Tema 1: LÓGICA MATEMÁTICA

Resultados de aprendizaje

- Comprende los conceptos matemáticos a través del pensamiento lógico para la solución de problemas cotidianos.

La lógica

Lógica es el estudio de los procesos válidos del razonamiento humano. En la actualidad, el estudio serio de cualquier tema tanto en el campo de las Humanidades como el de las ciencias y la técnica requieren conocer los fundamentos y métodos del razonamiento lógico preciso que permite al estudiante o profesional extraer y depurar las conclusiones evitando el riesgo de modificar en forma equivocada la información que posee. Esto es aún más en esta era de la computación, herramienta que es empleada en todos los campos del desarrollo de una sociedad y con la velocidad a la cual se procesan los datos cualquier error de lógica puede originar problemas técnicos, sociales y económicos (Espinosa Ramos).

Definición y Notación de Proposición

Llamaremos proposiciones lógicas a todo enunciado abierto que pueden ser calificado como verdaderas o bien como falsas, sin ambigüedades. Las proposiciones lógicas serán denotadas generalmente con letras minúsculas p, q, r, t, etc. (Espinoza, 2005) (Espinosa Ramos).

Ejemplos. Determine cuales de las siguientes oraciones son proposiciones.

a. 13 es un número par.

b. Rodrigo Borja fue presidente de Ecuador.

c. ¿Qué hora es?

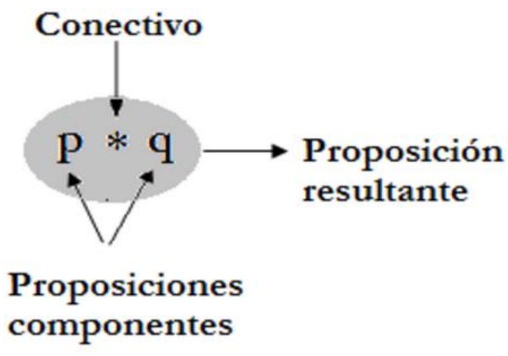
d. x+3=5

Solución, Las oraciones a y b son proposiciones, ya que ellas pueden calificarse como falsa y verdadera respectivamente. En el caso de a se tiene la definición de número par y en el caso de b se tiene la información documentada de los presidentes de la república. En cambio, las oraciones c y d no son proposiciones pues no pueden calificarse ni de verdaderas ni de falsas. En el caso de la c es una interrogación y en el caso de la d se desconoce el valor de x, de cuyo valor depende que la expresión sea verdadera o falsa. La verdad o falsedad de algunas oraciones es relativa, es decir, dependen del contexto y el momento determinado en que se hagan las afirmaciones, del criterio utilizado para calificarlas o de las personas que hagan las calificaciones.(Vargas Villegas & Núñez, 2019)

Operadores o conectivos lógicos

Los operadores o conectivos lógicos son **enlaces** usados para combinar una o más proposiciones, de tal forma que se obtenga como resultado otra proposición llamada compuesta o molecular, cuyo valor de verdad estará determinado por los valores de verdad de las proposiciones que la componen y los conectivos usados.(Vargas Villegas & Núñez, 2019)

Figura 1. Ilustración del uso de un conectivo cualquiera para obtener una proposición compuesta



Nota: Obtenido de: Lógica matemática y teoría de conjuntos Vargas Villegas E, Núñez L, 2019, pág. 21.

Proposiciones simples o atómicas

En una proposición que no contiene ningún conectivo lógico (Espinoza, 2005).

6 es par

2 + 5= 7

Proposiciones compuestas básicas o moleculares

Es una proposición que contiene al menos un conectivo lógico (Espinoza, 2005)

7 es primo y 2 es par.

Si 7 es par entonces 2 es impar.

Mediante los conectivos lógicos se pueden combinar cualquier número finito de proposiciones cuyos valores de verdad pueden ser conocidos, construyendo su tabla de verdad, en dicha tabla se puede indicar los valores resultantes de estas proposiciones compuestas.

Valor de verdad

Se llama valores de verdad de una proposición a sus dos valores posibles; verdadero o falso (Espinosa Ramos).

Tabla de verdad

Una representación de los posibles valores de verdad que podrían tomar una o más variables proposicionales (Ramos, Baquerizo, & Carrión, 2017).

p	¬ p
F	V
V	F

p	q	p ∧ q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	q	p ∨ q
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Obtenido de: https://rea.ceibal.edu.uy/elp/3ógica-para-informatica/TablasFinales.png

Negación

Dado una proposición P, llagaremos la negación de P, a otro proposición que denotaremos por ~P o dependiendo el autor ⌐P, y que se le asigna el valor opuesto a P, y su tabla de verdad es:

p	¬p
V	F
F	V

Dada la proposición:

p: Quito es la capital de Ecuador (Es verdad).

