Consideremos dos funciones reales de variable real, $f, g: \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ si $D_f \cap D_g \neq \phi$.

Igualdad de funciones

Diremos que las funciones f y g son iguales sí y sólo sí.

$$i)\quad D_f = D_g$$
$$\text{ii) } \mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)} \Rightarrow \forall \mathrm{x} \in D_f = D_g$$

Ejemplo:

Las funciones $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^3 - 1$

Son iguales porque $D_f = D_g = R$ y $\mathrm{f(x)} = \mathrm{g(x)}$.

Ejemplo:

Las funciones $f(x) = \sqrt{(x-1)(x-6)}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}\sqrt{x-6}$ no son iguales puesto que $D_f = \langle -\infty, 1] \cup [6, +\infty \rangle$ y $D_g = [6, +\infty \rangle$ de donde $D_f \neq D_g$

Ejemplo:

Las funciones $f(x) = 2x^2 - 7x$, $x \in \langle 0,5]$ y $g(x) = 2x^2 - 7x$, $x \in [1,9]$ no son iguales a pesar de tener la misma regla de correspondencia, debido a que sus dominios no coinciden.

Operaciones con funciones

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar nuevas funciones f+g, f -g, f.g y f/g de un modo semejante a como sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números reales (Precálculo, James Stewart).

Suma de funciones

Si f y g son dos funciones con dominio Df y Dg respectivamente, entonces a la suma de f y g denotado por f + g se define:

$$i)\ D_{f+g} = D_f \cap D_g$$
$$\text{ii) } (f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \forall x \in D_f \cap D_g$$

Diferencia de funciones

Si f y g son dos funciones con dominio Df y Dg respectivamente, entonces a la diferencia de f y g denotado por f - g se define:

$$i)\ D_{f-g} = D_f \cap D_g$$
$$\text{ii) } (f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$$

Multiplicación de funciones

Si f y g son dos funciones con dominio Df y Dg respectivamente, entonces a la multiplicación de f y g denotada por f.g se define:

$$i)\ D_{f.g} = D_f \cap D_g$$
$$\text{ii) } (f.g)(x) = f(x).g(x) \quad \forall x \in D_f \cap D_g$$

Cociente de funciones

Si f y g son dos funciones con dominio Df y Dg respectivamente, entonces al cociente de f y g denotado por f/g se define:

$$i)\ \ D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g / g(x) = 0\}$$
$$ii)\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ \forall x \in D_{f/g}$$

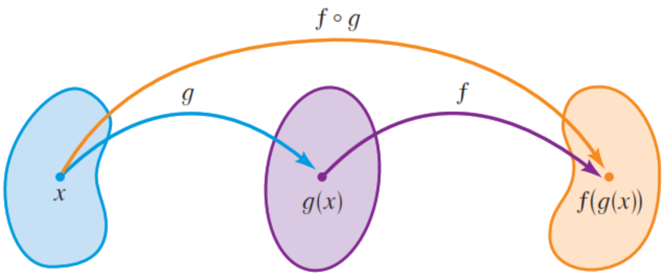
(Análisis matemático I, Eduardo Espinoza Ramos)

Composición de funciones

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (también llamada **composición** de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que tanto $g(x)$ como $f(g(x))$ estén definidas.



$$D_{fog} == \{x \in D_g \;/\; x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$$

Nota:

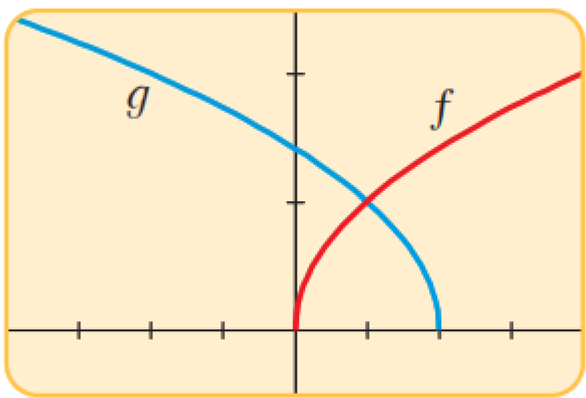
$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \;/\; x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre las siguientes funciones y sus dominios.

