UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

COORDINACIÓN DE ADMISIÓN Y NIVELACIÓN

www.unach.edu.ec

TEMA:

“FUNCIÓN DE VARIABLE REAL”

Autores: Sinaluisa Patricio

Morocho Tahiz

Chalan Jonnathan

Puenayan Jhoiner

Cachumba Roger

Grupo: Grupo 3

Curso: Nivelación ING “I”

Carrera: Ingeniería Industrial

Asignatura: Matemáticas

Período: 2022 - 2S (diciembre 2 022 – marzo 2 023)

Docente: Ing. Santiago Cruz, Mg.

Fecha: 2023 – 01 – 26

ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

FUNCIONES DE VARIABLE REAL

1. FUNCIONES PRINCIPALES DE VARIABLE REAL

1.1. Función identidad

Se denomina función identidad, porque a cada número del eje de las abscisas le corresponde el mismo número en el eje de ordenadas, es decir, que las dos coordenadas de cada punto son las mismas.

Una función identidad es aquella función que tiene como imagen el mismo valor que el argumento, la expresión matemática de la función identidad es: $f(x) = x$

La función identidad es un ejemplo de función lineal. La gráfica de la función identidad corresponde a una línea recta que es la bisectriz del primer y del tercer cuadrante. (Ruiz, 2019, p. 64)

Características de la función identidad:

- El dominio de la función identidad son todos los números reales:

$$Dom\ f = R$$

- El recorrido (o rango) de la función identidad también son todos los números reales:

$$Im\ f = R$$

- La función identidad se trata de una función continua y biyectiva.
- Además, la función identidad consiste en una función impar, lo que significa que es una función simétrica respecto el origen de coordenadas.

$$f(-x) = -f(x)$$

- La función identidad es creciente en todo su dominio, y su pendiente es igual a 1.

$$m = 1$$

- Corta el eje de las abscisas (eje OX) y el eje de las ordenadas (eje Y) en el mismo punto: el origen de coordenadas.

$$(0, 0)$$

- La función identidad actúa como elemento neutro de la composición de funciones. De manera que cualquier función compuesta con la función identidad da como resultado la propia función.

$$f \circ id = id \circ f = f$$

- El límite de la función identidad cuando x tiende a más infinito o menos infinito da como resultado más infinito y menos infinito respectivamente:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- La derivada de la función identidad es la función constante de valor 1:

$$f(x) = x \to f'(x) = 1$$

(Manfredi, 2008, p. 23)

Ejemplo:

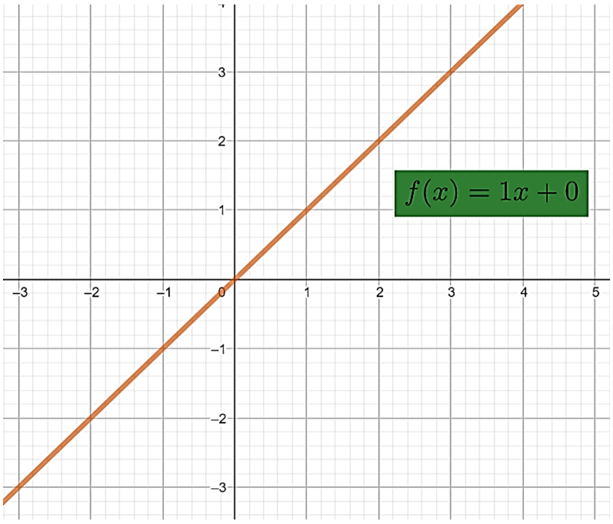
$$f(x) = 1x + 0$$

Tabla No. 1. Tabulación de los datos del ejemplo: $f(x) = 1x + 0$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = 1x + 0}$	$\boldsymbol{(x, y)}$
-2	$1(-2) + 0$	$(-2, -2)$
-1	$1(-1) + 0$	$(-1, -1)$
0	$1(0) + 0$	$(0,0)$
1	$1(1) + 0$	$(1,1)$
2	$1(2) + 0$	$(2,2)$

Fuente: (Manfredi, 2008)

Figura No. 1. Gráfico de la función $f(x) = 1x + 0$



Fuente: (Manfredi, 2008)

1.2. Función lineal

Es una función polinómica de grado 1 que pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0,0). Son funciones rectas de la forma: $f(x) = mx$

La m es la pendiente de la recta. La pendiente es la inclinación con respecto al eje "X" (eje de abscisas). Si m es positiva (m > 0), entonces la función es creciente. En cambio, si la m es negativa (m < 0), entonces la función es decreciente.

