (m) indica la inclinación de la recta y se define como la razón entre el cambio en y y el cambio en x :

$$m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Si $m > 0$, la recta es creciente
(sube al avanzar en x).

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \text{razón de cambio promedio}$$

Si $m < 0$, la recta es decreciente
(baja al avanzar en x).

Si $m = 0$, la recta es horizontal.

Función Lineal

$$f(x) = mx + b$$

Dominio: $(-\infty, \infty)$

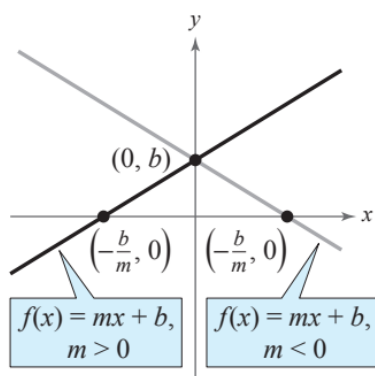
Rango: $(-\infty, \infty)$

Intersección x : $(-b/m, 0)$

Intersección y : $(0, b)$

Creciente cuando $m > 0$

Decreciente cuando $m < 0$



En algunos libros se escribe de la forma $f(x) = ax + b$ donde a sigue siendo la pendiente de la recta, es decir $m = a$

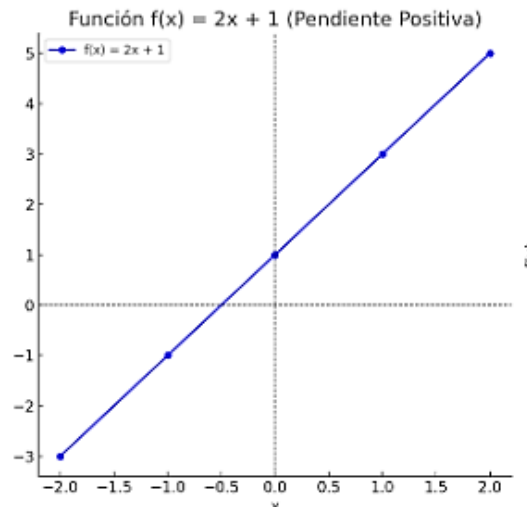
$$f(x) = mx + b \quad o \quad f(x) = ax + b$$

Ejemplos:

- a)** Tenemos $f(x) = 2 + 3x = 3x + 2$. Por lo que f es una función lineal en la que a es 3 y b es 2.
- b)** Tenemos $g(x) = 3(1 - 2x) = -6x + 3$. Por lo que g es una función lineal en la que a es -6 y b es 3.
- c)** Tenemos $h(x) = x(4 + 3x) = 4x + 3x^2$, que no es una función lineal porque la variable x se eleva al cuadrado en el segundo término de la expresión para h .
- d)** Tenemos $k(x) = \frac{1 - 5x}{4} = -\frac{5}{4}x + \frac{1}{4}$. Por lo que k es una función lineal en la que a es $-\frac{5}{4}$ y b es $\frac{1}{4}$.

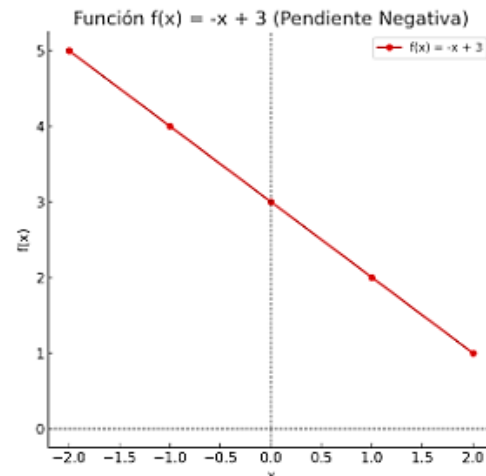
$$f(x) = 2x + 1$$

x	f(x)
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5



$$f(x) = -x + 3$$

x	f(x)
-2	5
-1	4
0	3
1	2
2	1



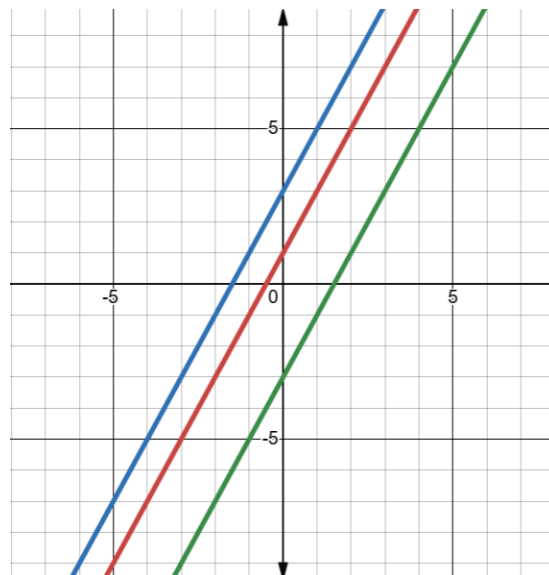
Desplazamientos verticales y horizontales de la función lineal

De color rojo: Función original.

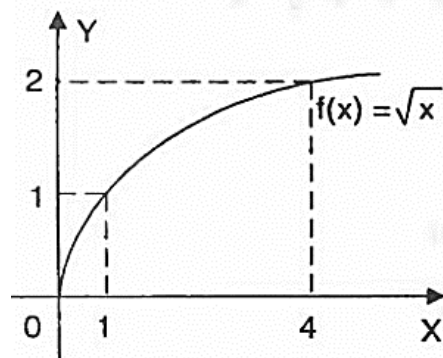
De color azul: La función original desplazado dos unidades hacia arriba.

De color verde: La función original desplazado dos unidades hacia la derecha.

