UNIDAD 2: NÚMEROS REALES Y COMPLEJOS.

Resultados de aprendizaje

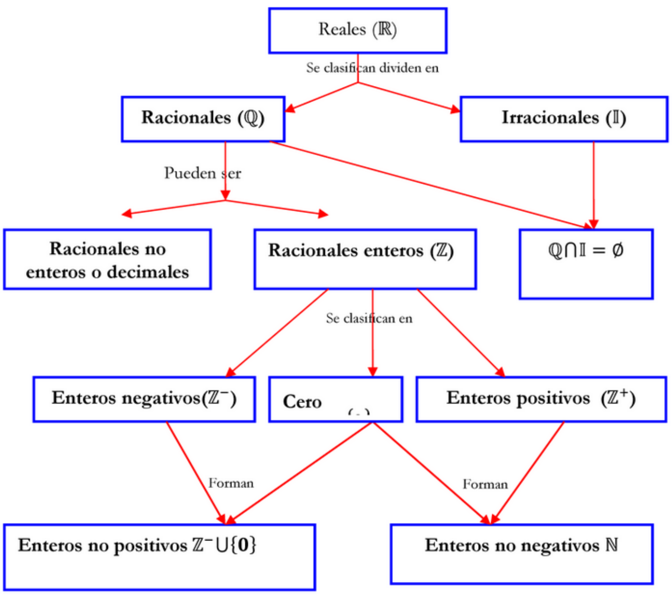
- Comprende las operaciones fundamentales que se realizan en el campo de los números reales y complejos.
- Aplica los números reales y complejos como una herramienta básica de la ingeniería, para la resolución de problemas con validez

Expresiones algebraicas

Definición de los números reales

Él conjunto de los Números Reales ($\mathbb{R}$) es la unión del conjunto de los Números Racionales (Q) con el conjunto de los Números irracionales ($\mathbb{I}$). És decir, IR = QUH. Dentro del conjunto de los Números Racionales se encuentran los Números Enteros ($\mathbb{Z}$), los cuales a su vez se clasifican en Enteros Negativos ($\mathbb{Z}^{-1}$), Enteros Positivos ($\mathbb{Z}^{+1}$) y el Cero.

Figura 1. Conjunto de números.



Nota: Imagen tomada de (Morales Urbina et al., 2019).

Él sistema de los Números Reales consta del conjunto $\mathbb{R}$ con dos operaciones, que se llamaran adición y multiplicación, denotadas con los símbolos + y * respectivamente, que satisfacen un conjunto de propiedades llamadas axiomas de cuerpo. Además de un ordenamiento en el conjunto ℝ que se establece con los axiomas de orden y las relaciones menor que y mayor que. Decir que la adición y la multiplicación son operaciones definidas en el conjunto de los Números Reales significa que al efectuar la adición o multiplicación de dos números reales siempre se obtendrá como resultado un número real. (Morales Urbina et al., 2019)

Axiomas de los números reales

Igualdad

I. **Axioma de identidad:** $a = a$.
II. **Axioma de reciprocidad:** si $a = b$, tenemos que $b = a$.
III. **Axioma de transitividad:** si $a = b$ y $b = c$, tenemos que $a = c$.

Suma o adición

I. **Axioma de uniformidad:** la suma de dos números es siempre igual, es decir, única; así, si $a = b$ y $c = d$, tenemos que $a + c = b + d$.
II. **Axioma de conmutatividad:** $a + b = b + a$.
III. **Axioma de asociatividad:** $(a + b) + c = a + (b + c)$.
IV. **Axioma de identidad, o módulo de la suma:** hay un número y sólo un número, el cero, de modo que $a + 0 = 0 + a = a$, para cualquier valor de a. De ahí que el cero reciba el nombre de elemento idéntico o módulo de la suma.

Multiplicación

I. **Axioma de uniformidad:** el producto de dos números es siempre igual, es decir, único, así si $a = b$ y $c = d$, tenemos que $ac = bd$.
II. **Axioma de conmutatividad:** $ab = ba$.
III. **Axioma de asociatividad:** $(ab)c = a(bc)$.
IV. **Axioma de distributividad:** con respecto a la suma tenemos que $a(b + c) = ab + ac$.
V. **Axioma de identidad, o módulo del producto:** hay un número y sólo un número, el uno (1), de modo que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para cualquier valor de a.
VI. **Axioma de existencia del inverso:** para todo número real $a \neq 0$ (a distinto de cero) corresponde un número real, y sólo uno, x, de modo que $ax = 1$. Este número x se llama inverso o recíproco de a, y se representa por $1/a$.

Axiomas de orden

I. **Tricotomía:** si tenemos dos números reales a y b sólo puede haber una relación, y sólo una, entre ambos, que $a > b$; $a = b$ o $a < b$.

II. **Monotonía de la suma:** si $a > b$ tenemos que $a + c > b + c$.

III. **Monotonía de la multiplicación:** si $a > b$ y $c > 0$ tenemos que $ac > bc$.

Axioma de continuidad

I. Si tenemos dos conjuntos de números reales A y B, de modo que todo número de A es menor que cualquier número de B, existirá siempre un número real c con el que se verifique $a \leqq c \leqq b$, en que a es un número que está dentro del conjunto A, y b es un número que está dentro del conjunto B.

(Baldor, 2016)

Resumen de las propiedades de los números reales

Conmutativa: $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$

Asociativa: $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributiva: $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Identidad: $a + 0 = 0 + a = a$, $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

Inverso: $a + (-a) = -a + a = 0$, $a \cdot \dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{a} \cdot a = 1$

(Ocaña & Pérez, 2010)

El álgebra

El álgebra es la rama de las matemáticas que estudia la cantidad considerada del modo más general posible. En efecto, si se tiene una cantidad cualquiera que se representará con x, lo que estamos diciendo es que esa x puede tener cualquier valor: 8, -7, 6 + 5, y, x - 2, z , etc. Precisamente por esto es tan general. Si en álgebra tenemos la expresión 6x, esto significa que se multiplicará 6 por el valor de x, pero como no se conoce el valor de x, entonces la expresión queda así: 6x, y constituye un término algebraico (Arzate, 2015).

Signos del álgebra

Los signos empleados en Álgebra son de tres clases: signos de operación, signos de relación y signos de agrupación.

Signos de operación

En Álgebra se verifican con las cantidades las mismas operaciones que en Aritmética: suma, resta, multiplicación, división, elevación a potencias y extracción de raíces, que se indican con los signos siguientes:

Signos de relación

Se emplean estos signos para indicar la relación que existe entre dos cantidades. Los principales son:

= , que se lee igual a. Así, $a = b$ se lee "a igual a b".

>, que se lee mayor que. Así, $x + y > m$ se lee "x + y mayor que m".

<, que se lee menor que. Así, $a < b + c$ se lee "a menor que b + c".

(Baldor, 2016)

SIGNOS DE AGRUPACIÓN

Los signos de agrupación son: el paréntesis ordinario ( ), el paréntesis angular o corchete [ ], las llaves { }.