La pendiente m significa que, si aumentamos la "x" en una unidad, la "y" aumenta en m unidades. Si la m es positiva, según aumente la x la y también irá aumentando "función creciente". En cambio, si m es negativa, cuando aumenta la x la y disminuirá "función decreciente". (Zill, 2012, p. 218)

Su gráfica siempre pasa por el origen

- Una función lineal es un polinomio de primer grado sin término libre (constante)
- La gráfica es una recta que puede crecer o decrecer según la situación
- Si $m > 0$ la función es creciente y va del III al I cuadrante
- Si $m < 0$ la función es decreciente y va del II al IV cuadrante
- Su dominio y su rango coinciden con el conjunto de los números reales "R"
- Es una función continua (Stewart, 2004, p. 178)

Ejemplos:

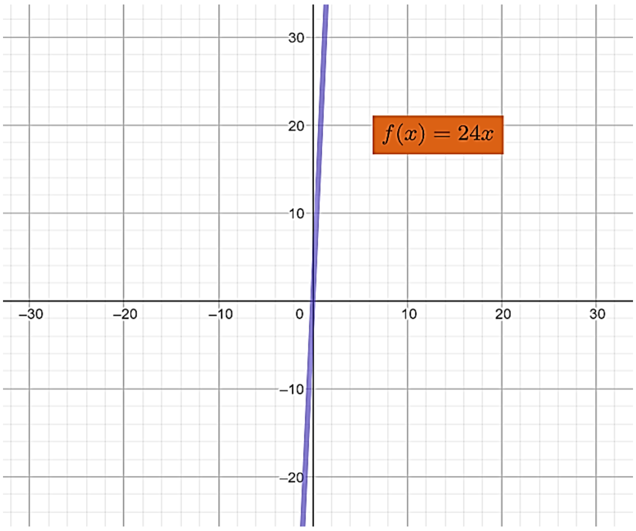
$f(x) = 24x$ $\qquad$ $f(x) = -12x$

Tabla No. 2. Tabulación de los datos del ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = 24x}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = 24x}$	$\boldsymbol{(x, y)}$
-2	$24(-2)$	$(-2, -48)$
-1	$24(-1)$	$(-1, -24)$
0	$24(0)$	$(0,0)$
1	$24(1)$	$(1,24)$
2	$24(2)$	$(2,48)$

Fuente: (Stewart, 2004)

Figura No. 2. Gráfico de la función $\boldsymbol{f(x) = 24x}$



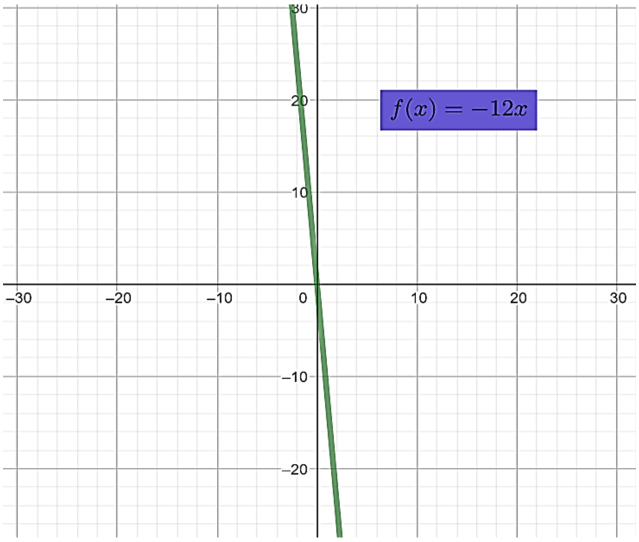
Fuente: (Stewart, 2004)

Tabla No. 3. Tabulación de los datos del ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = -12x}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{f(x) = -12x}$	$\boldsymbol{(x, y)}$
-2	$-12(-2)$	$(-2,24)$
-1	$-12(-1)$	$(-1,12)$
0	$-12(0)$	$(0,0)$
1	$-12(1)$	$(1,-12)$
2	$-12(2)$	$(2,-24)$

Fuente: (Stewart, 2004)

Figura No. 3. Gráfico de la función $\boldsymbol{f(x) = -12x}$



Fuente: (Stewart, 2004)

1.3. Función raíz cuadrada

Una raíz cuadrada es una operación matemática que va de la mano de las potencias, es decir, que el número que se encuentra en la raíz al descomponerlo se vuelve una ponencia.

