4.6 Velocidad y aceleración relativas

En esta sección se describe cómo se relacionan las observaciones realizadas por diferentes observadores en distintos marcos de referencia. Un marco de referencia se describe mediante un sistema coordenado cartesiano para el cual un observador está en reposo en relación con el origen.

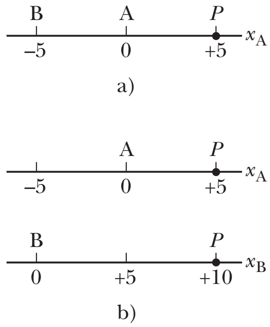


Figura 4.18 Diferentes observadores realizan distintas mediciones. a) El observador A se ubica en el origen y el observador B está en una posición de -5. Ambos observadores miden la posición de una partícula en *P*. b) Si ambos observadores se ven ellos mismos en el origen de su propio sistema coordenado, no estarán de acuerdo con el valor de la posición de la partícula en *P*.

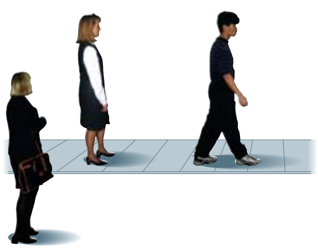


Figura 4.19 Dos observadoras miden la rapidez de un hombre que camina sobre una banda transportadora. La mujer que está de pie sobre la banda ve al hombre moverse con una rapidez más lenta que la mujer que lo observa desde una posición fija.

Establezca conceptos de una situación modelo en la que habrá distintas observaciones para diferentes observadores. Considere a los dos observadores A y B a lo largo de la recta numérica de la figura 4.18a. El observador A se ubica en el origen de un eje x_A unidimensional, mientras que el observador B está en la posición $x_A = -5$. La variable de posición se indica como x_A porque el observador A está en el origen de este eje. Ambos observadores miden la posición del punto *P*, que se ubica en $x_A = +5$. Suponga que el observador B decide que él se ubica en el origen de un eje x_B como en la figura 4.18b. Advierta que los dos observadores discrepan acerca del valor de la posición del punto *P*. El observador A afirma que el punto *P* se ubica en una posición con un valor de $+5$, mientras que el observador B afirma que se ubica en una posición con un valor de $+10$. Ambos observadores están en lo correcto, aun cuando hagan diferentes mediciones. Sus observaciones difieren porque realizan las mediciones desde diferentes marcos de referencia.

Imagine ahora que el observador B en la figura 4.18b se mueve hacia la derecha a lo largo del eje x_B. Ahora las dos mediciones son incluso más diferentes. El observador A afirma que el punto *P* permanece en reposo en una posición con un valor de $+5$, mientras que el observador B afirma que la posición de *P* cambia continuamente con el tiempo, ¡que incluso lo pasa a él y se mueve más allá de donde él está! De nuevo, ambos observadores están en lo correcto, y la diferencia en sus observaciones surge de sus diferentes marcos de referencia.

Este fenómeno se explora aún más al considerar dos observadoras que miran a un hombre caminar sobre una banda transportadora en un aeropuerto en la figura 4.19. La mujer que está de pie en la banda transportadora ve que el hombre anda con una rapidez normal. La mujer que observa desde una posición fija ve al hombre moverse con una rapidez mayor, porque la rapidez de la banda transportadora se combina con su rapidez al andar. Ambas observadoras miran al mismo hombre y llegan a diferentes valores para su rapidez. Ambas están en lo correcto; la diferencia en sus observaciones resulta de la velocidad relativa de sus marcos de referencia.

En una situación más general, considere una partícula ubicada en el punto *P* de la figura 4.20. Imagine que el movimiento de esta partícula lo describen dos observadores, A en un marco de referencia S_A fijo en relación con la Tierra y un segundo B en un marco de referencia S_B que se mueve hacia la derecha en relación con S_A (y debido a eso en relación con la Tierra) con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. En esta discusión de velocidad relativa, se usa una notación de doble subíndice: el primer subíndice representa lo que se observa y el segundo representa quién realiza la observación. En consecuencia, la notación $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ significa la velocidad del observador B (y el marco unido S_B) medido por el observador A. Con esta notación, el observador B mide a A como si estuviera en movimiento hacia la izquierda con una velocidad $\vec{\mathbf{v}}_{AB} = -\vec{\mathbf{v}}_{BA}$. Para propósitos de esta discusión, coloque a cada observador en su respectivo origen.