Estos signos indican que la operación colocada entre ellos debe efectuarse primero. Así, $(a + b)c$ indica que el resultado de la suma de a y b debe multiplicarse por c; $[a - b]m$ indica que la diferencia entre a y b debe multiplicarse por m; $\{a + b\} \div \{c - d\}$ indica que la suma de a y b debe dividirse entre la diferencia de c y d.

(Baldor, 2016)

Sabemos que	$a+(-b+c)=a-b+c$
luego, recíprocamente:	$a-b+c=a+(-b+c)$
Hemos visto también que	$a-(b-c)=a-b+c$
luego, recíprocamente:	$a-b+c=a-(b-c)$
Del propio modo,	$a+b-c-d-e=a+(b-c)-(d+e)$

Lo anterior nos dice que los términos de una expresión pueden agruparse de cualquier modo. Ésta es la ley asociativa de la suma y de la resta. Podemos, pues, enunciar la siguiente:

- Para introducir cantidades dentro de un signo de agrupación precedido del signo más (+) se deja a cada una de las cantidades con el mismo signo que tengan.
- Para introducir cantidades dentro de un signo de agrupación precedido del signo me- nos (−) se cambia el signo a cada una de las cantidades que se incluyen en él.

(Baldor, 2016)

Simplificación de signos de agrupación

En álgebra el paréntesis, corchetes y llaves, se usan para agrupar términos y separar operaciones. (Rodríguez Vallejo, 2023)

Para eliminar estos signos de agrupación en las expresiones algebraicas debes fijarte en el signo que aparece antes de cada signo de agrupación (Baquerizo et al., 2006):

Si el signo de agrupación se encuentra antecedido por un signo positivo. Al igual se deben eliminar los signos de agrupación y mantener los elementos manteniendo todos los signos tal cual. (Morales Urbina, 2019)

Si se encuentra un signo negativo antes del signo de agrupación, se deben eliminar los signos de agrupación y se mantienen los elementos que estaban dentro cambiando solo el signo de cada uno.(Aufmann & S. Lockwood, 2013)

Figura 2. Simplificación de signos de agrupación.

El signo de x se mantiene

$$2 + (x - 4) = 2 + x - 4$$

El signo de 4 se mantiene

El signo de x cambia a negartivo

$$2 - (x - 4) = 2 - x + 4$$

El signo de 4 cambia a positivo

Nota. Imagen obtenida de: (Morales Urbina, 2019).

Potenciación

Un producto repetido como $2 \times 2 \times 2$ se representa en la forma: 2^3

Si **b** es un número entero y **n** es un número entero positivo:

$$\underbrace{b \,.\, b \,.\, b \ldots b}_{\textbf{n}\text{ factores}} = b^n$$

A la expresión $\mathbf{b^n}$ se le denomina **potencia**, **b** es la **base** y **n** es el **exponente.**

(Ocaña & Pérez, 2010)

1) **Toda potencia par de una cantidad negativa es positiva** porque equivale a un producto en que entra un número **par** de factores negativos.

Así, $(-2)^2 = +\ 4$ porque $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = +4$
$(-2)^4 = +\ 16$ porque $(-2)^4 = (-2)^2 \times (-2)^2 = (+4) \times (+4) = +\ 16$
$(-2)^6 = +\ 64$ porque $(-2)^6 = (-2)^4 \times (-2)^2 = (+16) \times (+4) = +\ 64$
$(-2)^8 = +256$ porque $(-2)^8 = (-2)^6 \times (-2)^2 = (+64) \times (+4) = +\ 256$

y así sucesivamente.
En general, siendo N un número entero se tiene: $(-a)^{2N} = a^{2N}$.

2) **Toda potencia impar de una cantidad negativa es negativa** porque equivale a un producto en que entra un número **impar** de factores negativos.

Así, $(-2)^1 = -\ 2$
$(-2)^3 = -\ 8$ porque $(-2)^3 = (-2)^2 \times (-2) = (+4) \times (-2) = -\ 8$
$(-2)^5 = -\ 32$ porque $(-2)^5 = (-2)^4 \times (-2) = (+16) \times (-2) = -\ 32$
$(-2)^7 = -128$ porque $(-2)^7 = (-2)^6 \times (-2) = (+64) \times (-2) = -\ 128$

y así sucesivamente.
En general, se tiene: $(-a)^{2N+1} = -\,a^{2N+1}$.

(Baldor, 2016)

Reglas de exponentes

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	**regla del producto**
2. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, x \neq 0$	**regla del cociente**
3. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	**regla de las potencias**
4. $x^0 = 1, x \neq 0$	**regla del exponente cero**
5. $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}, x \neq 0$	**regla del exponente negativo**
6. $\left(\dfrac{ax}{by}\right)^m = \dfrac{a^m x^m}{b^m y^m}, b \neq 0, y \neq 0$	**regla de la potencia expandida**
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^m, a \neq 0, b \neq 0$	**regla de una fracción elevada a un exponente negativo**

Reglas de radicales

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}, a \geq 0$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n.m]{\frac{a^m}{b^n}}$$

Términos de una expresión algebraica

Los términos de una expresión algebraica son los sumandos de la expresión (Aufmann & Lockwood, 2013). A continuación, se muestra las partes de un término.

$$-5x^2y^3$$

Las partes que lo constituyen son las siguientes:

1 Signo, que en este ejemplo es - (negativo).

2 Coeficiente, que en este ejemplo es el número 5.

3 Literales, variables o incógnitas, que en este ejemplo son x y y.

4 Exponentes o potencias, que en este ejemplo son los números 2 y 3. (Arzate, 2015)

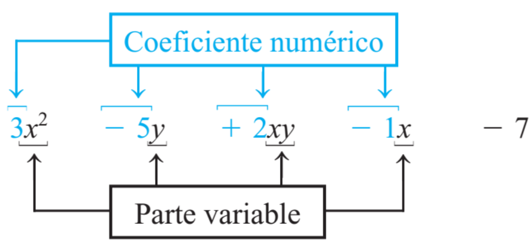
Expresión algebraica

Una expresión algebraica es una combinación de números y letras que pueden estar conectadas por operaciones matemáticas elementales: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación. (Morales Urbina, 2019)

$$3x^2 - 5y + 2xy - x - 7$$

$$3x^2 + (-5y) + 2xy + (-x) + (-7)$$

$$\overbrace{\underbrace{\overbrace{3x^2}\ \overbrace{-5y}\ \overbrace{+2xy}\ \overbrace{-x}}_{\text{Términos variables}}\ \ \underbrace{\overbrace{-7}}_{\text{Término constante}}}^{\text{5 términos}}$$



Cuando el coeficiente es 1 o -1, el 1 por lo general no se escribe:

$$x = 1x \ \text{ y } \ -x = -1x$$

$$+1x^1y^1 \qquad = \qquad x\,y$$

(Aufmann & Lockwood, 2013)

Ejemplos de expresiones algebraicas.

• $3x$	• $2x + \frac{3y^2}{x}$
• $\frac{x}{2}$	• $\frac{3}{x}$
• $2x^2 + 3x - 1$	• $\sqrt{4ab} + 3ab$
• $xy^2z + 2x^3yz^2$	• $xy + 2\sqrt[3]{x}$

Nota. Imagen obtenida de: (Morales Urbina, 2019).