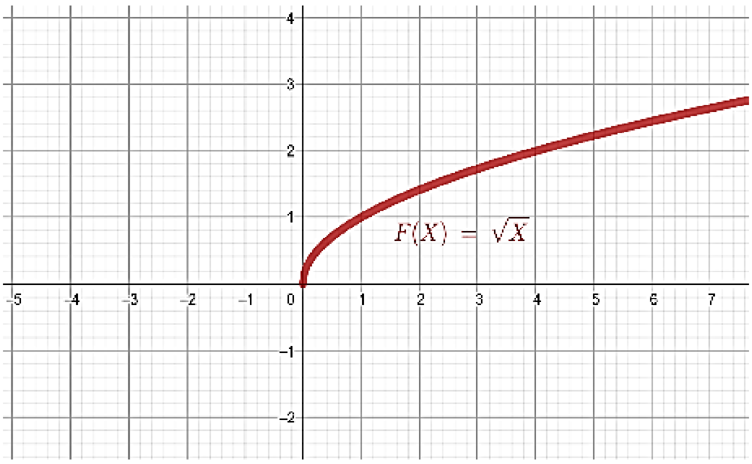
En otras palabras, dado un número real positivo, la raíz cuadrada encuentra otro número real positivo, por el cual multiplicado por sí mismo se obtiene el número dado.

- La representación de "Raíz Cuadrada de x" es: $f(x) = \sqrt{x}$
- Su dominio son todos los números reales positivos $= [0, \infty[= \mathrm{R}$
- El número del radicar nunca puede ser negativo porque no sería una función de raíz cuadrada.
- En el siguiente ejemplo se muestra que el número dentro del radical no debe ser negativo: $\sqrt{-25} = 5i$
- Esto es debido a que un número negativo da por resultado un número imaginario. (García, 2011, p. 172)

La función básica es:

$$y = \sqrt{x}$$

Figura No. 4. Gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$



Fuente: (García, 2011)

Ejemplo:

$$f(x) = \sqrt{x - 3} + 1$$

- Encontrar su dominio y su rango:

Dominio:

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 0 + 3$$

$$x \geq 3$$

$$Dominio: x = [3; \infty[$$

Rango:

$$x - 3 \geq 0$$

$$\sqrt{x - 3} \geq \sqrt{0}$$

$$\sqrt{x - 3} + 1 \geq 0 + 1$$

$$Y \geq 1$$

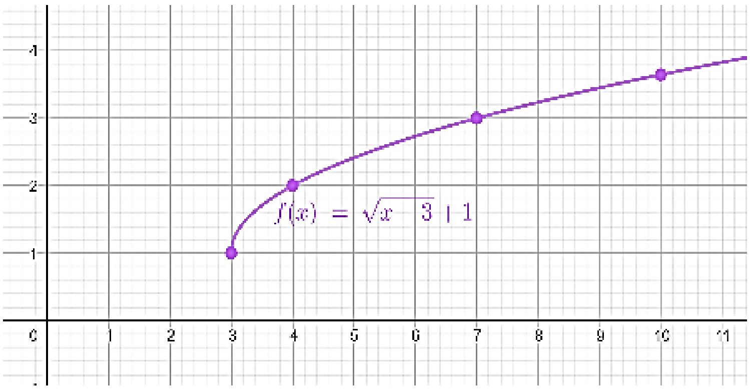
$$Rango: y = [1, \infty[$$

Tabla No. 4. Tabulación de los datos del ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x - 3} + 1}$

x	$f(x) = \sqrt{x - 3} + 1$	$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
3	$\sqrt{3 - 3} + 1$	$(3, 1)$
4	$\sqrt{4 - 3} + 1$	$(4, 2)$
7	$\sqrt{7 - 3} + 1$	$(7, 3)$
10	$\sqrt{10 - 3} + 1$	$(10, 4)$
12	$\sqrt{12 - 3} + 1$	$(12; 3{,}64)$

Fuente: (Universidad Nacional Autónoma de México, 2011)

Figura No. 5. Gráfico de la función $f(x) = \sqrt{x}$



Fuente: (Universidad Nacional Autónoma de México, 2011)

1.4. Función cuadrática

En álgebra, una función cuadrática, un polinomio cuadrático, o un polinomio de grado 2, es una función polinómica con una o más variables en la que el término de grado más alto es de segundo grado. Sean $a, b\ y\ c$ números reales con $a \neq 0$. La función dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ se llama función cuadrática.

- Si el signo es positivo → la función tendrá un mínimo en la "x" y, por tanto, será cóncava.
- Si el signo es negativo → la función tendrá un máximo en la "x", y por tanto será convexa. (Murillo, 2006, p. 18)

Ejemplo:

Sea la función : $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

Solución:

- Es una parábola con las ramas hacia arriba, porque $a = 1 > 0$
- El eje de simetría es la recta $x = \frac{-(-6)}{2*1} = 3$
- El vértice tiene por abscisa: $x_0 = 3$ y por ordenada: $y = 3^2 - 6 * 3 + 5 = -4$
- Entonces el vértice es el punto $(3, -4)$
- Para calcular los puntos de corte con el eje de abscisas hacemos: $x^2 - 6x + 5 = 0$
- Resolvemos y obtenemos:

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \begin{cases} = \frac{10}{2} = 5 \\ = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

- Entonces los puntos de corte son: $(5, 0)\ y\ \ (1, 0)$
- El punto de corte con el eje de ordenadas es $(0, 5)$. (Hostetler, 2008, p. 21)