El tiempo $t = 0$ se define como el instante en que los orígenes de los dos marcos de referencia coinciden en el espacio. Por lo tanto, en el tiempo *t*, los orígenes de los marcos de referencia estarán separados una distancia $v_{BA}t$. La posición *P* de la partícula en relación con el observador A se marca con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ y en relación con el observador B con el vector de posición $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$, ambos en el tiempo *t*. A partir de la figura 4.20 se ve que los vectores $\vec{\mathbf{r}}_{PA}$ y $\vec{\mathbf{r}}_{PB}$ se relacionan mutuamente a partir de la expresión

$$\vec{\mathbf{r}}_{PA} = \vec{\mathbf{r}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}t \tag{4.19}$$

Al derivar la ecuación 4.19 respecto del tiempo, y notar que $\vec{\mathbf{v}}_{BA}$ es constante, se obtiene

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PA}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}_{PB}}{dt} + \vec{\mathbf{v}}_{BA}$$

Transformación de velocidad galileana ►

$$\vec{\mathbf{u}}_{PA} = \vec{\mathbf{u}}_{PB} + \vec{\mathbf{v}}_{BA} \tag{4.20}$$

donde $\vec{\mathbf{u}}_{PA}$ es la velocidad de la partícula en *P* medida por el observador A y $\vec{\mathbf{u}}_{PB}$ es su velocidad medida por B. (El símbolo $\vec{\mathbf{u}}$ se usa para velocidad de partícula en lugar de $\vec{\mathbf{v}}$, que se usa para velocidad relativa de dos marcos de referencia.) Las ecuaciones 4.19 y 4.20 se conocen como **ecuaciones de transformación galileanas**. Relacionan la posición y velocidad de una partícula según las miden los observadores en movimiento relativo. Advierta el patrón de los subíndices en la ecuación 4.20. Cuando se suman velocidades relativas, los subíndices internos (B) son lo mismos y los exteriores (P, A) igualan los subíndices de la velocidad en el lado izquierdo de la ecuación.

Aunque los observadores en dos marcos miden diferentes velocidades para la partícula, miden la *misma aceleración* cuando $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{BA}}$ es constante. Se puede verificar que, al tomar la derivada en el tiempo de la ecuación 4.20,

$$\frac{d\vec{\mathbf{u}}_{P\mathrm{A}}}{dt} = \frac{d\vec{\mathbf{u}}_{P\mathrm{B}}}{dt} + \frac{d\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{BA}}}{dt}$$

Puesto que $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{BA}}$ es constante, $d\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{BA}}/dt = 0$. Por tanto, se concluye que $\vec{\mathbf{a}}_{P\mathrm{A}} = \vec{\mathbf{a}}_{P\mathrm{B}}$ porque $\vec{\mathbf{a}}_{P\mathrm{A}} = d\vec{\mathbf{u}}_{P\mathrm{A}}/dt$ y $\vec{\mathbf{a}}_{P\mathrm{B}} = d\vec{\mathbf{u}}_{P\mathrm{B}}/dt$. Esto es, **la aceleración de la partícula medida por un observador en un marco de referencia es la misma que la medida por cualquier otro observador que se mueva con velocidad constante en relación con el primer marco.**

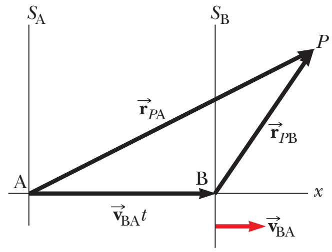


Figura 4.20 Una partícula ubicada en P es descrita por dos observadores, uno en el marco de referencia fija S_{A} y el otro en el marco S_{B}, que se mueve hacia la derecha con una velocidad constante $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{BA}}$. El vector $\vec{\mathbf{r}}_{P\mathrm{A}}$ es el vector de posición de la partícula en relación con S_{A} y $\vec{\mathbf{r}}_{P\mathrm{B}}$ es su vector de posición en relación con S_{B}.

EJEMPLO 4.8 **Un bote que cruza un río**

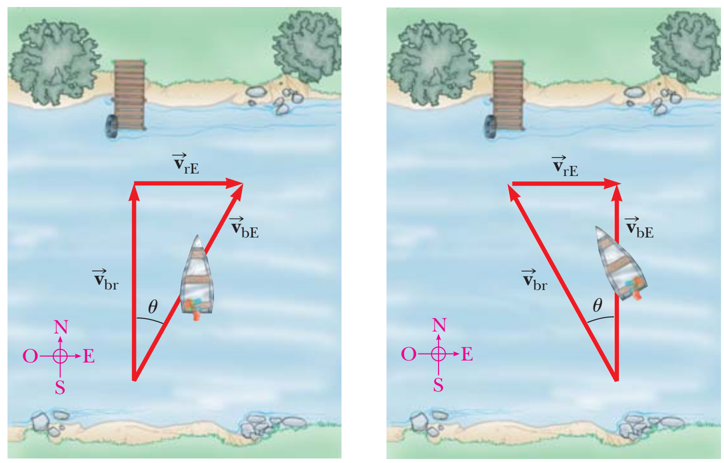
Un bote que cruza un río ancho se mueve con una rapidez de 10.0 km/h en relación con el agua. El agua en el río tiene una rapidez uniforme de 5.00 km/h hacia el este en relación con la Tierra.