- 1  $y = 2x + 1$
- 2  $y = (2x + 1) + 2$
- 3  $y = 2(x - 2) + 1$



FUNCIÓN RAÍZ CUADRADA.-



A la función f , le llamaremos función raíz cuadrada, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

También se puede expresar en la forma:

$$f = \{(x, y) \in R \times R / y = \sqrt{x}\}$$

donde $D_f = R^+$ y $R_f = [0, +\infty >$

Dominio: $[0, \infty)$

Rango: $[0, \infty)$

Intersección: $(0, 0)$

Decreciente en $(0, \infty)$

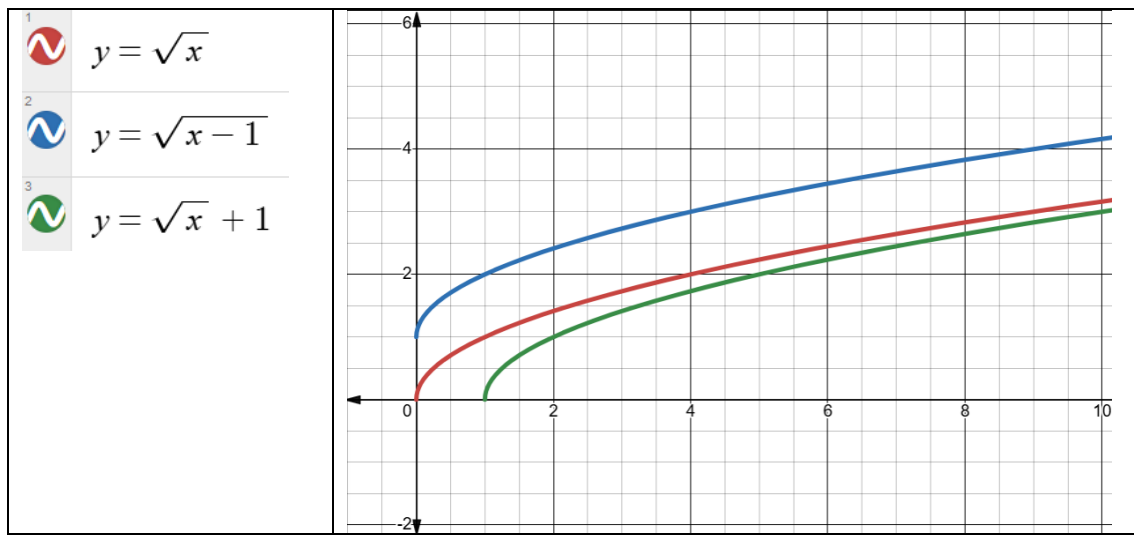
Error en el libro: En realidad es creciente.

Desplazamientos verticales y horizontales de la función raíz cuadrada.

De color rojo: Función original.

De color azul: La función original desplazado una unidad hacia arriba.

De color verde: La función original desplazado una unidad hacia la derecha.



FUNCIÓN CUADRÁTICA.-

A la función f , le llamaremos función cuadrática, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

También a la ecuación cuadrática se expresa así:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0\}$$

La gráfica de la función cuadrática es una parábola con eje perpendicular al eje X en el cual se presenta dos casos.

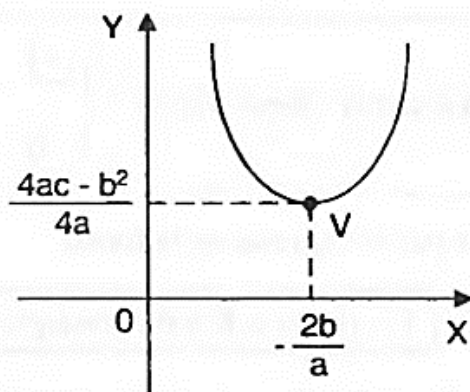
Si $a > 0$ la gráfica se abre hacia arriba.

Si $a < 0$ la gráfica se abre hacia abajo.

$$\text{Como } f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

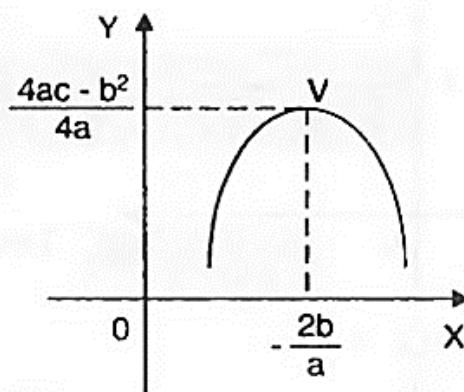
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Luego el vértice de la parábola es: $V(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a})$



Si $a > 0$ se tiene:

$$D_f = R, \quad R_f = [\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty)$$



Si $a < 0$, se tiene:

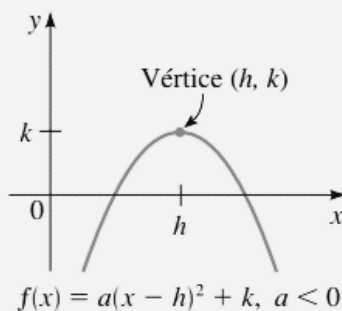
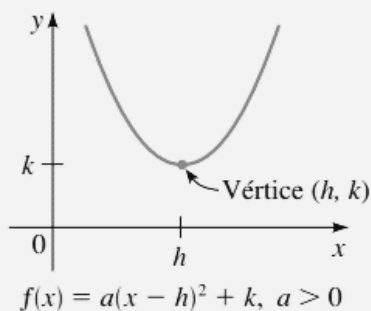
$$D_f = R, \quad R_f = (-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}]$$

FORMA ESTÁNDAR DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se puede expresar en la **forma estándar**

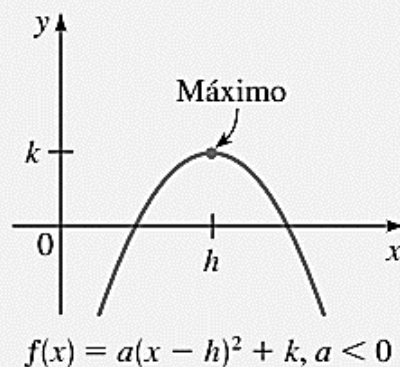
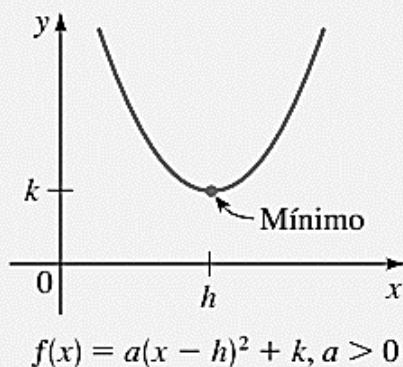
$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con **vértice** (h, k) ; la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ hacia abajo si $a < 0$.