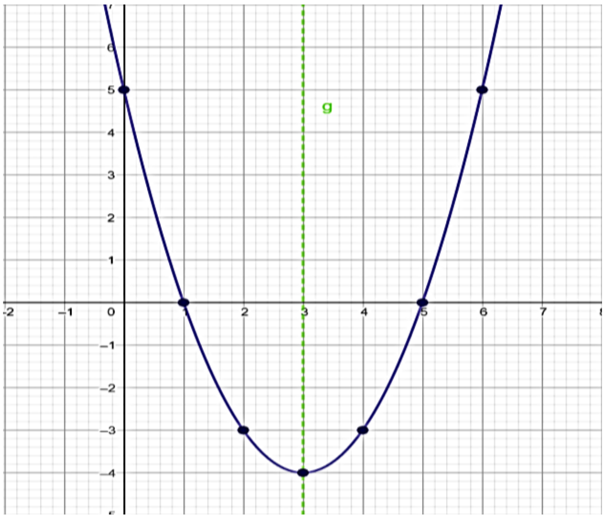
Tabla No. 5. Tabulación de los datos del ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 6x + 5}$

x	$f(x) = x^2 - 6x + 5$	$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
-2	$(-2)^2 - 6(-2) + 5$	$(-2, 21)$
-1	$(-1)^2 - 6(-1) + 5$	$(-1, 12)$
0	$(0)^2 - 6(0) + 5$	$(0, 5)$
1	$(1)^2 - 6(1) + 5$	$(1, 0)$
2	$(2)^2 - 6(2) + 5$	$(2, -3)$
3	$(3)^2 - 6(3) + 5$	$(3, -4)$

4	$(4)^2 - 6(4) + 5$	$(4, -3)$
5	$(5)^2 - 6(5) + 5$	$(5, 0)$
6	$(6)^2 - 6(6) + 5$	$(6, 5)$
7	$(7)^2 - 6(7) + 5$	$(7, 12)$

Fuente: (Hostetler, 2008)

Figura No. 6. Gráfico de la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$



Fuente: (Hostetler, 2008)

Ejemplo:

Sea la función : $f(x) = x^2 + 2x + 1$

Solución:

- El vértice es: $\left(-\frac{2}{2(1)}, 1 - \frac{2^2}{4(1)}\right) \rightarrow v = (-1{,}0)$
- Igualamos la función a cero y calculamos sus soluciones

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

- Obtenemos la solución $x = -1$
- Las intersecciones con el eje X es $(-1{,}0)$
- Punto de corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = 1$

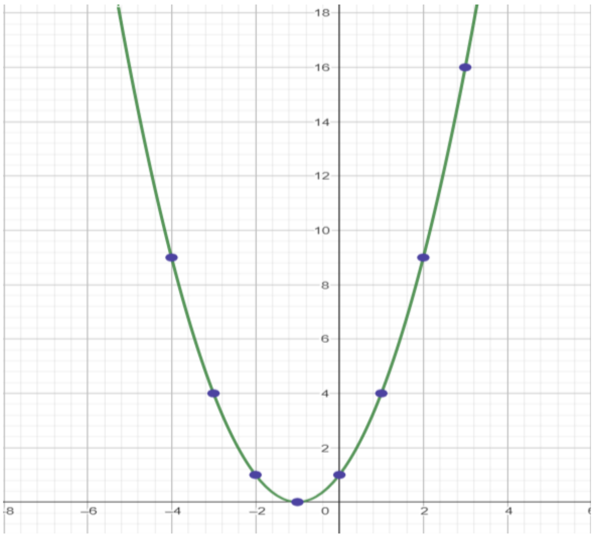
- Las intersección con el eje Y es $(0,1)$ (Hostetler, 2008, p. 22)

Tabla No. 6. Tabulación de los datos del ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = x^2 + 2x + 1}$

x	$f(x) = x^2 + 2x + 1$	$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
-4	$(-4)^2 + 2(-4) + 1$	$(-4,9)$
-3	$(-3)^2 + 2(-3) + 1$	$(-3,4)$
-2	$(-2)^2 + 2(-2) + 1$	$(-2,1)$
-1	$(-1)^2 + 2(-1) + 1$	$(-1,0)$
0	$(0)^2 + 2(0) + 1$	$(0,1)$
1	$(1)^2 + 2(1) + 1$	$(1,4)$
2	$(2)^2 + 2(2) + 1$	$(2,9)$
3	$(3)^2 + 2(3) + 1$	$(3,16)$
4	$(4)^2 + 2(4) + 1$	$(4,25)$
5	$(5)^2 + 2(5) + 1$	$(5,36)$

Fuente: (Hostetler, 2008)