MONOMIO es una expresión algebraica que consta de un solo término (Baldor, 2016).

POLINOMIO es una expresión algebraica que consta de más de un término. Aquí se incluye al binomio, trinomio etc. (Baldor, 2016)

Grado de un polinomio

Grado absoluto de un polinomio es el grado de su término de mayor grado. Así, en el polinomio $x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x$ el primer término es de cuarto grado; el segundo, de tercer grado; el tercero, de segundo grado, y el último, de primer grado; luego, el grado absoluto del polinomio es el cuarto (Baldor, 2016).

ORDENAR UN POLINOMIO es escribir sus términos de modo que los exponentes de una letra escogida como letra ordenatriz queden en orden descendente o ascendente. Así, ordenar el polinomio $-5x^3 + x^5 - 3x + x^4 - x^2 + 6$ en orden descendente con relación a x será escribir: $x^5 + x^4 - 5x^3 - x^2 - 3x + 6$.

TÉRMINO INDEPENDIENTE de un polinomio con relación a una letra es el término que no tiene dicha letra.

$$x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 9x + 20 \text{ el término independiente es } 20$$

(Baldor, 2016)

Términos semejantes

Dos o más términos son semejantes si, y sólo si, sus literales y exponentes son iguales, es decir, en los términos semejantes sólo pueden variar los coeficientes y los signos (Arzate, 2015).

$-8x^3y^2$ es semejante a $6x^3y^2$, ya que la única diferencia son los signos y los coeficientes. $-4y^3$ no es semejante a $2x^2y^3$, ya que x^2 sólo aparece en el segundo término (Arzate, 2015).

Suma algebraica

La suma algebraica sólo se puede llevar a cabo entre términos semejantes. Dicho de otra manera, para sumar dos o más términos es indispensable que éstos sean términos semejantes. Se debe recordar que el hablar de suma, también se implica a la resta. Para la suma:

- Se comparan los términos para saber si son semejantes.
- Solamente se operan los coeficientes con sus respectivos signos, de acuerdo con las leyes de los signos para la suma.

(Arzate, 2015)

Ejemplos:

$$2x + 7x = 9x$$

$$xy + 3xy = 4xy$$

$$9x^2y^3 - 7x^2y^3 = 2x^2y^3$$

$$4x^2y^4 + 3x^2y^2 = 4x^2y^4 + 3x^2y^2 \quad (no\ se\ puede\ sumar)$$

$$5x^3y^2 - 6x^3y^2 =$$

$$-3u^2v + 6xu^2 - 4u^2v =$$

Ejercicios:

1. $m^2 + 71mn - 14m^2 - 65mn + m^3 - m^2 - 115m^2 + 6m^3$
2. $x^4y - x^3y^2 + x^2y - 8x^4y - x^2y - 10 + x^3y^2 - 7x^3y^2 - 9 + 21x^4y - y^3 + 50$
3. $5a^{x+1} - 3b^{x+2} - 8c^{x+3} - 5a^{x+1} - 50 + 4b^{x+2} - 65 - b^{x+2} + 90 + c^{x+3} + 7c^{x+3}$
4. $a^{m+2} - x^{m+3} - 5 + 8 - 3a^{m+2} + 5x^{m+3} - 6 + a^{m+2} - 5x^{m+3}$

También se pueden sumar o restar expresiones.

Sumar $4xy - 3x + 8y$ con $3xy - 10x + y$

$$(4xy - 3x + 8y) + (3xy - 10x + y) =$$

$$= 4xy - 3x + 8y + 3xy - 10x + y$$

$$= 7xy - 13x + 9y$$

Restar $4xy - 3x + 8y$ menos $3xy - 10x + y$

$$(4xy - 3x + 8y) - (3xy - 10x + y) =$$
$$= 4xy - 3x + 8y - 3xy + 10x - y$$
$$= xy + 7x + 7y$$

Multiplicación

Multiplicación de monomio por monomio

Para realizar la multiplicación de un monomio por un monomio se procede de la siguiente manera:

- Se operan los signos
- Se operan los coeficientes
- Se operan las literales

Ejemplo: Multiplicar $(-9xy)(2xyz)$

Signos:

$$(-9xy)(2xyz) = -$$

Coeficientes:

$$(-9xy)(2xyz) = -18$$

Literales:

$$(-9xy)(2xyz) = -18x^2y^2z$$

Multiplicación de monomio por un polinomio

Se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio y se suman los productos (Arzate, 2015).

$$2xy(x + 4y^2) = 2x^2y + 8xy^3$$

Multiplicación de polinomio por polinomio

Se multiplica cada término del primer paréntesis por cada término del segundo y se suman los productos (Arzate, 2015).

$$(m + n).(x + y) = mx + my + nx + ny$$

Ejemplo: $(3x^4y - x^3y)(2x^3 + 4x^2)$

$$(3x^4y - x^3y)(2x^3 + 4x^2)$$

$$(3x^4y)(2x^3) = 6x^7y$$

$$(3x^4y)(4x^2) = 12x^6y$$

$$(-x^3y)(2x^3) = -2x^6y$$

$$(-x^3y)(4x^2) = -4x^5y$$

$$6x^7y + 12x^6y - 2x^6y - 4x^5y = 6x^7y + 10x^6y - 4x^5y$$

Otra forma de hacer la operación es la siguiente:

$$\begin{array}{l}
(3x^4y - x^3y) \\
(2x^3 + 4x^2) \\
\hline
6x^7y - 2x^6y \\
\qquad\quad + 12x^6y - 4x^5y \\
\hline
6x^7y + 10x^6y - 4x^5y
\end{array}$$

División de monomio entre monomio

Para dividir monomio entre monomio se procede de la siguiente manera:

- Se operan los signos.
- Se operan los coeficientes.
- Se operan las literales (se utilizan las leyes de los exponentes, al dividir se res- tan los exponentes)

Ejemplo:

$$\frac{9x^4y^3}{-3x^2y^{-4}} = -3x^2y^7$$

Ejemplo:

$$\frac{12x^{-5}y^{8}z^{-6}}{-4x^{-3}y^{-4}z^{-2}} = -3x^{-5-(-3)}y^{8-(-4)}z^{-6-(-2)}$$

$$= -3x^{-5+3}y^{8+4}z^{-6+2} = -3x^{-2}y^{12}z^{-4}$$

División de polinomio entre monomio

Para hacer una división de polinomio entre monomio, el procedimiento es similar al que se sigue en aritmética (Arzate, 2015).

Aritmética

$$\frac{20+8}{2} = \frac{20}{2} + \frac{8}{2} = \frac{28}{2}$$

Álgebra

$$\frac{3x^3 + 12x^5}{3x^2} = \frac{3x^3}{3x^2} + \frac{12x^5}{3x^2} = x + 4x^3$$

Tal como se observa, se divide cada uno de los términos del numerador entre el denominador y se suman (o restan, según el signo) los cocientes.