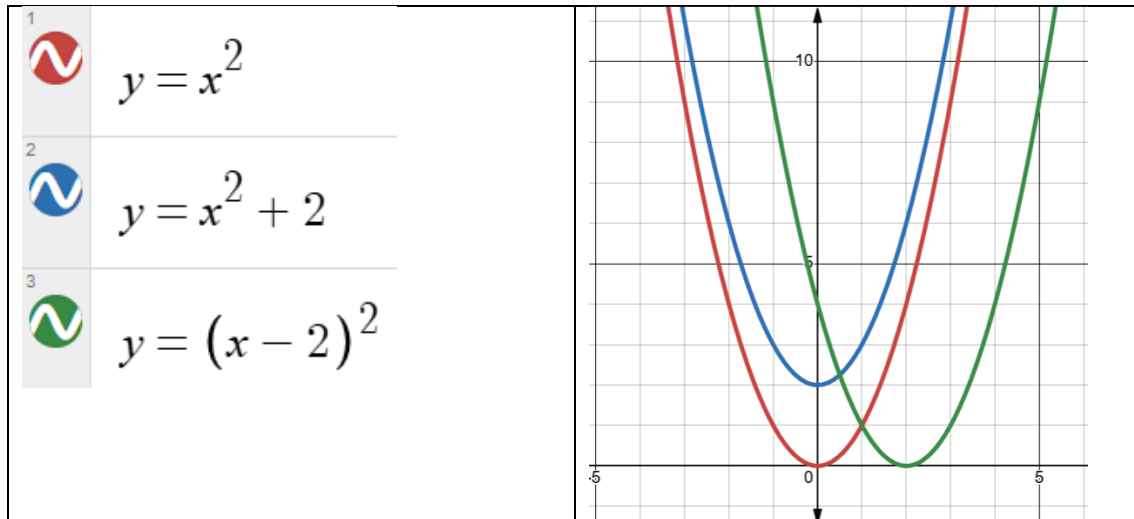


Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** de f es $f(h) = k$.



Desplazamientos verticales y horizontales de la función cuadrática.



De color rojo: Función original.

De color azul: La función original desplazado dos unidades hacia arriba.

De color verde: La función original desplazado dos unidades hacia la derecha.

(Dejar dos hojas en blanco)

FUNCIONES POLINOMIALES

Una **función polinomial de grado n** es una función de la forma

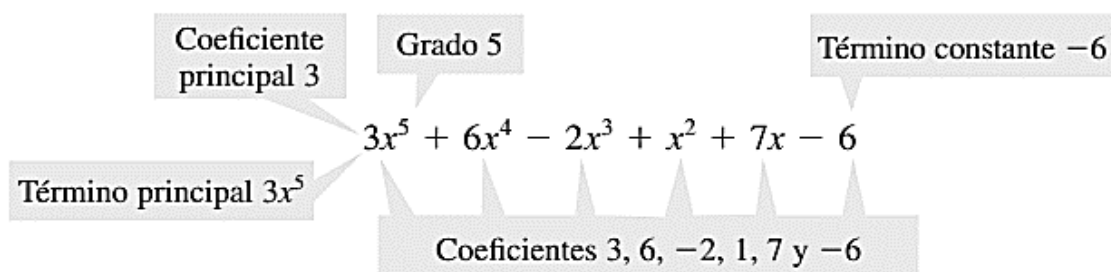
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

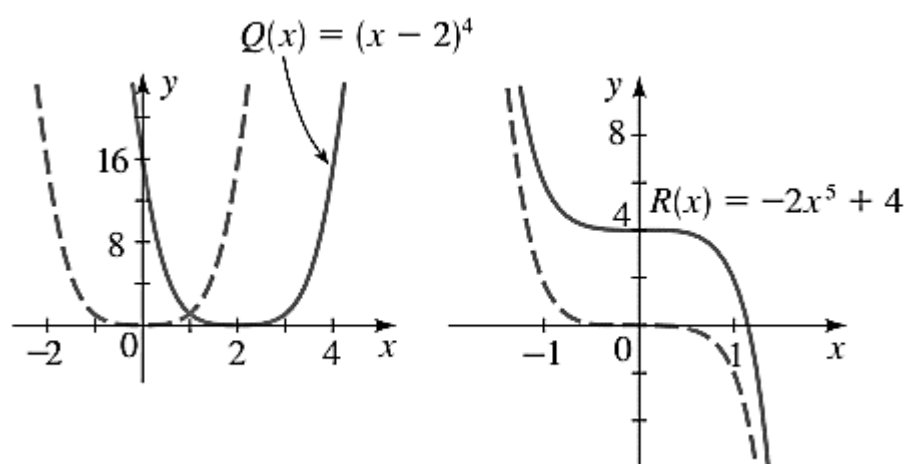
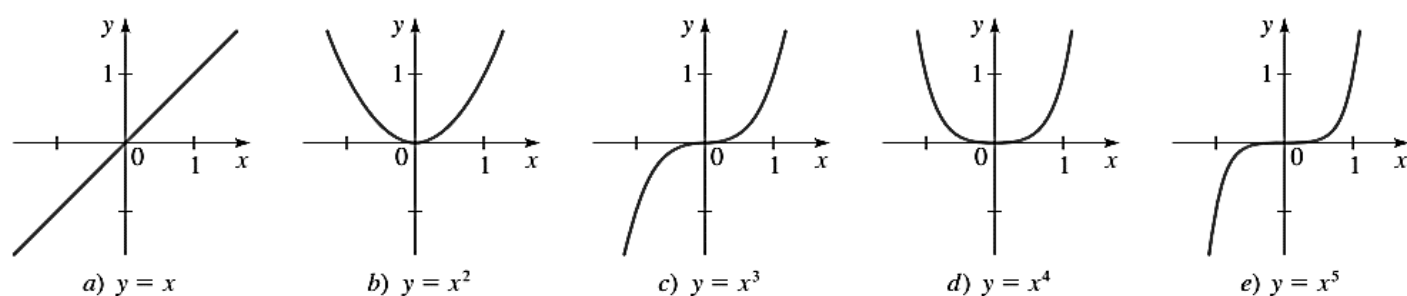
El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n , el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal** y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.