¬p: Quito no es la capital de Ecuador.

q: 10 es múltiplo de 3 (es falsa)

¬q: 10 no es múltiplo de 3.

Conjunción

Sean p y q dos proposiciones, la conjunción de p y q, que se escribe p ∧ q (se lee "p y q"), es otra proposición; es verdadera si p es verdadera y q es verdadera. La tabla de verdad de p ∧ q es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Consideremos las siguientes afirmaciones:

p: 7 es par,

q: Santiago es la capital de Chile.

La conjunción de las proposiciones p y q, a saber, 7 es par y Santiago es la capital de Chile,

es falsa pues p es falsa (el 7 no es un número par). No importa que q sea verdadera (sabemos que es verdad que Santiago es la capital de Chile). Para que la conjunción de dos proposiciones sea verdadera es necesario que las dos proposiciones sean verdaderas (López, 2019).

Para que la conjunción $p \wedge q$ de dos proposiciones sea verdadera es necesario que las dos lo sean.

Disyunción

Sean p y q dos proposiciones, la disyunción de p y q, que se escribe $p \vee q$ (se lee "p o q"), es otra proposición; es verdadera si p es verdadera o q es verdadera, o ambas lo son. La tabla de verdad de $p \vee q$ es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Consideremos las mismas afirmaciones del ejemplo anterior.

p: 7 es par.

q: Santiago es la capital de Chile.

La disyunción de las proposiciones p y q, a saber,

$p \vee q$: 7 es par o Santiago es la capital de Chile,

es verdadera pues, aunque p es falsa (el 7 no es par) sucede que q si es verdadera pues sabemos que es verdad que Santiago es la capital de Chile.

Para que sea verdadera la disyunción $p \vee q$ de dos proposiciones basta que una de las dos, sea p o sea q, sea verdadera.

Disyunción exclusiva

Sean p y q dos proposiciones, la disyunción excluyente de p y q, que se denota con p $\underline{\vee}$ q y se lee "una de dos, p o q", es otra proposición; es verdadera cuando p es verdadera o q es verdadera, pero no ambas.

Si p $\underline{\vee}$ q es verdadera tenemos que p es verdadera o q es verdadera, y es falso que p es verdadera y q es verdadera.

Es decir, p $\underline{\vee}$ q tiene el mismo valor de verdad que:

$$(p \vee q) \wedge (\neg(p \wedge q)).$$

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Si p y q son las siguientes proposiciones, p: 20 es múltiplo de 5,

q: 20 es par, enuncia las proposiciones ¬p, p ∧ q, p ∨ q, p Y q y di cuál es su valor de verdad.

Ejemplo: Tenemos que p es verdadera pues, en efecto, el número 20 es múltiplo de 5 porque 20 = 5 × 4. Asimismo q es verdadera pues 20 = 2 × 10. Entonces

$\neg p$: 20 no es múltiplo de 5,	es falsa.
$p \wedge q$: 20 es múltiplo de 5 y es par,	es verdadera.
$p \vee q$: 20 es múltiplo de 5 o es par,	es verdadera.
$p \veebar q$: 20 es, una de dos, múltiplo de 5 o es par,	es falsa.

(López, 2019)

Condicional

La condicional de dos proposiciones simples es una proposición compuesta que se forma anteponiéndole a la primera proposición la partícula "si", y enlazando la primera con la segunda con la palabra "entonces". (Vargas Villegas & Núñez, 2019)

Si p y q son dos proposiciones simples, la condicional de p y q (simbolizada $p \rightarrow q$, y que se lee "Si p, entonces a"). (Tinoco del Valle et al., 2023)

Según Espinoza Ramos, (2005) las proposiciones que relaciona este operador también se le puede llamar de las siguientes maneras, según la siguiente tabla.

Tabla 1. Tabla de nombres de las proposiciones de la operación de la condicional

p $\longrightarrow$	q
Antecedente	Consecuente
Premisa	Conclusión
Hipótesis	Tesis

Obtenido de: Matemática Básica, Espinoza Ramos, 2005, pág.: 7.

Ejemplo 1. Sean h: Todos los jóvenes critican a sus padres y k: Todos los jóvenes son rebeldes. Entonces la condicional será: h —> k: Si todos los jóvenes critican a sus padres, todos los jóvenes son rebeldes.