División de polinomio entre polinomio

Lo primero que hay que señalar es que la división de un monomio entre un polinomio se hace siguiendo el mismo procedimiento que al dividir un polinomio entre otro polinomio (Arzate, 2015).

División de expresiones algebraicas

La división de dos polinomios es como la división de números reales. Estudie y compare los dos procedimientos siguientes. (Morales Urbina, 2019)

Ejemplo de división de expresiones algebraicas.

División de 298 entre 14	División de $x^3 - 2x^2 - 3x - 5$ entre $x^2 - 2$
$$\begin{array}{r\|l} 298 & 14 \\ \cline{2-2} -28 & 21 \\ \cline{1-1} 18 & \\ -14 & \\ \cline{1-1} 4 & \end{array}$$ Cociente: **21**; Resto: **4**	$$\begin{array}{rl\|l} x^3 - 2x^2 - 3x - 5 & & x^2 - 2 \\ \cline{3-3} -x^3 \quad\quad 2x & & x - 2 \\ \cline{1-1} -2x^2 - x - 5 & & \\ 2x^2 \quad\quad - 4 & & \\ \cline{1-1} -x - 9 & & \end{array}$$ Cociente: $x - 2$; Resto: $-x - 9$

Recordemos que dividendo = divisor · cociente + resto. Para estos dos ejemplos.

$298 = 14 \cdot 21 + 4$	$x^3 - 2x^2 - 3x - 5 = (x^2 - 2)(x - 2) + (-x - 9)$

Nota. Imagen obtenida de: (Morales Urbina, 2019).

Según (Morales Urbina, 2019), En general para llevar a cabo la división larga de polinomios se puede llevar a cabo los siguientes pasos:

1. Ordenar el dividendo y el divisor en orden descendente según potencias de una letra principal.

2. Completar el polinomio con ceros si falta alguna potencia de la letra principal.

3. Dividir el primer término del dividendo por el primero del divisor, con lo que resulta el primer término del cociente.

4. Multiplicar el primer término del cociente por el divisor y el producto resultante sumar al dividendo con signo cambiado, obteniéndose un nuevo dividendo. Esta operación se repetirá hasta obtener un resto cero o menor que el dividendo.

5. El resultado de la operación se puede expresar de la forma siguiente:

Figura 3. Formas de expresar la división.

$$Dividendo = divisor \cdot cociente + resto$$

o

$$\frac{Dividendo}{divisor} = cociente + \frac{resto}{divisor}$$

Nota. Imagen obtenida de: (Morales Urbina, 2019).

Ejemplo: Dividir

$x^3 - 2x^2 - 3x - 5$ entre $x^2 - 2$

1. A la izquierda situamos el dividendo. Previamente se verificó, si el polinomio estaba completo y ordenado en forma decreciente.

2. A la derecha situamos el divisor dentro de una caja.

3. Dividimos el primer monomio del dividendo entre el primer monomio del divisor.

$$\frac{x^3}{x^2} = x^{3-2} = x$$

4. Multiplicamos cada término del polinomio divisor por el resultado anterior:

$$x(x^2 - 2) = x^3 - 2x$$

5. El resultado anterior lo restamos del polinomio dividendo:

$$(x^3 - 2x^2 - 3x) - (x^3 - 2x) = x^3 - 2x^2 - 3x - x^3 + 2x = -2x^q - x$$

6. A este resto le añadimos —5 con lo que resulta —2x² — x — 5

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - 3x - 5 & x^2 - 2 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad\quad 2x & x \\ \hline -2x^2 - x - 5 & \end{array}$$

Volvemos a dividir el primer monomio del nuevo dividendo ($-2x^2$) entre el primer monomio del divisor (x^2). Y el resultado lo multiplicamos por el divisor y lo restamos al dividendo.

$$\begin{array}{l|l} x^3 - 2x^2 - 3x - 5 & x^2 - 2 \\ \cline{2-2} -x^3 \qquad\quad 2x & x - 2 \\ \hline -2x^2 - x - 5 & \\ 2x^2 \qquad\; - 4 & \\ \hline -x - 9 & \end{array}$$

Respuesta:

$(x - 2) + \frac{-x-9}{x^2-2}$

Recordar que:

$$x^3 - 2x^2 - 3x - 5 = (x^2 - 2)(x - 2) + (-x - 9)$$

Ejemplos:

Dividir $3x^2 + 2x - 8$ entre $x + 2$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
3x^2 & +2x & -8 & x+2 \\ \cline{4-4}
-3x^2 & -6x & & 3x-4^{(1)} \\ \cline{1-3}
 & -4x & -8 & \\
 & 4x & -8 & \\ \cline{2-3}
\end{array}
$$

Dividir $28x^2 - 30y^2 - 11xy$ entre $4x - 5y$.

Ordenando dividendo y divisor en orden descendente con relación a x tendremos:

$$
\begin{array}{rrr|l}
28x^2 & -11xy & -30y^2 & 4x-5y \\ \cline{4-4}
-28x^2 & +35xy & & 7x+6y \\ \cline{1-3}
 & 24xy & -30y^2 & \\
 & -24xy & +30y^2 & \\ \cline{2-3}
\end{array}
$$

Dividir $3a^{x+5} + 19a^{x+3} - 10a^{x+4} - 8a^{x+2} + 5a^{x+1}$ entre $a^2 - 3a + 5$.

Ordenando en orden descendente en relación con la a, tendremos:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3a^{x+5} & -10a^{x+4} & +19a^{x+3} & -8a^{x+2} & +5a^{x+1} & a^2-3a+5 \\ \cline{6-6}
-3a^{x+5} & +9a^{x+4} & -15a^{x+3} & & & 3a^{x+3}-a^{x+2}+a^{x+1} \quad \textbf{R.} \\ \cline{1-5}
 & -a^{x+4} & +4a^{x+3} & -8a^{x+2} & & \\
 & a^{x+4} & -3a^{x+3} & +5a^{x+2} & & \\ \cline{2-5}
 & & a^{x+3} & -3a^{x+2} & +5a^{x+1} & \\
 & & -a^{x+3} & +3a^{x+2} & -5a^{x+1} & \\ \cline{3-5}
\end{array}
$$

Dividir $\frac{1}{3}x^3-\frac{35}{36}x^2y+\frac{2}{3}xy^2-\frac{3}{8}y^3$ entre $\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
\frac{1}{3}x^3 & -\frac{35}{36}x^2y & +\frac{2}{3}xy^2 & -\frac{3}{8}y^3 & \frac{2}{3}x-\frac{3}{2}y \\ \cline{5-5}
-\frac{1}{3}x^3 & +\frac{3}{4}x^2y & & & \frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2 \\ \cline{1-4}
 & -\frac{2}{9}x^2y & +\frac{2}{3}xy^2 & & \\
 & \frac{2}{9}x^2y & -\frac{1}{2}xy^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{1}{6}xy^2 & -\frac{3}{8}y^3 & \\
 & & -\frac{1}{6}xy^2 & +\frac{3}{8}y^3 & \\ \cline{3-4}
\end{array}
$$

Dividir x^2-x-6 entre $x+3$.

