

Inecuaciones Exponenciales

Las inecuaciones exponenciales en una incógnita son de la forma:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \vee a^{f(x)} < a^{g(x)}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son expresiones en x , $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$.

Para resolver estas inecuaciones, se consideran dos casos:

1° CASO.- Si $a > 1$, entonces los exponentes de la inecuación dada son desiguales en el mismo sentido prefijado, es decir:

$$\begin{array}{l} \text{Si } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \\ \text{Si } a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \end{array}$$

2° CASO.- Si $0 < a < 1$, entonces los exponentes de la inecuación dada son desiguales en sentido contrario al prefijado, es decir:

$$\begin{array}{l} \text{Si } a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x) \\ \text{Si } a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x) \end{array}$$

Inecuaciones Irracionales

Las inecuaciones irracionales en una incógnita son de la forma:

$$F(x, \sqrt{P_2(x)}, \sqrt[3]{P_3(x)}, \dots, \sqrt[n]{P_n(x)}) > 0 \quad \text{ó} \quad F(x, \sqrt{P_2(x)}, \sqrt[3]{P_3(x)}, \dots, \sqrt[n]{P_n(x)}) < 0$$

donde $P_2(x), P_3(x), \dots, P_n(x)$ son monomios o polinomios diferentes de cero.

Para que la solución de la inecuación sea válida debe resolverse antes la condición $P_i(x) \geq 0$, $i = 2, 3, \dots, n$ en las expresiones con una radical par, cuyo conjunto solución constituirá el universo o dentro del cuál se resuelve la inecuación dada. Debe observarse que $\sqrt{P(x)}$, quiere decir, $(+\sqrt{P(x)})$ y si se desea la raíz negativa se escribirá expresamente como $(-\sqrt{P(x)})$; es decir:

$$\text{i) } \forall P(x) \geq 0, \quad \sqrt{P(x)} \geq 0$$

$$\text{ii) } \sqrt{P(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$$

para resolver las inecuaciones radicales se debe tener en cuenta las siguientes propiedades:

$$\textcircled{1} \quad 0 \leq x \leq y \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \qquad \textcircled{2} \quad 0 < x < y \Leftrightarrow 0 < \sqrt{x} < \sqrt{y}$$

$$\textcircled{3} \quad 0 \leq x < y \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{x} < \sqrt{y}$$

$$\textcircled{4} \quad \text{i) Si } n \text{ es un entero positivo par.}$$

$$a_1) \quad \forall P(x) \geq 0 \quad \therefore \sqrt[n]{P(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0$$

$$a_2) \quad \sqrt[n]{P(x)} = 0 \Leftrightarrow P(x) = 0$$

$$a_3) \quad \sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow 0 \leq P(x) \leq Q(x)$$

$$b_1) \quad \sqrt[n]{P(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0$$

$$b_2) \quad \sqrt[n]{P(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) < 0$$

$$b_3) \quad \sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \leq Q(x)$$

Las propiedades $b_1)$, $b_2)$ indican que $\sqrt[n]{P(x)}$ tienen el mismo signo que $P(x)$ si n es impar.

OBSERVACIÓN.- Cuando en una expresión existen k radicales par entonces se calculan los universos relativos $U_1, U_2, \dots, U_k$ para cada radical y el universo general será $U = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$.

1° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)} > Q(x)$. La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} > Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \leq 0 \vee (P(x) \geq 0 \wedge P(x) > Q^2(x))])$$

b) $\sqrt{P(x)} \geq Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow [P(x) \geq 0 \wedge (Q(x) \leq 0 \vee [P(x) \geq 0 \wedge P(x) \geq Q^2(x)])]$$

2° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)} < Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} < Q(x) \Leftrightarrow [(P(x) \geq 0 \wedge (Q(x) > 0 \wedge P(x) < Q^2(x)))]$$

b) $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} \leq Q(x) \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \leq Q^2(x)]$$

3° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

a) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0 \Rightarrow P(x) > 0 \wedge Q(x) > 0$$

b) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0 \Rightarrow P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0$$

1° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)} > Q(x)$. La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} > Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \leq 0 \vee (P(x) \geq 0 \wedge P(x) > Q^2(x))])$$

$$\sqrt{P(x)} \leq Q(x) \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \leq Q^2(x)]$$

3° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

a) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0 \Rightarrow (P(x) \geq 0 \wedge Q(x) > 0) \vee (P(x) > 0 \wedge Q(x) \geq 0)$$

b) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0 \Rightarrow P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0$$

4° Para la inecuación irracional de la forma:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq K, \quad K > 0; \text{ La solución se obtiene así:}$$

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq K \Rightarrow [(P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0) \wedge P(x) \geq (K - \sqrt{Q(x)})^2]$$

5° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0; \text{ La solución se obtiene así:}$$

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0 \Rightarrow P(x) = 0 \wedge Q(x) = 0$$

OBSERVACION.-

Consideremos otros casos más generales.

1° Caso.- Si n es impar positivo mayor que uno.

$$\text{a) } \frac{P(x) \sqrt[n]{Q(x)}}{R(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{P(x) \cdot Q(x)}{R(x)} \geq 0$$

$$\text{b) } \frac{P(x)}{R(x) \sqrt[n]{Q(x)}} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{P(x)}{R(x) Q(x)} \leq 0$$

$$\text{c) } \sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \leq Q(x)$$

2° Caso.- Si n es par positivo

a) $\sqrt[n]{P(x)Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0$

b) $\sqrt[n]{P(x)Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \leq 0$

c) $\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)R(x)}} \geq 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0 \wedge \frac{P(x)}{R(x)} \geq 0$

d) $\frac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)R(x)}} \leq 0 \Leftrightarrow Q(x) > 0 \wedge \frac{P(x)}{R(x)} \leq 0$

e) $\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) < 0 \vee (Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \geq Q^n(x))])$

f) $\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x) \Leftrightarrow P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \leq Q^n(x)]$

OBSERVACIÓN.- Si n es un numero positivo impar, entonces:

① $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \leq Q(x)$ ② $\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) < Q(x)$

③ $\sqrt[n]{P(x)} \geq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) \geq Q(x)$ ④ $\sqrt[n]{P(x)} > \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow P(x) > Q(x)$

OBSERVACIÓN.- Si n es un numero positivo par, entonces:

① $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow 0 \leq P(x) \leq Q(x)$ ② $\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)} \Leftrightarrow 0 \leq P(x) < Q(x)$

Valor Absoluto

① $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

② $|a| = b \Leftrightarrow [b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)]$

③ $|a| = |b| \Leftrightarrow a = b \vee a = -b$

④ Si $b > 0$, entonces:

i) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$

ii) $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$

⑤ Si $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica

i) $|a| > b \Leftrightarrow a > b \vee a < -b$

ii) $|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$

⑥ i) $|a| = \sqrt{a^2}$

ii) $|a|^2 = a^2$