Tabla de verdad de la condicional

La condicional de dos proposiciones únicamente es falsa cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa, como se observa en la tabla a continuación (Tinoco del Valle et al., 2023):

Tabla 2. Tabla de verdad de la condicional

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Obtenido de: Obtenido de: Lógica matemática y teoría de conjuntos Vargas Villegas E, Núñez L, 2019, pág. 45.

Bicondicional

En el lenguaje corriente, el bicondicional de dos proposiciones simples es una proposición compuesta que se forma enlazando las dos proposiciones con la expresión **"si, y solamente si"**, u otra expresión equivalente.(Tinoco del Valle et al., 2023)

Si p y q son dos proposiciones simples, el bicondicional o condicional doble entre p y q (simbolizada p↔ q, y que se lee "p si, y solamente si, q" o sencillamente "p si, y solo si, q").(Tinoco del Valle et al., 2023)

Ejemplo 1. Si a: ABC es un triángulo equilátero y b: ABC es un triángulo equiángulo. Entonces: a↔ b: ABC es un triángulo equilátero si, y solamente si, ABC es un triángulo equiángulo.

Ejemplo 2. Si S: El Sol es una estrella y v: La Vía Láctea es una galaxia. Entonces: s↔ v: El Sol es una estrella si, y solo si, la Vía Láctea es una galaxia.

Según Tinoco del Valle et al., (2023), para el bicondicional de dos proposiciones también se utilizan los enlaces **"siempre y cuando"** o "es condición necesaria y suficiente para" o, en no pocas ocasiones, agregándole a la condicional directa la expresión: "Y si no, no".

Tabla de verdad del bicondicional

Para el bicondicional de dos proposiciones es verdadera cuando ellas tienen el mismo valor de verdad, cómo se puede observar en la siguiente tabla.

Tabla 3. Tabla de verdad del bicondicional

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Obtenido de: Obtenido de: Lógica matemática y teoría de conjuntos Vargas Villegas E, Núñez L, 2019, pág. 47.

Conjunción negativa

Se nota: p↓q, se lee ni p, ni q o (no p y no q). La proposición compuesta es verdadera únicamente cuando las 2 proposiciones relacionadas son falsas. Cómo se puede observar en la siguiente tabla.(Salinas Jaramillo, 2003)

Tabla 4. Tabla de verdad de la conjunción negativa

p	q	p↓q
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Nota: Obtenido de: http://lgicaepn.blogspot.com/2011/12/logica-matematica.html

Orden de los operadores lógicos

La prioridad de los signos de agrupación, se toma de afuera hacia adentro. Cuando no hay signos de agrupación, la prioridad de los conectivos para determinar la proposición es la siguiente: $\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \vee, \wedge, \sim$. (Caicedo & Segundo, 2020)

Cálculo proposicional

Tautología

En el lenguaje corriente, una tautología es un enunciado que siempre es verdadero, independiente de los valores de verdad de las proposiciones simples que lo componen. (Tinoco del Valle et al., 2023)

La forma más simple de probar que una proposición compuesta es una tautología es construyendo la tabla de verdad. (Vargas Villegas & Núñez, 2019)

Ejemplo. Determine si la siguiente proposición compuesta es una tautología.

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

Solución. En la proposición compuesta existen 2 diferentes proposiciones, por lo que la tabla tiene $2^2=4$ filas y 6 columnas:

Tabla 5. Tabla de verdad del ejemplo de tautología

p	q	p→q	~p	~p∨q	(p→q)↔(~p∨q)
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

Nota: Obtenido de: Lógica matemática y teoría de conjuntos Vargas Villegas E, Núñez L, 2019, pág. 52.

Con la tabla de verdad del problema realizado se puede decir que la proposición compuesta es una tautología.

Contradicción

Si se tienen solamente proposiciones falsas para todos los valores de verdad de las variables proposicionales, se dice que es una CONTRADICCIÓN. (Baquerizo et al., 2006)

Ejemplo. Determine si la siguiente proposición es una contradicción.

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

Solución. Se debe construir la tabla de verdad del problema.

Tabla 6. Tabla de verdad del ejemplo de contradicción

p	q	~q	p∧~q	p→q	(p→q)↔(p∧~q)
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

Nota: Obtenido de: Obtenido de: Lógica matemática y teoría de conjuntos Vargas Villegas E, Núñez L, 2019, pág. 52.

Con la tabla de verdad del problema realizado se puede decir que la proposición compuesta es una contradicción.

Contingencia

Si se tienen algunas proposiciones verdaderas y otras falsas para los valores de verdad de las variables proposicionales, se dice que es una CONTINGENCIA. (Baquerizo et al., 2006)

Ejemplo. La proposición $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim r$, es una contingencia.