Polinomio	Grado	Término principal	Término constante
$P(x) = 4x - 7$	1	$4x$	-7
$P(x) = x^2 + x$	2	x^2	0
$P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 10$	3	$2x^3$	10
$P(x) = -5x^4 + x - 2$	4	$-5x^4$	-2

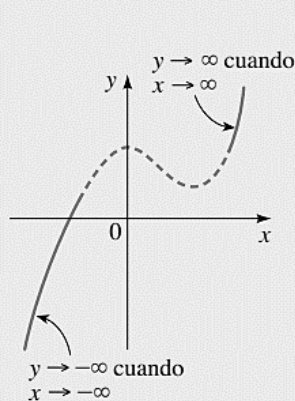
Conforme el grado n se hace más grande, las gráficas se hacen más planas alrededor del origen y más pronunciadas en otros lugares.



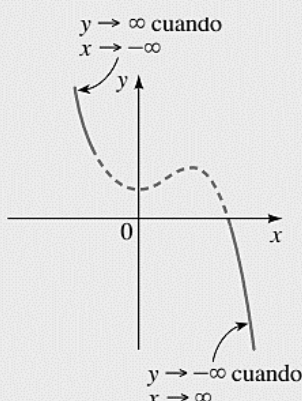
COMPORTAMIENTO FINAL DE POLINOMIOS

El comportamiento final del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ está determinado por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n , como se indica en las gráficas siguientes.

P tiene grado impar

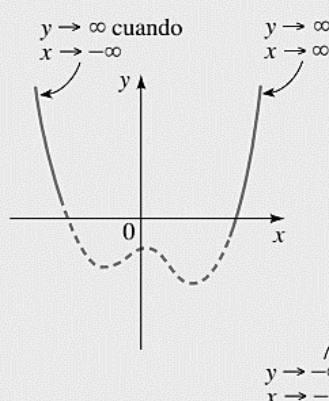


Coeficiente principal positivo

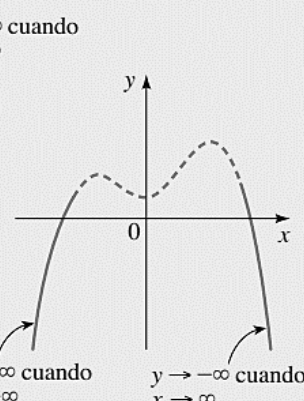


Coeficiente principal negativo

P tiene grado par



Coeficiente principal positivo



Coeficiente principal negativo

Funciones racionales

FUNCIÓN RACIONAL.-

A la función f , le llamaremos función racional, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}; \quad n, m \in \mathbb{Z}^+$$

donde $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$ son constantes reales y $b_m \neq 0$

Ejemplo.- La función $f(x) = \frac{x^2 + 5x - 17}{x^2 - 5x + 6}$, es una función racional cuyo dominio es el conjunto de todas las x , de tal manera que el denominador no se anule, es decir:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x + 6 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

Trace la gráfica la función racional $f(x) = 1/x$, y exprese el dominio y el rango.

x	$f(x)$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.00001	-100 000

Se aproxima a 0^-

Se aproxima a $-\infty$

x	$f(x)$
0.1	10
0.01	100
0.00001	100 000

Se aproxima a 0^+

Se aproxima a ∞

$f(x) \rightarrow -\infty$ cuando $x \rightarrow 0^-$ “y se aproxima al infinito negativo cuando x se aproxima a 0 por la izquierda”

x	$f(x) = 1/x$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

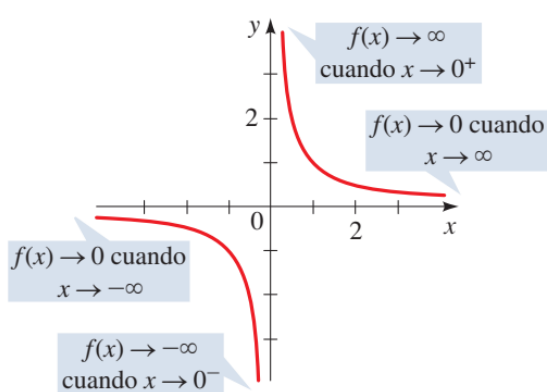


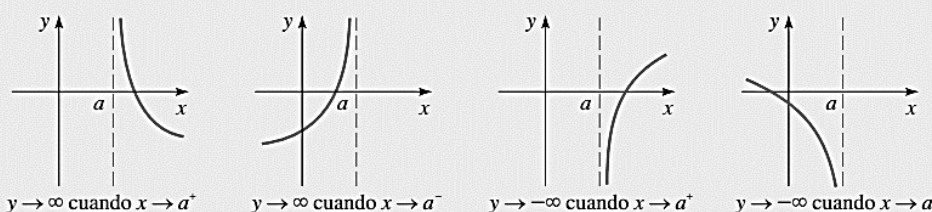
FIGURA 1
 $f(x) = 1/x$

Símbolo	Significado
$x \rightarrow a^-$	x se aproxima a a por la izquierda
$x \rightarrow a^+$	x se aproxima a a por la derecha
$x \rightarrow -\infty$	x se aproxima al infinito negativo, es decir, x decrece sin límite
$x \rightarrow \infty$	x se aproxima al infinito, es decir, x crece sin límite