Figura No. 7. Gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2\,x + 1$



Fuente: (Hostetler, 2008)

1.5. Función polinómica y racional

Una función polinómica es una función cuya expresión algebraica es un polinomio, es decir, una función polinómica está definida por la suma o resta de un número finito de términos de diferente grado. Por lo tanto, una función polinómica se describe matemáticamente con la siguiente expresión:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots . + a_nx^n$$

Características de la función polinómicas:

- El dominio de las funciones polinómicas son todos los números reales.
- Las funciones polinómicas son continuas en todo su dominio.
- Los exponentes (o índices) son positivos y enteros.
- Se llama grado de una función polinómica al mayor exponente de sus términos. Por ejemplo, el polinomio de la función del gráfico de arriba es de grado 3.
- Los diferentes a_i (a_0, a_1, …a_n), son números reales llamados coeficientes de un polinomio. (Besalú, 2021, p. 205)

Propiedades de las funciones polinómicas

- La gráfica de una función polinómica corta al eje Y en (0, a_0).
- Corta al eje X un número de veces igual o inferior al grado del polinomio n.
- El número de máximos y mínimos relativos de una función polinómica es, como mucho, el grado del polinomio menos 1 (n – 1).
- En las funciones polinómicas no existen asíntotas.
- El número de puntos de inflexión es igual o menor a n – 2.
- Si el grado de todos los términos fuese impar, la gráfica sería simétrica respecto al origen de coordenada. Pero si todos los términos tuviesen grado par, la gráfica sería simétrica respecto al eje OY.
- En la gráfica de una función polinómica, la rama de la derecha será creciente cuando el coeficiente del término de mayor grado, an, sea positivo. Y esa rama será decreciente cuando an sea negativo.
- En la gráfica, la rama de la izquierda será decreciente cuando se cumpla que el grado del polinomio n sea par y el coeficiente del término de mayor grado, an, sea negativo. También será decreciente la rama izquierda cuando n sea impar y, al mismo tiempo, a_n sea positivo. En el resto de los casos, la rama izquierda será siempre creciente (irá creciendo hacia arriba).

- La suma de dos funciones polinómicas es una función polinómica. Es decir: f(x)+g(x) es polinómica
- El producto de dos funciones polinómicas es una función polinómica. Es decir: f(x) · g(x) es polinómica.
- El producto de un escalar a y una función polinómica es una función polinómica. Es decir: a · g(x) es polinómica.
- La composición de dos funciones polinómicas es una función polinómica. Por tanto: f o g(x) es polinómica. (Besalú, 2021, p. 206)

Ejemplos:

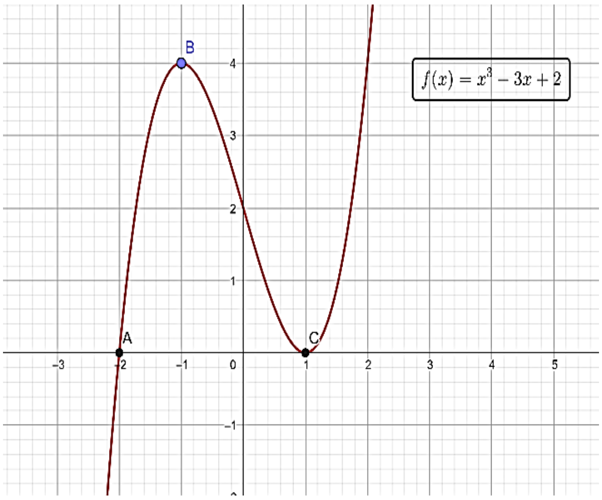
$$f(x) = x^3 + 3x + 2 \qquad\qquad f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2$$

Tabla No. 7. Tabulación de los datos del ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3x + 2}$

x	$f(x) = x^3 + 3x + 2$	$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
-2	$(-2)^3 + 3(-2) + 2$	$(-2, -12)$
-1	$(-1)^3 + 3(-1) + 2$	$(-1, 2)$
0	$(0)^3 + 3(0) + 2$	$(0, 2)$
1	$(1)^3 + 3(1) + 2$	$(1, 6)$
2	$(2)^3 + 3(2) + 2$	$(2, 16)$
3	$(3)^3 + 3(3) + 2$	$(3, 38)$

Fuente: (Besalú, 2021)