$$
\begin{array}{rrr|l}
x^2 & -x & -6 & x+3 \\ \cline{4-4}
-x^2 & -3x & & x-4+\frac{6}{x+3} \\ \cline{1-3}
 & -4x & -6 & \\
 & 4x & +12 & \\ \cline{2-3}
 & & 6 &
\end{array}
$$

Dividir $6m^4-4m^3n^2-3m^2n^4+4mn^6-n^8$ entre $2m^2-n^4$.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
6m^4 & -4m^3n^2 & -3m^2n^4 & +4mn^6 & -n^8 & 2m^2-n^4 \\ \cline{6-6}
-6m^4 & & +3m^2n^4 & & & 3m^2-2mn^2+\frac{2mn^6-n^8}{2m^2-n^4} \\ \cline{1-5}
 & -4m^3n^2 & & +4mn^6 & & \\
 & 4m^3n^2 & & -2mn^6 & & \\ \cline{2-5}
 & & & 2mn^6 & -n^8 &
\end{array}
$$

(Baldor, 2016)

Familias de los productos notables

Teoría:

En matemáticas, un producto corresponde al resultado que se obtiene al realizar una multiplicación.

Sabemos que algo es notable cuando nos llama la atención o destaca entre un grupo de cosas.

Entonces, los productos notables son simplemente multiplicaciones especiales entre expresiones algebraicas (llámense las mismas polinomios), que por sus características destacan de las demás multiplicaciones. Las características que hacen que un producto sea notable, es que se cumplen ciertas reglas, tal que el resultado puede ser obtenido mediante una simple inspección, sin la necesidad de verificar o realizar la multiplicación paso a paso.

Los productos notables están íntimamente relacionados con fórmulas de factorización, por lo que su aprendizaje facilita y sistematiza la solución de diversas multiplicaciones, permitiendo simplificar expresiones algebraicas complejas.

Dentro de los productos notables podemos encontrar:

Suma por diferencia de dos expresiones

La suma por la diferencia o diferencia por suma, de dos expresiones, es igual al cuadrado de la primera expresión que está en la diferencia, menos el cuadrado de la otra expresión.

$$(A+B)(A-B)=A^2-B^2.$$

Efectuar $(a+x)(a-x)$.

$$(a+x)(a-x)=a^2-x^2 \quad \textbf{R.}$$

Efectuar $(2a+3b)(2a-3b)$.

$$(2a+3b)(2a-3b)=(2a)^2-(3b)^2=4a^2-9b^2 \quad \textbf{R.}$$

$(5+x)(5-x)=25-x^2.$

$(x^2-y)(x^2+y)=(x^2)^2-y^2=x^4-y^2.$

$(8-x^3)(x^3+8)=64-(x^3)^2=64-x^6.$

$(3x+2y)(2y-3x)=(2y)^2-(3x)^2=4y^2-9x^2.$

$(\sqrt{7}-4xy^2)(4xy^2+\sqrt{7})=(\sqrt{7})^2-(4xy^2)^2=7-16x^2y^4.$

Cuadrado de un binomio

El cuadrado de la suma de dos cantidades

Es igual al cuadrado de la primera cantidad más el doble de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda cantidad. Si los dos signos del binomio son iguales, el doble del primero por el segundo es positivo.

$$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2.$$

Ejemplos:

Desarrollar $(x+4)^2$.

Cuadrado del primero. . . . . x^2
Doble del primero por el segundo. . . . . $2x \times 4 = 8x$
Cuadrado del segundo 16

Desarrollar $(4a+5b^2)^2$. ⟶
Cuadrado del 1°. . . . . $(4a)^2=16a^2$
Doble del 1° por el 2°. . . . . $2\times 4a\times 5b^2=40ab^2$
Cuadrado del 2° . . . . $(5b^2)^2=25b^4$

Luego $(4a+5b^2)^2=16a^2+40ab^2+25b^4$ **R.**

Las operaciones, que se han detallado para mayor facilidad, *no deben escribirse sino verificarse mentalmente*.

Efectuar $(7ax^4+9y^5)(7ax^4+9y^5)$.

$(7ax^4+9y^5)(7ax^4+9y^5)=(7ax^4+9y^5)^2=49a^2x^8+126ax^4y^5+81y^{10}$ **R.**

$(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x)(3y)+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2.$

Cuadrado de la diferencia de dos cantidades

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad menos el doble de la primera cantidad por la segunda más el cuadrado de la segunda cantidad, cabe recalcar que elevar al cuadrado no es lo mismo que el doble. Si los signos del binomio son distintos, el doble del primero por el segundo es negativo.

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Desarrollar $(x-5)^2$.

$$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25 \quad \textbf{R.}$$

Efectuar $(4a^2 - 3b^3)^2$.

$$(4a^2 - 3b^3)^2 = 16a^4 - 24a^2b^3 + 9b^6 \quad \textbf{R.}$$

$$(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2.$$

Cubo de un binomio

El cubo de la suma de dos números es igual al cubo del primer número, más el triple del producto del cuadrado del primer número por el cuadrado del segundo, más el triple del producto del primer número por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo.

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

$$\begin{aligned}(2x^2+4y^3)^3 &= (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2(4y^3) + 3(2x^2)(4y^3)^2 + (4y^3)^3 \\ &= 4x^6 + 48x^4y^3 + 96x^2y^6 + 64y^9.\end{aligned}$$

También el cubo del binomio se presenta en cubo de su diferencia lo que se realizará es tener en cuenta los signos de cada uno de los términos del polinomio y realizar las operaciones de cada uno siendo elevación al exponente y multiplicación, cabe recalcar que elevar al cubo no es lo mismo que el triple.

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.$$

$$(30-3x^2)^3 = (30)^3 - 3(30)^2(3x^2) + 3(30)(3x^2)^2 - (3x^2)^3$$
$$= 27.000 - 8.100x^2 + 810x^4 - 27x^6.$$

Desarrollar $(a+1)^3$.

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2(1) + 3a(1^2) + 1^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \quad \textbf{R.}$$

Desarrollar $(x-2)^3$.

$$(x-2)^3 = x^3 - 3x^2(2) + 3x(2^2) - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 \quad \textbf{R.}$$

Desarrollar $(4x+5)^3$.

$$(4x+5)^3 = (4x)^3 + 3(4x)^2(5) + 3(4x)(5^2) + 5^3 = 64x^3 + 240x^2 + 300x + 125 \quad \textbf{R.}$$

Trinomio al cuadrado

Un trinomio al cuadrado es igual al cuadrado del primero, más el cuadrado del segundo, más el cuadrado del tercero, más el doble producto del primero por el segundo, más el doble producto del primero por el tercero, más el doble producto del segundo por el tercero. Es sumamente importante tener presentes las leyes de signos al momento de resolver este trinomio ya que al ser varias operaciones las que se deben realizar, al fallar un signo el resultado será distinto al esperado.

$$(A+B+C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

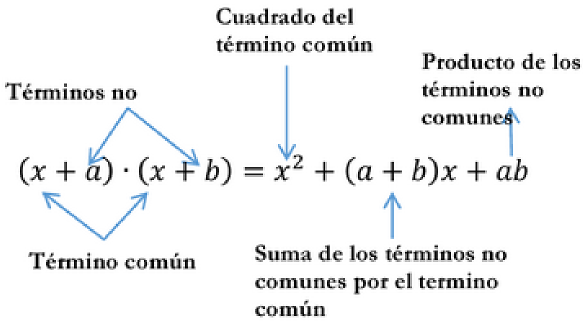
$$(x^2+x+3)^2 = (x^2)^2 + x^2 + 3^2 + 2\cdot x^2 \cdot x + 2\cdot x^2\cdot 3 + 2\cdot x\cdot 3$$
$$= x^4 + x^2 + 9 + 2x^3 + 6x^2 + 6x$$
$$= x^4 + 2x^3 + 7x^2 + 6x + 9$$

Producto de dos binomios de la forma (x + a) (x + b)

La multiplicación de dos binomios con un término en común es de la forma (x + a).(x + b) donde a y b son constantes.