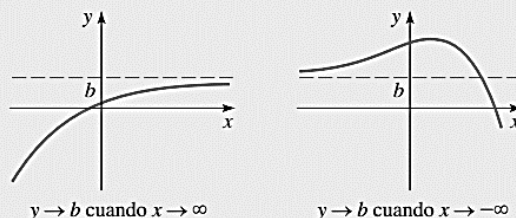
La recta $x = 0$ se denomina *asíntota vertical* de la gráfica de la figura 1, y la recta $y = 0$ es una *asíntota horizontal*. Informalmente hablando, una asíntota de una función es una recta a la cual la gráfica de la función se acerca cada vez más cuando nos movemos a lo largo de la recta.

DEFINICIÓN DE ASÍNTOTAS VERTICAL Y HORIZONTAL

1. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a $\pm\infty$ cuando x se aproxima a a por la derecha o por la izquierda.



2. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm\infty$.



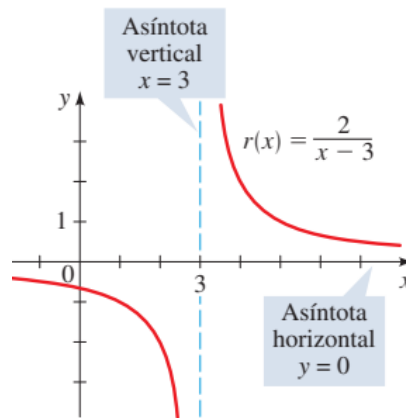
ENCONTRAR ASÍNTOTAS DE FUNCIONES RACIONALES

Sea r la función racional

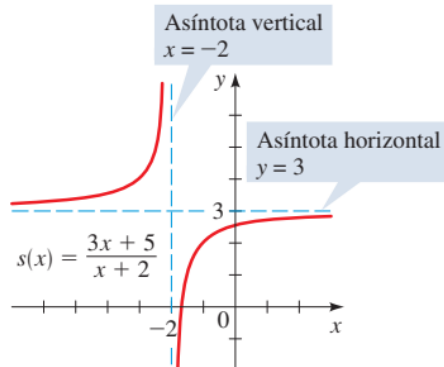
$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$$

1. Las asíntotas verticales de r son las rectas $x = a$, donde a es un cero del denominador.
2.
 - a) Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.
 - b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \frac{a_n}{b_m}$.
 - c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

a) $r(x) = \frac{2}{x-3}$

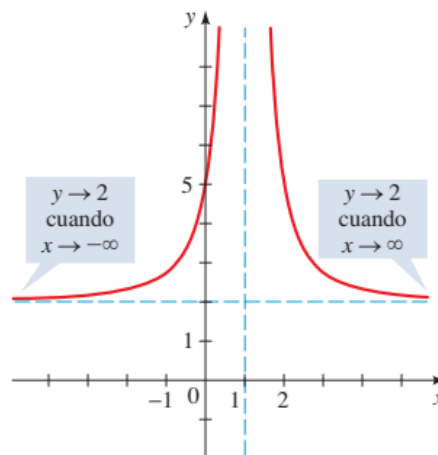


$s(x) = \frac{3x+5}{x+2}$



$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$

$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2}$



Estos términos tienden a 0

$$y = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \longrightarrow \frac{2 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

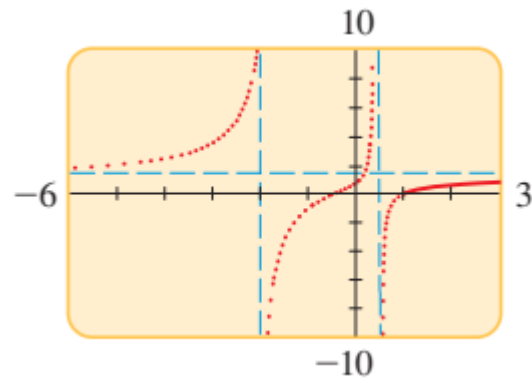
Estos términos tienden a 0

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$$

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(2x - 1)(x + 2)}$$

Este factor es 0
cuando $x = \frac{1}{2}$

Este factor es 0
cuando $x = -2$

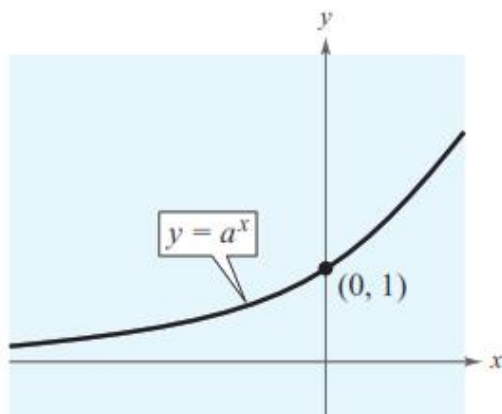


Definición de función exponencial

La **función exponencial** f , de base a , se denota por

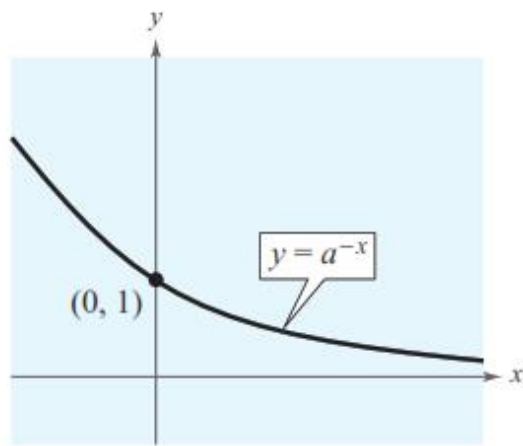
$$f(x) = a^x,$$

donde $a > 0$, $a \neq 1$ y x es un número real.