(a) $f \circ g$ **(b)** $g \circ f$ **(c)** $f \circ f$ **(d)** $g \circ g$

Las gráficas de las funciones iniciales son:



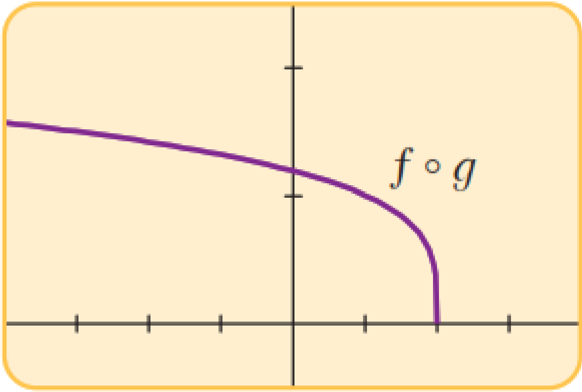
(a) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ Definición de $f \circ g$

$= f(\sqrt{2 - x})$ Definición de g

$= \sqrt{\sqrt{2 - x}}$ Definición de f

$= \sqrt[4]{2 - x}$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

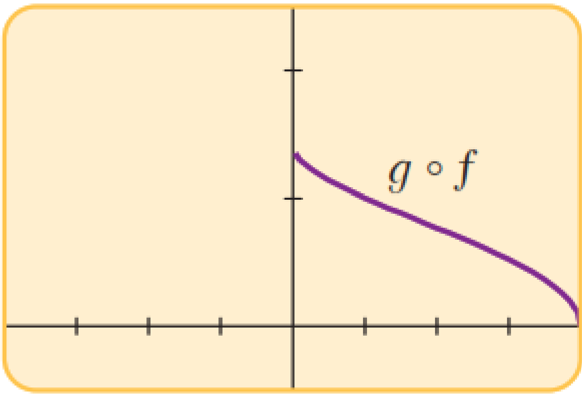


(b) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ Definición de $g \circ f$

$= g(\sqrt{x})$ Definición de f

$= \sqrt{2 - \sqrt{x}}$ Definición de g

Para que $\sqrt{x}$ esté definida, debemos tener $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida, debemos tener $2 - \sqrt{x} \geq 0$, es decir, $\sqrt{x} \leq 2$, o $x \leq 4$. Entonces, tenemos $0 \leq x \leq 4$ de modo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.



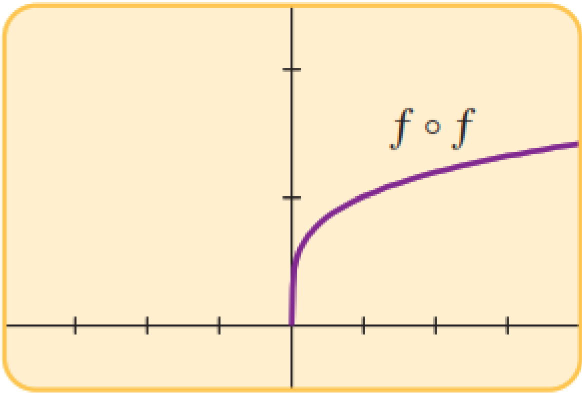
(c) $(f \circ f)(x) = f(f(x))$ Definición de $f \circ f$

$= f(\sqrt{x})$ Definición de f

$= \sqrt{\sqrt{x}}$ Definición de f

$= \sqrt[4]{x}$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.



(d) $(g \circ g)(x) = g(g(x))$ Definición de $g \circ g$

$= g(\sqrt{2 - x})$ Definición de g

$= \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$ Definición de g

Esta expresión está definida cuando$2 - x \geq 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$. La primera desigualdad quiere decir que $x \leq 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leq 2$, o $2 - x \leq 4$, o $x \geq -2$. Por tanto, $-2 \leq x \leq 2$, de modo que el dominio de $g \circ g$ es $[-2, 2]$.