Figura No. 8. Gráfico de la función: $f(x) = x^3 + 3x + 2$



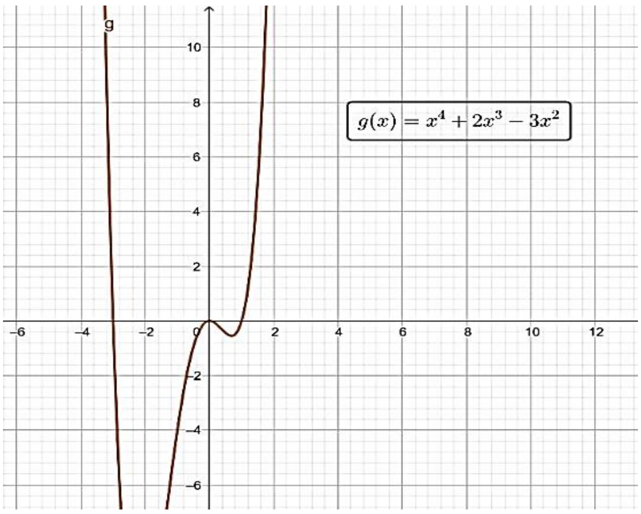
Fuente: (Besalú, 2021)

Tabla No. 8. Tabulación de los datos del ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2}$

x	$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2$	$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
-2	$(-2)^4 + 2(-2)^3 - 3(-2)^2$	$(-2, -12)$
-1	$(-1)^4 + 2(-1)^3 - 3(-1)^2$	$(-1, -4)$
0	$(0)^4 + 2(0)^3 - 3(0)^2$	$(0, 0)$
1	$(1)^4 + 2(1)^3 - 3(1)^2$	$(1, 0)$
2	$(2)^4 + 2(2)^3 - 3(2)^2$	$(2, 20)$
3	$(3)^4 + 2(3)^3 - 3(3)^2$	$(3, 108)$

Fuente: (Besalú, 2021)

Figura No. 9. Gráfico de la función: $f(x) = x^3 + 3x + 2$



Fuente: (Besalú, 2021)

Una función racional es aquella función formada por el cociente de dos polinomios, es decir, una función racional es una fracción que tiene un polinomio en el numerador y en el denominador. Las funciones racionales se caracterizan por tener singularidades en aquellos puntos en los que se anula el denominador.

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots . + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \cdots . + b_nx^n}$$

Una de las propiedades principales de las funciones racionales son sus asíntotas, ya que determinan su representación gráfica. Las asíntotas de una función racional son rectas a la cual la gráfica de la función se va acercando indefinidamente, pero nunca llega a tocarlas. Existen tres tipos de asíntotas: las asíntotas verticales, las asíntotas horizontales y las asíntotas oblicuas. (Rodríguez, 2013, p. 12)

Se pueden deducir algunas reglas de las asíntotas de las funciones racionales a partir del polinomio del numerador $P(x)$ y el polinomio del denominador $Q(x)$

- Una función racional tiene una asíntota vertical en los puntos que son raíces de $Q(x)$ pero que no son raíces de $P(x)$
- Si el grado de $P(x)$ es menor que el grado de $Q(x)$, la recta y=0 es una asíntota horizontal de la función racional.
- Si el grado de $P(x)$ es mayor que el grado de $Q(x)$, la función racional no tiene asíntota horizontal.
- Si el grado de $P(x)$ es una unidad mayor que el grado de $Q(x)$ y los dos polinomios no tienen ninguna raíz en común, la función racional tiene una asíntota oblicua.

Caracteristicas de las funciones racionales

- El dominio de las funciones racionales son todos los números reales, excepto aquellos valores que anulan el denominador de la fracción.
- En general, el recorrido (o rango) de una función racional son todos los números reales, menos aquellos valores en los que la función posee una asíntota horizontal.
- Las funciones racionales son continuas en todo su dominio.
- Las funciones racionales presentan discontinuidades en los puntos que no pertenecen a su dominio.
- La representación gráfica de la mayoría de funciones racionales son dos hipérbolas. (Rodríguez, 2013, pp. 13-15)

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x}$$

- Punto de corte en el eje "x"

$$\frac{x^2 - 9}{x} = 0$$

$$x^2 - 9 = 0\ (x)$$

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

Hemos obtenido dos soluciones de la ecuación de segundo grado, por tanto, la función racional corta con el eje de las abscisas en dos puntos distintos, que son: $(3{,}0)$ $(-3{,}0)$

- Punto de corte en el eje "y"