Gráfica de $y = a^x$, $a > 1$

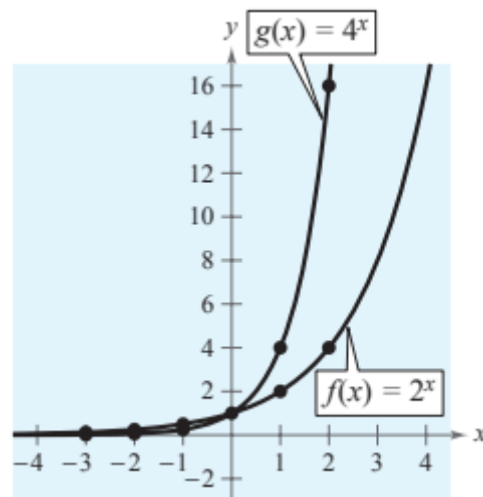
- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$
- Intersección: $(0, 1)$
- Creciente
- El eje x es una asíntota horizontal ($a^x \rightarrow 0$, si $x \rightarrow -\infty$)
- Continua



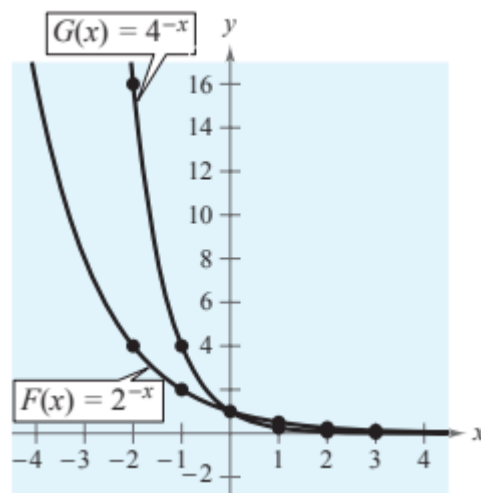
Gráfica de $y = a^{-x}$, $a > 1$

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$
- Intersección: $(0, 1)$
- Decreciente
- El eje x es una asíntota horizontal ($a^{-x} \rightarrow 0$, si $x \rightarrow \infty$)
- Continua

x	-3	-2	-1	0	1	2
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
4^x	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16



x	-2	-1	0	1	2	3
2^{-x}	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
4^{-x}	16	4	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$



x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \frac{1}{3}^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

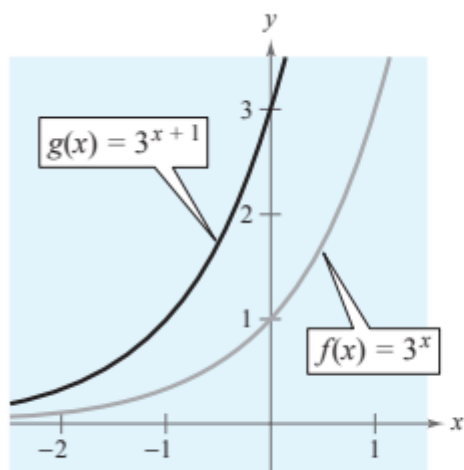
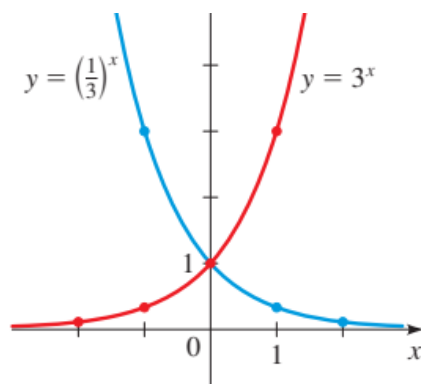


FIGURA 3.5 Desplazamiento horizontal.

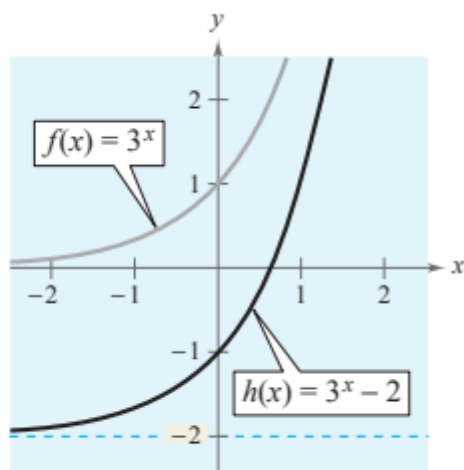


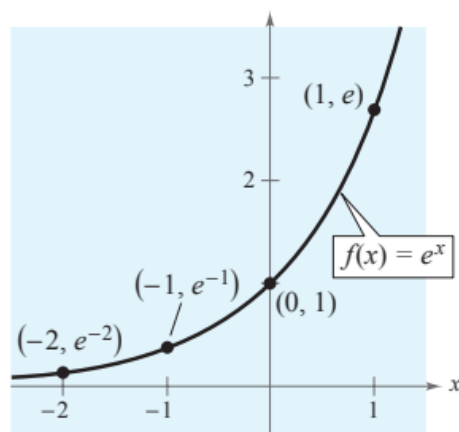
FIGURA 3.6 Desplazamiento vertical.

Base natural e

En muchas aplicaciones, la opción más conveniente para una base es el número irracional

$$e \approx 2.718281828 \dots$$

El número e es **base natural**. La función dada por $f(x) = e^x$ se denomina **función exponencial natural**. Su gráfica se muestra en la figura 3.9. Tenga presente que para la función exponencial $f(x) = e^x$, e es la constante 2.718281828 ..., mientras que x es la variable.