Resulta: $(x+a)\cdot(x+b) = x^2 + bx + ax + ab = x^2 + (a+b)x + ab$

Figura 4. El producto de dos expresiones con un término común.



Nota. Imagen obtenida de: (Morales Urbina, 2019).

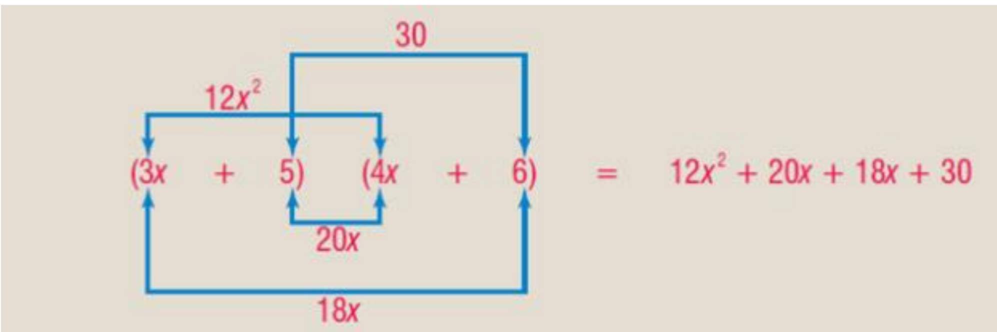
Multiplicar $(x + 7)(x - 2)$.
Coeficiente del segundo término . . . . $7 - 2 = 5$
Tercer término. . . . . $7 \times (-2) = -14$
luego $(x + 7)(x - 2) = x^2 + 5x - 14$ **R.**

Efectuar $(x - 7)(x - 6)$.
Coeficiente del 2º término . . . . $(-7) + (-6) = -13$
Tercer término. . . . . $(-7) \times (-6) = +42$
luego $(x - 7)(x - 6) = x^2 - 13x + 42$ **R.**

Los pasos intermedios deben suprimirse y el producto escribirse de manera directa sin las operaciones intermedias.

Producto de dos binomios de la forma (mx + a) (nx + b)

El producto de dos binomios de esta forma, en los cuales los términos en x tienen distintos coeficientes, puede hallarse fácilmente siguiendo los pasos que se indican en el siguiente esquema. Sea, hallar el producto de $(3x + 5)(4x + 6)$:



Reduciendo los términos semejantes tenemos: $12x^2 + 38x + 30$ **R.**

Para la clase resolver los ítems: 6, 8, 13, 27, 29, 30, 37.

De tarea se propone resolver los ítems: 4, 10, 16, 20, 25, 32, 38.

Las respuestas a las que se debe llegar se encuentran en la siguiente imagen:

MISCELÁNEA **68** **Ejercicio**

Escribir, por simple inspección, el resultado de:

1. $(x+2)^2$
2. $(x+2)(x+3)$
3. $(x+1)(x-1)$
4. $(x-1)^2$
5. $(n+3)(n+5)$
6. $(m-3)(m+3)$
7. $(a+b-1)(a+b+1)$
8. $(1+b)^3$
9. $(a^2+4)(a^2-4)$
10. $(3ab-5x^2)^2$
11. $(ab+3)(3-ab)$
12. $(1-4ax)^2$
13. $(a^2+8)(a^2-7)$
14. $(x+y+1)(x-y-1)$
15. $(1-a)(a+1)$
16. $(m-8)(m+12)$
17. $(x^2-1)(x^2+3)$
18. $(x^3+6)(x^3-8)$
19. $(5x^3+6m^4)^2$
20. $(x^4-2)(x^4+5)$
21. $(1-a+b)(b-a-1)$
22. $(a^x+b^n)(a^x-b^n)$
23. $(x^{a+1}-8)(x^{a+1}+9)$
24. $(a^2b^2+c^2)(a^2b^2-c^2)$
25. $(2a+x)^3$
26. $(x^2-11)(x^2-2)$
27. $(2a^3-5b^4)^2$
28. $(a^3+12)(a^3-15)$
29. $(m^2-m+n)(n+m+m^2)$
30. $(x^4+7)(x^4-11)$
31. $(11-ab)^2$
32. $(x^2y^3-8)(x^2y^3+6)$
33. $(a+b)(a-b)(a^2-b^2)$
34. $(x+1)(x-1)(x^2-2)$
35. $(a+3)(a^2+9)(a-3)$
36. $(x+5)(x-5)(x^2+1)$
37. $(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)$
38. $(a+2)(a-3)(a-2)(a+3)$

Factorización

Teoría:

Se llaman factores o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión. Así, multiplicando a por a + b tenemos:

$$a(a+b)=a^2+ab$$

Descomponer en factores o factorizar una expresión algebraica es convertirla en el producto indicado de sus factores (Ocaña & Pérez, 2010)

.

FACTORIZAR UN MONOMIO

Los factores de un monomio se pueden hallar por simple inspección. Así, los factores de 15ab son 3, 5, a y b. Por tanto:

15a b = 3 . 5 .a. b

FACTORIZAR UN POLINOMIO

No todo polinomio se puede descomponer en dos o más factores distintos de 1, pues del mismo modo que, en aritmética, hay números primos que sólo son divisibles entre ellos mismos y entre 1, hay expresiones algebraicas que sólo son divisibles entre ellas mismas y entre 1, y que, por tanto, no son el producto de otras expresiones algebraicas. así a + b no puede descomponerse en dos factores distintos de 1 porque sólo es divisible entre a + b y entre 1.