Para hallar el punto de corte con el eje Y debemos calcular: $f(0)$

$$f(0) = \frac{0^2 - 9}{0} = \frac{-9}{0} = \infty$$

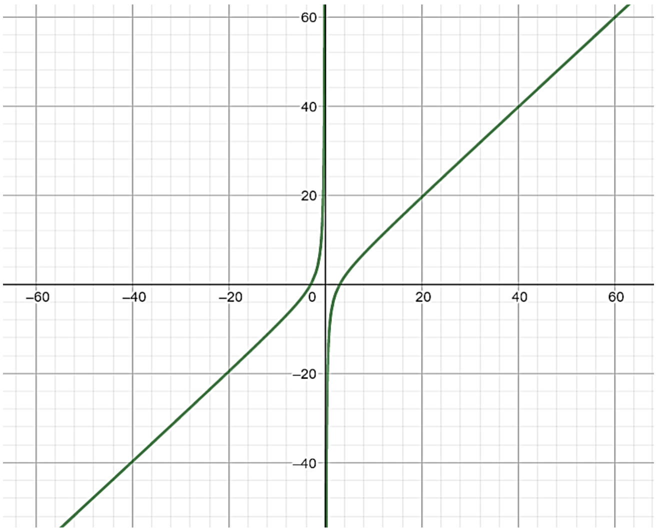
Cualquier número dividido entre cero es una indeterminación que da como resultado infinito. Por lo tanto, la función racional no pasa por encima del eje Y en ningún punto, es decir, no tiene ningún punto de corte con el eje de las ordenadas.

Tabla No. 9. Tabulación de los datos del ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2-9}{x}}$

x	$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x}$	$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
-2	$\frac{(-2)^2 - 9}{-2}$	$(-2;\ 2{,}5)$
-1	$\frac{(-1)^2 - 9}{-1}$	$(-1, 4\ )$
0	$\frac{0^2 - 9}{0}$	$Error$
1	$\frac{1^2 - 9}{1}$	$(1, -8)$
2	$\frac{2^2 - 9}{2}$	$(2; -2{,}5)$
3	$\frac{3^2 - 9}{3}$	$(3, 0)$

Fuente: (Rodríguez, 2013)

Figura No. 10. Gráfico de la función: $f(x) = \frac{x^2-9}{x}$



Fuente: (Rodríguez, 2013)

1.6. Función valor absoluto

La función real valor absoluto se define sobre el conjunto de todos los números reales asignando a cada número real su respectivo valor absoluto. Una función valor absoluto es una función que contiene los signos de valor absoluto. Algunas de las características más importantes de esta función es que tiene una reflexión con respecto al eje “y” y se ubica completamente encima del eje x.

Características de la función valor absoluto

- En su forma más básica, la función valor absoluto es f(x)=$|x|$
- Su dominio es todos los números reales
- Su rango es todos los números |R ≥ 0
- Su grafica se ubica completamente encima del eje y.
- Su gráfica es simétrica con respecto al eje y.
- El vértice de su gráfica es el punto (0, 0).

Traslación vertical: Podemos trasladar a la gráfica de$f(x) = |x|$ es verticalmente con la función $g(x) = f(x) + Kg(x) = f(x) + K$. (Guzmán, 2018, pp. 12-14)

Ejemplo:

$$f(x) = |x| \qquad g(x) = |x| + 2$$

Tabla No. 10. Tabulación de los datos de la función: $f(x) = |x|$

x	$f(x) = \|x\|$	(x, y)
-1	$\|-1\|$	(-1, 1)
-2	$\|-2\|$	(-2, 2)
0	$\|0\|$	(0, 0)
1	$\|1\|$	(1, 1)
2	$\|2\|$	(2, 2)

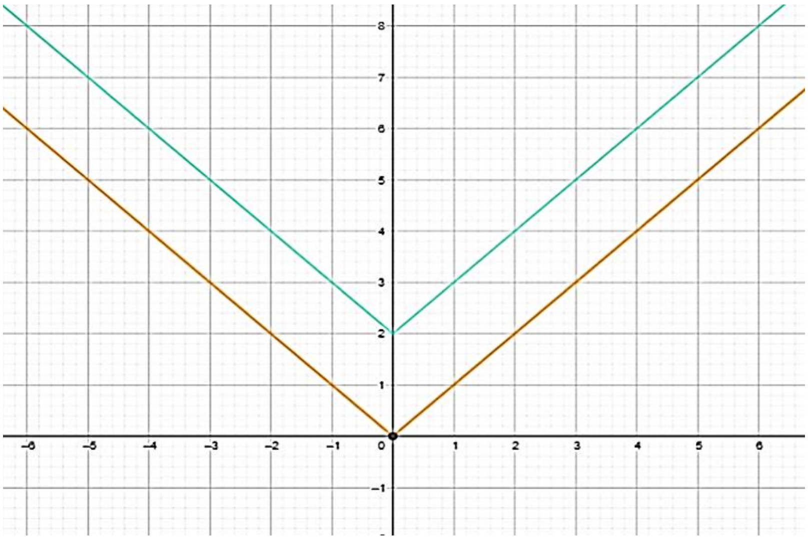
Fuente: (Guzmán, 2018)

Tabla No. 11. Tabulación de los datos de la función: $f(x) = |x| + 2$

x	$f(x) = \|x\| + 2$	(x, y)
-1	$\|-1\| + 2$	(-1, 3)
-2	$\|-2\| + 2$	(-2, 4)
0	$\|0\| + 2$	(0, 2)
1	$\|1\| + 2$	(1, 3)
2	$\|2\| + 2$	(2, 4)