Tabla 7. Tabla de verdad del ejemplo de contingencia

p	q	r	(~q)	(p^(~q))	(~r)	(((p^(~q)))→(~r))
F	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	V

Nota: Obtenido de: Introducción a la lógica matemática, Tinoco del Valle et al, 2023, pág. 83.

Implicación

Es una tautología, cuya fórmula que tiene como conector principal un condicional. Un ejemplo de esta puede ser la fórmula:

$$(p \wedge q) \rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$(p$	$\wedge$	$q)$	$\rightarrow$	$\neg$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
V	V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V	F
F	F	F	V	V	V	F	V

Equivalencia

Es una tautología cuya fórmula tiene como operador principal un bicondicional. Por ejemplo, la fórmula $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$, es una tautología tipo equivalencia, pues su fórmula tiene como operador principal un bicondicional.

$\neg$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\neg p$	$\vee$	$\neg q)$
F	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	V	V

Leyes del álgebra de proposiciones

El algebra proposicional se utiliza para convertir proposiciones compuestas en otras equivalentes, o también para demostrar tautologías o contradicciones. Las leyes que se van a usar durante este curso se pueden observar en la figura siguiente.

1° LOS TRES PRINCIPIOS LÓGICOS CLÁSICOS.-

1. Ley de identidad.

$\begin{cases} p \longrightarrow p \\ p \longleftrightarrow p \end{cases}$ "una proposición sólo son idénticos así mismo"

2. Ley no contradicción.

$\sim(p \wedge \sim p)$ "una proposición no puede ser verdadero y falso a la vez"

3. Ley del Tercio excluído.

$p \vee \sim p$ "una proposición es verdadero o es falso no hay una tercera posibilidad"

2° EUIVALENCIAS NOTABLES.-

1. Ley de la doble negación.

$\sim(\sim p) \equiv p$ "la negación de la negación es una afirmación"

2. Ley de la Idempotencia.

a) $p \wedge p \equiv p$ b) $p \vee p \equiv p$

3. Leyes conmutativas.

a) $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ b) $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$

c) $p \longleftrightarrow q \equiv q \longleftrightarrow p$

4. Leyes Asociativa.

a) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ b) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

c) $p \longleftrightarrow (q \longleftrightarrow r) \equiv (p \longleftrightarrow q) \longleftrightarrow r$

5. Leyes Distributivas.

a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ b) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

c) $p \longrightarrow (q \wedge r) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (p \longrightarrow r)$

d) $p \longrightarrow (q \vee r) \equiv (p \longrightarrow q) \vee (p \longrightarrow r)$

6. Leyes De Morgan.

a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ b) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

7. Leyes del Condicional.

a) $p \longrightarrow q \equiv \sim p \vee q$ b) $\sim(p \longrightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

8. Las Leyes del Bicondicional.-

a) $(p \longleftrightarrow q) \equiv (p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$

b) $(p \longleftrightarrow q) \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \vee \sim q)$

(9) Leyes De La Absorción.

a) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ b $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

c) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ d $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$

(10) Leyes De Transposición.

a) $(p \longrightarrow q) \equiv \sim q \longrightarrow \sim p$ b) $(p \longleftrightarrow q) \equiv \sim q \longleftrightarrow \sim p$

(11) Leyes De Exportación.

a) $(p \wedge q) \longrightarrow r \equiv p \longrightarrow (q \longrightarrow r)$

b) $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \longrightarrow r \equiv (p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_{n-1}) \longrightarrow (p_n \longrightarrow r)$

(12) Elementos Neutros para la Conjunción y Disyunción.

a) $p \wedge V \equiv p$, V neutro de la conjunción.

b) $p \vee F \equiv p$, F neutro de la Disyunción.

(13) También:

a) $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p$ b) $(p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \equiv p$

Obtenido de: (Espinoza, 2005)

Estas Leyes son muy útiles para simplificar los problemas, puesto que es válido reemplazar una proposición por su equivalente sin alterar el resultado. (Espinoza, 2005)

Bibliografía

Caicedo, S., & Portilla, H. (2020). *Fundamento de Matemáticas Generales.* Editorial Universidad de Nariño.

Espinoza, E. (2005). *Matemática Básica.* Lima.

Instituto de Ciencias Matemáticas - ICM. (2006). *FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS - Para Bachillerato.* Guayaquil: ICM-ESPOL.

López, M. (2019). *Conjuntos, Lógica y Funciones.* México.

Ramos, M., Baquerizo, G., & Carrión, A. (2017). *Fundamentos de Matemáticas para Bachillerato.* ESPOL-FCNM.