FACTOR COMÚN

Comenzamos con el tipo de factorizaciones que resultan de usar la propiedad distributiva. En *ab* + *ac* encontramos que es un factor que aparece en cada una de los sumandos; un factor así se llama ***factor común***.

$$ab + ac = a\,(b + c)$$

$$a^2 + 2a = a(a + 2)$$

$$10b - 30ab^2 = 10b(1 - 3ab)$$

$$10a^2 - 5a + 15a^3 = 5a(2a - 1 + 3a^2)$$

$$6xy^3 - 9nx^2y^3 + 12nx^3y^3 - 3n^2x^4y^3 = 3xy^3(2 - 3nx + 4nx^2 - n^2x^3)$$

$$x(a + b) + m(a + b) = (a + b)\ (x + m)$$

$$2x(x + y + z) - x - y - z = 2x(x + y + z) - (x + y + z) = (x + y + z)(2x - 1)$$

$$\begin{aligned}(x + 2)(x - 1) - (x - 1)(x - 3) &= (x - 1)[(x + 2) - (x - 3)]\\ &= (x - 1)(x + 2 - x + 3) = (x - 1)(5) = 5(x - 1) \quad \textbf{R.}\end{aligned}$$

(Baldor, 2016)

Factor común por agrupación de términos.

$$\begin{aligned}ax + bx + ay + by &= (ax + bx) + (ay + by)\\ &= x(a + b) + y\,(a + b)\\ &= (a + b)(x + y) \quad \textbf{R.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3xy - 4x + 6y &= (2x^2 - 3xy) - (4x - 6y) \\ &= x(2x - 3y) - 2(2x - 3y) \\ &= (2x - 3y)(x - 2) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3ax - 3x + 4y - 4ay &= (3ax - 3x) + (4y - 4ay) \\ &= 3x(a - 1) + 4y(1 - a) \\ &= 3x(a - 1) - 4y(a - 1) \\ &= (a - 1)\,(3x - 4y) \quad \textbf{R.} \end{aligned}$$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Una cantidad es cuadrado perfecto cuando es el cuadrado de otra cantidad, o sea, cuando es el producto de dos factores iguales. Un trinomio ordenado en relación con una letra es cuadrado perfecto cuando el primero y tercero términos son cuadrados perfectos (o tienen raíz cuadrada exacta) y positivos, y el segundo término es el doble producto de sus raíces cuadradas (Baldor, 2016).

Así, $a^2 - 4ab + 4b^2$ es cuadrado perfecto porque:

Raíz cuadrada de a^2. . . . . a
Raíz cuadrada de $4b^2$. . . . . $2b$

Doble producto de estas raíces: $2 \times a \times 2b = 4ab$, segundo término.

$36x^2 - 18xy^4 + 4y^8$, no es cuadrado perfecto porque:

Raíz cuadrada de $36x^2$. . . . . $6x$
Raíz cuadrada de $4y^8$. . . . . $2y^4$

Doble producto de estas raíces: $2 \times 6x \times 2y^4 = 24xy^4$, que no es el segundo término.

(Baldor, 2016)

Factorizar $m^2 + 2m + 1$.

$$\underset{m}{m^2} + 2m + \underset{1}{1} = (m + 1)(m + 1) = (m + 1)^2$$

Descomponer $4x^2 + 25y^2 - 20xy$.

Ordenando el trinomio, tenemos:

$$\underset{2x}{4x^2} - 20xy + \underset{5y}{25y^2} = (2x - 5y)(2x - 5y) = (2x - 5y)^2 \quad \textbf{R.}$$

Descomponer $a^2 + 2a(a - b) + (a - b)^2$.

La regla anterior puede aplicarse a casos en que el primer o tercer términos del trinomio o ambos son expresiones compuestas. Así, en este caso se tiene:

$$a^2 + 2a(a - b) + \underset{(a-b)}{(a - b)^2} = [a + (a - b)]^2 = (a + a - b)^2 = (2a - b)^2 \quad \textbf{R.}$$

DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS

En los productos notables se vio que la suma de dos cantidades multiplicadas por su diferencia es igual al cuadrado del minuendo menos el cuadrado del sustraendo, o sea, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$; luego, recíprocamente:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Se extrae la raíz cuadrada al minuendo y al sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

Factorizar $1 - a^2$.

La raíz cuadrada de 1 es 1; la raíz cuadrada de a^2 es a. Multiplico la suma de estas raíces $(1 + a)$ por la diferencia $(1 - a)$ y tendremos:

$$1 - a^2 = (1 + a)(1 - a) \quad \textbf{R.}$$

(Baldor, 2016)

Descomponer $\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9}$.

La raíz cuadrada de $\frac{a^2}{4}$ es $\frac{a}{2}$ y la raíz cuadrada de $\frac{b^4}{9}$ es $\frac{b^2}{3}$. Tendremos:

$$\frac{a^2}{4} - \frac{b^4}{9} = \left(\frac{a}{2} + \frac{b^2}{3}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{b^2}{3}\right) \quad \textbf{R.}$$

(Baldor, 2016)

Factorizar $(a+b)^2 - c^2$.

La regla empleada en los ejemplos anteriores es aplicable a las diferencias de cuadrados en que uno o ambos cuadrados son expresiones compuestas.

Así, en este caso, tenemos:

La raíz cuadrada de $(a+b)^2$ es $(a+b)$.
La raíz cuadrada de c^2 es c.

Multiplico la suma de estas raíces $(a+b)+c$ por la diferencia $(a+b)-c$ y tengo:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 - c^2 &= [(a+b)+c][(a+b)-c]\\ &= (a+b+c)(a+b-c) \quad \textbf{R.}\end{aligned}$$

COMBINACIÓN DE CASOS

Factorizar $a^2 + 2ab + b^2 - 1$.

Aquí tenemos que $a^2 + 2ab + b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto; luego:

$$\begin{aligned}a^2 + 2ab + b^2 - 1 &= (a^2 + 2ab + b^2) - 1\\ \text{(factorizando el trinomio)} &= (a+b)^2 - 1\\ \text{(factorizando la diferencia de cuadrados)} &= (a+b+1)(a+b-1) \quad \textbf{R.}\end{aligned}$$

Factorizar $9a^2 - x^2 + 2x - 1$.

Introduciendo los tres últimos términos en un paréntesis precedido del signo $-$ para que x^2 y 1 se hagan positivos, tendremos:

$$\begin{aligned}9a^2 - x^2 + 2x - 1 &= 9a^2 - (x^2 - 2x + 1)\\ \text{(factorizando el trinomio)} &= 9a^2 - (x-1)^2\\ \text{(factorizando la diferencia de cuadrados)} &= [3a + (x-1)][3a - (x-1)]\\ &= (3a + x - 1)(3a - x + 1) \quad \textbf{R.}\end{aligned}$$

TRINOMIO CUADRADO PERFECTO POR ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Factorizar $x^4 + x^2y^2 + y^4$.
Veamos si este trinomio es cuadrado perfecto. La raíz cuadrada de x^4 es x^2; la raíz cuadrada de y^4 es $y^2 y$ el doble producto de estas raíces es $2x^2y^2$; luego, este trinomio no es cuadrado perfecto (Baldor, 2016).