Fuente: (Guzmán, 2018)

Figura No. 11. Gráfico de las funciones: $f(x) = |x| \quad f(x) = |x| + 2$



Fuente: (Guzmán, 2018)

Traslación horizontal: La gráfica de la función $f(x) = |x|$ se traslada horizontalmente al usar la función $g(x) = f(x + K)$. (Guzmán, 2018, p. 14)

Ejemplo:

$$f(x) = |x| \qquad g(x) = |x + 4|$$

Tabla No. 12. Tabulación de los datos de la función: $\boldsymbol{f(x) = |x|}$

x	$\boldsymbol{f(x) = |x|}$	$\boldsymbol{(x, y)}$
-1	$|-1|$	(-1, 1)
-2	$|-2|$	(-2, 2)
0	$|0|$	(0, 0)
1	$|1|$	(1, 1)
2	$|2|$	(2, 2)

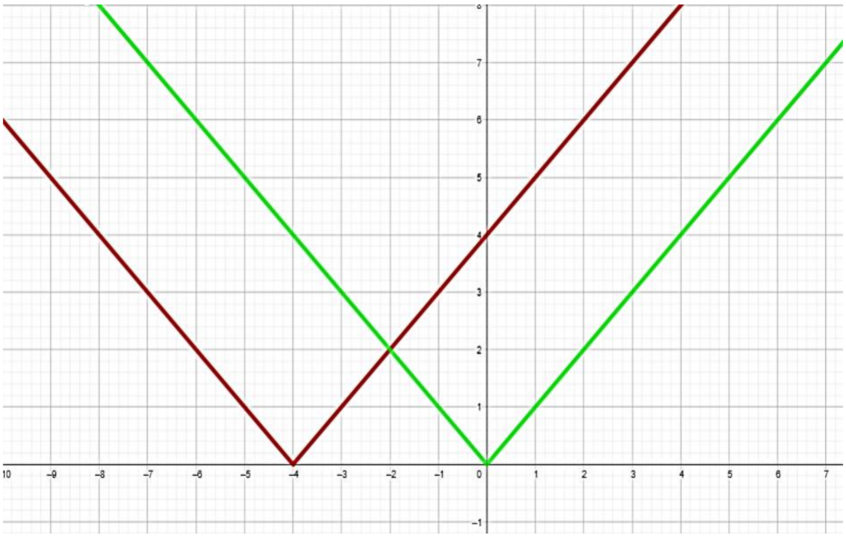
Fuente: (Guzmán, 2018)

Tabla No. 13. Tabulación de los datos de la función: $\boldsymbol{f(x) = |x + 4|}$

x	$\boldsymbol{f(x) = |x + 4|}$	$\boldsymbol{(x, y)}$
-1	$|-1 + 4|$	(-1, 3)
-2	$|-2 + 4|$	(-2, 2)
0	$|0 + 4|$	(0, 4)
1	$|1 + 4|$	(1, 5)
2	$|2 + 4|$	(2, 6)

Fuente: (Guzmán, 2018)

Figura No. 12. Gráfico de las funciones: $f(x) = |x|$ $f(x) = |x + 4|$



Fuente: (Guzmán, 2018)

BIBLIOGRAFÍA

Stewart, J. (2004). *Precálculo Matemáticas para el cálculo* (Quinta ed.). Nueva York: © D.R. 2007 por Cengage Learning Editores, S.A.

Besalú, M. (2021). *Funciones polinómicas* (Tercera ed.). Barcelona : Fundació Universitat Oberta de Catalunya (FUOC).

García, G. (2011). *Dominio de Funciones con Raíz Cuadrada. El cálculo y su enseñanza* (Vol. 2). México: Cinvestav-IPN.

Guzmán, J. (2018). *Desigualdades y Valor Absoluto, (Primera. ed., Cap.2).* Colombia: Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Hostetler, L. (2008). Función Cuadrática. En A. Pérez, *PRECÁLCULO* (págs. 128-161). Mexico: REVENTE ,S.A.

Manfredi, V. (2008). *Propiedades de las funciones .* México: Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Murillo, M. (2006). Función cuadratica. En J. Meza, *Matemática Básica Con Aplicaciones* (pág. 145). Costa Rica: EUNED.

Rodríguez, J. (2013). *Geometría analítica y funciones polinomial, racional y valor absoluto* (Vol. 1). México: D.R. © Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.

Ruiz, H. (2019). *Álgebra* (Primera ed.). México: D.R. © 2009 por Pearson E ducación de M éxico, S A . d e C.V.

Universidad Nacional Autónoma de México. (2011). *Operaciones algebraicas fundamentales.* México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Zill, D. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica* (Tercera ed.). México: Copyright © 2012 by Jones & Barlett Learning, LLC, Sudbury, MA, U.S.A.