A) Si el bote se dirige hacia el norte, determine la velocidad del bote en relación con un observador que está de pie en cualquier orilla.

SOLUCIÓN

Conceptualizar Imagine que se mueve a través de un río mientras lo empuja la corriente. No será capaz de moverse directamente a través del río, sino que terminará corriente abajo, como muestra la figura 4.21a.

Categorizar Debido a las velocidades independientes de usted y el río, es posible clasificar este problema como uno que involucra velocidades relativas.



a) b)

Figura 4.21 (Ejemplo 4.8) a) Un bote se dirige directamente a través de un río y termina corriente abajo. b) Para moverse directamente a través del río, el bote debe dirigirse corriente arriba.

Analizar Se conoce $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{br}}$, la velocidad del *bote* en relación con el *río*, y $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{rE}}$ la velocidad del *río* en relación con la *Tierra*. Lo que se debe encontrar es $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{bE}}$, la velocidad del *bote* respecto de la *Tierra*. La relación entre estas tres cantidades es $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{bE}} = \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{br}} + \vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{rE}}$. Los términos en la ecuación se deben manipular como cantidades vectoriales; los vectores se muestran en la figura 4.21. La cantidad $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{br}}$ es hacia el norte; $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{rE}}$ es hacia el este; y la suma vectorial de los dos, $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{bE}}$, está a un ángulo θ como se define en la figura 4.21a.

Encuentre la rapidez v_{bE} del bote en relación con la Tierra mediante el teorema de Pitágoras:

$$v_{\mathrm{bE}} = \sqrt{v_{\mathrm{br}}^2 + v_{\mathrm{rE}}^2} = \sqrt{(10.0 \text{ km/h})^2 + (5.00 \text{ km/h})^2}$$
$$= \boxed{11.2 \text{ km/h}}$$

Encuentre la dirección de $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{bE}}$:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{\mathrm{rE}}}{v_{\mathrm{br}}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{10.0}\right) = \boxed{26.6°}$$

Finalizar El bote se mueve con una rapidez de 11.2 km/h en la dirección 26.6° noreste en relación con la Tierra. Note que la rapidez de 11.2 km/h es más rápida que la rapidez del bote de 10.0 km/h. La velocidad de la corriente se suma a la suya para darle una mayor rapidez. Observe en la figura 4.21a que su velocidad resultante está a un ángulo con la dirección recta a través del río, así que terminará corriente abajo, como se predijo.

B) Si el bote viaja con la misma rapidez de 10.0 km/h en relación con el río y debe viajar al norte, como se muestra en la figura 4.21b, ¿hacia dónde se debe dirigir?

SOLUCIÓN

Conceptualizar/categorizar Esta pregunta es una extensión del inciso A), así que ya se tienen ideas y ya se clasificó el problema. Una característica nueva de la formación de conceptos es que ahora el bote se debe dirigir corriente arriba para ir recto a través del río.

Analizar Ahora el análisis involucra el nuevo triángulo que se muestra en la figura 4.21b. Como en el inciso A), se conoce $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{rE}}$ y la magnitud del vector $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{br}}$ y se quiere que $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{bE}}$ se dirija a través del río. Note la diferencia entre el triángulo de la figura 4.21a y el de la figura 4.21b: la hipotenusa de la figura 4.21b ya no es $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{bE}}$.

Aplique el teorema de Pitágoras para hallar $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{bE}}$:

$$v_{\mathrm{bE}} = \sqrt{v_{\mathrm{br}}{}^2 - v_{\mathrm{rE}}{}^2} = \sqrt{(10.0\ \mathrm{km/h})^2 - (5.00\ \mathrm{km/h})^2} = 8.66\ \mathrm{km/h}$$

Encuentre la dirección en la que se dirige el bote:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{\mathrm{rE}}}{v_{\mathrm{bE}}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.00}{8.66}\right) = \boxed{30.0^\circ}$$

Finalizar El bote se debe dirigir corriente arriba de modo que viaje directamente hacia el norte a través del río. Para la situación que se conoce, el bote debe dirigirse 30.0° al noroeste. Para corrientes más rápidas, el bote se debe dirigir corriente arriba en ángulos mayores.

¿Y si...? Considere que los dos botes de los incisos A) y B) compiten al cruzar el río. ¿Cuál bote llega primero a la orilla opuesta?

Respuesta En el inciso A), la velocidad de 10 km/h se dirige directamente a través del río. En el inciso B), la velocidad que se dirige a través del río tiene una magnitud de sólo 8.66 km/h. Por lo tanto, el bote del inciso A) tiene una componente de velocidad mayor directamente a través del río y llega primero.