Para que sea cuadrado perfecto hay que lograr que el 2^0 término x^2y^2 se convierta en $2x^2y^2$ lo cual se consigue sumándole x^2y^2, pero para que el trinomio no varíe hay que restarle la misma cantidad que se suma, $x^2y^2 y$ tendremos:

$$\begin{array}{l} x^4 + \quad x^2y^2 + y^4 \\ \underline{\quad + \; x^2y^2 \qquad - x^2y^2} \\ x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2y^2 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) - x^2y^2 \end{array}$$

$$\text{(factorizando el trinomio cuadrado perfecto)} = (x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$$

$$\text{(factorizando la diferencia de cuadrados)} = (x^2 + y^2 + xy)\,(x^2 + y^2 - xy)$$

$$\text{(ordenando)} = (x^2 + xy + y^2)\,(x^2 - xy + y^2)$$

(Baldor, 2016)

FACTORIZAR UNA SUMA DE DOS CUADRADOS

En general, una suma de dos cuadrados no tiene descomposición en factores racionales, es decir, factores en que no haya raíz, pero hay sumas de cuadrados que, sumándoles y restándoles una misma cantidad, pueden llevarse al caso anterior y descomponerse. (Baldor, 2016)

Factorizar $a^4 + 4b^4$.
La raíz cuadrada de a^4 es a^2; la de $4b^4$ es $2b^2$. Para que esta expresión sea un trinomio cuadrado perfecto hace falta que su segundo término sea $2 \times a^2 \times 2b^2 = 4a^2b^2$. Entonces, igual que en los casos anteriores, a la expresión $a^4 + 4b^4$ le sumamos y restamos $4a^2b^2$ y tendremos:

$$\begin{array}{l} a^4 \qquad\qquad + 4b^4 \\ \underline{\quad + 4a^2b^2 \qquad - 4a^2b^2} \\ a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4) - 4a^2b^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (a^2 + 2b^2 + 2ab)\,(a^2 + 2b^2 - 2ab) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2) \quad \textbf{R.} \end{array}$$

TRINOMIO DE LA FORMA: $x^2 + bx + c$

Trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ son trinomios como

$$x^2 + 5x + 6, \qquad m^2 + 5m - 14,$$
$$a^2 - 2a - 15, \qquad y^2 - 8y + 15$$

Cumplen las condiciones siguientes:

1) El coeficiente del primer término es 1.

2) El primer término es una letra cualquiera elevada al cuadrado.

3) El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente 1 y su coeficiente es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

4) El tercer término es independiente de la letra que aparece en el 1o. y 2o. términos y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

Factorizar $x^2 + 5x + 6$.
El trinomio se descompone en dos binomios cuyo primer término es la raíz cuadrada de x^2 o sea x:

$$x^2 + 5x + 6 \qquad (x \quad)(x \quad)$$

En el primer binomio después de x se pone signo + porque el segundo término del trinomio $+5x$ tiene signo +. En el segundo binomio, después de x, se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de $+5x$ por el signo de $+6$ y se tiene que + por + da + o sea:

$$x^2 + 5x + 6 \qquad (x + \quad)(x + \quad)$$

Ahora, como en estos binomios tenemos signos iguales buscamos dos números que cuya suma sea 5 y cuyo producto sea 6. Esos números son 2 y 3, luego:

$$x^2 + 5x + 6 = (x + 2)(x + 3) \quad \textbf{R.}$$

Factorizar $x^2 - 7x + 12$.
Tendremos: $\qquad x^2 - 7x + 12 \qquad (x - \quad)(x - \quad)$

En el primer binomio se pone – porque $-7x$ tiene signo –.
En el segundo binomio se pone – porque multiplicando el signo de $-7x$ por el signo de $+ 12$ se tiene que: – por + da –.
Ahora, como en los binomios tenemos signos iguales buscamos dos números *cuya suma* sea 7 y *cuyo producto* sea 12. Estos números son 3 y 4, luego:

$$x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4) \quad \textbf{R.}$$

Factorizar $x^2 - 5x - 14$.

Tenemos: $x^2 - 5x - 14 \quad (x - \quad)(x + \quad)$

En el primer binomio se pone – porque –5x tiene signo –.
En el segundo binomio se pone + porque multiplicando el signo de $-5x$ por el signo de –14 se tiene que – por – da +.
Ahora como en los binomios tenemos signos *distintos* se buscan dos números cuya diferencia sea 5 y cuyo producto sea 14.
Estos números son 7 y 2. El *mayor* 7, se escribe en el primer binomio y se tendrá:

$$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2) \quad \textbf{R.}$$

Factorizar $x^4 - 5x^2 - 50$.
El primer término de cada factor binomio será la raíz cuadrada de x^4 o sea x^2:

$$x^4 - 5x^2 - 50 \quad (x^2 - \quad)(x^2 + \quad)$$

Buscamos dos números cuya *diferencia* (signos distintos en los binomios) sea 5 y cuyo *producto* sea 50. Esos números son 10 y 5. Tendremos:

$$x^4 - 5x^2 - 50 = (x^2 - 10)(x^2 + 5) \quad \textbf{R.}$$

Factorizar $x^6 + 7x^3 - 44$.
El primer término de cada binomio será la raíz cuadrada de x^6 o sea x^3.
Aplicando las reglas tendremos:

$$x^6 + 7x^3 - 44 = (x^3 + 11)(x^3 - 4) \quad \textbf{R.}$$

TRINOMIO DE LA FORMA: $ax^2 + bx + c$

Son trinomios de esta forma:

$$\begin{aligned} 2x^2 &+ 11x + 5 \\ 3a^2 &+ 7a - 6 \\ 10n^2 &- n - 2 \\ 7m^2 &- 23m + 6 \end{aligned}$$

Se diferencian de los trinomios estudiados en el caso anterior en que el primer término tiene un coeficiente distinto de 1.

Factorizar $20x^2 + 7x - 6$.
Multiplicando el trinomio por 20, tendremos: $(20x)^2 + 7(20x) - 120$.
Descomponiendo este trinomio, tenemos: $(20x + 15)\ (20x - 8)$.
Para cancelar la multiplicación por 20, tenemos que dividir entre 20, pero como ninguno de los dos binomios es divisible entre 20, descomponemos el 20 en 5×4 y dividiendo el factor $(20x + 15)$ entre 5 y $(20x - 8)$ entre 4 tendremos:

$$\frac{(20x+15)(20x-8)}{5\times 4} = (4x+3)(5x-2)$$

Luego: $20x^2 + 7x - 6 = (4x + 3)\ (5x - 2)$ **R.**

Bibliografía

Caicedo, S., & Portilla, H. (2020). *Fundamento de Matemáticas Generales.* Editorial Universidad de Nariño.

Espinoza, E. (2005). *Matemática Básica.* Lima.

Instituto de Ciencias Matemáticas - ICM. (2006). *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS - Para Bachillerato.* Guayaquil: ICM-ESPOL.

Johnsonbaugh, R. (2005). *Matemáticas discretas.* México: PEARSON EDUCACIÓN.

López, M. (2019). *Conjuntos, Lógica y Funciones.* México.

Ramos, M., Baquerizo, G., & Carrión, A. (2017). *Fundamentos de Matemáticas para Bachillerato.* ESPOL-FCNM.

Salinas, G. (2011). *Álgebra Superior.* Riobamba: ESPOCH.

Serway, R., & Jetwett, J. (2018). *Física para ciencias e ingeniería 1* (10 ed.). México: Cengage Learning.

Young, H., & Freedman, R. (2018). *Física universitaria con física moderna 1.* México: Pearson Educación.