Definición de función logarítmica de base a

Para $x > 0$, $a > 0$ y $a \neq 1$,

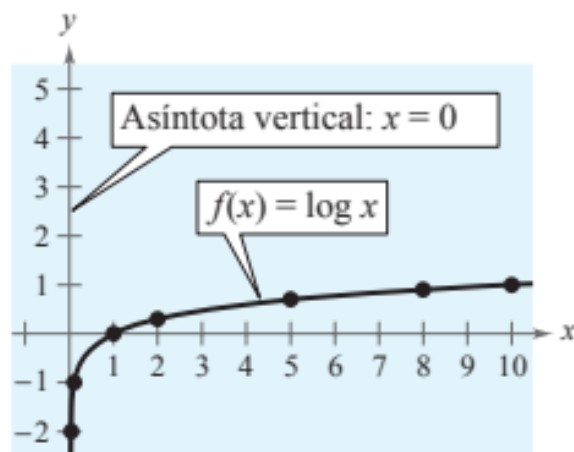
$$y = \log_a x \text{ si, y sólo si, } x = a^y.$$

La función dada por

$$f(x) = \log_a x \quad \text{Se lee "logaritmo base } a \text{ de } x."$$

se denomina **función logarítmica de base a** .

Graficación de una función logarítmica



Trace la gráfica de la función logarítmica común $f(x) = \log x$. Identifique la asíntota horizontal.

	Sin calculadora				Con calculadora		
x	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	1	10	2	5	8
$f(x) = \log x$	-2	-1	0	1	0.301	0.699	0.903

La naturaleza de la gráfica de la figura 3.14 es común a la de todas las funciones de la forma $f(x) = \log_a x$, $a > 1$. Tienen una intersección con el eje x y una asíntota vertical. Observe qué tan lentamente sube la gráfica para $x > 1$. Las características básicas de las gráficas logarítmicas se resumen en la figura 3.15.

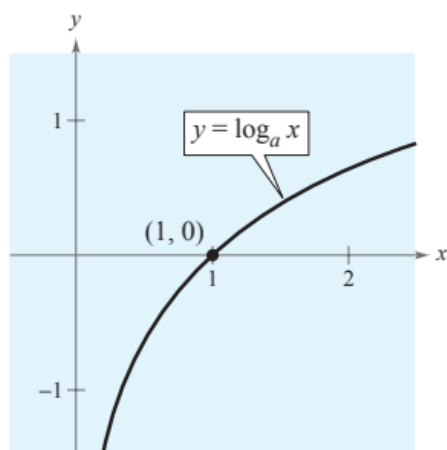


FIGURE 3.15

Gráfica de $y = \log_a x$, $a > 1$

- Dominio: $(0, \infty)$
- Rango: $(-\infty, \infty)$
- Intersección con el eje x : $(1, 0)$
- Creciente
- Uno a uno, por tanto tiene una función inversa
- El eje y es una asíntota vertical ($\log_a x \rightarrow -\infty$, si $x \rightarrow 0^+$).
- Continua
- Reflexión de la gráfica de $y = a^x$ con respecto a la recta $y = x$

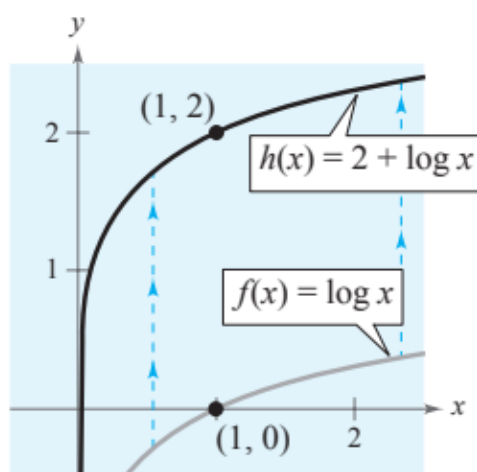
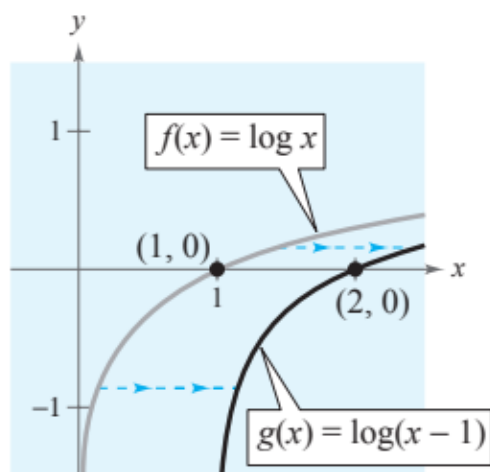
Las características de la gráfica de $f(x) = a^x$ se muestran a continuación para ilustrar la relación inversa entre $f(x) = a^x$ y $g(x) = \log_a x$.

- Dominio: $(-\infty, \infty)$
- Rango: $(0, \infty)$
- Intersección y : $(0, 1)$
- Eje x es una asíntota horizontal ($a^x \rightarrow 0$, si $x \rightarrow -\infty$).

En el ejemplo 7 la gráfica de $y = \log_a x$ se usa para trazar las gráficas de funciones de la forma $f(x) = b \pm \log_a(x + c)$. Observe cómo una traslación horizontal de la gráfica conduce a una traslación horizontal de la asíntota vertical.

La gráfica de cada una de las funciones es similar a la gráfica de $f(x) = \log x$.

- a. Como $g(x) = \log(x - 1) = f(x - 1)$, la gráfica de g se obtiene desplazando la de f una unidad a la derecha, como se muestra en la figura 3.16.
- b. Como $h(x) = 2 + \log x = 2 + f(x)$, la gráfica de h se obtiene desplazando la de f dos unidades hacia arriba, como se muestra en la figura 3.17.



Función logarítmica natural

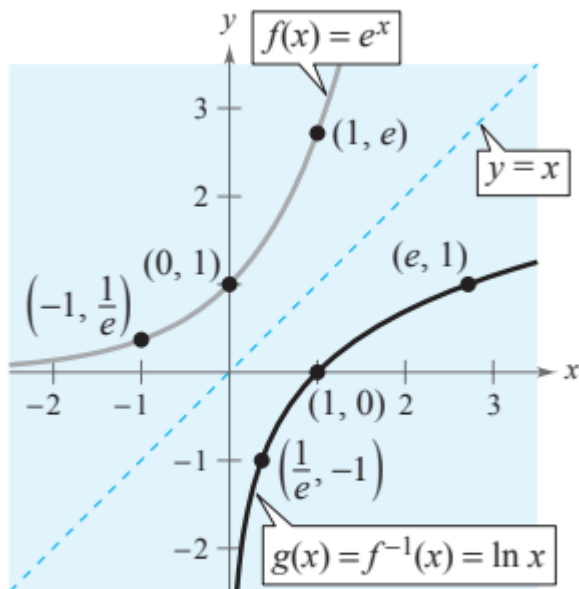
De la gráfica de la función exponencial natural, introducida en la sección 3.1, página 222, se sigue que $f(x) = e^x$ es uno a uno y, por tanto, tiene función inversa. Ésta se denomina función logarítmica natural y se denota con el símbolo especial $\ln x$, se lee “logaritmo natural de x ” o “ln de x .” Note que el logaritmo natural se escribe sin hacer explícita la base. Se entiende que la base es e .

Función logarítmica natural

La función definida por

$$f(x) = \log_e x = \ln x, \quad x > 0$$

se denomina **función logarítmica natural**.

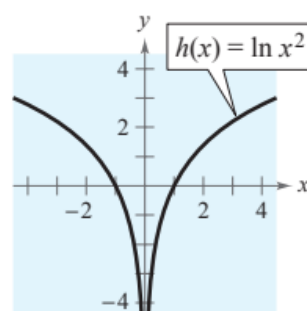
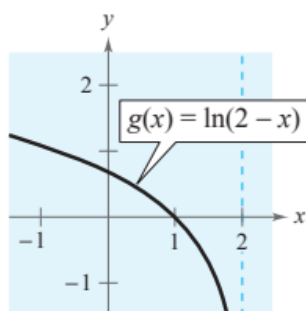
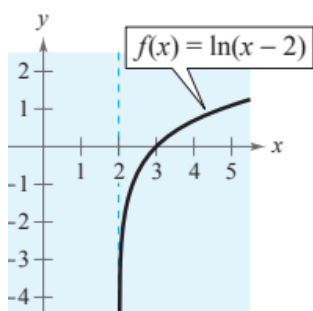


Reflexión de la gráfica de $f(x) = e^x$
con respecto a la recta $y = x$.

Propiedades de los logaritmos naturales

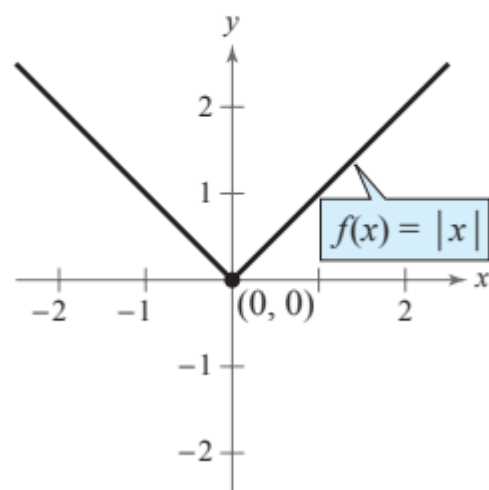
1. $\ln 1 = 0$ porque $e^0 = 1$.
2. $\ln e = 1$ porque $e^1 = e$.
3. $\ln e^x = x$ y $e^{\ln x} = x$ Propiedades inversas
4. Si $\ln x = \ln y$ entonces $x = y$. Propiedad uno a uno

- a. Debido a que $\ln(x - 2)$ está definida sólo si $x - 2 > 0$, se deduce que el dominio de f es $(2, \infty)$. La gráfica de f se muestra en la figura 3.19.
- b. Debido a que $\ln(2 - x)$ está definida sólo si $2 - x > 0$, se deduce que el dominio de g es $(-\infty, 2)$. La gráfica de g se muestra en la figura 3.20.
- c. Puesto que $\ln x^2$ está definida sólo si $x^2 > 0$, se deduce que el dominio de h son todos los números reales, excepto $x = 0$. La gráfica de h se muestra en la figura 3.21.



Función valor absoluto

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$



Dominio: $(-\infty, \infty)$

Rango: $[0, \infty)$

Intersección: $(0, 0)$

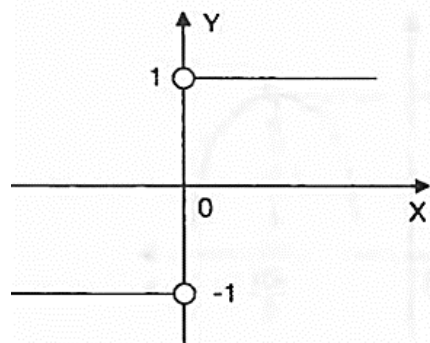
Decreciente en $(-\infty, 0)$

Creciente en $(0, \infty)$

Función par

Simetría con respecto al eje y

FUNCIÓN SIGNO.-



A la función f , le llamaremos función signo, si su regla de correspondencia es:

$$f(x) = \text{sig}(x), \text{ donde } \text{sig}(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

También puede expresar en la forma:

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = \text{sig}(x)\}$$

Donde $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \{-1, 0, 1\}$ y su gráfica es: