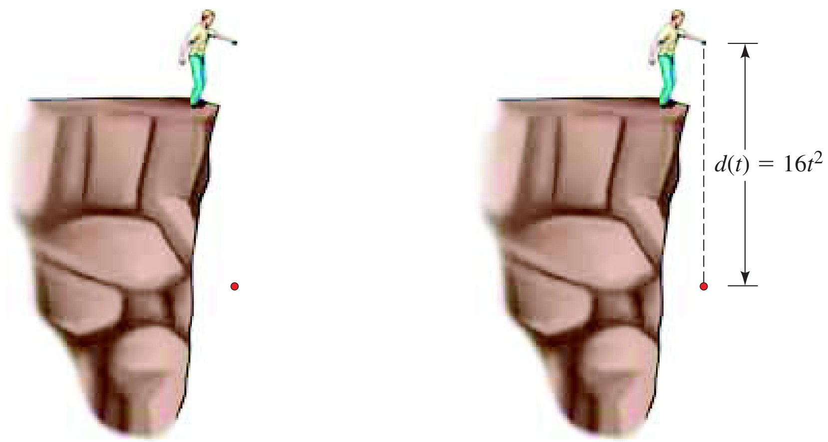
CAPÍTULO 2

FUNCIONES

Quizá la idea más útil para modelar el mundo real sea el concepto de *función*. Veamos un ejemplo. Si un escalador deja caer una piedra desde un alto risco, sabemos que la piedra caerá. Pero esta descripción general no nos ayuda a saber cuándo llegará la piedra al suelo. Para averiguarlo, necesitamos una *regla* que relacione la distancia d que cae la piedra y el tiempo que haya estado en caída. Galileo fue el primero en descubrir la regla: en t segundos la piedra cae $16t^2$ pies. Esta "regla" se denomina *función*; escribimos esta función como $d(t) = 16t^2$. Con el uso de este modelo de función, podemos *predecir* cuándo caerá la piedra al suelo. En este capítulo estudiamos propiedades de funciones y la forma en que los modelos funcionales pueden ayudarnos a obtener información precisa acerca de la cosa o proceso que se esté modelando.



Descripción general: La piedra cae. **Función:** En t segundos, la piedra cae $16t^2$ pies.

2.1 ¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN?

Funciones a nuestro alrededor ▶ Definición de función ▶ Evaluación de una función ▶ Dominio de una función ▶ Cuatro formas de representar una función

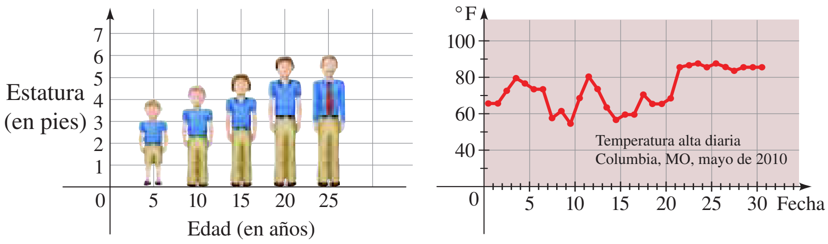
En esta sección exploramos la idea de una función y a continuación damos la definición de función.

▼ Funciones a nuestro alrededor

En casi todos los fenómenos físicos observamos que una cantidad depende de otra. Por ejemplo, la estatura de una persona depende de su edad, la temperatura depende de la fecha, el costo de enviar un paquete por correo depende de su peso (vea Figura 1). Usamos el término *función* para describir esta dependencia de una cantidad con respecto a otra. Esto es, decimos lo siguiente:

- La estatura es una función de la edad.
- La temperatura es una función de la fecha.
- El costo de enviar un paquete por correo depende de su peso.

La Oficina de Correos de Estados Unidos utiliza una sencilla regla para determinar el costo de enviar por correo un paquete de primera clase con base en el peso del paquete. Pero no es tan fácil describir la regla que relaciona la estatura con la edad o la regla que relaciona temperatura y fecha.



w (onzas)	Porte (dólares)
$0 < w \le 1$	1.22
$1 < w \le 2$	1.39
$2 < w \le 3$	1.56
$3 < w \le 4$	1.73
$4 < w \le 5$	1.90
$5 < w \le 6$	2.07

FIGURA 1 La estatura es función de la edad. La temperatura es función de la fecha. El porte es función del peso.

¿Puede usted considerar otras funciones? Veamos a continuación algunos ejemplos:

- El área de un círculo es una función de su radio.
- El número de bacterias en un cultivo es función del tiempo.
- El peso de una astronauta es una función de su elevación.
- El precio de una mercancía es una función de la demanda de esa mercancía.

La regla que describe la forma en que el área A de un círculo depende de su radio r está dada por la fórmula $A = \pi r^2$. Aun cuando no exista una regla o fórmula precisa que describa una función, todavía podemos describir la función por medio de una gráfica. Por ejemplo, cuando abrimos la llave del agua caliente de una llave, la temperatura del agua depende de cuánto tiempo haya estado saliendo el agua. Por tanto, podemos decir:

- La temperatura del agua de la llave es una función del tiempo.

La Figura 2 muestra una gráfica aproximada de la temperatura T del agua como función del tiempo t que haya transcurrido desde que se abrió la llave. La gráfica muestra que la temperatura inicial del agua es cercana a la temperatura ambiente. Cuando el agua del tanque de agua caliente llega a la llave, la temperatura T del agua aumenta rápidamente. En la siguiente fase, T es constante a la temperatura del agua del tanque. Cuando éste se descarga, T disminuye a la temperatura del agua fría de alimentación.

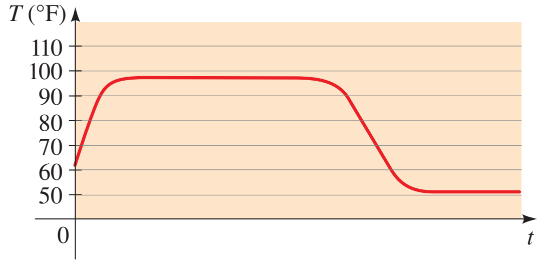


FIGURA 2 Gráfica de la temperatura T del agua como función del tiempo t

▼ Definición de función

Ya antes hemos empleado letras para representar números. Aquí hacemos algo muy distinto: usamos letras para representar *reglas*.

Una función es una regla. Para hablar de una función, es necesario darle un nombre. Usaremos letras como $f, g, h, \ldots$ para representar funciones. Por ejemplo, podemos usar la letra f para representar una regla como sigue:

$$\text{“}f\text{”} \qquad \text{es la regla} \qquad \text{“elevar al cuadrado el número”}$$

Cuando escribimos $f(2)$ queremos decir "aplicar la regla f al número 2". La aplicación de la regla da $f(2) = 2^2 = 4$. Del mismo modo, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(4) = 4^2 = 16$, y en general $f(x) = x^2$.

DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN

Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B.

La tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de una calculadora es un buen ejemplo de una función como máquina. Primero se ingresa x en la pantalla y, a continuación, se pulsa la tecla marcada como $\boxed{\sqrt{\ }}$. (En casi todas las calculadoras *graficadoras* se invierte el orden de estas operaciones.) Si $x < 0$, entonces x no está en el dominio de esta función; esto es, x no es una entrada aceptable, y la calculadora indicará un error. Si $x \geq 0$, entonces aparece una aproximación a $\sqrt{x}$ en la pantalla, correcta a cierto número de lugares decimales. (Entonces, la tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculadora no es exactamente la misma que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.)

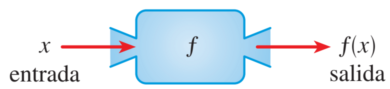
Por lo general consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y B son conjuntos de números reales. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x" o "f en x" y se denomina **valor de f en x**, o la **imagen de x bajo f**. El conjunto A recibe el nombre de **dominio** de la función. El **rango** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$ cuando x varía en todo el dominio, es decir,

$$\text{Rango de } f = \{f(x) \mid x \in A\}$$

El símbolo que representa un número arbitrario del dominio de una función f se llama **variable independiente**. El símbolo que representa un número en el rango de f se llama **variable dependiente**. Por tanto, si escribimos $y = f(x)$, entonces x es la variable independiente y y es la variable dependiente.

Es útil considerar una función como una **máquina** (vea Figura 3). Si x está en el dominio de la función f, entonces cuando x entra a la máquina, es aceptada como **entrada** y la máquina produce una **salida** $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. Así, podemos considerar el dominio como el conjunto de todas las posibles entradas y el rango como el conjunto de todas las posibles salidas.

FIGURA 3 Diagrama de máquina de f



Otra forma de representar una función es por medio de un **diagrama de flecha** como en la Figura 4. Cada flecha conecta un elemento de A con un elemento de B. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ está asociada con a, y así sucesivamente.

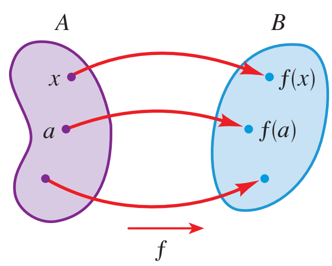


FIGURA 4 Diagrama de flecha de f

EJEMPLO 1 | Análisis de una función

Una función f está definida por la fórmula

$$f(x) = x^2 + 4$$

(a) Exprese verbalmente cómo actúa f sobre la entrada x para producir la salida $f(x)$.
(b) Evalúe $f(3)$, $f(-2)$ y $f(\sqrt{5})$.
(c) Encuentre el dominio y rango de f.
(d) Trace un diagrama de máquina para f.

SOLUCIÓN

(a) La fórmula nos dice que f primero eleva al cuadrado la entrada x y luego suma 4 al resultado. Por tanto, f es la función

"elevar al cuadrado, luego sumar 4"

(b) Los valores de f se encuentran al sustituir por x en la fórmula $f(x) = x^2 + 4$.

$$f(3) = 3^2 + 4 = 13 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } 3$$
$$f(-2) = (-2)^2 + 4 = 8 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } -2$$
$$f(\sqrt{5}) = (\sqrt{5})^2 + 4 = 9 \qquad \text{Sustituir } x \text{ por } \sqrt{5}$$

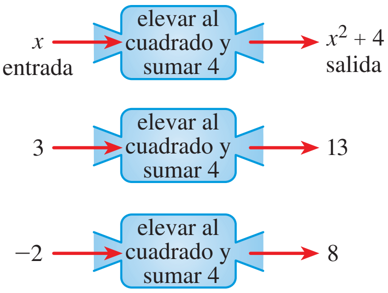


FIGURA 5 Diagrama de máquina

(c) El dominio de f está formado por todas las posibles entradas para x. Como podemos evaluar la fórmula $f(x) = x^2 + 4$ para cada número real x, el dominio de f es el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales.

El rango de f está formado por todas las posibles salidas de f. Como $x^2 \geq 0$ para todos los números reales x, tenemos $x^2 + 4 \geq 4$, de modo que por cada salida de f tenemos $f(x) \geq 4$. Entonces, el rango de f es $\{y \mid y \geq 4\} = [4, \infty)$.

(d) Un diagrama de máquina para f se ilustra en la Figura 5.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **9, 13, 17** Y **43** ■

▼ Evaluación de una función

En la definición de una función, la variable independiente x desempeña el papel de un símbolo o dígito. Por ejemplo, la función $f(x) = 3x^2 + x - 5$ se puede considerar como

$$f(\square) = 3 \cdot \square^2 + \square - 5$$

Para evaluar f en un número, sustituimos el número por el símbolo o dígito.

EJEMPLO 2 | Evaluación de una función

Sea $f(x) = 3x^2 + x - 5$. Evalúe cada valor de la función.
(a) $f(-2)$ **(b)** $f(0)$ **(c)** $f(4)$ **(d)** $f(\frac{1}{2})$

SOLUCIÓN Para evaluar f en un número, sustituimos el número por x en la definición de f.

(a) $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) - 5 = 5$

(b) $f(0) = 3 \cdot 0^2 + 0 - 5 = -5$

(c) $f(4) = 3 \cdot (4)^2 + 4 - 5 = 47$

(d) $f(\frac{1}{2}) = 3 \cdot (\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - 5 = -\frac{15}{4}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19** ■

EJEMPLO 3 | Una función definida por tramos

Un plan de teléfono celular cuesta \$39 al mes. El plan incluye 400 minutos gratis y cobra \$0.20 por cada minuto adicional de uso. Los cargos mensuales son una función del número de minutos usados, dada por

$$C(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 \le x \le 400 \\ 39 + 0.20(x - 400) & \text{si } x > 400 \end{cases}$$

Encuentre $C(100)$, $C(400)$ y $C(480)$.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. He aquí cómo aplicamos la regla para esta función. Primero vemos el valor de la entrada x. Si $0 \le x \le 400$, entonces el valor de $C(x)$ es 39. Por otra parte, si $x > 400$, entonces el valor de $C(x)$ es $39 + 0.20((x - 400)$.

Una **función definida** por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. La función C del Ejemplo 3 está definida por tramos.

Como $100 \le 400$, tenemos $C(100) = 39$.

Como $400 \le 400$, tenemos $C(400) = 39$.

Como $480 > 400$, tenemos $C(480) = 39 + 0.20(480 - 400) = 55$.

Por tanto, el plan cobra \$39 por 100 minutos, \$39 por 400 minutos y \$55 por 480 minutos.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

EJEMPLO 4 | Evaluación de una función

Si $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$, evalúe lo siguiente.

(a) $f(a)$ **(b)** $f(-a)$

(c) $f(a + h)$ **(d)** $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}, \quad h \neq 0$

Expresiones como la del inciso (d) del ejemplo 4 aparecen con frecuencia en cálculo y se les llama *cociente de diferencias* y representan el cambio promedio en el valor de f entre $x = a$ y $x = a + h$.

SOLUCIÓN

(a) $f(a) = 2a^2 + 3a - 1$

(b) $f(-a) = 2(-a)^2 + 3(-a) - 1 = 2a^2 - 3a - 1$

(c)
$$\begin{aligned} f(a + h) &= 2(a + h)^2 + 3(a + h) - 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) + 3(a + h) - 1 \\ &= 2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1 \end{aligned}$$

(d) Usando los resultados de las partes (c) y (a), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 + 3a + 3h - 1) - (2a^2 + 3a - 1)}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 + 3h}{h} = 4a + 2h + 3 \end{aligned}$$

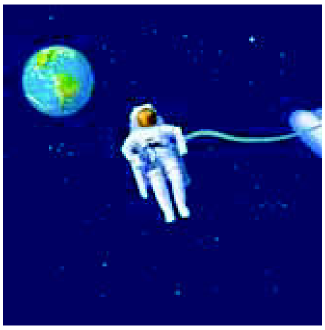
AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 5 | El peso de una astronauta

Si una astronauta pesa 130 libras en la superficie de la Tierra, entonces su peso cuando esté a h millas sobre la Tierra está dado por la función

$$w(h) = 130\left(\frac{3960}{3960 + h}\right)^2$$

(a) ¿Cuál es su peso cuando ella esté a 100 millas sobre la Tierra?



El peso de un cuerpo que esté sobre la Tierra, o muy cerca de ésta, es la fuerza gravitacional que la Tierra ejerce sobre ese cuerpo. Cuando se encuentre en órbita alrededor de la Tierra, una astronauta experimenta la sensación de "ingravidez" porque la fuerza centrípeta que la mantiene en órbita es exactamente igual que la atracción gravitacional de la Tierra.

(b) Construya una tabla de valores para la función w que da el peso de la astronauta a altitudes de 0 a 500 millas. ¿Qué se concluye a partir de la tabla?

SOLUCIÓN

(a) Buscamos el valor de la función w cuando $h = 100$; esto es, debemos calcular $w(100)$.

$$w(100) = 130\left(\frac{3960}{3960 + 100}\right)^2 \approx 123.67$$

Entonces, a una altitud de 100 millas, ella pesa unas 124 lb.

(b) La tabla da el peso de la astronauta, redondeado a la libra más cercana, en incrementos de 100 millas. Los valores de la tabla están calculados como en la parte (a).

h	$w(h)$
0	130
100	124
200	118
300	112
400	107
500	102

La tabla indica que cuanto más alto se encuentre ella, menor es su peso.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

Dominio de una función

Recuerde que el *dominio* de una función es el conjunto de todas las entradas para la función. El dominio de una función puede indicarse explícitamente. Por ejemplo, si escribimos

$$f(x) = x^2 \qquad 0 \le x \le 5$$

entonces el dominio es el conjunto de todos los números reales x para los cuales $0 \le x \le 5$. Si la función está dada por una expresión algebraica y el dominio no se indica explícitamente, entonces por convención *el dominio de la función es el dominio de la expresión algebraica, es decir, el conjunto de todos los números reales para los cuales la expresión está definida como un número real.* Por ejemplo, considere las funciones

Los dominios de expresiones algebraicas se estudian en la página 35.

$$f(x) = \frac{1}{x - 4} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

La función f no está definida en $x = 4$, de modo que su dominio es $\{x \mid x \neq 4\}$. La función g no está definida para x negativa, de modo que su dominio es $\{x \mid x \ge 0\}$.

EJEMPLO 6 | Hallar dominios de funciones

Encuentre el dominio de cada una de las funciones siguientes.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$ **(b)** $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ **(c)** $h(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t + 1}}$

SOLUCIÓN

(a) Una expresión racional no está definida cuando el denominador es 0. Como

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x-1)}$$

vemos que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

El dominio también se puede escribir en notación de intervalos como

$$(\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$

(b) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, de modo que debemos tener $9 - x^2 \geq 0$. Usando los métodos de la Sección 1.7, podemos resolver esta desigualdad para hallar que $-3 \leq x \leq 3$. Por lo tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid -3 \leq x \leq 3\} = [-3, 3]$$

(c) No podemos tomar la raíz cuadrada de un número negativo, y no podemos dividir entre 0, de modo que debemos tener $t + 1 > 0$, es decir, $t > -1$. Por lo tanto, el dominio de h es

$$\{t \mid t > -1\} = (-1, \infty)$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **51** ■

Cuatro formas de representar una función

Para ayudarnos a entender lo que es una función, hemos empleado diagramas de máquina y de flecha. Podemos describir una función específica en las siguientes cuatro formas:

- verbalmente (por descripción en palabras)
- algebraicamente (por una fórmula explícita)
- visualmente (por una gráfica)
- numéricamente (por una tabla de valores)

Una función individual puede estar representada en las cuatro formas, y con frecuencia es útil pasar de una representación a otra para adquirir más conocimientos sobre la función. No obstante, ciertas funciones se describen en forma más natural por medio de un método que por los otros. Un ejemplo de una descripción verbal es la siguiente regla para convertir entre escalas de temperatura:

"Para hallar el equivalente Fahrenheit de una temperatura Celsius, multiplicar por $\frac{9}{5}$ la temperatura Celsius y luego sumar 32."

En el Ejemplo 7 vemos cómo describir esta regla verbal algebraica, gráfica y numéricamente. Una representación útil del área de un círculo como función de su radio es la fórmula algebraica

$$A(r) = \pi r^2$$

La gráfica producida por un sismógrafo (vea la caja en la página siguiente) es una representación visual de la función de aceleración vertical $a(t)$ del suelo durante un terremoto. Como un ejemplo final, considere la función $C(w)$, que se describe verbalmente como "el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w". La forma más conveniente de describir esta función es numéricamente, es decir, usando una tabla de valores.

Estaremos usando las cuatro representaciones de funciones en todo este libro; las resumimos en el cuadro siguiente.

CUATRO FORMAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Verbal

Usando palabras:

"Para convertir de Celsius a Fahrenheit, multiplicar la temperatura Celsius por $\frac{9}{5}$, luego sumar 32."

Relación entre escalas de temperatura Celsius y Fahrenheit.

Algebraica

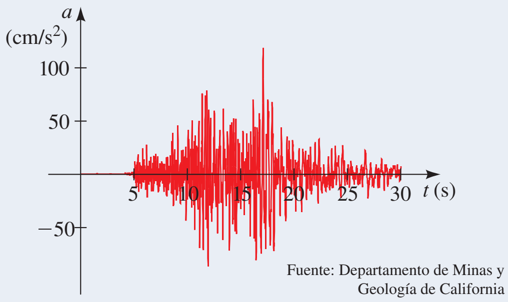
Usando una fórmula:

$$A(r) = \pi r^2$$

Área de un círculo

Visual

Usando una gráfica:



Aceleración vertical durante un terremoto

Numérica

Usando una tabla de valores:

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \le 1$	1.22
$1 < w \le 2$	1.39
$2 < w \le 3$	1.56
$3 < w \le 4$	1.73
$4 < w \le 5$	1.90
⋮	⋮

Costo de enviar por correo un paquete de primera clase

EJEMPLO 7 | Representar una función verbal, algebraica, numérica y gráficamente

Sea $F(C)$ la temperatura Fahrenheit correspondiente a la temperatura Celsius C. (Así, F es la función que convierte entradas Celsius en salidas Fahrenheit.) El cuadro citado líneas antes da una descripción verbal de esta función. Encuentre formas de representar esta función

(a) Algebraicamente (usando una fórmula)

(b) Numéricamente (usando una tabla de valores)

(c) Visualmente (usando una gráfica)

SOLUCIÓN

(a) La descripción verbal nos dice que primero debemos multiplicar la entrada C por $\frac{9}{5}$ y luego sumar 32 al resultado.

$$F(C) = \tfrac{9}{5}C + 32$$

(b) Usamos la fórmula algebraica para F que encontramos en la parte (a) para construir una tabla de valores:

C (Celsius)	F (Fahrenheit)
−10	14
0	32
10	50
20	68
30	86
40	104

(c) Usamos los puntos tabulados en la parte (b) para ayudarnos a trazar la gráfica de esta función en la Figura 6.

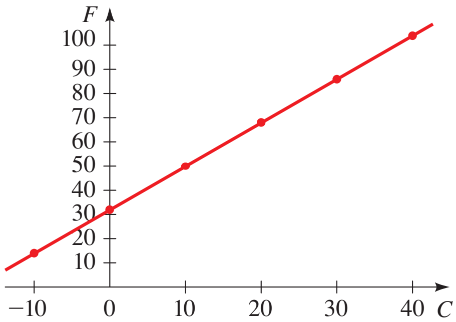


FIGURA 6 Celsius y Fahrenheit

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

2.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si una función f está dada por la fórmula $y = f(x)$, entonces $f(a)$ es la ______de f en $x = a$.

2. Para una función f, el conjunto de todas las posibles entradas se denomina _____de f, y el conjunto de todas las posibles salidas se denomina _______de f.

3. (a) ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen 5 en sus dominios?

$$f(x) = x^2 - 3x \qquad g(x) = \frac{x-5}{x} \qquad h(x) = \sqrt{x-10}$$

(b) Para las funciones de la parte (a) que *tienen* 5 en sus dominios, encuentre el valor de la función en 5.

4. Una función está dada algebraicamente por la fórmula $f(x) = (x-4)^2 + 3$. Complete estas otras formas de representar a f:

(a) *Verbal:* "Restar 4, luego _____ y _____.

(b) *Numérica:*

x	$f(x)$
0	19
2	
4	
6	

HABILIDADES

5-8 ■ Exprese la regla en notación de función. (Por ejemplo, la regla "elevar al cuadrado, luego restar 5" se expresa como la función $f(x) = x^2 - 5$.)

5. Sumar 3, luego multiplicar por 2

6. Dividir entre 7, luego restar 4

7. Restar 5, luego elevar al cuadrado

8. Tomar la raíz cuadrada, sumar 8, luego multiplicar por $\frac{1}{3}$.

9-12 ■ Exprese la función (o regla) en palabras.

9. $h(x) = x^2 + 2$

10. $k(x) = \sqrt{x+2}$

11. $f(x) = \dfrac{x-4}{3}$

12. $g(x) = \dfrac{x}{3} - 4$

13-14 ■ Trace un diagrama de máquina para la función.

13. $f(x) = \sqrt{x-1}$

14. $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$

15-16 ■ Complete la tabla.

15. $f(x) = 2(x-1)^2$

x	$f(x)$
−1	
0	
1	
2	
3	

16. $g(x) = |2x + 3|$

x	$g(x)$
−3	
−2	
0	
1	
3	

17-26 ■ Evalúe la función en los valores indicados.

17. $f(x) = x^2 - 6;\quad f(-3), f(3), f(0), f(\frac{1}{2}), f(10)$

18. $f(x) = x^3 + 2x;\quad f(-2), f(1), f(0), f(\frac{1}{3}), f(0.2)$

19. $f(x) = 2x + 1;$

$f(1), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a+b)$

20. $f(x) = x^2 + 2x;$

$f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f\left(\dfrac{1}{a}\right)$

21. $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x};$

$g(2), g(-2), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a-1), g(-1)$

22. $h(t) = t + \dfrac{1}{t}$;
$h(1), h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x), h\left(\dfrac{1}{x}\right)$

23. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$;
$f(0), f(2), f(-2), f(\sqrt{2}), f(x+1), f(-x)$

24. $f(x) = x^3 - 4x^2$;
$f(0), f(1), f(-1), f(\frac{3}{2}), f\left(\dfrac{x}{2}\right), f(x^2)$

25. $f(x) = 2|x - 1|$;
$f(-2), f(0), f(\frac{1}{2}), f(2), f(x+1), f(x^2+2)$

26. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$;
$f(-2), f(-1), f(0), f(5), f(x^2), f\left(\dfrac{1}{x}\right)$

27-30 ■ Evalúe la función definida por tramos en los valores indicados.

27. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
$f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

28. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
$f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

29. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
$f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

30. $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ (x-2)^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$
$f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

31-34 ■ Use la función para evaluar las expresiones indicadas y simplifique.

31. $f(x) = x^2 + 1$; $f(x+2), f(x) + f(2)$

32. $f(x) = 3x - 1$; $f(2x), 2f(x)$

33. $f(x) = x + 4$; $f(x^2), (f(x))^2$

34. $f(x) = 6x - 18$; $f\left(\dfrac{x}{3}\right), \dfrac{f(x)}{3}$

35-42 ■ Encuentre $f(a)$, $f(a+h)$, y el cociente de diferencias $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, donde $h \neq 0$.

35. $f(x) = 3x + 2$

36. $f(x) = x^2 + 1$

37. $f(x) = 5$

38. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$

39. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

40. $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

41. $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$

42. $f(x) = x^3$

43-64 ■ Encuentre el dominio de la función.

43. $f(x) = 2x$

44. $f(x) = x^2 + 1$

45. $f(x) = 2x, \quad -1 \leq x \leq 5$

46. $f(x) = x^2 + 1, \quad 0 \leq x \leq 5$

47. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$

48. $f(x) = \dfrac{1}{3x-6}$

49. $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-1}$

50. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2+x-6}$

51. $f(x) = \sqrt{x-5}$

52. $f(x) = \sqrt[4]{x+9}$

53. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$

54. $g(x) = \sqrt{7-3x}$

55. $h(x) = \sqrt{2x-5}$

56. $G(x) = \sqrt{x^2-9}$

57. $g(x) = \dfrac{\sqrt{2+x}}{3-x}$

58. $g(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

59. $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$

60. $g(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

61. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x-4}}$

62. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{6-x}}$

63. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$

64. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

65-68 ■ Se da una descripción verbal de una función. Encuentre representaciones **(a)** algebraica, **(b)** numérica y **(c)** gráfica para la función.

65. Para evaluar $f(x)$, divida la entrada entre 3 y sume $\frac{2}{3}$ al resultado.

66. Para evaluar $g(x)$, reste 4 de la entrada y multiplique el resultado por $\frac{3}{4}$.

67. Sea $T(x)$ la cantidad de impuesto de ventas cobrado en el condado de Lemon por la compra de x dólares. Para hallar el impuesto, tome 8% del precio de compra.

68. Sea $V(d)$ el volumen de una esfera de diámetro d. Para hallar el volumen, tome el cubo del diámetro, luego multiplique por π y divida entre 6.

APLICACIONES

69. Costo de producción El costo C en dólares por producir x yardas de cierta tela está dado por la función

$$C(x) = 1500 + 3x + 0.02x^2 + 0.0001x^3$$

(a) Encuentre $C(10)$ y $C(100)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
(c) Encuentre $C(0)$. (Este número representa los *costos fijos*.)

70. Área de una esfera El área superficial S de una esfera es una función de su radio r dado por

$$S(r) = 4\pi r^2$$

(a) Encuentre $S(2)$ y $S(3)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

71. Ley de Torricelli Un tanque contiene 50 galones de agua, que se descarga por una fuga en el fondo, haciendo que el tanque se vacíe en 20 minutos. El tanque se descarga con más rapidez cuando está casi lleno porque es mayor la presión sobre la fuga. La **Ley de Torricelli** da el volumen de agua restante en el tanque después de t minutos como

$$V(t) = 50\left(1 - \frac{t}{20}\right)^2 \qquad 0 \le t \le 20$$

(a) Encuentre $V(0)$ y $V(20)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas a la parte (a)?
(c) Haga una tabla de valores de $V(t)$ para $t = 0, 5, 10, 15, 20$.

72. ¿A qué distancia puede usted ver? Debido a la curvatura de la Tierra, la distancia D máxima a que se puede ver desde la parte superior de un edificio alto o un avión a una altitud h está dada por la función

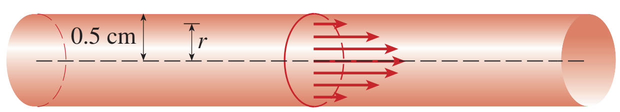
$$D(h) = \sqrt{2rh + h^2}$$

donde $r = 3960$ millas es el radio de la Tierra y D y h se miden en millas.
(a) Encuentre $D(0.1)$ y $D(0.2)$.
(b) ¿A qué distancia puede usted ver desde la cubierta de observación de la Torre CN de Toronto, a 1135 pies del suelo?
(c) Los aviones comerciales vuelan a una altitud de unas 7 millas. ¿A qué distancia puede ver el piloto?

73. Circulación sanguínea Cuando la sangre circula por una vena o una arteria, su velocidad v es máxima a lo largo del eje central y disminuye a medida que la distancia r desde el eje central aumenta (vea la figura). La fórmula que da v como función de r se llama **ley de flujo laminar**. Para una arteria con radio 0.5 cm, la relación entre v (en cm/s) y r (en cm) está dada por la función

$$v(r) = 18{,}500(0.25 - r^2) \qquad 0 \le r \le 0.5$$

(a) Encuentre $v(0, 1)$ y $v(0, 4)$.
(b) ¿Qué le dicen sus respuestas a la parte (a) acerca de la circulación sanguínea en esta arteria?
(c) Haga una tabla de valores de $v(r) = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.



74. Tamaño de la pupila Cuando aumenta la brillantez x de una fuente de luz, el ojo reacciona al disminuir el radio R de la pupila. La dependencia de R en x está dada por la función

$$R(x) = \sqrt{\frac{13 + 7x^{0.4}}{1 + 4x^{0.4}}}$$

donde R se mide en milímetros y x se mide en unidades de brillantez apropiadas.
(a) Encuentre $R(1)$, $R(10)$ y $R(100)$.
(b) Haga una tabla de valores de $R(x)$.

75. Relatividad Según la Teoría de la Relatividad, la longitud L de un cuerpo es una función de su velocidad v con respecto a un observador. Para un cuerpo cuya longitud en reposo es 10 m, la función está dada por

$$L(v) = 10\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

donde c es la velocidad de la luz (300,000 km/s).
(a) Encuentre $L(0.5c)$, $L(0.75c)$ y $L(0.9c)$.
(b) ¿Cómo cambia la longitud de un cuerpo cuando aumenta su velocidad?

76. Impuesto sobre la renta En cierto país, el impuesto sobre la renta T se valora de acuerdo con la siguiente función de ingreso x:

$$T(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le 10{,}000 \\ 0.08x & \text{si } 10{,}000 < x \le 20{,}000 \\ 1600 + 0.15x & \text{si } 20{,}000 < x \end{cases}$$

(a) Encuentre $T(5{,}000)$, $T(12{,}000)$, y $T(25{,}000)$.
(b) ¿Qué representan sus repuestas en el inciso (a)?

77. Compras por Internet Una librería de ventas por Internet cobra $15 por envío de pedidos de menos de $100 pero no cobra nada por pedidos de $100 o más. El costo C de un pedido es una función del precio total x del libro comprado, dado por

$$C(x) = \begin{cases} x + 15 & \text{si } x < 100 \\ x & \text{si } x \ge 100 \end{cases}$$

(a) Encuentre $C(75)$, $C(90)$, $C(100)$ y $C(105)$.
(b) ¿Qué representan sus respuestas en la parte (a)?

78. Costo de una estancia en hotel Una cadena hotelera cobra $75 por noche por las primeras dos noches y $50 por cada noche adicional de estancia. El costo total T es una función del número de noches x que permanezca un huésped.

(a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por tramos.

$$T(x) = \begin{cases} \quad & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ \quad & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(b) Encuentre $T(2)$, $T(3)$ y $T(5)$.

(c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

79. Boleta de infracción por rebasar límite de velocidad En cierto estado, la máxima velocidad permitida en autopistas es de 65 mi/h, y la mínima es 40 mi/h. La multa F por violar estos límites es de $15 por cada milla arriba del máximo o abajo del mínimo.

(a) Complete las expresiones de la siguiente función definida por partes, donde x es la velocidad a la cual una persona está viajando.

$$F(x) = \begin{cases} \quad & \text{si } 0 < x < 40 \\ \quad & \text{si } 40 \le x \le 65 \\ \quad & \text{si } x > 65 \end{cases}$$

(b) Encuentre $F(30)$, $F(50)$ y $F(75)$.

(c) ¿Qué representan sus respuestas de la parte (b)?

80. Altura de césped El propietario de una casa poda el césped en la tarde de todos los miércoles. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo en el curso de un período de 4 semanas que empieza un domingo.

81. Cambio de temperatura Una persona coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. A continuación, saca el pastel y lo deja enfriar antes de consumirlo. Trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

82. Cambio diario de temperatura Las lecturas de temperatura T (en °F) fueron registradas cada 2 horas de la medianoche al mediodía en Atlanta, Georgia, el 18 de marzo de 1996. El tiempo t se midió en horas desde la medianoche. Trace una gráfica aproximada de T como función de t.

t	0	2	4	6	8	10	12
T	58	57	53	50	51	57	61

83. Crecimiento poblacional La población P (en miles) de San José, California, de 1988 a 2000 se muestra en la tabla siguiente. (Se dan estimaciones de mediados de año.) Trace una gráfica aproximada de P como función de t.

t	1988	1990	1992	1994	1996	1998	2000
P	733	782	800	817	838	861	895

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

84. Ejemplos de funciones Al principio de esta sección estudiamos tres ejemplos de funciones ordinarias y frecuentes: la estatura es función de la edad, la temperatura es función de la fecha y el costo del porte es función del peso. Dé otros tres ejemplos de funciones de nuestra vida diaria.

85. Cuatro formas de representar una función En el cuadro de la página 148 representamos cuatro funciones diferentes verbal, algebraica, visual y numéricamente. Considere una función que pueda representarse en las cuatro formas y escriba las cuatro representaciones.

2.2 GRÁFICAS DE FUNCIONES

Graficar funciones por localización de puntos ▶ Graficar funciones con calculadora graficadora ▶ Graficar funciones definidas por tramos ▶ La prueba de la recta vertical ▶ Ecuaciones que definen funciones

La forma más importante de visualizar una función es por medio de su gráfica. En esta sección investigamos con más detalle el concepto de graficar funciones.

▼ Graficar funciones por localización de puntos

Para graficar una función f, localizamos los puntos $(x, f(x))$ en un plano de coordenadas. En otras palabras, localizamos los puntos (x, y) cuya coordenada x es una entrada y cuya coordenada y es la correspondiente salida de la función.

LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Si f es una función con dominio A, entonces la **gráfica** de f es el conjunto de pares ordenados

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

localizados en un plano de coordenadas. En otras palabras, la gráfica de f es el conjunto de todos los puntos (x, y) tales que $y = f(x)$; esto es, la gráfica de f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$.

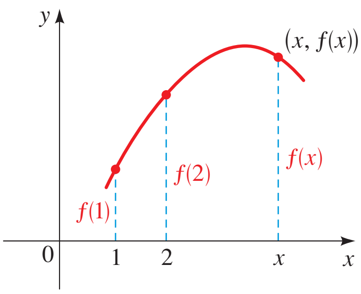
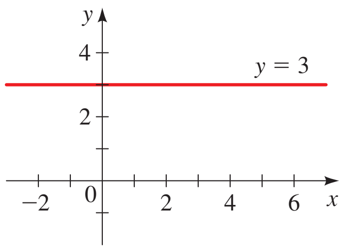


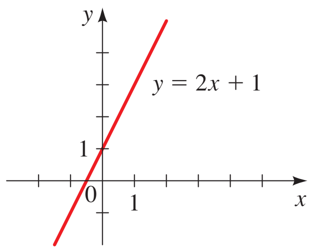
FIGURA 1 La altura de la gráfica sobre el punto x es el valor de $f(x)$.

La gráfica de una función f da un retrato del comportamiento o "historia de la vida" de la función. Podemos leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de la gráfica arriba del punto x (vea Figura 1).

Una función f de la forma $f(x) = mx + b$ se denomina **función lineal** porque su gráfica es la gráfica de la ecuación $y = mx + b$, que representa una recta con pendiente m y punto de intersección b en y. Un caso especial de una función lineal se presenta cuando la pendiente es $m = 0$. La función $f(x) = b$, donde b es un número determinado, recibe el nombre de **función constante** porque todos sus valores son el mismo número, es decir, b. Su gráfica es la recta horizontal $y = b$. La Figura 2 muestra las gráficas de la función constante $f(x) = 3$ y la función lineal $f(x) = 2x + 1$.



La función constante $f(x) = 3$



La función lineal $f(x) = 2x + 1$

FIGURA 2

EJEMPLO 1 | Graficar funciones por localización de puntos

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a) $f(x) = x^2$ **(b)** $g(x) = x^3$ **(c)** $h(x) = \sqrt{x}$

SOLUCIÓN Primero hacemos una tabla de valores. A continuación, localizamos los puntos dados por la tabla y los unimos con una curva suave sin irregularidades para obtener la gráfica. Las gráficas están trazadas en la Figura 3 en la página siguiente.

x	$f(x) = x^2$
0	0
$\pm\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
± 1	1
± 2	4
± 3	9

x	$g(x) = x^3$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$
1	1
2	8
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$
-1	-1
-2	-8

x	$h(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$

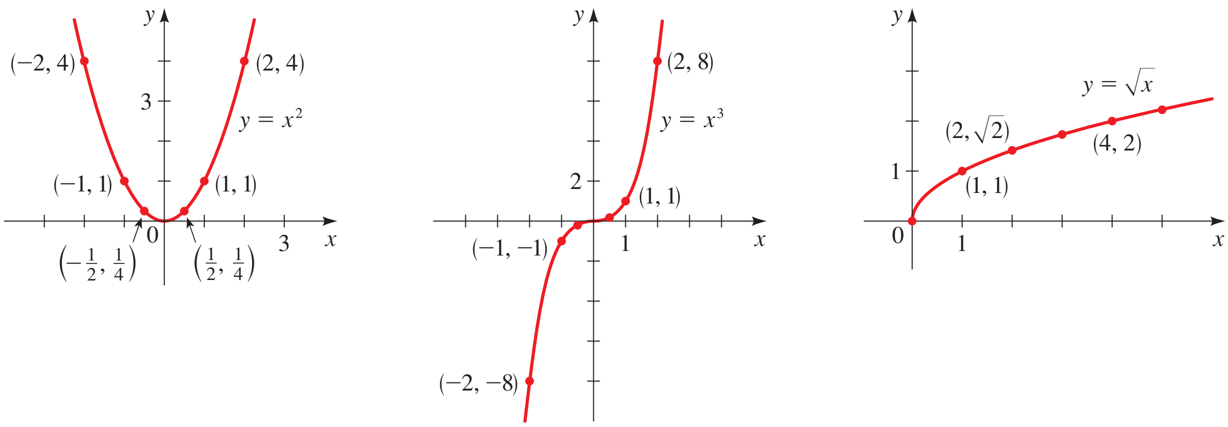


FIGURA 3 (a) $f(x) = x^2$ (b) $g(x) = x^3$ (c) $h(x) = \sqrt{x}$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **11, 15** Y **19**

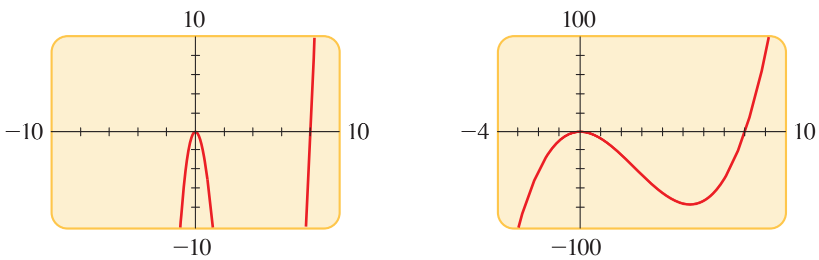
Graficar funciones con calculadora graficadora

Una forma cómoda de graficar una función es usar una calculadora graficadora. Como la gráfica de una función f es la gráfica de la ecuación $y = f(x)$, podemos usar los métodos de la Sección 1.9 para graficar funciones en una calculadora graficadora.

EJEMPLO 2 | Graficar una función con calculadora graficadora

Use una calculadora graficadora para graficar la función $f(x) = x^3 - 8x^2$ en un rectángulo de vista apropiado.

SOLUCIÓN Para graficar la función $f(x) = x^3 - 8x^2$, debemos graficar la ecuación $y = x^3 - 8x^2$. En la calculadora graficadora TI-83, el rectángulo de vista predeterminado da la gráfica de la Figura 4(a). Pero esta gráfica parece rebasar la parte superior y la inferior de la pantalla. Necesitamos expandir el eje vertical para obtener una mejor representación de la gráfica. El rectángulo de vista $[-4, 10]$ por $[-100, 100]$ da un retrato más completo de la gráfica, como se ve en la Figura 4(b).



(a) (b)

FIGURA 4 Gráfica de la función $f(x) = x^3 - 8x^2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

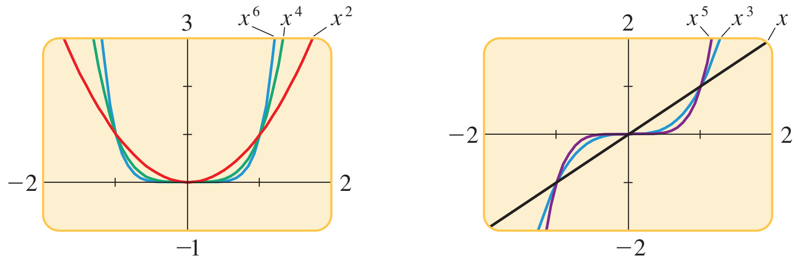
EJEMPLO 3 | Una familia de funciones potencia

(a) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 2$, 4 y 6 en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-1, 3]$.

(b) Grafique las funciones $f(x) = x^n$ para $n = 1$, 3 y 5 en el rectángulo de vista $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$.

(c) ¿Qué conclusiones se pueden sacar de estas gráficas?

SOLUCIÓN Para graficar la función $f(x) = x^n$, graficamos la ecuación $y = x^n$. Las gráficas para las partes (a) y (b) se muestran en la Figura 5.



(a) Potencias pares de x (b) Potencias impares de x

FIGURA 5 Una familia de funciones de potencia $f(x) = x^n$

(c) Vemos que la forma general de la gráfica de $f(x) = x^n$ depende de si n es par o impar.

Si n es par, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la parábola $y = x^2$.

Si n es impar, la gráfica de $f(x) = x^n$ es similar a la de $y = x^3$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

Observe de la Figura 5 que cuando n crece, la gráfica de $y = x^n$ se hace más plana cerca de 0 y más pronunciado cuando $x > 1$. Cuando $0 < x < 1$, las potencias inferiores de x son las funciones "más grandes". Pero cuando $x > 1$, las potencias superiores de x son las funciones dominantes.

▼ Graficar funciones definidas por tramos

Una función definida por tramos está definida por diferentes fórmulas en diferentes partes de su dominio. Como es de esperarse, la gráfica de tal función está formada por tramos separados.

EJEMPLO 4 | Graficar una función definida por tramos

Trace la gráfica de la función.

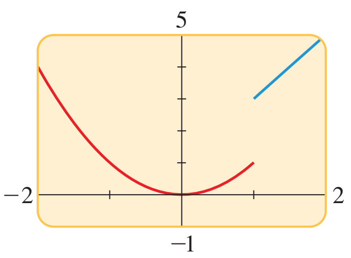
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN Si $x \le 1$, entonces $f(x) = x^2$, y la parte de la gráfica a la izquierda de $x = 1$ coincide con la gráfica de $y = x^2$, que trazamos en la Figura 3. Si $x > 1$, entonces $f(x) = 2x + 1$, y la parte de la gráfica a la derecha de $x = 1$ coincide con la recta $y = 2x + 1$, que graficamos en la Figura 2. Esto hace posible que tracemos la gráfica de la Figura 6.

El punto sólido en (1, 1) indica que este punto está incluido en la gráfica; el punto abierto en (1, 3) indica que este punto está excluido de la gráfica.

En varias calculadoras graficadoras, la gráfica de la Figura 6 puede ser producida al usar las funciones lógicas de la calculadora. Por ejemplo, en la TI-83 la siguiente ecuación da la gráfica requerida:

`Y₁=(X≤1)X²+(X>1)(2X+1)`



(Para evitar la recta vertical extraña entre las dos partes de la gráfica, ponga la calculadora en el modo `Dot`.)

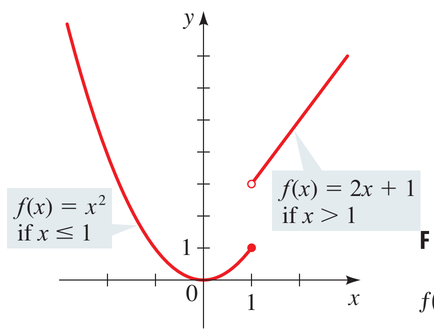


FIGURA 6 $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

EJEMPLO 5 | Gráfica de la función valor absoluto

Trace la gráfica de la función valor absoluto $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN Recuerde que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Usando el mismo método que en el Ejemplo 4, observamos que la gráfica de f coincide con la recta $y = x$ a la derecha del eje y y coincide con la recta $y = -x$ a la izquierda del eje y (vea Figura 7).

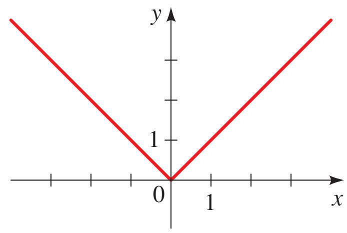


FIGURA 7 Gráfica de $f(x) = |x|$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 23

La **función entero** mayor está definida por

$$[\![x]\!] = \text{máximo entero menor o igual a } x$$

Por ejemplo, $[\![2]\!] = 2$, $[\![2.3]\!] = 2$, $[\![1.999]\!] = 1$, $[\![0.002]\!] = 0$, $[\![-3.5]\!] = -4$, y $[\![-0.5]\!] = -1$.

EJEMPLO 6 | Gráfica de la función entero mayor

Trace la gráfica de $f(x) = [\![x]\!]$

SOLUCIÓN La tabla muestra los valores de f para algunos valores de x. Observe que $f(x)$ es constante entre enteros consecutivos, de modo que la gráfica entre enteros es un segmento de recta horizontal, como se ve en la Figura 8.

x	$[\![x]\!]$
$\vdots$	$\vdots$
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
$\vdots$	$\vdots$

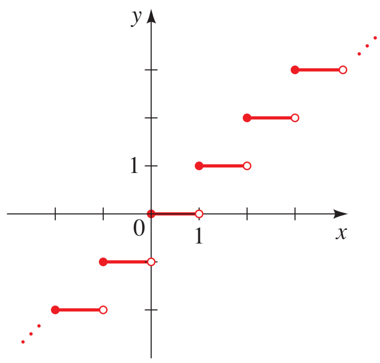


FIGURA 8 La función entero mayor, $y = [\![x]\!]$

La función entero mayor es un ejemplo de una **función escalón**. El siguiente ejemplo da un ejemplo real de una función escalón.

EJEMPLO 7 | La función de costo para llamadas telefónicas de larga distancia

El costo de una llamada telefónica de larga distancia diurna de Toronto, Canadá, a Mumbai, India, es de 69 centavos por el primer minuto y 58 centavos por cada minuto adicional (o parte de un minuto). Trace la gráfica del costo C (en dólares) de la llamada telefónica como función del tiempo t (en minutos).

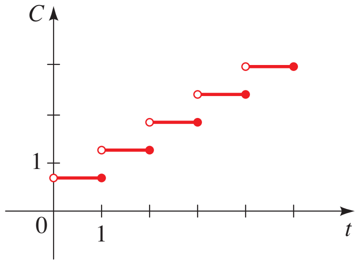


FIGURA 9 Costo de una llamada de larga distancia

SOLUCIÓN Sea $C(t)$ el costo por t minutos. Como $t > 0$, el dominio de la función es $(0, \infty)$. De la información dada tenemos

$$
\begin{aligned}
C(t) &= 0.69 && \text{si } 0 < t \leq 1 \\
C(t) &= 0.69 + 0.58 = 1.27 && \text{si } 1 < t \leq 2 \\
C(t) &= 0.69 + 2(0.58) = 1.85 && \text{si } 2 < t \leq 3 \\
C(t) &= 0.69 + 3(0.58) = 2.43 && \text{si } 3 < t \leq 4
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente. La gráfica se muestra en la Figura 9.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **81**

Las funciones continuas están definidas en forma más precisa en la Sección 13.2, en la página 851.

Una función se llama **continua** si su gráfica no tiene "rupturas" o "huecos". Las funciones de los Ejemplos 1, 2, 3 y 5 son continuas; las funciones de los Ejemplos 4, 6 y 7 no son continuas.

La prueba de la recta vertical

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la pregunta: ¿Cuáles curvas del plano xy son gráficas de funciones? Esto se contesta por medio de la prueba siguiente.

> **LA PRUEBA DE LA RECTA VERTICAL**
>
> Una curva en el plano de coordenadas es la gráfica de una función si y sólo si ninguna recta vertical cruza la curva más de una vez.

Podemos ver de la Figura 10 por qué la Prueba de la Recta Vertical es verdadera. Si cada recta vertical $x = a$ cruza la curva sólo una vez en (a, b), entonces exactamente un valor funcional está definido por $f(a) = b$. Pero si una recta $x = a$ cruza la curva dos veces, en (a, b) y en (a, c), entonces la curva no puede representar una función porque una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

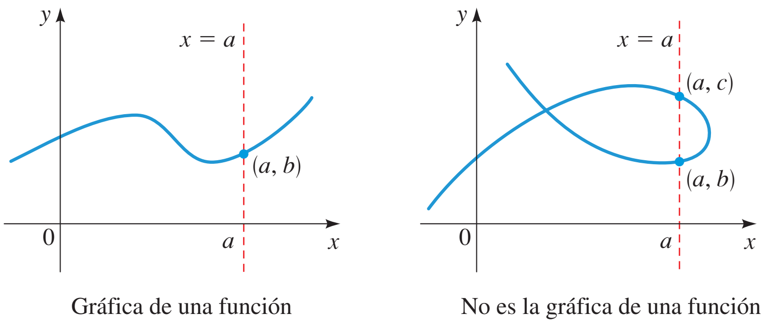


FIGURA 10 Prueba de la Recta Vertical

EJEMPLO 8 | Uso de la Prueba de la Recta Vertical

Usando la Prueba de la Recta Vertical, vemos que las curvas en las partes (b) y (c) de la Figura 11 representan funciones, mientras que las de las partes (a) y (d) no la representan.

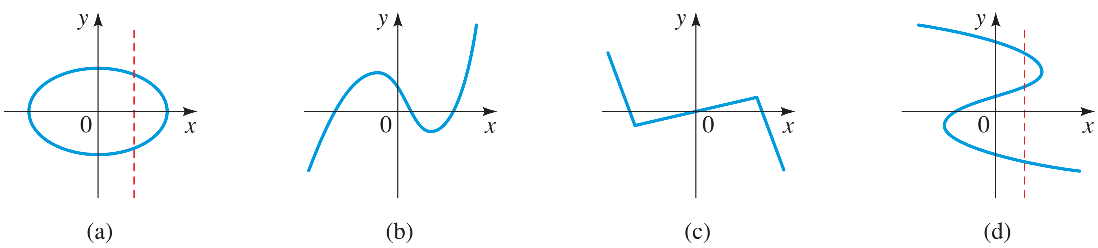


FIGURA 11

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

Ecuaciones que definen funciones

Cualquier ecuación con las variables x y y define una relación entre estas variables. Por ejemplo, la ecuación

$$y - x^2 = 0$$

define una relación entre y y x. ¿Esta ecuación define a y como *función* de x? Para saberlo, despejamos y y obtenemos

$$y = x^2$$

Vemos que la ecuación define una regla, o función, que da un valor de y por cada valor de x. Podemos expresar esta regla en notación de funciones como

$$f(x) = x^2$$

Pero no toda ecuación define a y como función de x, como lo muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 9 | Ecuaciones que definen funciones

¿La ecuación define a y como función de x?

(a) $y - x^2 = 2$ **(b)** $x^2 + y^2 = 4$

SOLUCIÓN

(a) Despejando y en términos de x tendremos

$$\begin{aligned} y - x^2 &= 2 \\ y &= x^2 + 2 \qquad \text{Sume } x^2 \end{aligned}$$

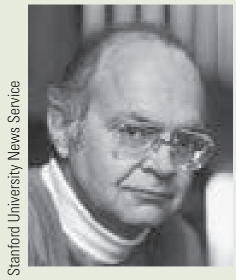
La última ecuación es una regla que da un valor de y por cada valor de x, de modo que define a y como función de x. Podemos escribir la función como $f(x) = x^2 + 2$.

(b) Intentamos despejar y en términos de x:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ y^2 &= 4 - x^2 \qquad \text{Reste } x^2 \\ y &= \pm\sqrt{4 - x^2} \qquad \text{Tome raíces cuadradas} \end{aligned}$$

La última ecuación da dos valores de y por un valor dado de x. Entonces, la ecuación no define a y como una función de x.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **57** Y **61**



DONALD KNUTH nació en Milwaukee en 1938 y es profesor emérito de Ciencias de la Computación en la Universidad de Stanford. Cuando Knuth era estudiante de secundaria, quedó fascinado con gráficas de funciones y laboriosamente dibujó cientos de ellas porque quería ver el comportamiento de una gran variedad de funciones. (Hoy en día, desde luego, es mucho más fácil usar computadoras y calculadoras graficadoras para hacer esto.) Cuando todavía era estudiante graduado en el Caltech, empezó a escribir una monumental serie de libros titulada *The Art of Computer Programming.*

Knuth es famoso por su invento del ENTRA, que es un sistema de ajuste de tipos asistido por computadora. Este sistema fue utilizado en la preparación del manuscrito para este libro.

Knuth ha recibido numerosos honores, entre ellos la elección como Profesor Adjunto de la Academia de Ciencias de Francia, y como Miembro de Número de la Royal Society. El presidente Carter le otorgó la Medalla Nacional de Ciencias en 1979.

Las gráficas de las ecuaciones del Ejemplo 9 se ilustran en la Figura 12. La Prueba de la Recta Vertical muestra gráficamente que la ecuación del Ejemplo 9(a) define una función, pero la ecuación del Ejemplo 9(b) no la define.

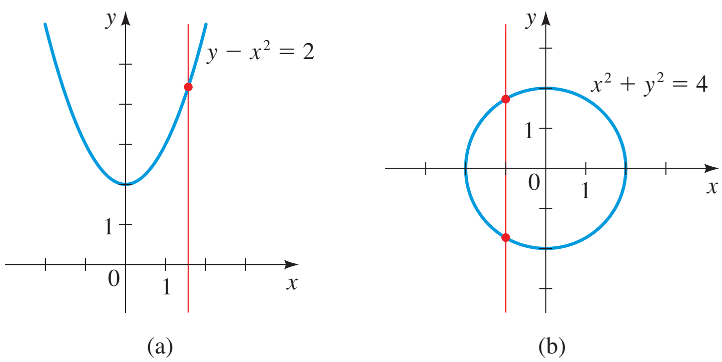
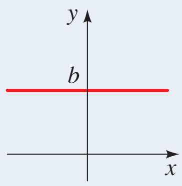


FIGURA 12

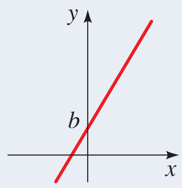
La tabla siguiente muestra las gráficas de algunas funciones que con frecuencia se ven en este libro.

ALGUNAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS

Funciones lineales
$f(x) = mx + b$

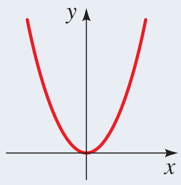


$f(x) = b$

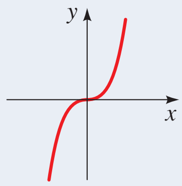


$f(x) = mx + b$

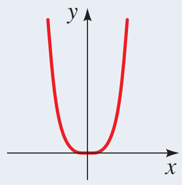
Funciones potencia
$f(x) = x^n$



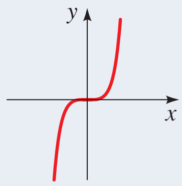
$f(x) = x^2$



$f(x) = x^3$

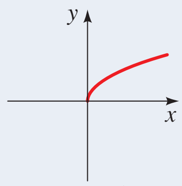


$f(x) = x^4$

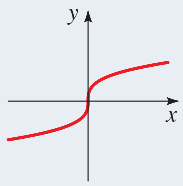


$f(x) = x^5$

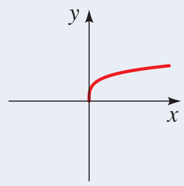
Funciones raíz
$f(x) = \sqrt[n]{x}$



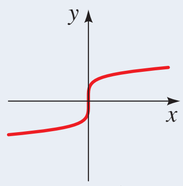
$f(x) = \sqrt{x}$



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

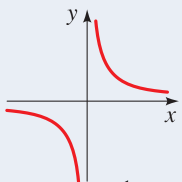


$f(x) = \sqrt[4]{x}$

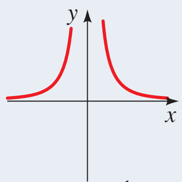


$f(x) = \sqrt[5]{x}$

Funciones recíprocas
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$

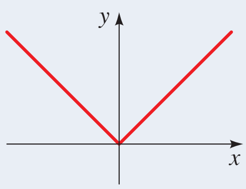


$f(x) = \dfrac{1}{x}$



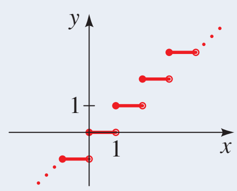
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Función valor absoluto
$f(x) = |x|$



$f(x) = |x|$

Función entero mayor
$f(x) = [\![x]\!]$



$f(x) = [\![x]\!]$

2.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

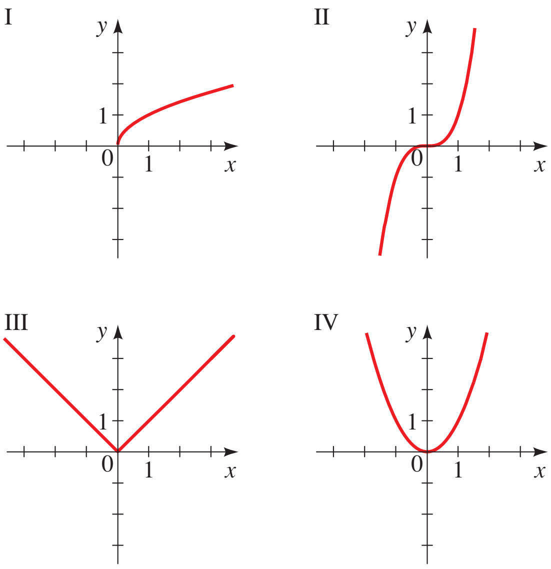
1. Para graficar la función f, localizamos los puntos $(x, \_)$ en un plano de coordenadas. Para graficar $f(x) = x^3 + 2$, localizamos los puntos $(x, \_)$. Por lo tanto, el punto $(2, \_\_\_)$ está sobre la gráfica de f. La altura de la gráfica de f arriba del eje x cuando $x = 2$ es $\_\_\_$.

2. Si $f(2) = 3$, entonces el punto $(2, \_\_\_)$ está sobre la gráfica de f.

3. Si el punto (2, 3) está sobre la gráfica de f, entonces $f(2) =$ ___.

4. Relacione la función con su gráfica.

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x^3$
(c) $f(x) = \sqrt{x}$ (d) $f(x) = |x|$



HABILIDADES

5-28 ■ Trace la gráfica de la función haciendo primero una tabla de valores.

5. $f(x) = 2$
6. $f(x) = -3$
7. $f(x) = 2x - 4$
8. $f(x) = 6 - 3x$
9. $f(x) = -x + 3, \quad -3 \le x \le 3$
10. $f(x) = \dfrac{x-3}{2}, \quad 0 \le x \le 5$
11. $f(x) = -x^2$
12. $f(x) = x^2 - 4$
13. $h(x) = 16 - x^2$
14. $g(x) = (x-3)^2$
15. $g(x) = x^3 - 8$
16. $g(x) = (x+2)^3$
17. $g(x) = x^2 - 2x$
18. $h(x) = 4x^2 - x^4$
19. $f(x) = 1 + \sqrt{x}$
20. $f(x) = \sqrt{x+4}$
21. $g(x) = -\sqrt{x}$
22. $g(x) = \sqrt{-x}$
23. $H(x) = |2x|$
24. $H(x) = |x+1|$
25. $G(x) = |x| + x$
26. $G(x) = |x| - x$
27. $f(x) = |2x - 2|$
28. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$

29-32 ■ Grafique la función en cada uno de los rectángulos de vista dados, y seleccione el que produzca la gráfica más apropiada de la función.

29. $f(x) = 8x - x^2$
(a) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
(b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-2, 10]$ por $[-5, 20]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-100, 100$

30. $g(x) = x^2 - x - 20$
(a) $[-2, 2]$ por $[-5, 5]$
(b) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-7, 7]$ por $[-25, 20]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-100, 100]$

31. $h(x) = x^3 - 5x - 4$
(a) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(b) $[-3, 3]$ por $[-10, 10]$
(c) $[-3, 3]$ por $[-10, 5]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

32. $k(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 2$
(a) $[-1, 1]$ por $[-1, 1]$
(b) $[-2, 2]$ por $[-2, 2]$
(c) $[-5, 5]$ por $[-5, 5]$
(d) $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$

33-46 ■ Trace la gráfica de la función definida por tramos.

33. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

34. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 1 \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

35. $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x < 2 \\ x - 1 & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$

36. $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < -2 \\ 5 & \text{si } x \ge -2 \end{cases}$

37. $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \le 0 \\ x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

38. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < -1 \\ 3 - x & \text{si } x \ge -1 \end{cases}$

39. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 1 & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

40. $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

41. $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \le -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \le 2 \\ 3 & \text{si } |x| > 2 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } |x| \le 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$

45. $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < -2 \\ x^2 & \text{si } -2 \le x \le 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

46. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \le 0 \\ 9 - x^2 & \text{si } 0 < x \le 3 \\ x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

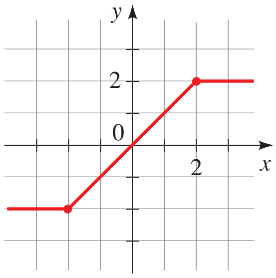
47-48 ■ Use una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la función definida por tramos. (Vea la nota al margen, pág. 155.)

47. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

48. $f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & \text{si } x > 1 \\ (x - 1)^3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

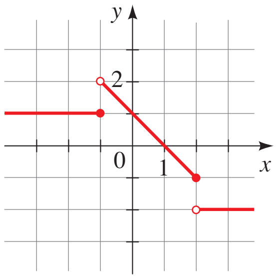
49-50 ■ Nos dan la gráfica de una función definida por tramos. Encuentre una fórmula para la función en la forma indicada.

49.



$f(x) = \begin{cases} \quad & \text{si } x < -2 \\ \quad & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ \quad & \text{si } x > 2 \end{cases}$

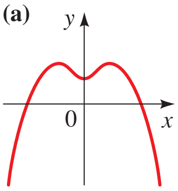
50.



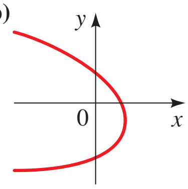
$f(x) = \begin{cases} \quad & \text{si } x \leq -1 \\ \quad & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ \quad & \text{si } x > 2 \end{cases}$

51-52 ■ Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de x.

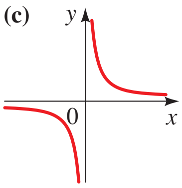
51. (a)



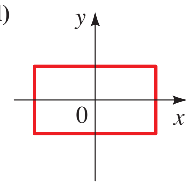
(b)



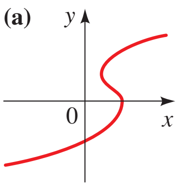
(c)



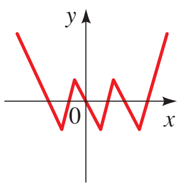
(d)



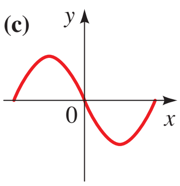
52. (a)



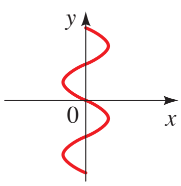
(b)



(c)

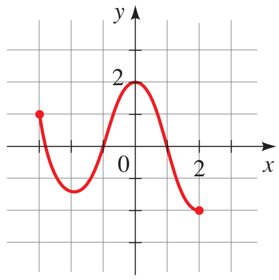


(d)

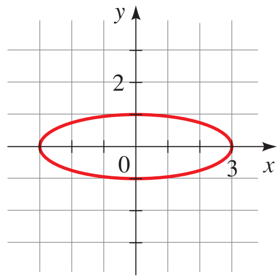


53-56 ■ Use la Prueba de la Recta Vertical para determinar si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, exprese el dominio y el rango de la función.

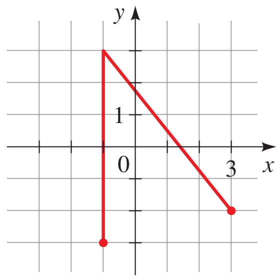
53.



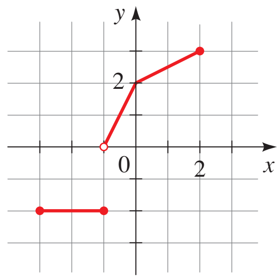
54.



55.



56.



57-68 ■ Determine si la ecuación define y como función de x. (Vea Ejemplo 9.)

57. $x^2 + 2y = 4$

58. $3x + 7y = 21$

59. $x = y^2$

60. $x^2 + (y - 1)^2 = 4$

61. $x + y^2 = 9$

62. $x^2 + y = 9$

63. $x^2y + y = 1$

64. $\sqrt{x} + y = 12$

65. $2|x| + y = 0$

66. $2x + |y| = 0$

67. $x = y^3$

68. $x = y^4$

69-74 ■ Nos dan una familia de funciones. En las partes (a) y (b) grafique en el rectángulo de vista indicado todos los miembros de la familia dados. En la parte (c) exprese las conclusiones que pueda hacer a partir de sus gráficas.

69. $f(x) = x^2 + c$
- **(a)** $c = 0, 2, 4, 6;$ $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -2, -4, -6;$ $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

70. $f(x) = (x - c)^2$
- **(a)** $c = 0, 1, 2, 3;$ $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -1, -2, -3;$ $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

71. $f(x) = (x - c)^3$
- **(a)** $c = 0, 2, 4, 6;$ $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 0, -2, -4, -6;$ $[-10, 10]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

72. $f(x) = cx^2$
- **(a)** $c = 1, \frac{1}{2}, 2, 4;$ $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(b)** $c = 1, -1, -\frac{1}{2}, -2;$ $[-5, 5]$ por $[-10, 10]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

73. $f(x) = x^c$
- **(a)** $c = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6};$ $[-1, 4]$ por $[-1, 3]$
- **(b)** $c = 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5};$ $[-3, 3]$ por $[-2, 2]$
- **(c)** ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de c?

74. $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$

(a) $n = 1, 3;\quad [-3, 3]$ por $[-3, 3]$
(b) $n = 2, 4;\quad [-3, 3]$ por $[-3, 3]$
(c) ¿En qué forma afecta la gráfica el valor de n?

75-78 ■ Encuentre una función cuya gráfica es la curva dada.

75. El segmento de recta que une los puntos $(-2, 1)$ y $(4, -6)$

76. El segmento de recta que une los puntos $(-3, -2)$ y $(6, 3)$

77. La mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

78. La mitad inferior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$

APLICACIONES

79. Globo de meteorología Cuando se infla un globo de meteorología, el grueso T de la capa de caucho está relacionada con el globo mediante la ecuación

$$T(r) = \frac{0.5}{r^2}$$

donde T y r se miden en centímetros. Grafique la función T para valores de r entre 10 y 100.

80. Potencia generada por una turbina de viento La potencia producida por una turbina de viento depende de la velocidad del viento. Si un molino de viento tiene aspas de 3 metros de largo, entonces la potencia P producida por la turbina está modelada por

$$P(v) = 14.1v^3$$

donde P se mide en watts (W) y v se mide en metros por segundo (m/s). Grafique la función P para velocidades de viento entre 1 m/s y 10 m/s.

81. Tarifas de una empresa generadora de energía eléctrica Westside Energy cobra a sus consumidores de energía eléctrica una tarifa base de \$6.00 por mes, más \$0.10 por kilowatt-hora (kWh) por los primeros 300 kWh consumidos y \$0.06 por kWh por todo lo consumido de más de 300 kWh. Suponga que un cliente usa x kWh de electricidad en un mes.
(a) Exprese el costo mensual E como una función de x definida por tramos.
(b) Grafique la función E para $0 \le x \le 600$.

82. Función de un taxi Una compañía de taxis cobra \$2.00 por la primera milla (o parte de milla) y 20 centavos por cada décimo sucesivo de milla (o parte). Exprese el costo C (en dólares) de un viaje como función definida por partes de la distancia x recorrida (en millas) para $0 < x < 2$, y trace la gráfica de esta función.

83. Tarifas postales La tarifa nacional de portes por cartas de primera clase, de 3.5 onzas o menos, es de 44 centavos por la primera onza (o menos), más 17 centavos por cada onza adicional (o parte de una onza). Exprese el porte P como una función definida por partes del peso x de una carta, con $0 < x \le 3.5$, y trace la gráfica de esta función.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

84. ¿Cuándo una gráfica representa a una función? Para todo entero n, la gráfica de la ecuación $y = x^n$ es la gráfica de una función, es decir, $f(x) = x^n$. Explique por qué la gráfica de $x = y^2$ *no es* la gráfica de una función de x. ¿La gráfica de $x = y^3$ es una gráfica de la función de x? Si es así, ¿de qué función de x es la gráfica? Determine para qué enteros n la gráfica de $x = y^n$ es la gráfica de una función de x.

85. Funciones escalón En el Ejemplo 7 y los Ejercicios 82 y 83 nos dan funciones cuyas gráficas están formadas por segmentos de recta horizontal. Es frecuente que tales funciones reciban el nombre de *funciones escalón*, porque sus gráficas se ven como escaleras. Dé algunos otros ejemplos de funciones escalón que se ven en la vida diaria.

86. Funciones escalón alargadas Trace gráficas de las funciones $f(x) = [\![x]\!]$, $g(x) = [\![2x]\!]$ y $h(x) = [\![3x]\!]$ en gráficas separadas. ¿Cómo están relacionadas? Si n es un entero positivo, ¿qué aspecto tiene la gráfica de $k(x) = [\![nx]\!]$?

87. Gráfica del valor absoluto de una función

(a) Trace las gráficas de las funciones

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

y

$$g(x) = |x^2 + x - 6|$$

¿Cómo están relacionadas las gráficas de f y g?

(b) Trace las gráficas de las funciones $f(x) = x^4 - 6x^2$ y $g(x) = |x^4 - 6x^2|$. ¿Cómo están relacionadas las gráficas de f y g?

(c) En general, si $g(x) = |f(x)|$, ¿cómo están relacionadas las gráficas de f y g? Trace gráficas para ilustrar su respuesta.

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Relaciones y funciones**

En este proyecto exploramos el concepto de función al compararlo con el concepto de una relación. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**

2.3 INFORMACIÓN A PARTIR DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Valores de una función: dominio y rango ▶ Funciones crecientes y decrecientes ▶ Valores máximo y mínimo locales de una función

Numerosas propiedades de una función se obtienen más fácilmente de una gráfica que de la regla que describe la función. Veremos en esta sección cómo una gráfica nos dice si los valores de una función son crecientes o decrecientes, así como también dónde están los valores máximo y mínimo de una función.

▼ Valores de una función: dominio y rango

Una gráfica completa de una función contiene toda la información acerca de una función, porque la gráfica nos dice cuáles valores de entrada corresponden a cuáles valores de salida. Para analizar la gráfica de una función, debemos recordar que *la altura de la gráfica es el valor de la función*. Entonces, podemos leer los valores de una función a partir de su gráfica.

EJEMPLO 1 | Hallar los valores de una función a partir de una gráfica

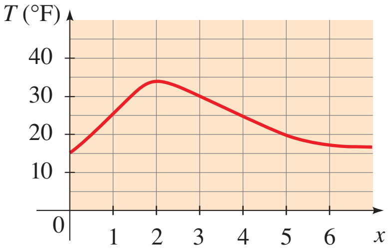


FIGURA 1 Función temperatura

La función T graficada en la Figura 1 da la temperatura entre el mediodía y las 6:00 p.m. en cierta estación meteorológica.

(a) Encuentre $T(1)$, $T(3)$ y $T(5)$.

(b) ¿Cuál es mayor, $T(2)$ o $T(4)$?

(c) Encuentre el (los) valor(es) de x para los que $T(x) = 25$.

(d) Encuentre el (los) valor(es) de x para los que $T(x) \geq 25$.

SOLUCIÓN

(a) $T(1)$ es la temperatura a la 1:00 p.m. Está representada por la altura de la gráfica arriba del eje x en $x = 1$. Entonces, $T(1) = 25$. Análogamente, $T(3) = 30$ y $T(5) = 20$.

(b) Como la gráfica es más alta en $x = 2$ que en $x = 4$, se deduce que $T(2)$ es mayor que $T(4)$.

(c) La altura de la gráfica es 25 cuando x es 1 y cuando x es 4. En otras palabras, la temperatura es 25 a la 1:00 p.m. y a las 4:00 p.m.

(d) La gráfica es más alta de 25 para x entre 1 y 4. En otras palabras, la temperatura era 25 o mayor entre la 1:00 p.m. y las 4:00 p.m.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5** ■

La gráfica de una función nos ayuda a representar el dominio y rango de la función en el eje x y eje y, como se ve en la figura 2.

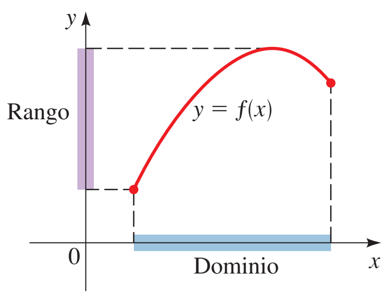


FIGURA 2 Dominio y rango de f

EJEMPLO 2 | Hallar el dominio y rango a partir de una gráfica

(a) Use calculadora graficadora para trazar la gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

(b) Encuentre el dominio y rango de f.

SOLUCIÓN

(a) La gráfica se muestra en la Figura 3.

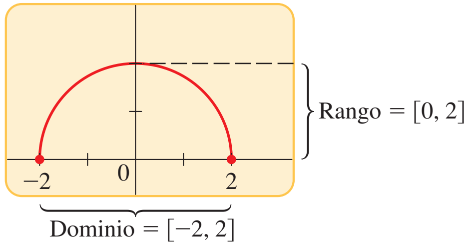


FIGURA 3 Gráfica de $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(b) De la gráfica de la Figura 3 vemos que el dominio es $[-2, 2]$ y el rango es $[0, 2]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

Funciones crecientes y decrecientes

Es muy útil saber en dónde sube la gráfica y en dónde baja. La gráfica que se ve en la Figura 4 sube, baja y luego sube de nuevo a medida que avanzamos de izquierda a derecha: sube de A a B, baja de B a C y sube otra vez de C a D. Se dice que la función f es *creciente* cuando su gráfica sube y *decreciente* cuando baja.

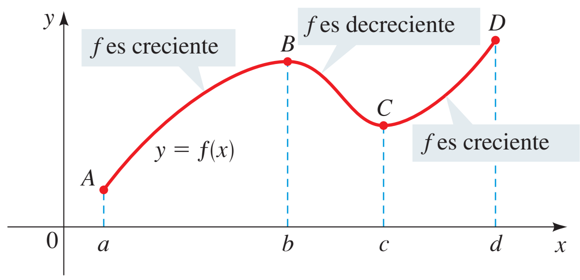


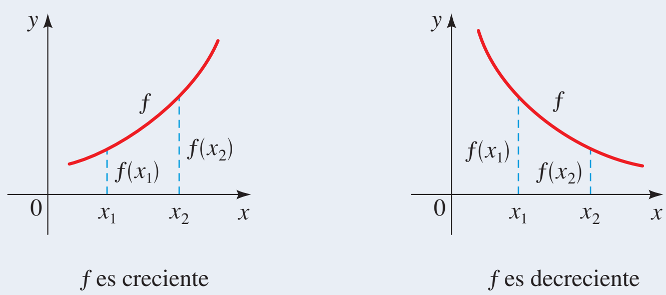
FIGURA 4 f es creciente en $[a, b]$ y $[c, d]$. f es decreciente en $[b, c]$.

Tenemos la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

f es **creciente** en un intervalo I si $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.

f es **decreciente** en un intervalo I si $f(x_1) > f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$ en I.



EJEMPLO 3 | Intervalos en los que una función crece y decrece

La gráfica de la Figura 5 da el peso W de una persona a la edad x. Determine los intervalos en los que la función W es creciente y en los que es decreciente.

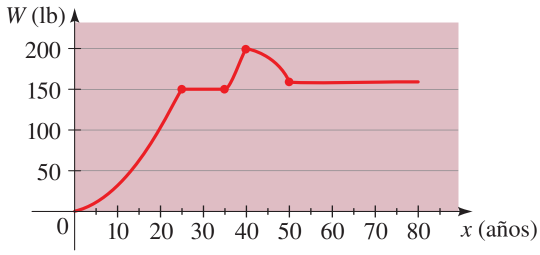


FIGURA 5 El peso como función de la edad

SOLUCIÓN La función W es creciente en $[0, 25]$ y $[35, 40]$. Es decreciente en $[40, 50]$. La función W es constante (ni creciente ni decreciente) en $[25, 30]$ y $[50, 80]$. Esto significa que la persona aumentó de peso hasta la edad de 25, luego aumentó de peso otra vez entre las edades de 35 y 40. Bajó de peso entre las edades de 40 y 50.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

EJEMPLO 4 | Hallar intervalos donde una función crece y decrece

(a) Trace la gráfica de la función $f(x) = 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$.

(b) Encuentre el dominio y rango de f.

(c) Encuentre los intervalos en los que f crece y decrece.

SOLUCIÓN

(a) Usamos una calculadora graficadora para trazar la gráfica de la Figura 6.

(b) El dominio de f es $\mathbb{R}$ porque f está definida para todos los números reales. Usando la función $\boxed{\text{TRACE}}$ de la calculadora, encontramos que el valor más alto de $f(2) = 32$. Por lo tanto, el rango de f es $(-\infty, 32]$.

(c) De la gráfica vemos que f es creciente en los intervalos $(-\infty, -1]$ y $[0, 2]$ y es creciente en $[-1, 0]$ y $[2, \infty)$.

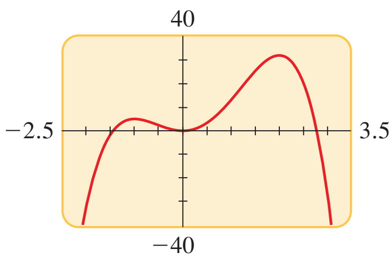


FIGURA 6 Gráfica de $f(x) = 12x^2 + 4x^3 - 3x^4$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

EJEMPLO 5 | Hallar intervalos donde una función crece y decrece

(a) Trace la gráfica de la función $f(x) = x^{2/3}$.
(b) Encuentre el dominio y rango de la función.
(c) Encuentre los intervalos en los que f crece y decrece.

SOLUCIÓN

(a) Usamos una calculadora graficadoras para trazar la gráfica en la Figura 7.
(b) De la gráfica observamos que el dominio de f es $\mathbb{R}$ y el rango es $[0, \infty)$.
(c) De la gráfica vemos que f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, \infty)$.

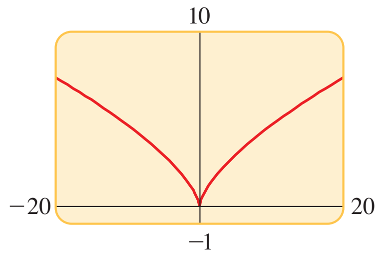


FIGURA 7 Gráfica de $f(x) = x^{2/3}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 29

Valores máximo y mínimo locales de una función

Hallar los valores máximo y mínimo de una función es importante en numerosas aplicaciones. Por ejemplo, si una función representa ingreso o utilidad, entonces estamos interesados en su valor máximo. Para una función que representa costo, desearíamos hallar su valor mínimo. (Vea *Enfoque sobre el modelado*: *Modelado con funciones* en las páginas 213-222 para muchos otros ejemplos.) Fácilmente podemos hallar estos valores a partir de la gráfica de una función. Primero definimos qué queremos decir con un máximo o mínimo locales.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS LOCALES DE UNA FUNCIÓN

1. El valor de una función $f(a)$ es un **valor máximo local** de f si

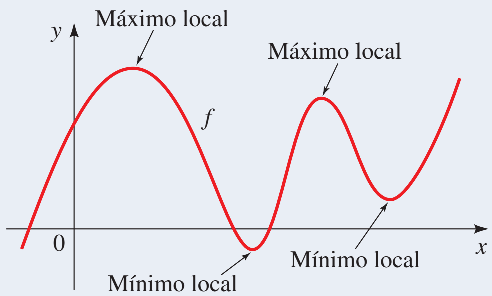
$$f(a) \geq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ es cercana a } a$$

(Esto significa que $f(a) \geq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a a.)
En este caso decimos que f tiene un **máximo local** en $x = a$.

2. El valor de la función $f(a)$ es un **mínimo local** de f si

$$f(a) \leq f(x) \quad \text{cuando } x \text{ es cercana a } a$$

(Esto significa que $f(a) \leq f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a a.)
En este caso decimos que f tiene un **mínimo local** en $x = a$.



Podemos hallar los valores máximo y mínimo locales de una función usando una calculadora graficadora.

Si hay un rectángulo de vista tal que el punto $(a, f(a))$ es el punto más alto en la gráfica de f *dentro del* rectángulo de vista (no en el borde), entonces el número $f(a)$ es un valor máximo local de f (vea Figura 8). Observe que $f(a) \geq f(x)$ para todos los números x que sean cercanos a a.

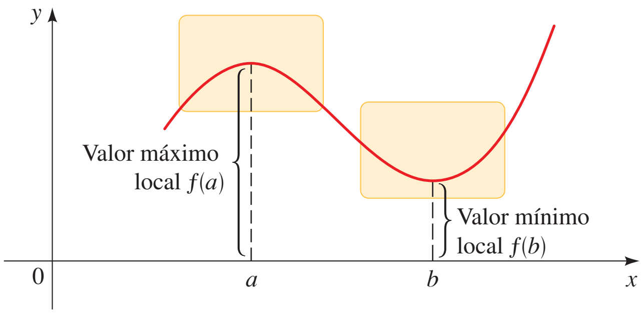


FIGURA 8

Análogamente, si hay un rectángulo de vista tal que el punto $(b, f(b))$ es el punto más bajo en la gráfica de f dentro del rectángulo de vista, entonces el número $f(b)$ es un valor mínimo local de f. En este caso, $f(b) \leq f(x)$ para todos los números x que sean cercanos a b.

EJEMPLO 6 | Hallar máximos y mínimos locales para una gráfica

Encuentre los valores máximo y mínimo local de la función $f(x) = x^3 - 8x + 1$, correctos a tres lugares decimales.

SOLUCIÓN La gráfica de f se muestra en la Figura 9. Parece haber un máximo local entre $x = -2$ y $x = -1$, y un mínimo local entre $x = 1$ y $x = 2$.

Primero busquemos las coordenadas del punto máximo local. Hacemos acercamiento (zoom) para ampliar el área cerca de este punto, como se ve en la Figura 10. Con el uso de la función $\boxed{\text{TRACE}}$ de la calculadora graficadora, movemos el cursor a lo largo de la curva y observamos cómo cambian las coordenadas y. El valor máximo local de y es 9.709 y este valor ocurre cuando x es -1.633 correcto a tres lugares decimales.

Localizamos el valor mínimo en una forma similar. Al hacer acercamiento en el rectángulo de vista como se ve en la Figura 11, encontramos que el valor mínimo local es aproximadamente -7.709, y este valor se presenta cuando $x \approx 1.633$.

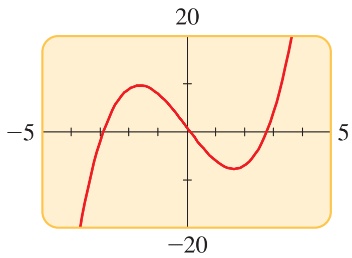


FIGURA 9 Gráfica de $f(x) = x^3 - 8x + 1$

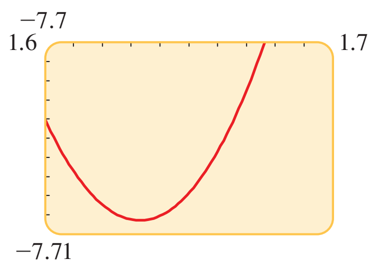


FIGURA 10

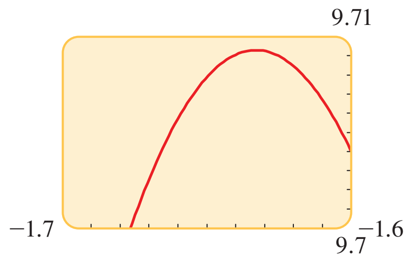


FIGURA 11

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

Los comandos `maximum` y `minimum` en una calculadora TI-83 o TI-84 son otro método para hallar valores extremos de funciones. Usamos este método en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 7 | Un modelo para el índice de precios de alimentos

Un modelo para el índice de precios de alimentos (el precio de una "canasta" representativa de alimentos) entre 1990 y 2000 está dado por la función

$$I(t) = -0.0113t^3 + 0.0681t^2 + 0.198t + 99.1$$

donde t se mide en años desde la mitad del año 1990, de modo que $0 \le t \le 10$, e $I(t)$ está a escala para que $I(3) = 100$. Estime el tiempo cuando el alimento fue más costoso durante el período 1990-2000.

SOLUCIÓN La gráfica de I como función de t se muestra en la Figura 12(a). Parece haber un máximo entre $t = 4$ y $t = 7$. Usando el comando `maximum`, como se ve en la Figura 12(b), observamos que el valor máximo de I es alrededor de 100.38 y se presenta cuando $t \approx 5.15$, que corresponde a agosto de 1995.

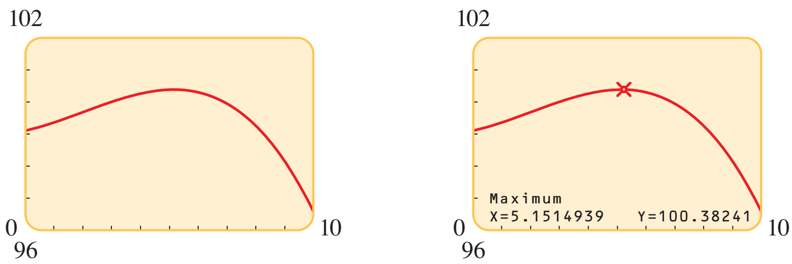


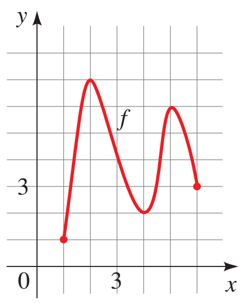
FIGURA 12 (a) (b)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

2.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1-4 ■ Estos ejercicios se refieren a la gráfica de la función f que se muestra a continuación.



1. Para hallar el valor de una función $f(x)$ a partir de la gráfica de f, encontramos la altura de la gráfica arriba del eje x en $x =$ ______. De la gráfica de f vemos que $f(3) =$ ______.

2. El dominio de la función f es todos los valores de ___ de los puntos sobre la gráfica, y el rango es todos los valores ____ correspondientes. De la gráfica de f vemos que el dominio de f es el intervalo _____ y el rango de f es el intervalo _____.

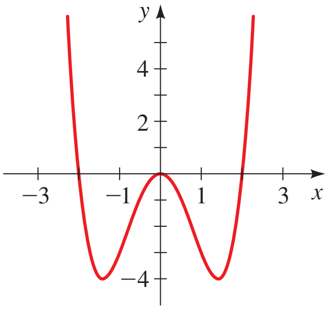
3. **(a)** Si f es creciente en un intervalo, entonces los valores y de los puntos en la gráfica ____ cuando aumentan los valores x. De la gráfica de f vemos que f es creciente en los intervalos _____ y ______.

   (b) Si f es decreciente en un intervalo, entonces los valores y de los puntos sobre la gráfica _____cuando aumentan los valores x. De la gráfica de f vemos que f es decreciente en los intervalos _____ y _____.

4. **(a)** El valor de una función $f(a)$ es un valor máximo local de f si $f(a)$ es el ______valor de f en algún intervalo que contenga a a. De la gráfica de f vemos que un valor máximo local de f es ____ y que este valor se presenta cuando x es _____.

   (b) El valor de una función $f(a)$ es un valor mínimo local de f si $f(a)$ es el ______valor de f en algún intervalo que contenga a a. De la gráfica de f vemos que un valor mínimo local de f es ____ y que este valor se presenta cuando x es _____.

86. Nos dan la gráfica de $f(x) = x^4 - 4x^2$. Use esta gráfica para trazar la gráfica de $g(x) = |x^4 - 4x^2|$.



87-88 ■ Trace la gráfica de cada función.

87. **(a)** $f(x) = 4x - x^2$ **(b)** $g(x) = |4x - x^2|$

88. **(a)** $f(x) = x^3$ **(b)** $g(x) = |x^3|$

APLICACIONES

89. Crecimiento en ventas Las ventas anuales de cierta empresa pueden modelarse con la función $f(t) = 4 + 0.01t^2$, donde t representa los años desde 1900 y $f(t)$ es medida en millones de dólares.

(a) ¿Qué operaciones de cambio y reducción deben hacerse en la función $y = t^2$ para obtener la función $y = f(t)$?

(b) Suponga que t representa los años desde 2000 en vez de 1900. ¿Qué transformación podría aplicar a la función $y = f(t)$ para lograr esto? Escriba la nueva función $y = g(t)$ que resulta de esta transformación.

90. Escalas de temperatura que cambia La temperatura en cierta tarde está modelada por la función

$$C(t) = \tfrac{1}{2}t^2 + 2$$

donde t representa horas después de las 12 del mediodía ($0 \leq t \leq 6$) y C se mide en ºC.

(a) ¿Qué operaciones de desplazamiento y contracción deben efectuarse en la función $y = t^2$ para obtener la función $y = c(t)$?

(b) Supongamos que se desea medir la temperatura en ºF. ¿Qué transformación tendría que aplicarse a la función $y = C(t)$ para lograr esto? (Use el hecho de que la relación entre grados Celsius y Fahrenheit está dada por $F = \frac{9}{5}C + 32$. Escriba la nueva función $y = F(t)$ que resulta de esta transformación.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

91. Sumas de funciones pares e impares Si f y g son funciones pares ambas, ¿$f + g$ es necesariamente par? Si ambas son impares, ¿su suma es necesariamente impar? ¿Qué se puede decir acerca de la suma si una es impar y una es par? En cada caso, demuestre su respuesta.

92. Productos de funciones pares e impares Conteste las mismas preguntas del Ejercicio 91, excepto que esta vez considere el producto de f y g en lugar de la suma.

93. Funciones de potencia pares e impares ¿Qué debe ser cierto acerca del entero n si la función

$$f(x)= x^n$$

es una función par? ¿Si es una función impar? ¿Por qué piensa usted que los nombres "par" e "impar" se escogieron para estas propiedades de función?

2.6 COMBINACIÓN DE FUNCIONES

| Sumas, diferencias, productos y cocientes ▶ Composición de funciones

En esta sección estudiaremos diferentes maneras de combinar funciones para formar nuevas.

▼ Sumas, diferencias, productos y cocientes

La suma de f y g está definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El nombre de la nueva función es "$f + g$". Por lo tanto, este signo + representa la operación de adición de *funciones*, pero el signo + del lado derecho representa adición de los *números* $f(x)$ y $g(x)$.

Dos funciones f y g pueden combinarse para formar nuevas funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g de un modo semejante a como sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números reales. Por ejemplo, definimos la función $f + g$ por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

La nueva función $f + g$ se denomina **suma** de las funciones f y g; su valor en x es $f(x) + g(x)$. Desde luego, la suma del lado derecho tiene sentido sólo si $f(x)$ y $g(x)$ están definidas, es decir, si f pertenece al dominio de f y también al dominio de g. Por lo tanto, si el dominio de f es A y el dominio de g es B, entonces el dominio $f + g$ es la intersección de estos dominios, o sea $A \cap B$. Análogamente, podemos definir la **diferencia** $f - g$, el **producto** fg y el **cociente** f/g de las funciones f y g. Sus dominios son $A \cap B$, pero en el caso del cociente debemos recordar no dividir entre 0.

ÁLGEBRA DE FUNCIONES

Sean f y g funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f + g$, $f - g$, fg y f/g están definidas como sigue.

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \text{Dominio } A \cap B$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{Dominio } \{x \in A \cap B \mid g(x) \neq 0\}$$

EJEMPLO 1 | Combinaciones de funciones y sus dominios

Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x}$

(a) Encuentre las funciones $f + g$, $f - g$, fg, y f/g y sus dominios.

(b) Encuentre $(f + g)(4)$, $(f - g)(4)$, $(fg)(4)$, y $(f/g)(4)$.

SOLUCIÓN

(a) El dominio de f es $\{x \mid x \neq 2\}$, y el dominio de g es $\{x \mid x \geq 0\}$. La intersección de los dominios de f y g es

$$\{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\} = [0, 2) \cup (2, \infty)$$

Por lo tanto, tenemos

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x-2} - \sqrt{x} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

Para dividir fracciones, invierta el denominador y multiplique:

$$\frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}} = \frac{1/(x-2)}{\sqrt{x}/1} = \frac{1}{x-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-2} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x \geq 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \qquad \text{Dominio } \{x \mid x > 0 \text{ y } x \neq 2\}$$

Observe que en el dominio de f/g excluimos 0 porque $g(0) = 0$.

(b) Cada uno de estos valores existe porque $x = 4$ está en el dominio de cada función.

$$(f + g)(4) = f(4) + g(4) = \frac{1}{4-2} + \sqrt{4} = \frac{5}{2}$$

$$(f - g)(4) = f(4) - g(4) = \frac{1}{4-2} - \sqrt{4} = -\frac{3}{2}$$

$$(fg)(4) = f(4)g(4) = \left(\frac{1}{4-2}\right)\sqrt{4} = 1$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(4) = \frac{f(4)}{g(4)} = \frac{1}{(4-2)\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

La gráfica de la función $f + g$ puede obtenerse de las gráficas de f y g por **suma gráfica**. Esto significa que sumamos las coordenadas y correspondientes, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Uso de suma gráfica

Las gráficas de f y g se muestran en la Figura 1. Use suma gráfica para graficar la función de $f + g$.

SOLUCIÓN Obtenemos la gráfica de $f + g$ al "sumar gráficamente" el valor de $f(x)$ a $g(x)$ como se ve en la Figura 2. Esto se implementa al copiar el segmento de recta PQ sobre el de PR para obtener el punto S en la gráfica de $f + g$.

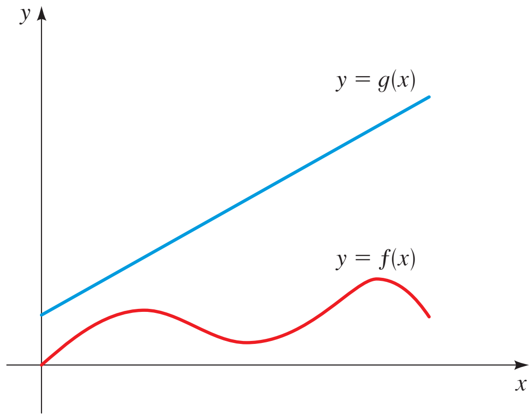


FIGURA 1

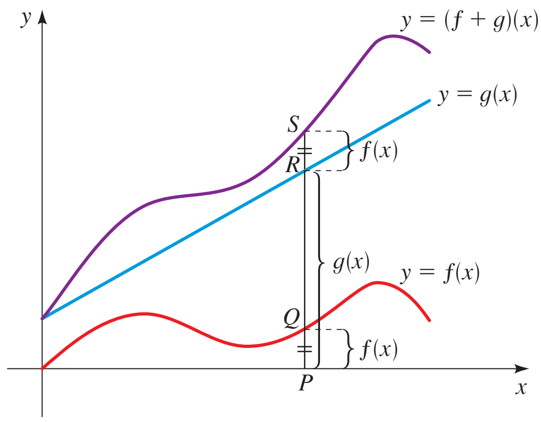


FIGURA 2 Suma gráfica

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

Composición de funciones

Ahora consideremos una forma muy importante de combinar dos funciones para obtener una nueva función. Suponga que $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 + 1$. Podemos definir una nueva función h como

$$h(x) = f(g(x)) = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

La función h está formada por las funciones f y g en una forma interesante: dado un número x, primero le aplicamos la función g y luego aplicamos f al resultado. En este caso, f es la regla "tome la raíz cuadrada", g es la regla "eleve al cuadrado, luego sume 1", y h es la regla "eleve al cuadrado, luego sume 1, luego tome la raíz cuadrada". En otras palabras, obtenemos la regla h al aplicar la regla g y luego la regla f. La Figura 3 muestra un diagrama de máquina para h

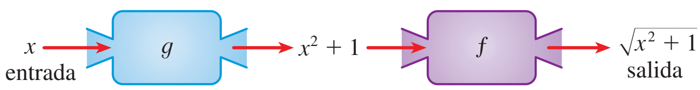


FIGURA 3 La máquina h está compuesta de la máquina g (primero) y luego por la máquina f.

En general, dadas dos funciones f y g cualesquiera, empezamos con un número x en el dominio de g y su imagen $g(x)$. Si este número $g(x)$ está en el dominio de f, podemos entonces calcular el valor de $f(g(x))$. El resultado es una nueva función $h(x) = f(g(x))$ que se obtiene al sustituir g en f. Se denomina la *composición* (o *compuesta*) de f y g, y se denota con $f \circ g$ ("f compuesta con g").

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g, la **función compuesta** $f \circ g$ (también llamada **composición** de f y g) está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x en el dominio de g tal que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras, $(f \circ g)(x)$ está definida siempre que tanto $g(x)$ como $f(g(x))$ estén definidas. Podemos describir $f \circ g$ usando un diagrama de flechas (Figura 4).

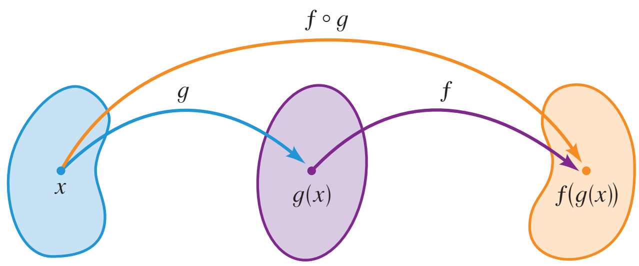


FIGURA 4 Diagrama de flechas para $f \circ g$

EJEMPLO 3 | Hallar la composición de funciones

Sean $f(x) = x^2$ y $g(x) = x - 3$.

(a) Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

(b) Encuentre $(f \circ g)(5)$ y $(g \circ f)(7)$.

SOLUCIÓN

En el ejemplo 3, f es la regla "elevar al cuadrado" y g es la regla "reste 3". La función $f \circ g$ primero resta 3 y luego eleva al cuadrado; la función $g \circ f$ primero eleva al cuadrado y luego resta tres.

(a) Tenemos

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g\\
&= f(x - 3) && \text{Definición de } g\\
&= (x - 3)^2 && \text{Definición de } f
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f\\
&= g(x^2) && \text{Definición de } f\\
&= x^2 - 3 && \text{Definición de } g
\end{aligned}$$

Los dominios tanto de $f \circ g$ como de $g \circ f$ son $\mathbb{R}$.

(b) Tenemos

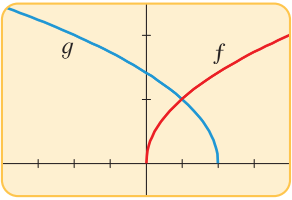
$$(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(2) = 2^2 = 4$$

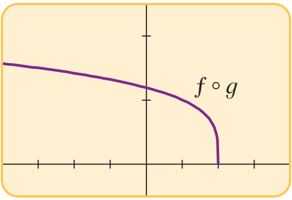
$$(g \circ f)(7) = g(f(7)) = g(49) = 49 - 3 = 46$$

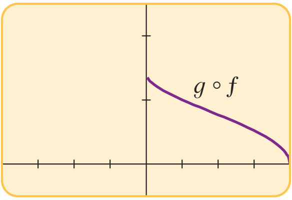
AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **21** Y **35**

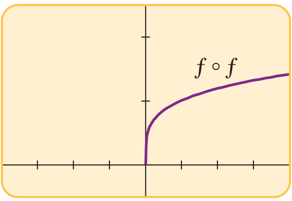
Del Ejemplo 3 se puede ver que, en general, $f \circ g \neq g \circ f$. Recuerde que la notación $f \circ g$ quiere decir que la función g se aplica primero y luego f se aplica en segundo lugar.

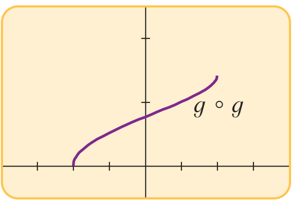
Las gráficas de f y g del Ejemplo 4, así como las de $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$, se muestran a continuación. Estas gráficas indican que la operación de composición puede producir funciones que son bastante diferentes de las funciones originales.











EJEMPLO 4 | Hallar la composición de funciones

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{2 - x}$, encuentre las siguientes funciones y sus dominios.

(a) $f \circ g$ **(b)** $g \circ f$ **(c)** $f \circ f$ **(d)** $g \circ g$

SOLUCIÓN

(a)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g\\ &= f(\sqrt{2-x}) && \text{Definición de } g\\ &= \sqrt{\sqrt{2-x}} && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt[4]{2-x}\end{aligned}$$

El dominio de $f \circ g$ es $\{x \mid 2 - x \geq 0\} = \{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$.

(b)

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) && \text{Definición de } g \circ f\\ &= g(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt{2-\sqrt{x}} && \text{Definición de } g\end{aligned}$$

Para que $\sqrt{x}$ esté definida, debemos tener $x \geq 0$. Para que $\sqrt{2 - \sqrt{x}}$ esté definida, debemos tener $2 - \sqrt{x} \geq 0$, es decir, $\sqrt{x} \leq 2$, o $x \leq 4$. Entonces, tenemos $0 \leq x \leq 4$ de modo que el dominio de $g \circ f$ es el intervalo cerrado $[0, 4]$.

(c)

$$\begin{aligned}(f \circ f)(x) &= f(f(x)) && \text{Definición de } f \circ f\\ &= f(\sqrt{x}) && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt{\sqrt{x}} && \text{Definición de } f\\ &= \sqrt[4]{x}\end{aligned}$$

El dominio de $f \circ f$ es $[0, \infty)$.

(d)

$$\begin{aligned}(g \circ g)(x) &= g(g(x)) && \text{Definición de } g \circ g\\ &= g(\sqrt{2-x}) && \text{Definición de } g\\ &= \sqrt{2-\sqrt{2-x}} && \text{Definición de } g\end{aligned}$$

Esta expresión está definida cuando$2 - x \geq 0$ y $2 - \sqrt{2 - x} \geq 0$. La primera desigualdad quiere decir que $x \leq 2$, y la segunda es equivalente a $\sqrt{2 - x} \leq 2$, o $2 - x \leq 4$, o $x \geq -2$. Por tanto, $-2 \leq x \leq 2$, de modo que el dominio de $g \circ g$ es $[-2, 2]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41** ■

Es posible tomar la composición de tres o más funciones. Por ejemplo, la función compuesta $f \circ g \circ h$ se encuentra al aplicar h primero, después g y luego f como sigue:

$$(f \circ g \circ h)(x) = f(g(h(x)))$$

EJEMPLO 5 | Una composición de tres funciones

Encuentre $f \circ g \circ h$ si $f(x) = x/(x + 1)$, $g(x) = x^{10}$ y $h(x) = x + 3$.

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned}(f \circ g \circ h)(x) &= f(g(h(x))) && \text{Definición de } f \circ g \circ h\\ &= f(g(x+3)) && \text{Definición de } h\\ &= f((x+3)^{10}) && \text{Definición de } g\\ &= \frac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{10}+1} && \text{Definición de } f\end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45** ■

Hasta este punto hemos empleado composición para construir funciones complicadas a partir de unas más sencillas, pero, en cálculo, es útil saber "descomponer" una función complicada en unas más sencillas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 | Reconocer una composición de funciones

Dada $F(x) = \sqrt[4]{x + 9}$, encuentre funciones f y g tales que $F = f \circ g$.

SOLUCIÓN Como la fórmula de F dice que primero sumamos 9 y luego tomamos la raíz cuarta, hacemos

$$g(x) = x + 9 \qquad \text{y} \qquad f(x) = \sqrt[4]{x}$$

Y a continuación

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(x + 9) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt[4]{x + 9} && \text{Definición de } f \\ &= F(x) \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

EJEMPLO 7 | Una aplicación de composición de funciones

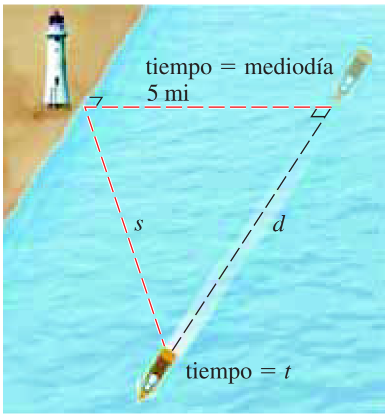


FIGURA 5

Un barco está navegando a 20 mi/h paralelo a un borde recto de la playa. El barco está a 5 millas de la playa y pasa frente a un faro al mediodía.

(a) Exprese la distancia s entre el faro y el barco como función de d, la distancia que el barco ha navegado desde el mediodía; es decir, encuentre f de modo que $s = f(d)$.

(b) Exprese d como función de t, el tiempo transcurrido desde el mediodía; esto es, encuentre g para que $d = g(t)$.

(c) Encuentre $f \circ g$. ¿Qué representa esta función?

SOLUCIÓN Primero trazamos un diagrama como el de la Figura 5.

(a) Podemos relacionar las distancias s y d por el Teorema de Pitágoras. Así, s puede ser expresada como función de d por

$$s = f(d) = \sqrt{25 + d^2}$$

(b) Como el barco está navegando a 20 mi/h, la distancia d que ha recorrido es una función de t como sigue:

distancia = rapidez × tiempo

$$d = g(t) = 20t$$

(c) Tenemos

$$\begin{aligned} (f \circ g)(t) &= f(g(t)) && \text{Definición de } f \circ g \\ &= f(20t) && \text{Definición de } g \\ &= \sqrt{25 + (20t)^2} && \text{Definición de } f \end{aligned}$$

La función $f \circ g$ da la distancia del barco desde el faro como función del tiempo.

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **63**

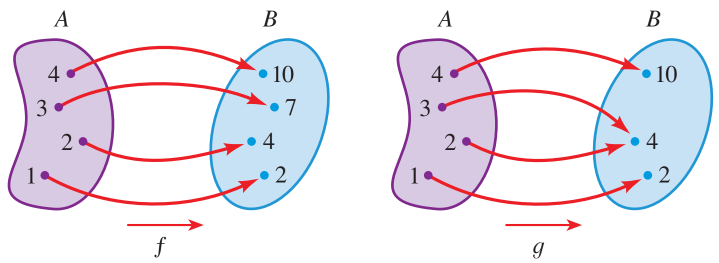
2.7 Funciones uno a uno y sus inversas

Funciones uno a uno ▶ La inversa de una función ▶ Graficar la inversa de una función

La *inversa* de una función es una regla que actúa en la salida de la función y produce la entrada correspondiente. Por lo tanto, la inversa "deshace" o invierte lo que la función ha hecho. No todas las funciones tienen inversas; las que la tienen se llaman *uno a uno.*

▼ Funciones uno a uno

Comparemos las funciones f y g cuyos diagramas de flecha se muestran en la Figura 1. Observe que f nunca toma el mismo valor dos veces (cualesquier dos números en A tienen imágenes diferentes), mientras que g toma el mismo valor dos veces (2 y 3 tienen la misma imagen, 4). En símbolos, $g(2) = g(3)$ pero $f(x_1) \neq f(x_2)$ siempre que $x_1 \neq x_2$. Las funciones que tienen esta última propiedad se denominan *uno a uno*.



f es uno a uno | g no es uno a uno

FIGURA 1

> **DEFINICIÓN DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO**
>
> Una función con dominio A se denomina **función uno a uno** si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es,
>
> $$f(x_1) \neq f(x_2) \quad \text{siempre que} \quad x_1 \neq x_2$$

Una forma equivalente de escribir la condición para una función uno a uno es ésta:

$$\text{Si } f(x_1) = f(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

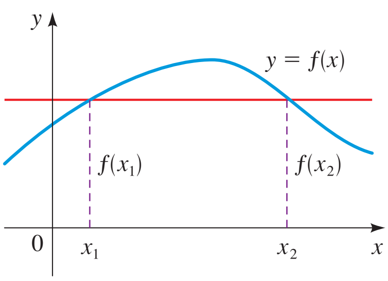


FIGURA 2 Esta función no es uno a uno porque $f(x_1) = f(x_2)$.

Si una recta horizontal cruza la gráfica de f en más de un punto, entonces vemos de la Figura 2 que hay números $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Esto significa que f no es uno a uno. Por lo tanto, tenemos el siguiente método geométrico para determinar si una función es uno a uno.

> **PRUEBA DE LA RECTA HORIZONTAL**
>
> Una función es uno a uno si y sólo si no hay una recta horizontal que cruce su gráfica más de una vez.

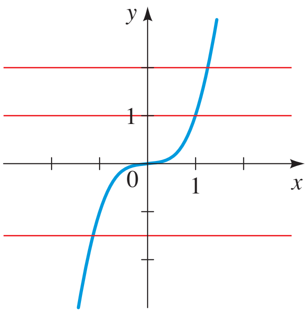


FIGURA 3 $f(x) = x^3$ es uno a uno.

EJEMPLO 1 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $f(x) = x^3$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Si $x_1 \neq x_2$, entonces $x_1^3 \neq x_2^3$ (dos números diferentes no pueden tener el mismo cubo). Por lo tanto, $f(x) = x^3$ es uno a uno.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 3 vemos que no hay recta horizontal que cruce la gráfica de $f(x) = x^3$ más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, f es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 13 ■

Observe que la función f del Ejemplo 1 es creciente y también es uno a uno. De hecho, se puede demostrar que *toda función creciente y toda función decreciente es uno a uno.*

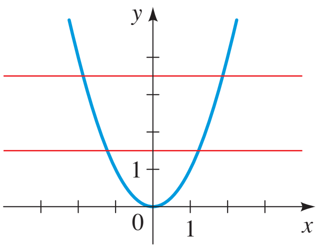


FIGURA 4 $f(x) = x^2$ no es uno a uno.

EJEMPLO 2 | Determinar si una función es uno a uno

¿La función $g(x) = x^2$ es uno a uno?

SOLUCIÓN 1 Esta función no es uno a uno porque, por ejemplo,

$$g(1) = 1 \qquad \text{y} \qquad g(-1) = 1$$

por lo cual 1 y -1 tienen la misma imagen.

SOLUCIÓN 2 De la Figura 4 vemos que hay rectas horizontales que cruzan la gráfica de g más de una vez. Por lo tanto, por la Prueba de la Recta Horizontal, g no es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 15 ■

Aun cuando la función g del Ejemplo 2 no es uno a uno, es posible restringir su dominio de manera que la función resultante sea uno a uno. De hecho, definimos

$$h(x) = x^2 \qquad x \geq 0$$

entonces h es uno a uno, como se puede ver de la Figura 5 y de la Prueba de la Recta Horizontal.

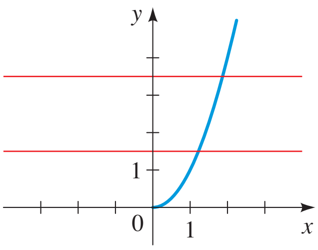


FIGURA 5 $f(x) = x^2$ $(x \geq 0)$ es uno a uno.

EJEMPLO 3 | Demostrar que una función es uno a uno

Demuestre que la función $f(x) = 3x + 4$ es uno a uno.

SOLUCIÓN Suponga que hay números x_1 y x_2 tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Entonces

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4 &= 3x_2 + 4 && \text{Suponga que } f(x_1) = f(x_2) \\ 3x_1 &= 3x_2 && \text{Reste 4} \\ x_1 &= x_2 && \text{Divida entre 3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es uno a uno.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 11 ■

▼ La inversa de una función

Las funciones uno a uno son importantes porque son precisamente las funciones que poseen funciones inversas de acuerdo con la siguiente definición.

DEFINICIÓN DE LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y rango A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

para cualquier y en B.

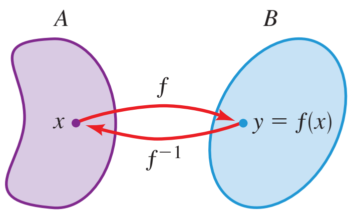


FIGURA 6

Esta definición dice que si f toma x por y, entonces f^{-1} regresa y a x. (Si f no fuera uno a uno, entonces f^{-1} no estaría definida de manera única.) El diagrama de flechas de la Figura 6 indica que f^{-1} invierte el efecto de f. De la definición tenemos

$$\text{dominio de } f^{-1} = \text{rango de } f$$
$$\text{rango de } f^{-1} = \text{dominio de } f$$

No confunda el -1 de f^{-1} por un exponente.

$$f^{-1}(x) \quad \textit{no significa} \quad \frac{1}{f(x)}$$

El recíproco $1/f(x)$ se escribe como $(f(x))^{-1}$.

EJEMPLO 4 | Hallar f^{-1} para valores específicos

Si $f(1) = 5$, $f(3) = 7$ y $f(8) = -10$, hallar $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(7)$ y $f^{-1}(10)$.

SOLUCIÓN De la definición de f^{-1} tenemos

$$\begin{aligned} f^{-1}(5) &= 1 \quad \text{porque} \quad f(1) = 5 \\ f^{-1}(7) &= 3 \quad \text{porque} \quad f(3) = 7 \\ f^{-1}(-10) &= 8 \quad \text{porque} \quad f(8) = -10 \end{aligned}$$

La Figura 7 muestra cómo f^{-1} invierte el efecto de f en este caso.

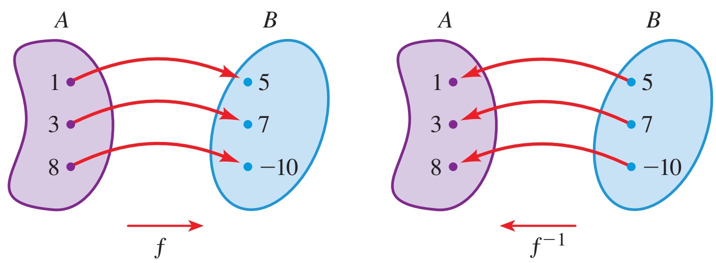


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **21**

Por definición, la función inversa f^{-1} deshace lo que f hace: si empezamos con x, aplicamos f y luego aplicamos f^{-1}, llegamos otra vez a x, donde empezamos. Análogamente, f deshace lo que f^{-1} hace. En general, cualquier función que invierte el efecto de f en esta forma debe ser la inversa de f. Estas observaciones se expresan precisamente como sigue.

PROPIEDAD DE LA FUNCIÓN INVERSA

Sea f una función uno a uno con dominio A y rango B. La función inversa f^{-1} satisface las siguientes propiedades de cancelación:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \text{para toda } x \text{ en } A \\ f(f^{-1}(x)) &= x \quad \text{para toda } x \text{ en } B \end{aligned}$$

Recíprocamente, cualquier función f^{-1} que satisfaga estas ecuaciones es la inversa de f.

Estas propiedades indican que f es la función inversa de f^{-1}, de modo que decimos que f y f^{-1} son *inversas entre sí*.

EJEMPLO 5 | Verificar que dos funciones son inversas

Demuestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$ son inversas entre sí.

SOLUCIÓN Observe que el dominio y rango de f y de g es $\mathbb{R}$. Tenemos

$$g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$$
$$f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$$

Por lo tanto, por la Propiedad de Funciones Inversas, f y g son inversas entre sí. Estas ecuaciones simplemente dicen que la función cúbica y la función raíz cúbica, cuando son compuestas, se cancelan entre sí.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27** ■

Ahora examinemos la forma en que calculamos funciones inversas. Primero observamos de la definición de f^{-1} que

$$y = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(y) = x$$

Por tanto, si $y = f(x)$ y si podemos despejar x de esta ecuación en términos de y, entonces debemos tener $x = f^{-1}(y)$. Si entonces intercambiamos x y y, tenemos $y = f^{-1}(x)$, que es la ecuación deseada.

CÓMO HALLAR LA INVERSA DE UNA FUNCIÓN UNO A UNO

1. Escriba $y = f(x)$.
2. Despeje x de esta ecuación en términos de y (si es posible).
3. Intercambie x y y. La ecuación resultante es $y = f^{-1}(x)$.

En el Ejemplo 6, nótese la forma en que f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "Multiplique por 3, luego reste 2", mientras que f^{-1} es la regla "Sume 2, luego divida entre 3".

Observe que los Pasos 2 y 3 se pueden invertir. En otras palabras, podemos intercambiar x y y primero y luego despejar y en términos de x.

EJEMPLO 6 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = 3x - 2$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = f(x)$.

$$y = 3x - 2$$

A continuación despejamos x de esta ecuación.

$$3x = y + 2 \qquad \text{Sume 2}$$
$$x = \frac{y+2}{3} \qquad \text{Divida entre 3}$$

Finalmente, intercambiamos x y y.

$$y = \frac{x+2}{3}$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37** ■

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Usamos la Propiedad de la Función Inversa.

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(3x-2) \\ &= \frac{(3x-2)+2}{3} \\ &= \frac{3x}{3} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x)) &= f\left(\frac{x+2}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2 \\ &= x + 2 - 2 = x \quad ✔ \end{aligned}$$

EJEMPLO 7 | Hallar la inversa de una función

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{x^5 - 3}{2}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (x^5 - 3)/2$ y despejamos x.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x^5 - 3}{2} && \text{Ecuación que define la función} \\
2y &= x^5 - 3 && \text{Multiplique por 2} \\
x^5 &= 2y + 3 && \text{Sume 3 (y cambie lados)} \\
x &= (2y + 3)^{1/5} && \text{Tome raíz quinta de cada lado}
\end{aligned}
$$

A continuación intercambiamos x y y para obtener $y = (2x + 3)^{1/5}$. Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = (2x + 3)^{1/5}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 53 ■

En el Ejemplo 7, observe que f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la regla "Tome la quinta potencia, reste 3, luego divida entre 2", mientras que f^{-1} es la regla "Multiplique por 2, sume 3, luego tome la quinta potencia".

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Usamos la Propiedad de la Función Inversa

$$
\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) \\
&= \left[2\left(\frac{x^5 - 3}{2}\right) + 3\right]^{1/5} \\
&= (x^5 - 3 + 3)^{1/5} \\
&= (x^5)^{1/5} = x \\
f(f^{-1}(x)) &= f((2x + 3)^{1/5}) \\
&= \frac{[(2x + 3)^{1/5}]^5 - 3}{2} \\
&= \frac{2x + 3 - 3}{2} \\
&= \frac{2x}{2} = x \quad ✔
\end{aligned}
$$

Una **función racional** es una función definida por una expresión racional. En el siguiente ejemplo encontramos la inversa de una función racional.

Las funciones racionales se estudian en la Sección 3.7.

EJEMPLO 8 | Hallar la inversa de una función racional

Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2x + 3}{x - 1}$.

SOLUCIÓN Primero escribimos $y = (2x + 3)/(x - 1)$ y despejamos x.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{2x + 3}{x - 1} && \text{Ecuación que define la función} \\
y(x - 1) &= 2x + 3 && \text{Multiplique por } x - 1 \\
yx - y &= 2x + 3 && \text{Desarrolle} \\
yx - 2x &= y + 3 && \text{Lleve los términos en } x \text{ al lado izquierdo} \\
x(y - 2) &= y + 3 && \text{Factorice } x \\
x &= \frac{y + 3}{y - 2} && \text{Divida entre } y - 2
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45 ■

▼ Graficar la inversa de una función

El principio de intercambiar x y y para hallar la función inversa también nos da un método para obtener la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f. Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$. Así, el punto (a, b) está en la gráfica de f si y sólo si el punto (b, a) está en la gráfica de f^{-1}. Pero obtenemos el punto (b, a) a partir del punto (a, b) al reflejar en la recta $y = x$ (vea la Figura 8 en la página siguiente). Por lo tanto, como lo ilustra la Figura 9 de la página siguiente, lo siguiente es verdadero.

> La gráfica de f^{-1} se obtiene al reflejar la gráfica de f en la recta $y = x$.

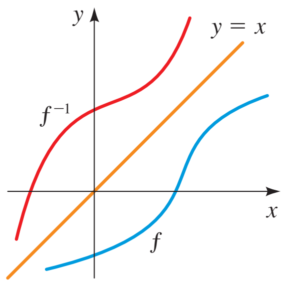


FIGURA 8

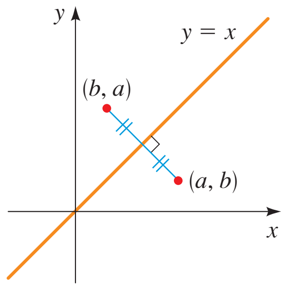


FIGURA 9

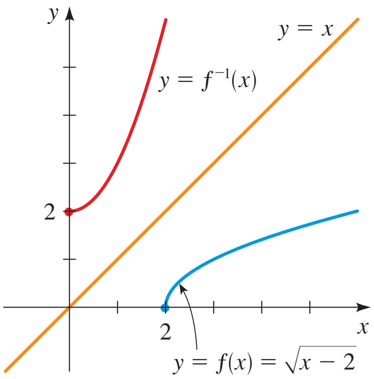


FIGURA 10

EJEMPLO 9 | Graficar la inversa de una función

(a) Trace la gráfica de $f(x) = \sqrt{x - 2}$.

(b) Use la gráfica de f para trazar la gráfica de f^{-1}.

(c) Encuentre la ecuación de f^{-1}.

SOLUCIÓN

(a) Usando las transformaciones desde la Sección 2.5, trazamos la gráfica de $y = \sqrt{x - 2}$ al hallar los puntos de la gráfica de la función $y = \sqrt{x}$ (Ejemplo 1(c) de la Sección 2.2) y moverla a la derecha 2 unidades.

(b) La gráfica de f^{-1} se obtiene de la gráfica de f de la parte (a) al reflejarla en la recta $y = x$, como se ve en la Figura 10.

(c) De la ecuación $y = \sqrt{x - 2}$ despeje x, observando que $y \geq 0$.

$$\sqrt{x - 2} = y$$

$$x - 2 = y^2 \qquad \text{Eleve al cuadrado cada uno de los lados}$$

$$x = y^2 + 2 \quad y \geq 0 \qquad \text{Sume 2}$$

Intercambie x y y:

$$y = x^2 + 2 \quad x \geq 0$$

Por lo tanto $\quad f^{-1}(x) = x^2 + 2 \quad x \geq 0$

Esta expresión muestra que la gráfica de f^{-1} es la mitad derecha de la parábola $y = x^2 + 2$ y, de la gráfica mostrada en la Figura 10, esto parece razonable.

En el Ejemplo 9 observe cómo f^{-1} invierte el efecto de f. La función f es la reglas “Reste 2, luego tome la raíz cuadrada,” en tanto que f^{-1} es la regla “Eleve al cuadrado, luego reste 2.”

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

2.7 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Una función f es uno a uno si diferentes entradas producen ______salidas. Se puede saber por la gráfica que una función es uno a uno si se usa la Prueba de la _______ _________.

2. (a) Para que una función tenga una inversa, debe ser _______. Entonces, ¿cuál de las siguientes funciones tiene inversa?

$$f(x) = x^2 \qquad g(x) = x^3$$

(b) ¿Cuál es la inversa de la función que usted escogió en la parte (a)?

3. Una función f tiene la siguiente descripción verbal: “Multiplique por 3, sume 5, y luego tome la tercera potencia del resultado”.

(a) Escriba una descripción verbal para f^{-1}.

(b) Encuentre fórmulas algebraicas que expresen f y f^{-1} en términos de la entrada x.

4. *¿Verdadero o falso?*

(a) Si f tiene una inversa, entonces $f^{-1}(x)$ es lo mismo que $\dfrac{1}{f(x)}$.

(b) Si f tiene una inversa, entonces $f^{-1}(f(x)) = x$.

Image 100/Corbis

CAPÍTULO 3

FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

Las funciones definidas por expresiones de polinomios se denominan funciones polinomiales. Las gráficas de funciones polinomiales pueden tener numerosos picos y valles; esto las hace modelos apropiados para muchas situaciones prácticas. Por ejemplo, la propietaria de una fábrica observa que si ella aumenta el número de trabajadores, aumenta la productividad, pero si hay demasiados trabajadores entonces la productividad empieza a disminuir. Esta situación está modelada por una función polinomial de grado 2 (una función cuadrática). Como otro ejemplo, cuando se golpea un balón de volibol, éste primero sube y luego baja, siguiendo una trayectoria que también está modelada por una función cuadrática. Las gráficas de funciones polinomiales son curvas sin irregularidades que se usan para diseñar muchas cosas. Por ejemplo, los diseñadores de botes de vela unen partes de las gráficas de diferentes funciones cúbicas (llamadas curvas paramétricas) para hacer las curvas del casco de un bote de velas.

3.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal ▶ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas ▶ Modelado con funciones cuadráticas

Una función polinomial es una función que está definida por una expresión con polinomios. Entonces una **función polinomial de grado *n*** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Las expresiones de polinomios están definidas en la Sección 1.3.

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Éstas son funciones de la forma $P(x) = a_0$ y $P(x) = a_1x + a_0$, respectivamente, cuyas gráficas son rectas. En esta sección estudiamos funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Entonces, una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

Vemos en esta sección la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

▼ Graficar funciones cuadráticas usando la forma normal

Para una definición geométrica de parábolas, vea la Sección 11.1.

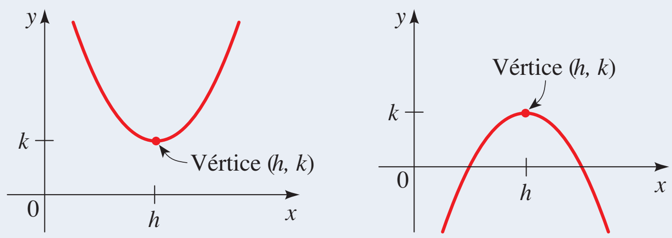
Si tomamos $a = 1$ y $b = c = 0$ en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos la función cuadrática $f(x) = x^2$, cuya gráfica es la parábola graficada en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola**; puede obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^2$ por las transformaciones dadas en la Sección 2.5.

FORMA NORMAL DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la **forma normal**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k); la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a > 0$ $\qquad$ $f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a < 0$

EJEMPLO 1 | Forma normal de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

(a) Exprese f en forma normal. **(b)** Trace la gráfica de f.

Completar el cuadrado se estudia en la Sección 1.5.

$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

El vértice es (3, 5)

SOLUCIÓN

(a) Como el coeficiente de x^2 no es 1, debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen x antes de completar el cuadrado.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 2x^2 - 12x + 23 \\
&= 2(x^2 - 6x) + 23 && \text{Factorice 2 de los términos en } x \\
&= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2 \cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 2 \cdot 9 \text{ fuera} \\
&= 2(x - 3)^2 + 5 && \text{Factorice y simplifique}
\end{aligned}
$$

La forma normal es $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$.

(b) La forma normal nos dice que obtenemos la gráfica de f al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en (3, 5), y la parábola abre hacia arriba. Alargamos la gráfica de la Figura 1 observando que el punto de intersección en y es $f(0) = 23$.

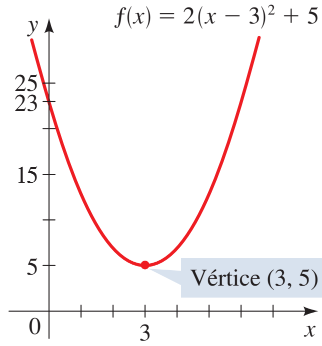


FIGURA 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

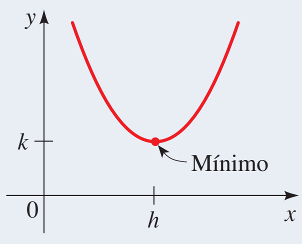
Si una función cuadrática tiene vértice (h, k), entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo. Por ejemplo, la función graficada en la Figura 1 tiene valor mínimo 5 cuando $x = 3$, porque el vértice (3, 5) es el punto más bajo en la gráfica.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

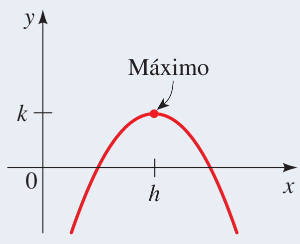
Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el valor mínimo de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el valor máximo de f es $f(h) = k$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a > 0$



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a < 0$

EJEMPLO 2 | Valor mínimo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

(a) Exprese f en forma normal.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre el valor mínimo de f.

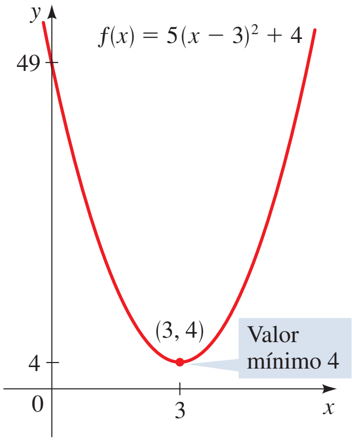


FIGURA 2

SOLUCIÓN

(a) Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de términos en } x \\ &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5\cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 5\cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 5(x-3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

(b) La gráfica es la parábola que tiene su vértice en (3, 4) y abre hacia arriba, como se ve en la Figura 2.

(c) Como el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$.

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **25**

EJEMPLO 3 | Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

(a) Exprese f en forma normal.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre el valor máximo de f.

SOLUCIÓN

(a) Para expresar esta función cuadrática en forma normal, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + x + 2 \\ &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice } -1 \text{ de los términos en } x \\ &= -\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) + 2 - (-1)\tfrac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: Sume } \tfrac{1}{4} \text{ dentro de paréntesis, reste } (-1)\tfrac{1}{4} \text{ fuera} \\ &= -\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

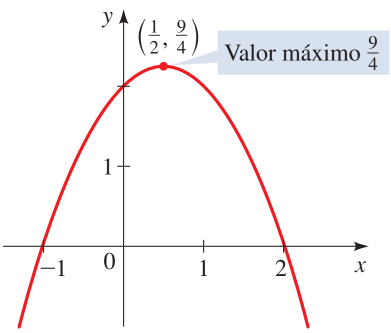


FIGURA 3 Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

(b) De la forma normal vemos que la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y tiene vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Como ayuda para trazar la gráfica, encontramos los puntos de intersección. El punto de intersección en y es $f(0) = 2$. Para hallar los puntos de intersección en x, hacemos $f(x) = 0$ y factorizamos la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 0 && \text{Haga } y = 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Multiplique por } -1 \\ (x-2)(x+1) &= 0 && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Así, los puntos de intersección en x son $x = 2$ y $x = -1$. La gráfica de f se traza en la Figura 3.

(c) Como el coeficiente de x^2 es negativo, f tiene un valor máximo, que es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

Expresar una función cuadrática en forma normal nos ayuda a trazar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si estamos interesados en hallar el valor máximo o mínimo, entonces existe una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorice } a \text{ de los términos en } x \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{Complete el cuadrado: sume } \frac{b^2}{4a^2} \text{ dentro de paréntesis, reste } a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \text{ fuera} \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Esta ecuación está en forma normal con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Como el valor máximo o mínimo se presenta en $x = h$, tenemos el siguiente resultado.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

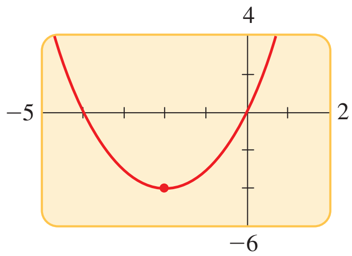
Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

EJEMPLO 4 | Hallar valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Encuentre el valor máximo o mínimo de estas funciones cuadráticas.

(a) $f(x) = x^2 + 4x$ **(b)** $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$

SOLUCIÓN



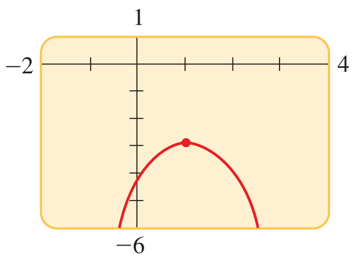
El valor mínimo ocurre en $x = -2$.

(a) Ésta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Como $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*.

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$



El valor máximo ocurre en $x = 1$.

(b) Ésta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **33** Y **35** ■

▼ Modelado con funciones cuadráticas

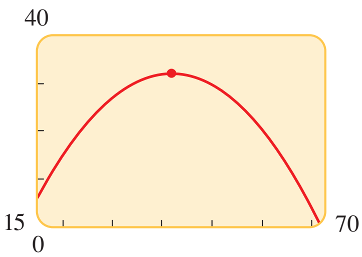
Estudiamos algunos ejemplos de fenómenos reales que son modelados por funciones cuadráticas. Estos ejemplos y los ejercicios de *Aplicación* para esta sección presentan parte de la variedad de situaciones que de manera natural son modelados por funciones cuadráticas.

EJEMPLO 5 | Rendimiento máximo en kilometraje de un auto

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una velocidad relativamente baja. El rendimiento M para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31, \qquad 15 \le s \le 70$$

donde s es la rapidez en mi/h y M se mide en mi/gal. ¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué velocidad se obtiene?



El rendimiento máximo ocurre a 42 mi/h.

SOLUCIÓN La función M es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Entonces, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\left(-\frac{1}{28}\right)} = 42$$

El máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Por lo tanto, el mejor rendimiento del auto es de 32 mi/gal, cuando está corriendo a 42 mi/h.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67** ■

EJEMPLO 6 | Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15,000 espectadores. Con el precio del boleto a \$14, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos?

SOLUCIÓN

(a) Exprese verbalmente el modelo. El modelo que buscamos es una función que dé el ingreso para cualquier precio del boleto.

ingreso = precio del boleto × asistencias

Escoja la variable. Hay dos cantidades que varían: precio del boleto y asistencia. Como la función que buscamos depende del precio, hacemos

$$x = \text{precio del boleto}$$

A continuación, expresamos la asistencia en términos de x.

Verbalmente	En álgebra
Precio del boleto	x
Cantidad que baja precio del boleto	$14 - x$
Aumento en asistencia	$1000(14 - x)$
Asistencia	$9500 + 1000(14 - x)$

Establezca el modelo. El modelo que buscamos es la función R que da el ingreso para un determinado precio de boleto x.

$$\boxed{\text{ingreso}} = \boxed{\text{precio del boleto}} \times \boxed{\text{asistencias}}$$

$$R(x) = x \times [9500 + 1000(14 - x)]$$
$$R(x) = x(23{,}500 - 1000x)$$
$$R(x) = 23{,}500x - 1000x^2$$

(b) Use el modelo. Como R es función cuadrática con $a = -1000$ y $b = 23{,}500$, el máximo ocurre en

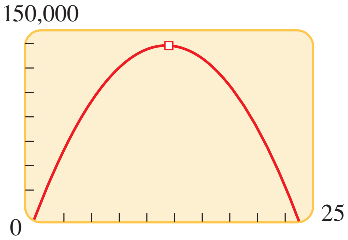
$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23{,}500}{2(-1000)} = 11.75$$

Por lo tanto, el precio de boleto de \$11.75 da el máximo ingreso.

(c) Use el modelo. Deseamos hallar el precio del boleto por el que $R(x) = 0$.

$$23{,}500x - 1000x^2 = 0 \qquad \text{Haga } R(x) = 0$$
$$23.5x - x^2 = 0 \qquad \text{Divida entre 1000}$$
$$x(23.5 - x) = 0 \qquad \text{Factorice}$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 23.5 \qquad \text{Despeje } x$$

Por lo tanto, de acuerdo con este modelo, el precio del boleto de \$23.50 es simplemente demasiado alto; a ese precio, nadie va a ver jugar a su equipo. (Desde luego, el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero.)



La asistencia máxima ocurre cuando el precio del boleto es \$11.75.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

3.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para poner la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma normal, completamos el________.

2. La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ está en forma normal.

(a) La gráfica de f es una parábola con vértice (___,___).

(b) Si $a > 0$, la gráfica de f abre hacia ______. En este caso $f(h) = k$ es el valor ______de f.

(c) Si $a < 0$, la gráfica de f abre hacia ______. En este caso $f(h) = k$ es el valor ______de f.

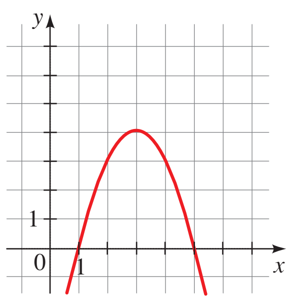
3. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (___,___), y $f(3) =$ ____es el valor (mínimo/máximo)____de f.

4. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia _____, con su vértice en (___,___), y $f(3) =$ ____ es el valor (mínimo/máximo)____ de f.

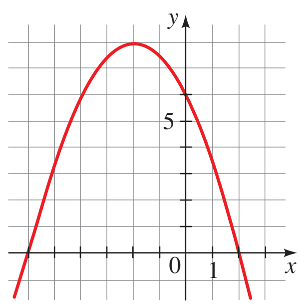
HABILIDADES

5-8 ■ Nos dan la gráfica de una función cuadrática f. **(a)** Encuentre las coordenadas del vértice. **(b)** Encuentre el valor máximo o mínimo de f. **(c)** Encuentre el dominio y rango de f.

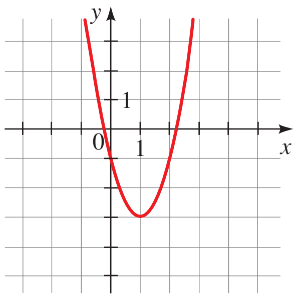
5. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



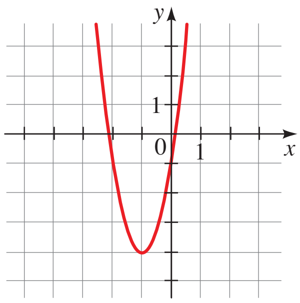
6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



8. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



9-22 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma normal. **(b)** Encuentre su vértice y su(s) punto(s) de intersección x y y. **(c)** Trace su gráfica.

9. $f(x) = x^2 - 6x$ **10.** $f(x) = x^2 + 8x$

11. $f(x) = 2x^2 + 6x$ **12.** $f(x) = -x^2 + 10x$

13. $f(x) = x^2 + 4x + 3$ **14.** $f(x) = x^2 - 2x + 2$

15. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$ **16.** $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

17. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ **18.** $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

19. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$ **20.** $f(x) = 2x^2 + x - 6$

21. $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$ **22.** $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

23-32 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma normal. **(b)** Trace su gráfica. **(c)** Encuentre su valor máximo o mínimo.

23. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ **24.** $f(x) = x^2 - 8x + 8$

25. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ **26.** $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

27. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$ **28.** $f(x) = 1 - 6x - x^2$

29. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$ **30.** $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

31. $h(x) = 1 - x - x^2$ **32.** $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

33-42 ■ Encuentre el valor máximo o mínimo de la función.

33. $f(x) = x^2 + x + 1$ **34.** $f(x) = 1 + 3x - x^2$

35. $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$ **36.** $f(t) = 10t^2 + 40t + 113$

37. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$ **38.** $g(x) = 100x^2 - 1500x$

39. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$ **40.** $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x + 7$

41. $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$ **42.** $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

43. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(4, 16)$.

44. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(3, 4)$ y que pasa por el punto $(1, -8)$.

45-48 ■ Encuentre el dominio y rango de la función.

45. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ **46.** $f(x) = x^2 - 2x - 3$

47. $f(x) = 2x^2 + 6x - 7$ **48.** $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$

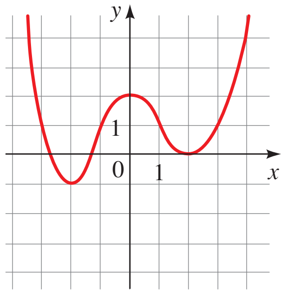
49-50 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Use una calculadora graficadora para hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática f, correcta a dos lugares decimales. **(b)** Encuentre el valor exacto máximo o mínimo de f, y compárelo con su respuesta de la parte (a).

49. $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

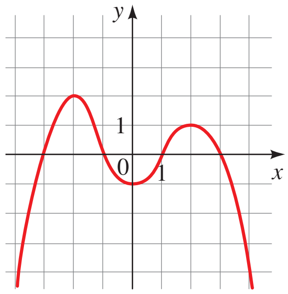
50. $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

51-54 ■ Encuentre todos los valores máximo y mínimo de la función cuya gráfica se muestra.

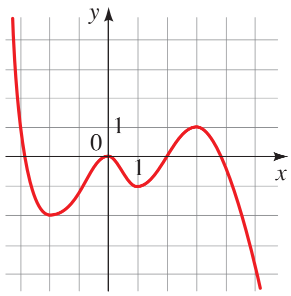
51.



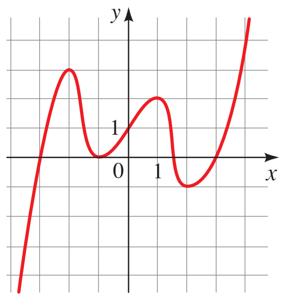
52.



53.



54.



55-62 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que se presenta cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

55. $f(x) = x^3 - x$

56. $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

57. $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

58. $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

59. $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

60. $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

61. $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$

62. $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

APLICACIONES

63. Altura de una pelota Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

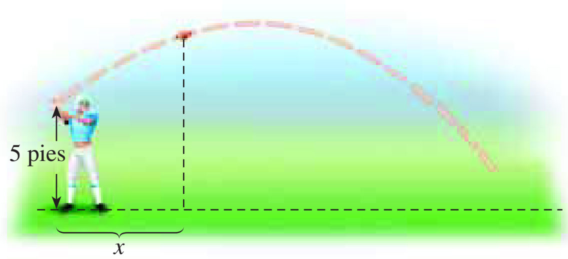
64. Trayectoria de un balón Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 5 pies sobre el suelo, a un ángulo de 45º con la horizontal, a una velocidad de 20 pies/s. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -\frac{32}{(20)^2}x^2 + x + 5$$

donde x es la distancia en pies que el balón ha recorrido horizontalmente.

(a) Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.

(b) Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.



65. Ingresos Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierta mercancía está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

66. Ventas Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que si vende x latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

67. Publicidad La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$$E(n) = \tfrac{2}{3}n - \tfrac{1}{90}n^2$$

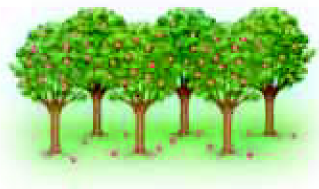
donde n es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

68. Productos farmacéuticos Cuando cierto medicamento se toma oralmente, la concentración de la droga en el torrente sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \le t \le 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de suero, y cuál es esa máxima concentración?

69. Agricultura El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con que estén plantados los árboles. Si n árboles se plantan en un acre de terreno, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Por lo tanto, el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles deben plantarse por acre para obtener la máxima producción de manzanas?



70. Agricultura En cierto viñedo se encuentra que cada una de las vides produce unas 10 libras de uvas en una temporada cuando unas 700 vides están plantadas por acre. Por cada vid individual que se planta, la producción de cada vid disminuye alrededor de 1 por ciento. Por lo tanto, el número de libras de uvas producidas por acre está modelado por

$$A(n) = (700 + n)(10 - 0.01n)$$

donde n es el número de vides adicionales. Encuentre el número de vides que deben plantarse para llevar al máximo la producción de uvas.

71-74 ■ Use las fórmulas de esta sección par dar una solución alternativa al problema indicado en *Enfoque en el modelado: Modelado con funciones* en las páginas 220-221.

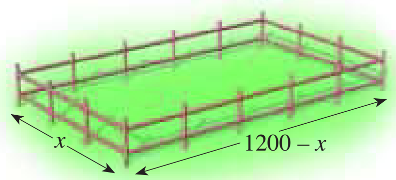
71. Problema 21 **72.** Problema 22

73. Problema 25 **74.** Problema 24

75. Cercar un corral para caballos Carol tiene 2400 pies de cerca para cercar un corral rectangular para caballos.

(a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho x del corral.

(b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.

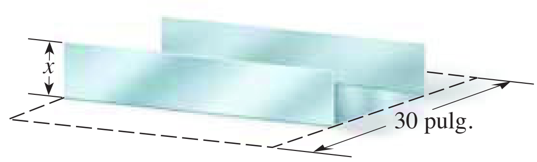


76. Hacer un canal para agua de lluvia Un canal para agua llovediza se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 pulgadas de ancho, como se ve en la figura.

(a) Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de x.

(b) Encuentre el valor de x que lleve al máximo el área de sección transversal del canal.

(c) ¿Cuál es la máxima área de sección transversal del canal?



77. Ingresos en un estadio Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55,000 espectadores. Con el precio del boleto en \$10, el promedio de asistencia en partidos recientes ha sido de 27,000. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, la asistencia aumenta en 3000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo los ingresos por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto como para no generar ingresos?

78. Maximizar utilidades Una sociedad observadora de aves en cierta comunidad hace y vende alimentadores sencillos de aves, para recaudar dinero para sus actividades de conservación. Los materiales para cada alimentador cuestan \$6, y la sociedad vende un promedio de 20 por semana a un precio de \$10 cada uno. La sociedad ha estado considerando elevar el precio, de modo que lleva a cabo un estudio y encuentra que por cada dólar de aumento, pierde 2 ventas por semana.

(a) Encuentre una función que modele las utilidades semanales en términos del precio por alimentador.

(b) ¿Qué precio debe cobrar la sociedad por cada alimentador para maximizar las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades máximas semanales?

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

79. Vértice y puntos de intersección *x* Sabemos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = (x - m)(x - n)$ es una parábola. Trace una gráfica aproximada del aspecto que tendría esa parábola. ¿Cuáles son los puntos de intersección x de la gráfica de f? ¿Puede el lector saber de su gráfica cuál es la coordenada x del vértice en términos de m y n? (Use la simetría de la parábola.) Confirme su respuesta al expandir y usar las fórmulas de esta sección.

80. Máximo de una función polinomial de cuarto grado Encuentre el valor máximo de la función

$$f(x) = 3 + x^2 - x^4$$

[*Sugerencia:* Sea $t = x^2$.]

3.2 FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

Graficar funciones polinomiales básicas ▶ Comportamiento final y el término principal ▶ Uso de ceros para graficar funciones polinomiales ▶ Forma de la gráfica cerca de un cero ▶ Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

En esta sección estudiamos funciones polinomiales de cualquier grado. Pero antes de trabajar con funciones polinomiales, debemos estar de acuerdo con cierta terminología.

FUNCIONES POLINOMIALES

Una **función polinomial de grado *n*** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n, el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal**, y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Con frecuencia nos referimos a funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6.

Coeficiente principal 3

Grado 5

Término constante -6

$$3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 6$$

Término principal $3x^5$

Coeficientes 3, 6, -2, 1, 7 y -6

A continuación veamos algunos ejemplos más de funciones polinomiales.

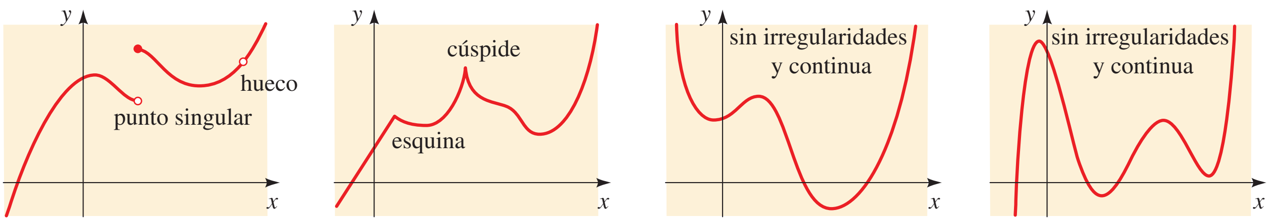
$P(x) = 3$	Grado 0
$Q(x) = 4x - 7$	Grado 1
$R(x) = x^2 + x$	Grado 2
$S(x) = 2x^3 - 6x^2 - 10$	Grado 3

Si un polinomio está formado por un solo término, entonces se llama **monomio**. Por ejemplo, $P(x) = x^3$ y $Q(x) = -6x^5$ son funciones monomiales.

Graficar funciones polinomiales básicas

Las funciones continuas se estudian en la Sección 13.2 página 851.

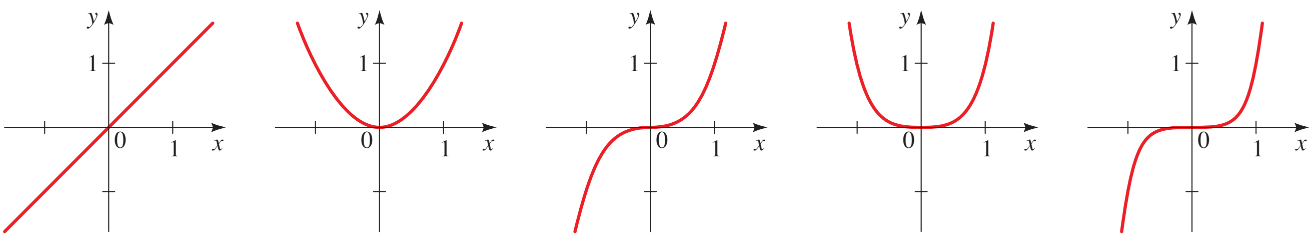
Las gráficas de polinomios de grado 0 o 1 son rectas (Sección 1.10), y las gráficas de polinomios de grado 2 son parábolas (Sección 3.1). Cuanto mayor sea el grado de un polinomio, más complicada puede ser su gráfica. No obstante, la gráfica de una función polinomial es **continua**. Esto significa que la gráfica no tiene puntos singulares ni huecos (vea Figura 1). Además, la gráfica de una función polinomial es una curva sin irregularidades; esto es, no tiene esquinas ni puntos agudos (cúspides) como se muestra en la Figura 1.



No es gráfica de una función polinomial | No es gráfica de una función polinomial | Gráfica de una función polinomial | Gráfica de una función polinomial

FIGURA 1

Las funciones polinomiales más sencillas son las definidas con monomios $P(x) = x^n$, cuyas gráficas se ven en la Figura 2. Como lo sugiere la figura, la gráfica de $P(x) = x^n$ tiene la misma forma general que la gráfica de $y = x^2$ cuando n es par y la misma forma general que la gráfica de $y = x^3$ cuando n es impar. Sin embargo, cuando el grado n es más grande, las gráficas se aplanan alrededor del origen y son más pronunciadas en otras partes.



(a) $y = x$ (b) $y = x^2$ (c) $y = x^3$ (d) $y = x^4$ (e) $y = x^5$

FIGURA 2 Gráficas de monomios

EJEMPLO 1 | Transformaciones de funciones monomiales

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a) $P(x) = -x^3$ **(b)** $Q(x) = (x - 2)^4$

(c) $R(x) = -2x^5 + 4$

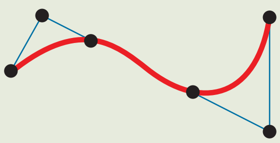
LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Curvas paramétricas

Una curva paramétrica es una larga tira de madera que se curva al mismo tiempo que se mantiene fija en ciertos puntos. En el pasado, los constructores de barcos empleaban curvas paramétricas para crear la forma curva del casco de un bote. Las curvas paramétricas también se usan para hacer las curvas de un piano, un violín o la boca de salida de una tetera.

Unos matemáticos descubrieron que se pueden obtener formas de curvas paramétricas al unir piezas de polinomios. Por ejemplo, puede hacerse que la gráfica de un polinomio cúbico se ajuste a puntos especificados si se ajustan los coeficientes del polinomio (vea el Ejemplo 10, página 242).

Las curvas obtenidas en esta forma reciben el nombre de curvas paramétricas cúbicas. En los modernos programas de diseño por computadora, como el Adobe Illustrator o el Microsoft Paint, se puede trazar una curva al fijar dos puntos y luego usar el ratón para arrastrar uno o más puntos de ancla. Mover los puntos de ancla significa ajustar los coeficientes de un polinomio cúbico.



SOLUCIÓN Usamos las gráficas de la Figura 2 y las transformamos usando las técnicas de la Sección 2.5.

(a) La gráfica de $P(x) = -x^3$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^3$ en el eje x, como se ve en la Figura 3(a) siguiente.

(b) La gráfica de $Q(x) = (x - 2)^4$ es la gráfica de $y = x^4$ desplazada 2 unidades a la derecha, como se ve en la Figura 3(b).

(c) Empezamos con la gráfica de $y = x^5$. La gráfica de $y = -2x^5$ se obtiene alargando la gráfica verticalmente y reflejándola en el eje x (vea la gráfica azul de trazos interrumpidos de la Figura 3(c)). Finalmente, la gráfica de $R(x) = -2x^5 + 4$ se obtiene al desplazar 4 unidades hacia arriba (vea la gráfica roja en la Figura 3(c)).

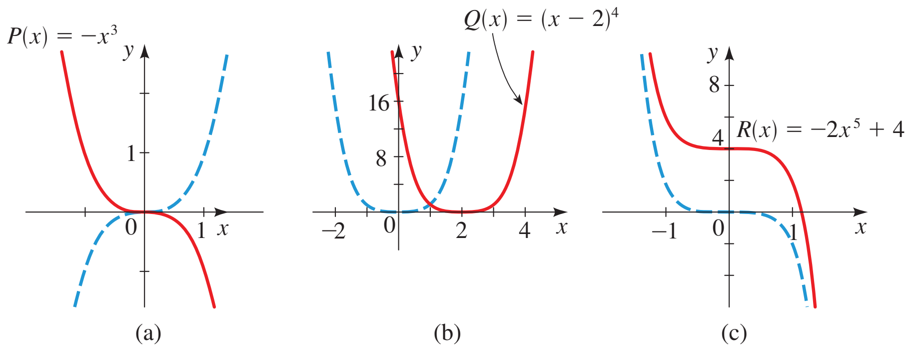


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

▼ Comportamiento final y el término principal

El **comportamiento final** de una función polinomial es una descripción de lo que ocurre cuando x se hace grande en la dirección positiva o negativa. Para describir el comportamiento final, usamos la siguiente notación:

$x \to \infty$ significa "x se hace grande en la dirección positiva"

$x \to -\infty$ significa "x se hace grande en la dirección negativa"

Por ejemplo, el monomio $y = x^2$ en la Figura 2(b) tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

El monomio $y = x^3$ en la Figura 2(c) tiene el siguiente comportamiento final:

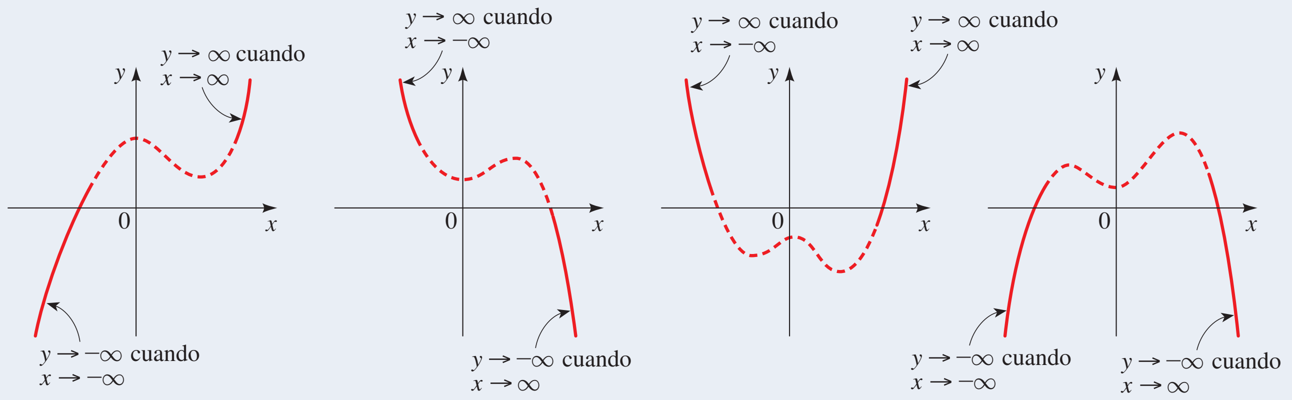
$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Para cualquier función polinomial *el comportamiento final está determinado por el término que contiene la mayor potencia de* x porque, cuando x es grande, los otros términos son relativamente insignificantes en magnitud. El cuadro siguiente muestra los cuatro posibles tipos de comportamiento final, con base en la potencia superior y el signo de su coeficiente.

COMPORTAMIENTO FINAL DE POLINOMIOS

El comportamiento final de la función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ está determinado por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n, como se indica en las gráficas siguientes.

P tiene grado impar | **P tiene grado par**



Coeficiente principal positivo | Coeficiente principal negativo | Coeficiente principal positivo | Coeficiente principal negativo

EJEMPLO 2 | Comportamiento final de una función polinomial

Determine el comportamiento final de la función polinomial

$$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$$

SOLUCIÓN La función polinomial P tiene grado 4 y coeficiente principal -2. Por lo tanto, P tiene grado *par* y coeficiente principal *negativo*, de modo que tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

La gráfica de la Figura 4 ilustra el comportamiento final de P.

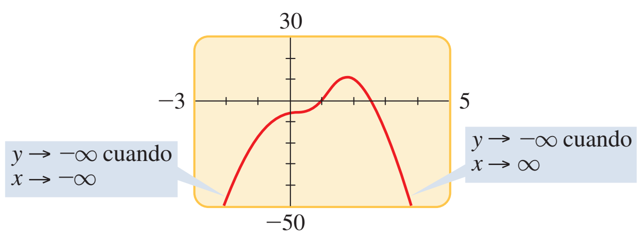


FIGURA 4
$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

EJEMPLO 3 | Comportamiento final de una función polinomial

(a) Determine el comportamiento final de la función polinomial $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$.

(b) Confirme que P y su término principal $Q(x) = 3x^5$ tienen el mismo comportamiento final al graficarlos juntos.

SOLUCIÓN

(a) Como P tiene grado impar y coeficiente principal positivo, tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

(b) La Figura 5 muestra las gráficas de P y Q en rectángulos de vista progresivamente más grandes. Cuanto más grande sea el rectángulo de vista más se asemejan las gráficas. Esto confirma que tienen el mismo comportamiento final.

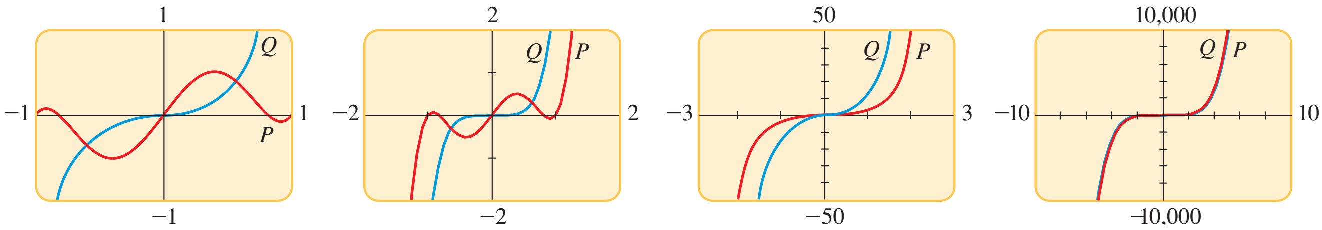


FIGURA 5
$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$
$Q(x) = 3x^5$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

Para ver algebraicamente por qué P y Q del Ejemplo 3 tienen el mismo comportamiento final, factorice P como sigue y compárelo con Q.

$$P(x) = 3x^5\left(1 - \frac{5}{3x^2} + \frac{2}{3x^4}\right) \qquad Q(x) = 3x^5$$

Cuando x es grande, los términos $5/3x^2$ y $2/3x^4$ están cercanos a 0 (vea el Ejercicio 83 en la página 12). Entonces, para x grande, tenemos

$$P(x) \approx 3x^5(1 - 0 - 0) = 3x^5 = Q(x)$$

Por lo tanto, cuando x es grande, P y Q tienen aproximadamente los mismos valores. También podemos ver esto numéricamente si hacemos una tabla como la siguiente.

x	$P(x)$	$Q(x)$
15	2,261,280	2,278,125
30	72,765,060	72,900,000
50	936,875,100	937,500,000

Por el mismo razonamiento, podemos demostrar que el comportamiento final de *cualquier* función polinomial está determinado por su término principal.

Uso de ceros para graficar funciones polinomiales

Si P es una función polinomial, entonces c se denomina **cero** de P si $P(c) = 0$. En otras palabras, los ceros de P son las soluciones de la ecuación polinomial $P(x) = 0$. Observe que si $P(c) = 0$, entonces la gráfica de P tiene un punto de intersección x en $x = c$, de modo que los puntos de intersección x de la gráfica son los ceros de la función.

CEROS REALES DE FUNCIONES POLINOMIALES

Si P es una polinomial y c es un número real, entonces los siguientes son equivalentes:

1. c es un cero de P.
2. $x = c$ es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
3. $x - c$ es un factor de $P(x)$.
4. c es un punto de intersección x de la gráfica de P.

Para hallar los ceros de una polinomial P, factorizamos y usamos la Propiedad del Producto Cero (vea página 47). Por ejemplo, para hallar los ceros de $P(x) = x^2 + x - 6$, factorizamos P para obtener

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)$$

Desde esta forma factorizada podemos ver fácilmente que

1. 2 es un cero de P.
2. $x = 2$ es una solución de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.
3. $x - 2$ es un factor de $x^2 + x - 6$.
4. 2 es un punto de intersección x de la gráfica de P.

Los mismos datos son verdaderos para el otro cero, -3.

El siguiente teorema tiene numerosas e importantes consecuencias. (Vea, por ejemplo, el *Proyecto de descubrimiento* citado en la página 263.) Aquí lo usamos para ayudarnos a graficar funciones polinomiales.

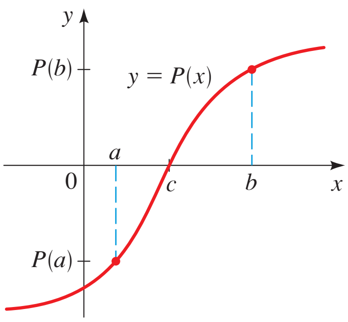


FIGURA 6

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO FUNCIONES POLINOMIALES

Si P es una función polinomial $P(a)$ y $P(b)$ tienen signos contrarios, entonces existe al menos un valor de c entre a y b para el cual $P(c) = 0$.

No demostraremos este teorema, pero la Figura 6 muestra por qué es intuitivamente plausible.

Una consecuencia importante de este teorema es que, entre cualesquier dos ceros sucesivos, los valores de una función polinomial son todos positivos o todos negativos. Esto es, entre dos ceros sucesivos la gráfica de una polinomial se encuentra *enteramente arriba* o *enteramente abajo* del eje x. Para ver por qué, suponga que c_1 y c_2 son ceros sucesivos de P. Si P tiene valores positivos y negativos entre c_1 y c_2, entonces por el Teorema del Valor Intermedio P debe tener otro cero entre c_1 y c_2. Pero eso no es posible porque c_1 y c_2 son ceros sucesivos. Esta observación nos permite usar las siguientes guías para graficar funciones polinomiales.

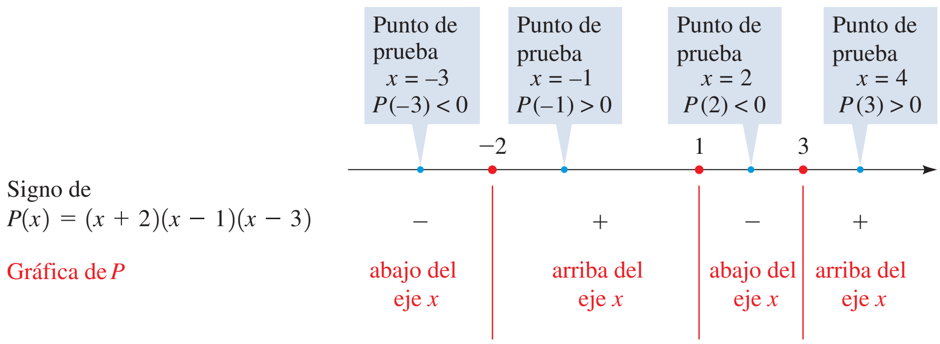
GUÍAS PARA GRAFICAR FUNCIONES POLINOMIALES

1. **Ceros.** Factorizar la polinomial para hallar todos sus ceros reales; éstos son los puntos de intersección x de la gráfica.
2. **Puntos de prueba.** Hacer una tabla de valores para la polinomial. Incluir puntos de prueba para determinar si la gráfica de la polinomial se encuentra arriba o abajo del eje x sobre los intervalos determinados por los ceros. Incluir el punto de intersección y en la tabla.
3. **Comportamiento final.** Determinar el comportamiento final de la polinomial.
4. **Graficar.** Localizar los puntos de intersección y otros puntos que se encuentren en la tabla. Trazar una curva sin irregularidades que pase por estos puntos y exhibir el comportamiento final requerido.

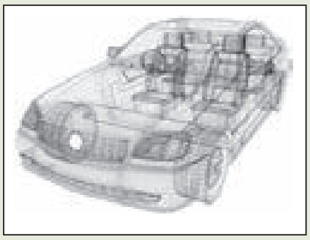
EJEMPLO 4 | Usar ceros para graficar una función polinomial

Trace la gráfica de la función polinomial $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$.

SOLUCIÓN Los ceros son $x = -2$, 1 y 3. Éstos determinan los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, \infty)$. Usando puntos de prueba en estos intervalos, obtenemos la información en el siguiente diagrama de signos (vea Sección 1.7).



LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO



3DProfi/Shutterstock.com

Diseño de automotores

El diseño asistido por computadora (CAD) ha cambiado por completo la forma en la que las compañías fabricantes de automotores diseñan y manufacturan estos autos. Antes de la década de 1980, los ingenieros de diseño construirían un modelo de "tuercas y tornillos" a escala completa de un nuevo auto propuesto; ésta era realmente la única forma de saber si el diseño era factible. Hoy en día, los ingenieros en automotores construyen un modelo matemático, que existe sólo en la memoria de una computadora. El modelo incorpora todas las características principales de diseño del auto. Ciertas curvas con polinomio, llamadas *curvas paramétricas*, se usan en dar forma a la carrocería del auto. El "auto matemático" resultante puede ser probado en cuanto a su estabilidad estructural, manejo, aerodinámica, respuesta de suspensión y más; todas estas pruebas se realizan antes de construir un prototipo. Como es de suponerse, el CAD ahorra millones de dólares cada año a los fabricantes y, lo que es más importante, el CAD da a los ingenieros de diseño mucha más flexibilidad en el diseño; los cambios deseados se pueden crear y probar en segundos. Con ayuda de gráficas por computadora, los diseñadores pueden ver qué tan bien se verá un "auto matemático" antes de construir uno real. Además, el auto matemático puede ser visto desde cualquier perspectiva; puede moverse, hacerse girar y verse desde el interior. Estas manipulaciones del auto en el monitor de una computadora se convierten matemáticamente en grandes sistemas para resolver ecuaciones lineales.

Localizar unos cuantos puntos adicionales y enlazarlos con una curva sin irregularidades nos ayuda a completar la gráfica de la Figura 7.

	x	$P(x)$
Punto de prueba →	-3	-24
	-2	0
Punto de prueba →	-1	8
	0	6
	1	0
Punto de prueba →	2	-4
	3	0
Punto de prueba →	4	18

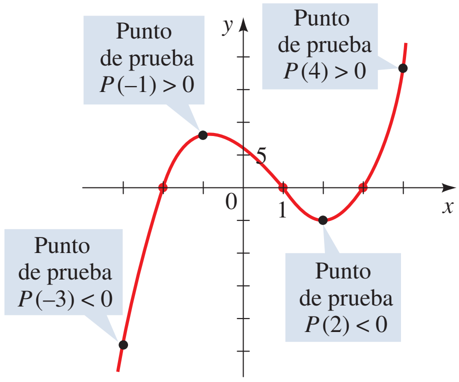


FIGURA 7 $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

EJEMPLO 5 | Hallar ceros y graficar una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$.

(a) Encontrar los ceros de P.
(b) Trazar una gráfica de P.

SOLUCIÓN

(a) Para hallar los ceros, factorizamos completamente.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 2x^2 - 3x \\ &= x(x^2 - 2x - 3) && \text{Factorizar } x \\ &= x(x - 3)(x + 1) && \text{Factor cuadrático} \end{aligned}$$

Entonces, los ceros son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$.

(b) Los puntos de intersección x son $x = 0$, $x = 3$ y $x = -1$. El punto de intersección y es $P(0) = 0$. Hacemos una tabla de valores de $P(x)$, asegurándonos de escoger puntos de prueba entre ceros sucesivos (a la derecha e izquierda de éstos).

Como P es de grado impar y su coeficiente principal es positivo, tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Localizamos los puntos en la tabla y los enlazamos con una curva sin irregularidades para completar la gráfica, como se ve en la Figura 8.

	x	$P(x)$
Punto de prueba →	-2	-10
	-1	0
Punto de prueba →	$-\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$
	0	0
Punto de prueba →	1	-4
	2	-6
	3	0
Punto de prueba →	4	20

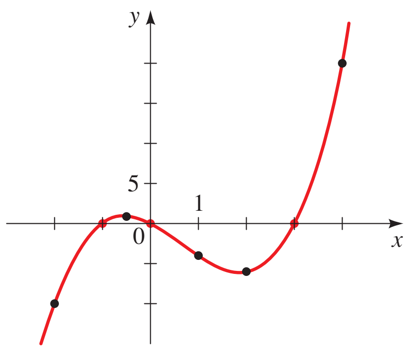


FIGURA 8 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

EJEMPLO 6 | Hallar ceros y graficar una función polinomial

Sea $P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$.

(a) Hallar los ceros de P. **(b)** Trazar una gráfica de P.

SOLUCIÓN

(a) Para hallar los ceros, factorizamos completamente.

$$
\begin{aligned}
P(x) &= -2x^4 - x^3 + 3x^2 \\
&= -x^2(2x^2 + x - 3) && \text{Factorizar } -x^2 \\
&= -x^2(2x + 3)(x - 1) && \text{Factor cuadrático}
\end{aligned}
$$

Entonces, los ceros son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$.

(b) Los puntos de intersección son $x = 0$, $x = -\frac{3}{2}$ y $x = 1$. El punto de intersección y es $P(0) = 0$. Hacemos una tabla de valores de $P(x)$, asegurándonos de escoger puntos de prueba entre ceros sucesivos (a la derecha e izquierda) de éstos.

Como P es de grado par y su coeficiente principal es negativo, tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Localizamos los puntos de la tabla y enlazamos los puntos con una curva sin irregularidades para completar la gráfica de la Figura 9.

Una tabla de valores se calcula con más facilidad si se usa una calculadora programable o calculadora graficadora.

x	$P(x)$
−2	−12
−1.5	0
−1	2
−0.5	0.75
0	0
0.5	0.5
1	0
1.5	−6.75

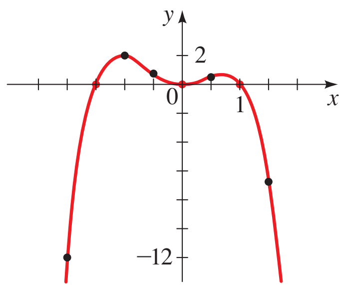


FIGURA 9 $P(x) = -2x^4 - x^3 + 3x^2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 31

EJEMPLO 7 | Hallar ceros y graficar una función polinomial

Sea $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$.

(a) Hallar los ceros de P. **(b)** Trazar una gráfica de P.

SOLUCIÓN

(a) Para hallar los ceros, factorizamos completamente.

$$
\begin{aligned}
P(x) &= x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \\
&= x^2(x - 2) - 4(x - 2) && \text{Agrupar y factorizar} \\
&= (x^2 - 4)(x - 2) && \text{Factorizar } x - 2 \\
&= (x + 2)(x - 2)(x - 2) && \text{Diferencia de cuadrados} \\
&= (x + 2)(x - 2)^2 && \text{Simplificar}
\end{aligned}
$$

Entonces, los ceros son $x = -2$ y $x = 2$.

(b) Los puntos de intersección x son $x = -2$ y $x = 2$. El punto de intersección y es $P(0) = 8$. La tabla da valores adicionales de $P(x)$.

Como P es de grado impar y su coeficiente principal es positivo, tiene el siguiente comportamiento final.

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Enlazamos los puntos con una curva sin irregularidades y completamos la gráfica de la Figura 10.

x	$P(x)$
-3	-25
-2	0
-1	9
0	8
1	3
2	0
3	5

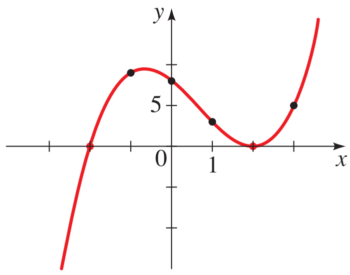


FIGURA 10 $P(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

Forma de la gráfica cerca de un cero

Aun cuando $x = 2$ es un cero de la función polinomial en el Ejemplo 7, la gráfica no cruza el eje x en el punto de intersección 2. Esto es porque el factor $(x - 2)^2$ correspondiente a ese cero está elevado a una potencia par, de modo que no cambia signo cuando probamos puntos en cualquiera de los lados de 2. En la misma forma, la gráfica no cruza el eje x en $x = 0$ en el Ejemplo 6.

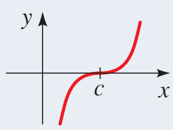
En general, si c es un cero de P, y el correspondiente factor $x - c$ se presenta exactamente m veces en la factorización de P, entonces decimos que c es un **cero de multiplicidad *m***. Si consideramos puntos de prueba en cualquiera de los lados del punto c de intersección en x, concluimos que la gráfica cruza el eje x en c si la multiplicidad m es impar y no cruza el eje x si m es par. Además, puede demostrarse mediante cálculo que cerca de $x = c$ la gráfica tiene la misma forma general que la gráfica de $y = A(x - c)^m$.

FORMA DE LA GRÁFICA CERCA DE UN CERO DE MULTIPLICIDAD *m*

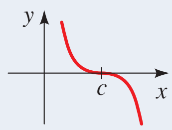
Si c es un cero de P de multiplicidad m, entonces la forma de la gráfica de P cerca de c es como sigue.

Multiplicidad de *c* — **Forma de la gráfica de *P* cerca del punto de intersección *x* de *c***

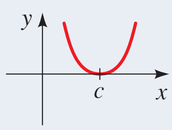
m impar, $m > 1$



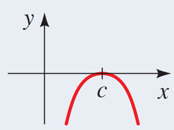
O



m par, $m > 1$



O



EJEMPLO 8 | Graficar una función polinomial usando sus ceros

Grafique el polinomio $P(x) = x^4(x - 2)^3(x + 1)^2$.

SOLUCIÓN Los ceros de P son -1, 0 y 2 con multiplicidades 2, 4 y 3, respectivamente.

0 es un cero de multiplicidad 4

2 es un cero de multiplicidad 3

-1 es un cero de multiplicidad 2

$$P(x) = x^4(x-2)^3(x+1)^2$$

El cero 2 tiene multiplicidad *impar*, de modo que la gráfica cruza el eje x en el punto de cruce x de 2. Pero los ceros 0 y -1 tienen multiplicidad *par*, de modo que la gráfica no cruza el eje x en los puntos de intersección 0 y -1.

Como P es una polinomial de grado 9 y tiene coeficiente principal positivo, tiene el siguiente comportamiento final:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Con esta información y una tabla de valores trazamos la gráfica de la Figura 11.

x	$P(x)$
-1.3	-9.2
-1	0
-0.5	-3.9
0	0
1	-4
2	0
2.3	8.2

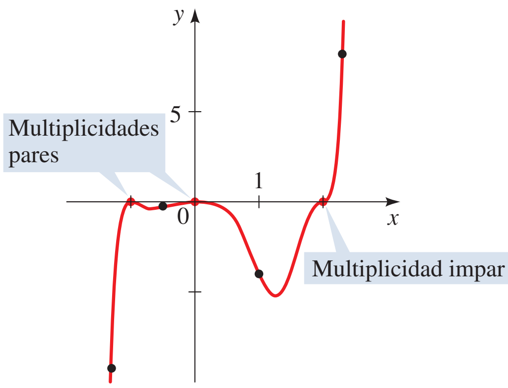


FIGURA 11 $P(x) = x^4(x-2)^3(x+1)^2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

Recuerde de la Sección 2.3 que si el punto $(a, f(a))$ es el más alto en la gráfica de f dentro de algún rectángulo de vista, entonces $f(a)$ es un valor máximo local de f, y si $(b, (f(b))$ es el punto más bajo en la gráfica de f dentro de un rectángulo de vista, entonces $f(b)$ es un valor mínimo local (vea Figura 12). Decimos que tal punto $(a, f(a))$ es un **punto máximo local** en la gráfica y que $(b, (f(b))$ es un **punto mínimo local**. Los puntos máximos y mínimos locales en la gráfica de una función se denominan **extremos locales**.

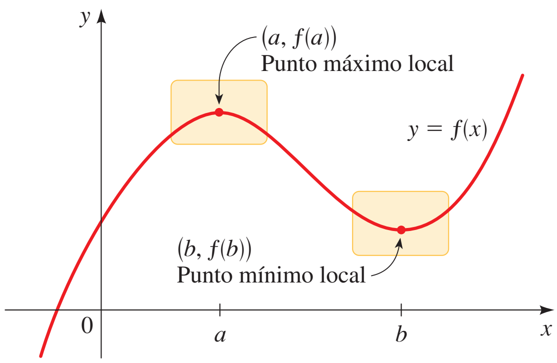


FIGURA 12

Para una función polinomial, el número de extremos locales debe ser menor que el grado, como indica el siguiente principio. (Una prueba de este principio requiere Cálculo.)

EXTREMOS LOCALES DE FUNCIONES POLINOMIALES

Si $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ es una función polinomial de grado n, entonces la gráfica de P tiene a lo sumo $n - 1$ extremos locales.

En efecto, una función polinomial de grado n puede tener menos de $n - 1$ extremos locales. Por ejemplo, $P(x) = x^5$ (graficado en la Figura 2) *no tiene* extremos locales, aun cuando es de grado 5. El principio precedente nos dice sólo que una función polinomial de grado n no puede tener más de $n - 1$ extremos locales.

EJEMPLO 9 | El número de extremos locales

Determine cuántos extremos locales tiene cada función polinomial.

(a) $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

(b) $P_2(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x - 15$

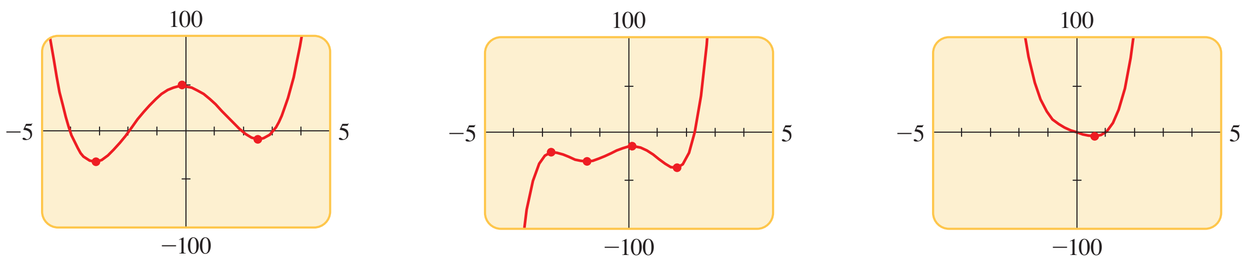
(c) $P_3(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$

SOLUCIÓN Las gráficas se muestran en la Figura 13.

(a) P_1 tiene dos puntos mínimos locales y un punto máximo local, para un total de tres extremos locales.

(b) P_2 tiene dos puntos mínimos locales y dos puntos máximos locales, para un total de cuatro extremos locales.

(c) P_3 tiene sólo un extremo local, un mínimo local.



(a) $P_1(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$

(b) $P_2(x) = x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4x - 15$

(c) $P_3(x) = 7x^4 + 3x^2 - 10x$

FIGURA 13

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **61** Y **63**

Con una calculadora graficadora podemos rápidamente trazar las gráficas de numerosas funciones a la vez, en la misma pantalla de vista. Esto nos permite ver la forma en que cambiar un valor en la definición de las funciones afecta la forma de su gráfica. En el siguiente ejemplo aplicamos este principio a una familia de polinomiales de tercer grado.

EJEMPLO 10 | Una familia de funciones polinomiales

Trace la familia de polinomiales $P(x) = x^3 - cx^2$ para $c = 0, 1, 2$ y 3. ¿Cómo se afecta la gráfica con el cambio del valor de c?

SOLUCIÓN Las funciones polinomiales

$$P_0(x) = x^3 \qquad P_1(x) = x^3 - x^2$$
$$P_2(x) = x^3 - 2x^2 \qquad P_3(x) = x^3 - 3x^2$$

están graficadas en la Figura 14. Vemos que aumentar el valor de c hace que la gráfica desarrolle un "valle" cada vez más profundo a la derecha del eje y, creando un máximo local en el origen y un mínimo local en un punto en el cuarto cuadrante. Este mínimo local se mueve más abajo y a más distancia a la derecha cuando c aumenta. Para ver por qué ocurre esto, factorice $P(x) = x^2(x - c)$. La función polinomial P tiene ceros en 0 y en c y, cuanto más grande se haga c, a más distancia a la derecha estará el mínimo entre 0 y c.

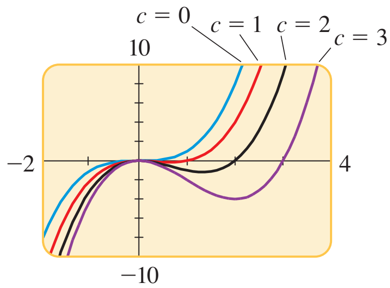


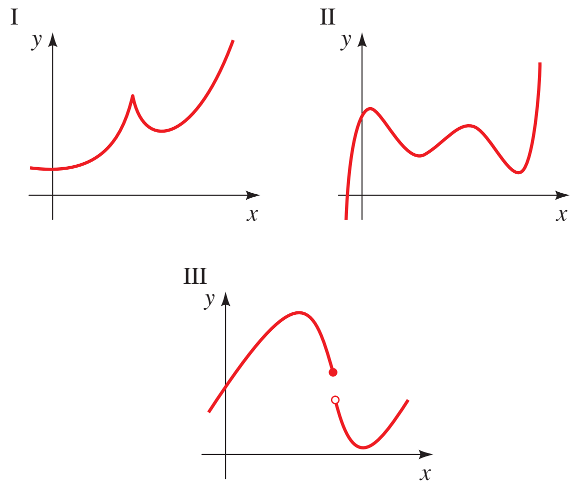
FIGURA 14 Una familia de polinomios $P(x) = x^3 - cx^2$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

3.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Sólo una de las gráficas siguientes podría ser la gráfica de una función polinomial. ¿Cuál? ¿Por qué las otras no son gráficas polinomiales?



2. Toda función polinomial tiene uno de los siguientes comportamientos:
   (i) $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$
   (ii) $y \to \infty$ cuando $x \to \infty$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$
   (iii) $y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ y $y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$
   (iv) $y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$

   Para cada polinomial, escoja la descripción apropiada de su comportamiento final de la lista anterior.
   (a) $y = x^3 - 8x^2 + 2x - 15$: comportamiento final ________.
   (b) $y = -2x^4 + 12x + 100$: comportamiento final ________.

3. Si c es un cero de la polinomial P, ¿cuál de los siguientes enunciados debe ser verdadero?
   (a) $P(c) = 0$. **(b)** $P(0) = c$.
   (c) $x - c$ es un factor de $P(x)$.
   (d) c es el punto de intersección y de la gráfica de P.

4. ¿Cuál de los siguientes enunciados no podría ser verdadero acerca de la función polinomial P?
   (a) P tiene grado 3, dos máximos locales y dos mínimos locales.
   (b) P tiene grado 3 y no tiene máximos ni mínimos locales.
   (c) P tiene grado 4, un máximo local y no tiene mínimos locales.

HABILIDADES

5-8 ■ Trace la gráfica de cada función al transformar la gráfica de una función apropiada de la forma $y = x^n$ de la Figura 2. Indique todos los puntos de intersección x y y en cada gráfica.

5. **(a)** $P(x) = x^2 - 4$ **(b)** $Q(x) = (x - 4)^2$
(c) $R(x) = 2x^2 - 2$ **(d)** $S(x) = 2(x - 2)^2$

6. **(a)** $P(x) = x^4 - 16$ **(b)** $Q(x) = (x + 2)^4$
(c) $R(x) = (x + 2)^4 - 16$ **(d)** $S(x) = -2(x + 2)^4$

7. **(a)** $P(x) = x^3 - 8$ **(b)** $Q(x) = -x^3 + 27$
(c) $R(x) = -(x + 2)^3$ **(d)** $S(x) = \frac{1}{2}(x - 1)^3 + 4$

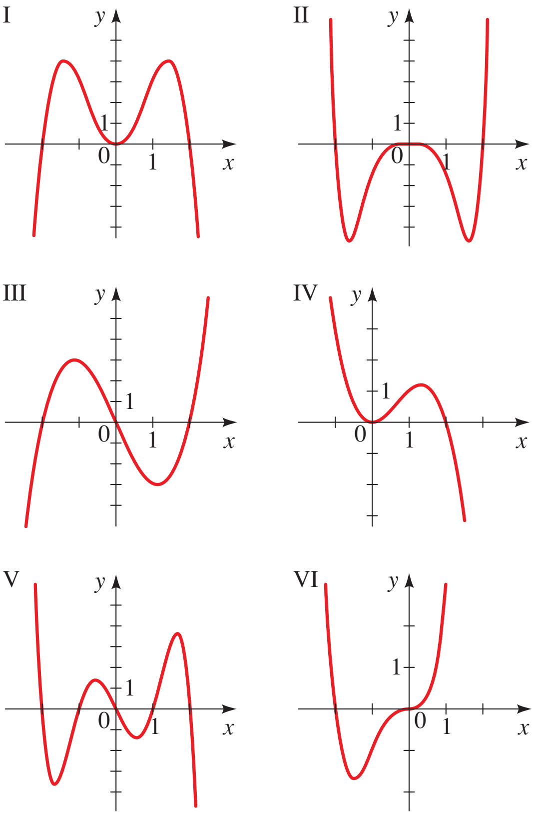
8. **(a)** $P(x) = (x + 3)^5$ **(b)** $Q(x) = 2(x + 3)^5 - 64$
(c) $R(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^5$ **(d)** $S(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^5 + 16$

9-14 ■ Relacione la función polinomial con una de las gráficas I-IV de la página siguiente. Dé razones para su selección.

9. $P(x) = x(x^2 - 4)$ **10.** $Q(x) = -x^2(x^2 - 4)$

11. $R(x) = -x^5 + 5x^3 - 4x$ **12.** $S(x) = \frac{1}{2}x^6 - 2x^4$

13. $T(x) = x^4 + 2x^3$ **14.** $U(x) = -x^3 + 2x^2$



15-26 ■ Trace la gráfica de la función polinomial. Asegúrese que su gráfica muestre todos los puntos de intersección y exhiba el comportamiento final apropiado.

15. $P(x) = (x - 1)(x + 2)$

16. $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)$

17. $P(x) = x(x - 3)(x + 2)$

18. $P(x) = (2x - 1)(x + 1)(x + 3)$

19. $P(x) = (x - 3)(x + 2)(3x - 2)$

20. $P(x) = \frac{1}{5}x(x - 5)^2$

21. $P(x) = (x - 1)^2(x - 3)$ **22.** $P(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^3(x - 3)$

23. $P(x) = \frac{1}{12}(x + 2)^2(x - 3)^2$ **24.** $P(x) = (x - 1)^2(x + 2)^3$

25. $P(x) = x^3(x + 2)(x - 3)^2$ **26.** $P(x) = (x - 3)^2(x + 1)^2$

27-40 ■ Factorice el polinomio y use la forma factorizada para hallar los ceros. A continuación, trace la gráfica.

27. $P(x) = x^3 - x^2 - 6x$ **28.** $P(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

29. $P(x) = -x^3 + x^2 + 12x$ **30.** $P(x) = -2x^3 - x^2 + x$

31. $P(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$ **32.** $P(x) = x^5 - 9x^3$

33. $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ **34.** $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

35. $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$

36. $P(x) = \frac{1}{8}(2x^4 + 3x^3 - 16x - 24)^2$

37. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 8x + 16$

38. $P(x) = x^4 - 2x^3 + 8x - 16$

39. $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ **40.** $P(x) = x^6 - 2x^3 + 1$

41-46 ■ Determine el comportamiento final de P. Compare las gráficas de P y Q en rectángulos de vista grandes y pequeños, como en el Ejemplo 3(b).

41. $P(x) = 3x^3 - x^2 + 5x + 1$; $Q(x) = 3x^3$

42. $P(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 12x$; $Q(x) = -\frac{1}{8}x^3$

43. $P(x) = x^4 - 7x^2 + 5x + 5$; $Q(x) = x^4$

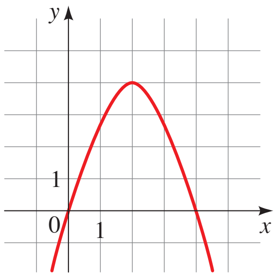
44. $P(x) = -x^5 + 2x^2 + x$; $Q(x) = -x^5$

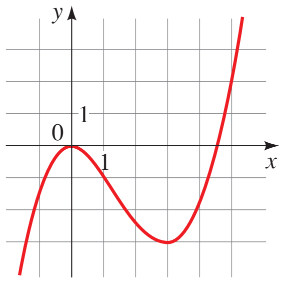
45. $P(x) = x^{11} - 9x^9$; $Q(x) = x^{11}$

46. $P(x) = 2x^2 - x^{12}$; $Q(x) = -x^{12}$

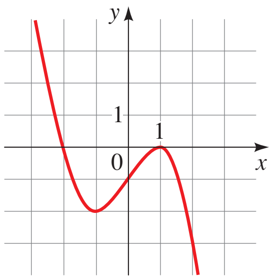
47-50 ■ Nos dan la gráfica de una función polinomial. De la gráfica, encuentre **(a)** los puntos de intersección x y y y **(b)** las coordenadas de todos los extremos locales.

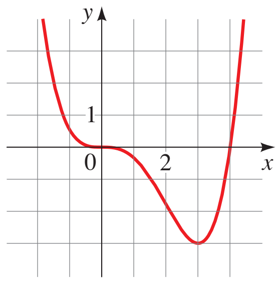
47. $P(x) = -x^2 + 4x$ **48.** $P(x) = \frac{2}{9}x^3 - x^2$





49. $P(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x - 1$ **50.** $P(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{9}x^3$





51-58 ■ Grafique la función polinomial en el rectángulo de vista dado. Encuentre las coordenadas de todos los extremos locales. Exprese su respuesta redondeada a dos lugares decimales.

51. $y = -x^2 + 8x$, $[-4, 12]$ por $[-50, 30]$

52. $y = x^3 - 3x^2$, $[-2, 5]$ por $[-10, 10]$

53. $y = x^3 - 12x + 9$, $[-5, 5]$ por $[-30, 30]$

54. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 32$, $[-5, 5]$ por $[-60, 30]$

55. $y = x^4 + 4x^3$, $[-5, 5]$ por $[-30, 30]$

56. $y = x^4 - 18x^2 + 32$, $[-5, 5]$ por $[-100, 100]$

57. $y = 3x^5 - 5x^3 + 3$, $[-3, 3]$ por $[-5, 10]$

58. $y = x^5 - 5x^2 + 6$, $[-3, 3]$ por $[-5, 10]$

59-68 ■ Grafique la función polinomial y determine cuántos máximos y mínimos locales tiene.

59. $y = -2x^2 + 3x + 5$

60. $y = x^3 + 12x$

61. $y = x^3 - x^2 - x$

62. $y = 6x^3 + 3x + 1$

63. $y = x^4 - 5x^2 + 4$

64. $y = 1.2x^5 + 3.75x^4 - 7x^3 - 15x^2 + 18x$

65. $y = (x - 2)^5 + 32$

66. $y = (x^2 - 2)^3$

67. $y = x^8 - 3x^4 + x$

68. $y = \frac{1}{3}x^7 - 17x^2 + 7$

69-74 ■ Grafique la familia de polinomiales en el mismo rectángulo de vista, usando los valores dados de c. Explique la forma en que cambiar el valor de c afecta la gráfica.

69. $P(x) = cx^3; \quad c = 1, 2, 5, \frac{1}{2}$

70. $P(x) = (x - c)^4; \quad c = -1, 0, 1, 2$

71. $P(x) = x^4 + c; \quad c = -1, 0, 1, 2$

72. $P(x) = x^3 + cx; \quad c = 2, 0, -2, -4$

73. $P(x) = x^4 - cx; \quad c = 0, 1, 8, 27$

74. $P(x) = x^c; \quad c = 1, 3, 5, 7$

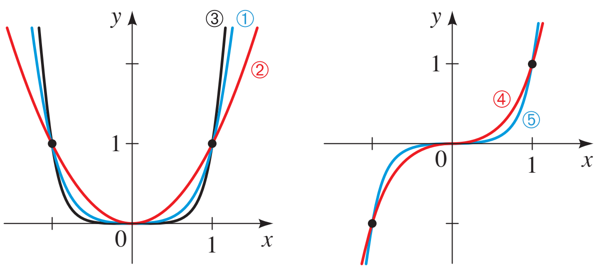
75. **(a)** En los mismos ejes de coordenadas, trace gráficas (tan precisamente como sea posible) de las funciones

$$y = x^3 - 2x^2 - x + 2 \qquad \text{y} \qquad y = -x^2 + 5x + 2$$

(b) Con base en el trazo que haya hecho usted en la parte (a), ¿en cuántos puntos parecen cruzarse las dos gráficas?

(c) Encuentre las coordenadas de todos los puntos de intersección.

76. En la figura siguiente están localizadas partes de las gráficas de $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$ y $y = x^6$. Determine cuál función pertenece a cada gráfica.



77. Recuerde que una función f es *impar* si $f(-x) = -f(x)$ o *par* si $f(-x) = f(x)$ para toda x real.

(a) Demuestre que una función polinomial $P(x)$ que contenga sólo potencias impares de x es una función impar.

(b) Demuestre que una función polinomial $P(x)$ que contenga sólo potencias pares de x es una función par.

(c) Demuestre que una función polinomial $P(x)$ contiene potencias impares y pares de x, entonces no es función ni impar ni par.

(d) Exprese la función

$$P(x) = x^5 + 6x^3 - x^2 - 2x + 5$$

y la suma de una función impar y una función par.

78. **(a)** Grafique la función $P(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4)$ y encuentre todos los extremos locales, correctos al décimo más cercano.

(b) Grafique la función

$$Q(x) = (x - 1)(x - 3)(x - 4) + 5$$

y use sus respuestas a la parte (a) para hallar todos los extremos locales, correctos al décimo más cercano.

79. **(a)** Grafique la función $P(x) = (x - 2)(x - 4)(x - 5)$ y determine cuántos extremos locales tiene.

(b) Si $a < b < c$, explique por qué la función

$$P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$$

debe tener dos extremos locales.

80. **(a)** ¿Cuántos puntos de intersección x y cuántos extremos locales tiene la función polinomial $P(x) = x^3 - 4x$?

(b) ¿Cuántos puntos de intersección x y cuántos extremos locales tiene la función polinomial $Q(x) = x^3 + 4x$?

(c) Si $a > 0$, ¿cuántos puntos de intersección x y cuántos extremos locales tiene cada una de las funciones polinomiales $P(x) = x^3 - ax$ y $Q(x) = x^3 + ax$? Explique su respuesta.

APLICACIONES

81. Estudio de mercado Un analista de mercado, que trabaja para un fabricante de aparatos electrodomésticos pequeños, encuentra que si la compañía produce y vende x licuadoras al año, su utilidad total (en dólares) es

$$P(x) = 8x + 0.3x^2 - 0.0013x^3 - 372$$

Grafique la función P en un rectángulo de observación apropiado y use la gráfica para contestar las siguientes preguntas.

(a) Cuando se fabrican sólo unas cuantas licuadoras, la compañía pierde dinero (utilidad negativa). (Por ejemplo, $P(10) = -263.3$, de modo que la compañía pierde \$263.30 si produce y vende sólo 10 licuadoras.) ¿Cuántas licuadoras debe producir la compañía para alcanzar el punto de equilibrio (no pierde ni gana)?

(b) ¿La ganancia se incrementa infinitamente entre más licuadoras se produzcan y se vendan? Si no es así ¿cuál es la mayor ganancia posible que la firma puede tener?

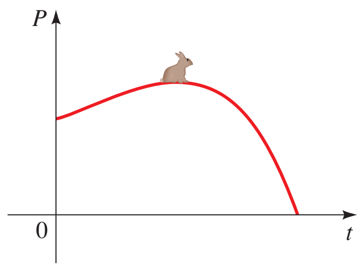
82. Cambio de población Se observa que la población de conejos en una pequeña isla está dada por la función

$$P(t) = 120t - 0.4t^4 + 1000$$

donde t es el tiempo (en meses) desde que se iniciaron las observaciones de la isla.

(a) ¿Cuándo se alcanza la máxima población, y cuál es la máxima población?

(b) ¿Cuándo desaparece la población de conejos de la isla?

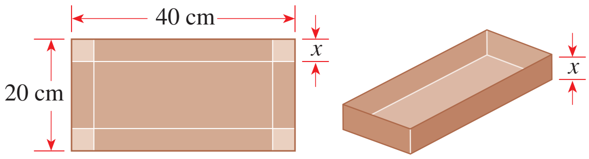


83. Volumen de una caja Se ha de construir una caja con una pieza de cartón de 20 cm por 40 cm, cortando cuadrados de longitud x de lado de cada esquina y doblando los lados hacia arriba, como se ve en la figura.

(a) Exprese el volumen V de la caja como función de x.

(b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el dato de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

(c) Trace una gráfica de la función V, y úsela para estimar el volumen máximo para esa caja.

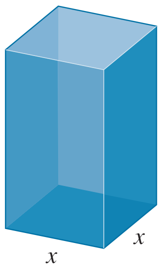


84. Volumen de una caja Una caja de cartón tiene base cuadrada, con cada arista de la caja con longitud de x pulgadas, como se ve en la figura. La longitud total de las 12 aristas de la caja es de 144 pulgadas.

(a) Demuestre que el volumen de la caja está dado por la función $V(x) = 2x^2(18 - x)$.

(b) ¿Cuál es el dominio de V? (Use el dato de que la longitud y el volumen deben ser positivos.)

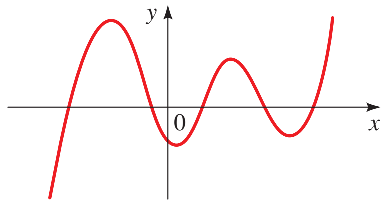
(c) Trace una gráfica de la función V y úsela para estimar el volumen máximo para esa caja.



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

85. Gráficas de potencias grandes Grafique las funciones $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ y $y = x^5$, para $-1 \le x \le 1$, en los mismos ejes de coordenadas. ¿Cómo piensa usted que se verá la gráfica de $y = x^{100}$ en este mismo intervalo? ¿Qué se puede decir de $y = x^{101}$? Haga una tabla de valores para confirmar sus respuestas.

86. Número máximo de extremos locales ¿Cuál es el grado más pequeño posible que puede tener la función polinomial cuya gráfica se muestra? Explique.



87. Número posible de extremos locales ¿Es posible que una polinomial de tercer grado tenga exactamente un extremo local? ¿Una polinomial de cuarto grado puede tener exactamente dos extremos locales? ¿Cuántos extremos locales pueden tener polinomiales de tercero, cuarto, quinto y sexto grados? (Considere el comportamiento final de esas funciones polinomiales.) A continuación, dé un ejemplo de una función polinomial que tenga seis extremos locales.

88. ¿Situación imposible? ¿Es posible que una función polinomial tenga dos máximos locales y no tenga un mínimo local? Explique.

3.3 DIVISIÓN DE POLINOMIOS

División larga de polinomios ▶ División sintética ▶ Los teoremas del residuo y factor

Hasta este punto en este capítulo hemos estado estudiando funciones polinomiales *gráficamente*. En esta sección empezamos por estudiar polinomios *algebraicamente.* La mayor parte de nuestro trabajo se ocupará de factorizar polinomios y, para factorizar, necesitamos saber cómo dividir polinomios.

▼ División larga de polinomios

La división de polinomios es muy semejante al conocido proceso de dividir números. Cuando dividimos 38 entre 7, el cociente es 5 y el residuo es 3. Escribimos

Dividendo

Residuo

$$\frac{38}{7} = 5 + \frac{3}{7}$$

Divisor

Cociente

Para dividir polinomios, usamos división larga, como sigue.

Para escribir el algoritmo de división de otro modo, dividimos todo entre $D(x)$:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

ALGORITMO DE DIVISIÓN

Si $P(x)$ y $D(x)$ son funciones polinomiales, con $D(x) \neq 0$, entonces existen polinomiales únicas $Q(x)$ y $R(x)$, donde $R(x)$ es 0 o de grado menor al grado de $D(x)$, de modo que

$$\underbrace{P(x)}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{D(x)}_{\text{Divisor}} \cdot \underbrace{Q(x)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{R(x)}_{\text{Residuo}}$$

Las funciones polinomiales $P(x)$ y $D(x)$ se denominan **dividendo** y **divisor**, respectivamente, $Q(x)$ es el **cociente**, y $R(x)$ es el **residuo**.

EJEMPLO 1 | División larga de polinomios

Divida $6x^2 - 26x + 12$ entre $x - 4$.

SOLUCIÓN El *dividendo* es $6x^2 - 26x + 12$ y el *divisor* es $x - 4$. Empezamos por acomodarlos como sigue:

$$x - 4\overline{)6x^2 - 26x + 12}$$

A continuación dividimos el término principal del dividendo entre el término principal del divisor para obtener el primer término del cociente: $6x^2/x = 6x$. En seguida multiplicamos el divisor por $6x$ y restamos el resultado del dividendo

$$\begin{array}{rl} 6x\phantom{{}-26x+12} & \\ x-4\overline{)6x^2-26x+12} & \\ \underline{6x^2-24x}\phantom{{}+12} & \\ -2x+12 & \end{array}$$

Divida términos principales: $\dfrac{6x^2}{x} = 6x$

Multiplique: $6x(x - 4) = 6x^2 - 24x$

Reste y "baje" 12

Repetimos el proceso usando el último renglón $-2x + 12$ como dividendo.

$$\begin{array}{r} 6x-2\phantom{{}+12} \\ x-4\overline{)6x^2-26x+12} \\ \underline{6x^2-24x}\phantom{{}+12} \\ -2x+12 \\ \underline{-2x+8} \\ 4 \end{array}$$

Divida términos principales: $\dfrac{-2x}{x} = -2$

Multiplique: $-2(x - 4) = -2x + 8$

Reste

El proceso de división termina cuando el último renglón es de menor grado que el divisor. El último renglón que contenga el *residuo*, y el renglón superior contienen el *cociente*. El resultado de la división puede interpretarse en cualquiera de dos formas.

$$\frac{\overbrace{6x^2 - 26x + 12}^{\text{Dividendo}}}{\underbrace{x - 4}_{\text{Divisor}}} = \overbrace{6x - 2}^{\text{Cociente}} + \frac{\overbrace{4}^{\text{Residuo}}}{x - 4}$$

o

$$\underbrace{6x^2 - 26x + 12}_{\text{Dividendo}} = \underbrace{(x - 4)}_{\text{Divisor}}\underbrace{(6x - 2)}_{\text{Cociente}} + \underbrace{4}_{\text{Residuo}}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

EJEMPLO 2 | División larga de polinomios

Sean $P(x) = 8x^4 + 6x^2 - 3x + 1$ y $D(x) = 2x^2 - x + 2$. Encuentre polinomiales $Q(x)$ y $R(x)$ tales que $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

SOLUCIÓN Usamos división larga después de insertar primero el término $0x^3$ en el dividendo para asegurar que las columnas queden alineadas correctamente.

$$
\begin{array}{rl}
4x^2 + 2x & \\
2x^2 - x + 2\,\overline{)\,8x^4 + 0x^3 + 6x^2 - 3x + 1} & \\
\underline{8x^4 - 4x^3 + 8x^2} \qquad\qquad & \text{Multiplique el divisor por } 4x^2 \\
4x^3 - 2x^2 - 3x \qquad & \text{Reste} \\
\underline{4x^3 - 2x^2 + 4x} \qquad & \text{Multiplique el divisor por } 2x \\
-7x + 1 & \text{Reste}
\end{array}
$$

El proceso se completa en este punto porque $-7x + 1$ es de menor grado que el divisor $2x^2 - x + 2$. De la división larga de líneas antes vemos que $Q(x) = 4x^2 + 2x$ y $R(x) = -7x + 1$, de modo que

$$8x^4 + 6x^2 - 3x + 1 = (2x^2 - x + 2)(4x^2 + 2x) + (-7x + 1)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

División sintética

La **división sintética** es un método rápido de dividir polinomios; se puede usar cuando el divisor es de la forma $x - c$. En división sintética escribimos sólo las partes esenciales de la división larga. Compare las siguientes divisiones larga y sintética, en las que dividimos $2x^3 - 7x^2 + 5$ por $x - 3$. (Explicaremos cómo realizar la división sintética en el Ejemplo 3.)

División larga

$$
\begin{array}{rl}
\overbrace{2x^2 - x - 3}^{\text{Cociente}} & \\
x - 3\,\overline{)\,2x^3 - 7x^2 + 0x + 5} & \\
\underline{2x^3 - 6x^2} \qquad\qquad & \\
-x^2 + 0x \qquad & \\
\underline{-x^2 + 3x} \qquad & \\
-3x + 5 & \\
\underline{-3x + 9} & \\
-4 & \text{Residuo}
\end{array}
$$

División sintética

$$
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
 & & 6 & -3 & -9 \\
\hline
 & \underbrace{2 \quad -1 \quad -3}_{\text{Cociente}} & & & \underbrace{-4}_{\text{Residuo}}
\end{array}
$$

Observe que en la división sintética abreviamos $2x^3 - 7x^2 + 5$ al escribir sólo los coeficientes: $2,\ -7,\ 0,\ 5$ y en lugar de $x - 3$ escribimos simplemente 3. (Escribir 3 en lugar de -3 nos permite sumar en lugar de restar, pero esto cambia el signo de todos los números que aparecen en las cajas color oro.)

El siguiente ejemplo muestra cómo se realiza la división sintética.

EJEMPLO 3 | División sintética

Use división sintética para dividir $2x^3 - 7x^2 + 5$ entre $x - 3$.

SOLUCIÓN Empezamos por escribir los coeficientes apropiados para representar el divisor y el dividendo.

$$
\text{Divisor } x - 3 \quad
\begin{array}{r|rrrr}
3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\
\hline
\end{array}
\quad \text{Dividendo } 2x^3 - 7x^2 + 0x + 5
$$

Bajamos el 2, multiplicamos $3 \cdot 2 = 6$ y escribimos el resultado en el renglón de en medio. A continuación, sumamos.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & & \\ \hline & \boxed{2} & -1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \text{Multiplique: } 3 \cdot 2 = 6 \\ \text{Sume: } -7 + 6 = -1 \end{array}$$

Repetimos este proceso de multiplicar y luego sumar hasta completar la tabla.

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & -3 & \\ \hline & 2 & \boxed{-1} & -3 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \text{Multiplique: } 3(-1) = -3 \\ \text{Sume: } 0 + (-3) = -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 2 & -7 & 0 & 5 \\ & & 6 & -3 & -9 \\ \hline & 2 & -1 & \boxed{-3} & -4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \\ \text{Multiplique: } 3(-3) = -9 \\ \text{Sume: } 5 + (-9) = -4 \end{array}$$

Cociente $2x^2 - x - 3$

Residuo -4

Del último renglón de la división sintética vemos que el cociente es $2x^2 - x - 3$ y el residuo es -4. Por lo tanto,

$$2x^3 - 7x^2 + 5 = (x - 3)(2x^2 - x - 3) - 4$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

Los teoremas del residuo y factor

El siguiente teorema muestra la forma en que la división sintética se puede usar para evaluar funciones polinomiales fácilmente.

TEOREMA DEL RESIDUO

Si la función polinomial $P(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es el valor $P(c)$.

DEMOSTRACIÓN Si el divisor del Algoritmo de División es de la forma $x - c$ para algún número real c, entonces el residuo debe ser constante (porque el grado del residuo es menor que el grado del divisor). Si a esta constante la llamamos r, entonces

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + r$$

Sustituyendo x por c en esta ecuación, obtenemos $P(c) = (c - c) \cdot Q(x) + r = 0 + r = r$, esto es, $P(c)$ es el residuo r.

EJEMPLO 4 | Uso del Teorema del Residuo para hallar el valor de una función polinomial

Sea $P(x) = 3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 7x + 3$.

(a) Encuentre el cociente y residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x + 2$.

(b) Use el Teorema del Residuo para hallar $P(-2)$.

SOLUCIÓN

(a) Como $x + 2 = x - (-2)$, la división sintética para este problema toma la siguiente forma.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -2 & 3 & 5 & -4 & 0 & 7 & 3 \\ & & -6 & 2 & 4 & -8 & 2 \\ \hline & 3 & -1 & -2 & 4 & -1 & 5 \end{array}$$

El residuo es 5, por lo que $P(-2) = 5$

El cociente es $3x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x - 1$, y el residuo es 5.

(b) Por el Teorema del Residuo, $P(-2)$ es el residuo cuando $P(x)$ se divide entre $x - (-2) = x + 2$. De la parte (a) el residuo es 5, por lo que $P(-2) = 5$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

El siguiente teorema dice que los *ceros* de polinomiales corresponden a *factores*; utilizamos este dato en la Sección 3.2 para graficar funciones polinomiales.

TEOREMA DEL FACTOR

c es cero de P si y sólo si $x - c$ es un factor de $P(x)$.

DEMOSTRACIÓN Si $P(x)$ se factoriza como $P(x) = (x - c) \cdot Q(x)$, entonces

$$P(c) = (c - c) \cdot Q(c) = 0 \cdot Q(c) = 0$$

Inversamente, si $P(c) = 0$, entonces por el Teorema del Residuo

$$P(x) = (x - c) \cdot Q(x) + 0 = (x - c) \cdot Q(x)$$

de modo que $x - c$ es un factor de $P(x)$.

EJEMPLO 5 | Factorizar una función polinomial usando el Teorema del Factor

Sea $P(x) = x^3 - 7x + 6$. Demuestre que $P(1) = 0$ y use este dato para factorizar $P(x)$ completamente.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x^2 + x - 6 \\ x - 1\overline{)x^3 + 0x^2 - 7x + 6} \\ \underline{x^3 - x^2} \qquad\quad\;\; \\ x^2 - 7x \quad\; \\ \underline{x^2 - x} \quad\;\; \\ -6x + 6 \\ \underline{-6x + 6} \\ 0 \end{array}$$

SOLUCIÓN Sustituyendo, vemos que $P(1) = 1^3 - 7 \cdot 1 + 6 = 0$. Por el Teorema del Factor esto significa que $x - 1$ es un factor de $P(x)$. Usando división sintética o larga (mostrada al margen), vemos que

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 - 7x + 6 && \text{Polinomial dada} \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6) && \text{Vea al margen} \\ &= (x - 1)(x - 2)(x + 3) && \text{Factorice la cuadrática } x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **53** Y **57**

EJEMPLO 6 | Hallar una función polinomial con ceros especificados

Encuentre una función polinomial de grado 4 que tenga ceros -3, 0, 1 y 5.

SOLUCIÓN Por el Teorema del Factor $x - (-3)$, $x - 0$, $x - 1$ y $x - 5$ deben todos ellos ser factores de la función polinomial deseada.

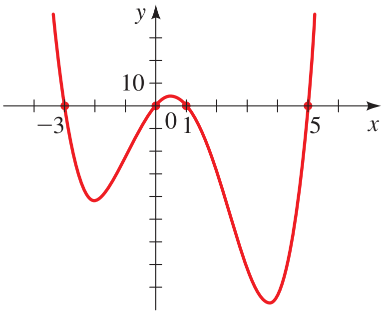


FIGURA 1
$P(x) = (x + 3)x(x - 1)(x - 5)$ tiene ceros -3, 0, 1 y 5.

Sea

$$P(x) = (x + 3)(x - 0)(x - 1)(x - 5)$$
$$= x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 15x$$

Como $P(x)$ es de grado 4, es una solución del problema. Cualquiera otra solución del problema debe ser un múltiplo constante de $P(x)$, porque sólo una multiplicación por una constante no cambia el grado.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59** ■

La función polinomial P del Ejemplo 6 está graficada en la Figura 1. Observe que los ceros de P corresponden a los puntos de intersección x de la gráfica.

3.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Si dividimos la polinomial P entre el factor $x - c$ y obtenemos la ecuación $P(x) = (x - c)Q(x) + R(x)$, entonces decimos que $x - c$ es el divisor, $Q(x)$ es el ______, y $R(x)$ es el ______.

2. **(a)** Si dividimos la polinomial $P(x)$ entre el factor $x - c$ y obtenemos un residuo de 0, entonces sabemos que c es un _____ de P.

(b) Si dividimos la polinomial $P(x)$ entre el factor $x - c$ y obtenemos un residuo de k, entonces sabemos que $P(c) =$ _____.

HABILIDADES

3-8 ■ Nos dan dos funciones polinomiales P y D. Use cualquier división sintética o larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese P en la forma $P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$.

3. $P(x) = 3x^2 + 5x - 4, \quad D(x) = x + 3$

4. $P(x) = x^3 + 4x^2 - 6x + 1, \quad D(x) = x - 1$

5. $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x, \quad D(x) = 2x - 3$

6. $P(x) = 4x^3 + 7x + 9, \quad D(x) = 2x + 1$

7. $P(x) = x^4 - x^3 + 4x + 2, \quad D(x) = x^2 + 3$

8. $P(x) = 2x^5 + 4x^4 - 4x^3 - x - 3, \quad D(x) = x^2 - 2$

9-14 ■ Nos dan dos funciones polinomiales P y D. Use cualquier división sintética o larga para dividir $P(x)$ entre $D(x)$, y exprese el cociente $P(x)/D(x)$ en la forma

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

9. $P(x) = x^2 + 4x - 8, \quad D(x) = x + 3$

10. $P(x) = x^3 + 6x + 5, \quad D(x) = x - 4$

11. $P(x) = 4x^2 - 3x - 7, \quad D(x) = 2x - 1$

12. $P(x) = 6x^3 + x^2 - 12x + 5, \quad D(x) = 3x - 4$

13. $P(x) = 2x^4 - x^3 + 9x^2, \quad D(x) = x^2 + 4$

14. $P(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 + x + 1, \quad D(x) = x^2 + x - 1$

15-24 ■ Encuentre el cociente y residuo usando división larga.

15. $\dfrac{x^2 - 6x - 8}{x - 4}$

16. $\dfrac{x^3 - x^2 - 2x + 6}{x - 2}$

17. $\dfrac{4x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{2x + 1}$

18. $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{3x + 6}$

19. $\dfrac{x^3 + 6x + 3}{x^2 - 2x + 2}$

20. $\dfrac{3x^4 - 5x^3 - 20x - 5}{x^2 + x + 3}$

21. $\dfrac{6x^3 + 2x^2 + 22x}{2x^2 + 5}$

22. $\dfrac{9x^2 - x + 5}{3x^2 - 7x}$

23. $\dfrac{x^6 + x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1}$

24. $\dfrac{2x^5 - 7x^4 - 13}{4x^2 - 6x + 8}$

25-38 ■ Encuentre el cociente y residuo usando división sintética.

25. $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 3}$

26. $\dfrac{x^2 - 5x + 4}{x - 1}$

27. $\dfrac{3x^2 + 5x}{x - 6}$

28. $\dfrac{4x^2 - 3}{x + 5}$

29. $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{x + 2}$

30. $\dfrac{3x^3 - 12x^2 - 9x + 1}{x - 5}$

31. $\dfrac{x^3 - 8x + 2}{x + 3}$

32. $\dfrac{x^4 - x^3 + x^2 - x + 2}{x - 2}$

33. $\dfrac{x^5 + 3x^3 - 6}{x - 1}$

34. $\dfrac{x^3 - 9x^2 + 27x - 27}{x - 3}$

35. $\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x - \frac{1}{2}}$

36. $\dfrac{6x^4 + 10x^3 + 5x^2 + x + 1}{x + \frac{2}{3}}$

37. $\dfrac{x^3 - 27}{x - 3}$ **38.** $\dfrac{x^4 - 16}{x + 2}$

39-51 ■ Use división sintética y el Teorema del Residuo para evaluar $P(c)$.

39. $P(x) = 4x^2 + 12x + 5, \quad c = -1$

40. $P(x) = 2x^2 + 9x + 1, \quad c = \frac{1}{2}$

41. $P(x) = x^3 + 3x^2 - 7x + 6, \quad c = 2$

42. $P(x) = x^3 - x^2 + x + 5, \quad c = -1$

43. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 7, \quad c = -2$

44. $P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 9x - 200, \quad c = 11$

45. $P(x) = 5x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 36x + 14, \quad c = -7$

46. $P(x) = 6x^5 + 10x^3 + x + 1, \quad c = -2$

47. $P(x) = x^7 - 3x^2 - 1, \quad c = 3$

48. $P(x) = -2x^6 + 7x^5 + 40x^4 - 7x^2 + 10x + 112, \quad c = -3$

49. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 2x + 1, \quad c = \frac{2}{3}$

50. $P(x) = x^3 - x + 1, \quad c = \frac{1}{4}$

51. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 8, \quad c = 0.1$

52. Sea

$$P(x) = 6x^7 - 40x^6 + 16x^5 - 200x^4 - 60x^3 - 69x^2 + 13x - 139$$

Calcule $P(7)$ **(a)** usando división sintética y **(b)** sustituyendo $x = 7$ en la función polinomial y evaluando directamente.

53-56 ■ Use el Teorema del Factor para demostrar que $x - c$ es un factor de $P(x)$ para el (los) valor(es) dado(s) de c.

53. $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1, \quad c = 1$

54. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10, \quad c = 2$

55. $P(x) = 2x^3 + 7x^2 + 6x - 5, \quad c = \frac{1}{2}$

56. $P(x) = x^4 + 3x^3 - 16x^2 - 27x + 63, \quad c = 3, -3$

57-58 ■ Demuestre que el (los) valor(es) dado(s) de c son ceros de $P(x)$, y encuentre todos los otros ceros de $P(x)$.

57. $P(x) = x^3 - x^2 - 11x + 15, \quad c = 3$

58. $P(x) = 3x^4 - x^3 - 21x^2 - 11x + 6, \quad c = \frac{1}{3}, -2$

59-62 ■ Encuentre una función polinomial del grado especificado que tenga los ceros dados.

59. Grado 3: ceros $-1, 1, 3$

60. Grado 4: ceros $-2, 0, 2, 4$

61. Grado 4: ceros $-1, 1, 3, 5$

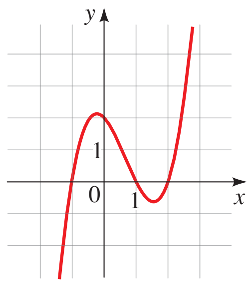
62. Grado 5: ceros $-2, -1, 0, 1, 2$

63. Encuentre una función polinomial de grado 3 que tenga ceros $1, -2$ y 3 y en el que el coeficiente de x^2 sea 3.

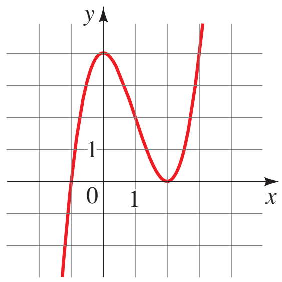
64. Encuentre una función polinomial de grado 4 que tenga coeficientes enteros y ceros $1, -1, 2$ y $\frac{1}{2}$.

65-68 ■ Encuentre la función polinomial del grado especificado cuya gráfica se muestra.

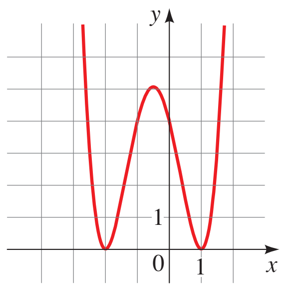
65. Grado 3



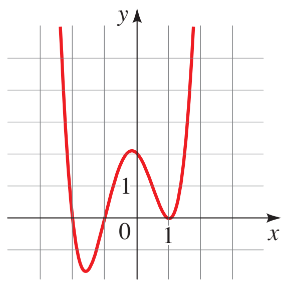
66. Grado 3



67. Grado 4



68. Grado 4



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

69. ¿División imposible? Supongamos que nos piden resolver los siguientes dos problemas en un examen:

A. Encuentre el residuo cuando $6x^{1000} - 17x^{562} + 12x + 26$ se divide entre $x + 1$.

B. ¿$x - 1$ es factor de $x^{567} - 3x^{400} + x^9 + 2$?

Obviamente, es imposible resolver estos problemas al hacer una división, porque los polinomios son de grado muy alto. Use uno o más de los teoremas de esta sección para resolver estos problemas *sin* hacer realmente la división.

70. Forma anidada de una función polinomial Expanda Q para demostrar que las polinomiales P y Q son iguales.

$$P(x) = 3x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 5$$
$$Q(x) = (((3x - 5)x + 1)x - 3)x + 5$$

Trate de evaluar $P(2)$ y $Q(2)$ mentalmente, usando las formas dadas. ¿Cuál es más fácil? Ahora escriba la función polinomial $R(x) = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 4$ en forma "anidada", como la polinomial Q. Use la forma anidada para hallar $R(3)$ mentalmente.

¿Ve usted cómo calcular con la forma anidada sigue los mismos pasos aritméticos que calcular el valor de una función polinomial usando división sintética?

3.4 CEROS REALES DE FUNCIONES POLINOMIALES

Ceros racionales de funciones polinomiales ▶ Regla de Descartes de los signos y límites superior e inferior para raíces ▶ Uso de álgebra y calculadoras graficadoras para resolver ecuaciones con polinomios

El Teorema del Factor nos dice que hallar los ceros de una función polinomial es en realidad lo mismo que factorizarlo en factores lineales. En esta sección estudiamos algunos métodos algebraicos que nos ayudan a hallar los ceros reales de una función polinomial y, por tanto, factorizar el polinomio. Empezamos con los ceros *racionales* de una función polinomial.

▼ Ceros racionales de funciones polinomiales

Para ayudarnos a entender el siguiente teorema, consideremos la función polinomial

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-2)(x-3)(x+4) && \text{Forma factorizada} \\ &= x^3 - x^2 - 14x + 24 && \text{Forma expandida} \end{aligned}$$

De la forma factorizada vemos que los ceros de P son 2, 3 y -4. Cuando se expande el polinomio, la constante 24 se obtiene al multiplicar $(-2) \times (-3) \times 4$. Esto significa que los ceros de la función polinomial son todos ellos factores del término constante. Lo siguiente generaliza esta observación.

TEOREMA DE CEROS RACIONALES

Si la función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ tiene coeficientes enteros, entonces todo cero racional de P es de la forma

$$\frac{p}{q}$$

donde p es un factor del coeficiente constante a_0
y q es un factor del coeficiente principal a_n.

DEMOSTRACIÓN Si p/q es un cero racional, en sus términos más sencillos, la función polinomial P, entonces tenemos

$$a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \cdots + a_1\left(\frac{p}{q}\right) + a_0 = 0$$

$$a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1}q + \cdots + a_1 pq^{n-1} + a_0 q^n = 0 \qquad \text{Multiplique por } q^n$$

$$p(a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = -a_0 q^n \qquad \text{Reste } a_0q^n \text{ y factorice el lado izquierdo}$$

Ahora p es un factor del lado izquierdo, de modo que también debe ser un factor del lado derecho. Como p/q está en sus términos más sencillos, p y q no tienen factor en común, de modo que p debe ser un factor de a_0. Una demostración similar muestra que q es un factor de a_n. ■

Vemos del Teorema de Ceros Racionales que si el coeficiente principal es 1 o -1, entonces los ceros racionales deben ser factores del término constante.

EJEMPLO 1 Uso del Teorema de Ceros Racionales

Encuentre los ceros racionales de $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

EVARISTE GALOIS (1811-1832) es uno de los muy pocos matemáticos de tener toda una teoría a la que se ha dado nombre en su honor. Murió cuando todavía no cumplía 21 años, pero ya había resuelto por completo el problema central de la teoría de ecuaciones al describir un criterio que revela si una ecuación con polinomios se puede resolver con operaciones algebraicas. Galois fue uno de los más grandes matemáticos de su tiempo, aunque casi no fue conocido. Repetidas veces envió su trabajo a los eminentes matemáticos Cauchy y Poisson, quienes o bien perdieron las cartas o no entendieron sus ideas. Galois escribía en un estilo terso e incluía pocos detalles, lo cual es probable desempeñó un papel para no aprobar los exámenes de admisión de la Ecole Polytechique de París. Político radical, Galois pasó varios meses en prisión por sus actividades revolucionarias. Su corta vida llegó a su fin cuando murió en un duelo por un lío de faldas y, temiendo esto, escribió la esencia de sus ideas y las confió a su amigo Auguste Chevalier. Concluyó escribiendo "habrá, espero, personas que encuentren ventaja en descifrar todo este desorden." El matemático Camille Jordan hizo justamente esto, 14 años después.

SOLUCIÓN Como el coeficiente principal es 1, cualquier cero racional debe ser un divisor del término constante 2. Entonces los ceros racionales posibles son ± 1 y ± 2. Probamos cada una de estas posibilidades.

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^3 - 3(1) + 2 = 0 \\ P(-1) &= (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4 \\ P(2) &= (2)^3 - 3(2) + 2 = 4 \\ P(-2) &= (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0 \end{aligned}$$

Los ceros racionales de P son 1 y -2.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

En el siguiente recuadro se explica cómo usar el Teorema de Ceros Racionales con división sintética para factorizar un polinomio.

HALLAR LOS CEROS RACIONALES DE UN POLINOMIO

1. **Hacer una lista de los ceros posibles.** Haga una lista de todos los ceros racionales posibles, usando el Teorema de Ceros Racionales.
2. **Dividir.** Use división sintética para evaluar la función polinomial de cada uno de los candidatos para los ceros racionales que usted encontró en el Paso 1. Cuando el residuo sea 0, observe el cociente que haya obtenido.
3. **Repetir.** Repita los Pasos 1 y 2 para el cociente. Deténgase cuando obtenga un cociente que sea cuadrático o se factorice con facilidad, y use la fórmula cuadrática o factorice para hallar los ceros restantes.

EJEMPLO 2 | Hallar ceros racionales

Factorice la función polinomial $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$, y encuentre todos sus ceros.

SOLUCIÓN Por el Teorema de Ceros Racionales, los ceros racionales de P son de la forma

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factor de término constante}}{\text{factor de coeficiente principal}}$$

El término constante es 6 y el coeficiente principal es 2, y

$$\text{posible cero racional de } P = \frac{\text{factor de 6}}{\text{factor de 2}}$$

Los factores de 6 son $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ y los factores de 2 son $\pm 1, \pm 2$. Por lo tanto, los posibles ceros racionales de P son

$$\pm\frac{1}{1}, \quad \pm\frac{2}{1}, \quad \pm\frac{3}{1}, \quad \pm\frac{6}{1}, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{2}{2}, \quad \pm\frac{3}{2}, \quad \pm\frac{6}{2}$$

Simplificando las fracciones y eliminando duplicados, obtenemos la siguiente lista de posibles ceros racionales:

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 3, \quad \pm 6, \quad \pm\frac{1}{2}, \quad \pm\frac{3}{2}$$

Para comprobar cuál de estos *posibles* ceros en realidad *son* ceros, necesitamos evaluar P en cada uno de estos números. Una forma eficiente de hacerlo es usar división sintética.

Pruebe con 1 como cero

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 2 & 3 & -10 \\ \hline & 2 & 3 & -10 & -4 \end{array}$$

El residuo *no es* 0, por lo que 1 *no es* un cero

Pruebe si 2 es un cero

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & -13 & 6 \\ & & 4 & 10 & -6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array}$$

El residuo *es* 0, por lo que 2 *es* un cero

De la última división sintética vemos que 2 es un cero de P y que P se factoriza como

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + x^2 - 13x + 6 && \text{Función polinomial dada} \\ &= (x-2)(2x^2+5x-3) && \text{De división sintética} \\ &= (x-2)(2x-1)(x+3) && \text{Factorice } 2x^2+5x-3 \end{aligned}$$

De la forma factorizada vemos que los ceros de P son 2, $\frac{1}{2}$ y -3.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27**

EJEMPLO 3 | Uso del Teorema de Ceros Racionales y la Fórmula Cuadrática

Sea $P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$.

(a) Encuentre los ceros de P. **(b)** Trace la gráfica de P.

SOLUCIÓN

(a) El coeficiente principal de P es 1, de modo que todos los ceros racionales son enteros: son divisores del término constante 10. Entonces, los posibles candidatos son

$$\pm 1, \quad \pm 2, \quad \pm 5, \quad \pm 10$$

Usando división sintética (vea al margen), encontramos que 1 y 2 no son ceros pero que 5 es un cero y que P se factoriza como

$$x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 = (x-5)(x^3 - 5x - 2)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 1 & -4 & -9 & 14 \\ \hline & 1 & -4 & -9 & 14 & \boxed{24} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 2 & -6 & -22 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & -11 & 1 & \boxed{12} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 5 & 1 & -5 & -5 & 23 & 10 \\ & & 5 & 0 & -25 & -10 \\ \hline & 1 & 0 & -5 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Ahora tratamos de factorizar el cociente $x^3 - 5x - 2$. Sus posibles ceros son los divisores de -2, es decir,

$$\pm 1, \quad \pm 2$$

Como ya sabemos que 1 y 2 no son ceros de la función polinomial original P, no necesitamos probarlos otra vez. Verificando los candidatos restantes, -1 y -2, vemos que -2 es un cero (vea al margen), y P se factoriza como

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 0 & -5 & -2 \\ & & -2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10 &= (x-5)(x^3 - 5x - 2) \\ &= (x-5)(x+2)(x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

A continuación use la fórmula cuadrática para obtener los dos ceros restantes de P:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Los ceros de P son 5, -2, $1 + \sqrt{2}$, y $1 - \sqrt{2}$.

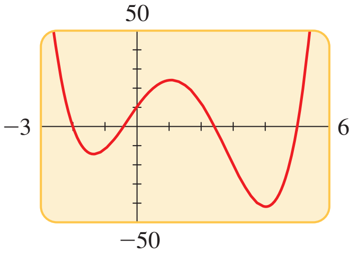


FIGURA 1
$P(x) = x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 23x + 10$

(b) Ahora que conocemos los ceros de P, podemos usar los métodos de la Sección 3.2 para trazar la gráfica. Si deseamos usar una calculadora graficadora, conocer los ceros nos permite escoger un rectángulo de vista apropiado, que sea lo suficiente ancho como para contener todos los puntos de intersección x de P. Las aproximaciones numéricas de los ceros de P son

$$5, \qquad -2, \qquad 2.4, \qquad \text{y} \qquad -0.4$$

Por lo tanto, en este caso escogemos el rectángulo $[-3, 6]$ por $[-50, 50]$ y trazamos la gráfica que se ve en la Figura 1.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **47** Y **51** ■

Regla de Descartes de los signos y límites superior e inferior para raíces

En algunos casos, la regla siguiente descubierta por el filósofo y matemático francés René Descartes hacia 1637 (vea página 181) es útil para eliminar candidatos de listas largas de posibles raíces racionales. Para describir esta regla, necesitamos el concepto de *variación en signo.* Si $P(x)$ es una función polinomial con coeficientes reales, escrito con potencias descendentes de x (y omitiendo potencias con coeficiente 0), entonces una **variación en signo** se presenta siempre que coeficientes adyacentes tengan signos contrarios. Por ejemplo,

$$P(x) = 5x^7 - 3x^5 - x^4 + 2x^2 + x - 3$$

tiene tres variaciones en signos.

Polinomio	Variaciones en signo
$x^2 + 4x + 1$	0
$2x^3 + x - 6$	1
$x^4 - 3x^2 - x + 4$	2

REGLA DE DESCARTES DE SIGNOS

Sea P una función polinomial con coeficientes reales.

1. El número de ceros reales positivos de $P(x)$ es igual al número de variaciones en signo en $P(x)$ o es menor a este último número, en un número entero par.
2. El número de ceros reales negativos de $P(x)$ es igual al número de variaciones en signo en $P(-x)$ o es menor a este último número, en un número entero par.

EJEMPLO 4 | Uso de la Regla de Descartes

Use la Regla de Descartes de los Signos para determinar el número posible de ceros reales positivos y negativos de la función polinomial

$$P(x) = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 - x - 3$$

SOLUCIÓN La polinomial tiene una variación en signo, de modo que tiene un cero positivo. Ahora

$$\begin{aligned} P(-x) &= 3(-x)^6 + 4(-x)^5 + 3(-x)^3 - (-x) - 3 \\ &= 3x^6 - 4x^5 - 3x^3 + x - 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(-x)$ tiene tres variaciones en signo. Entonces, $P(x)$ tiene ya sea tres o un cero negativo, haciendo un total de dos o de cuatro ceros reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67** ■

Decimos que a es un **límite inferior** y b es un **límite superior** para los ceros de una función polinomial si todo cero real c de la polinomial satisface $a \le c \le b$. El siguiente teorema nos ayuda a hallar esos límites para los ceros de una función polinomial.

TEOREMA DE LOS LÍMITES SUPERIORES E INFERIORES

Sea P una función polinomial con coeficientes reales.

1. Si dividimos $P(x)$ entre $x - b$ (con $b > 0$) usando división sintética y si el renglón que contiene el cociente y residuo no tiene una entrada negativa, entonces b es un límite superior para los ceros reales de P.
2. Si dividimos $P(x)$ entre $x - a$ (con $a < 0$) usando división sintética y si el renglón que contiene el cociente y residuo tiene entradas que son alternativamente no positivas y no negativas, entonces a es un límite inferior para los ceros reales de P.

Una demostración de este teorema está sugerida en el Ejercicio 97. La frase "alternativamente no positivas y no negativas" simplemente quiere decir que los signos de los números se alternan, con 0 considerado como positivo o negativo según se requiera.

EJEMPLO 5 | Límites superior e inferior para ceros de una función polinomial

Demuestre que todos los ceros reales de la función polinomial $P(x) = x^4 - 3x^2 + 2x - 5$ se encuentran entre -3 y 2.

SOLUCIÓN Dividimos $P(x)$ entre $x - 2$ y $x + 3$ usando división sintética.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ & & 2 & 4 & 2 & 8 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{array}$$

Todas las entradas positivas

$$\begin{array}{r|rrrrr} -3 & 1 & 0 & -3 & 2 & -5 \\ & & -3 & 9 & -18 & 48 \\ \hline & 1 & -3 & 6 & -16 & 43 \end{array}$$

Las entradas se alternan en signo

Por el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores, -3 es un límite inferior y 2 es un límite superior para los ceros. Como ni -3 ni 2 es un cero (los residuos no son 0 en la tabla de división), todos los ceros reales están entre estos números.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **71**

EJEMPLO 6 | Factorizar una función polinomial de quinto grado

Factorice completamente la función polinomial

$$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$$

SOLUCIÓN Los posibles ceros racionales de P son $\pm\frac{1}{2}$, ±1, $\pm\frac{3}{2}$, ±3, $\pm\frac{9}{2}$, y ±9. Verificamos primero los candidatos positivos, empezando con el más pequeño.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} \frac{1}{2} & 2 & 5 & -8 & -14 & 6 & 9 \\ & & 1 & 3 & -\frac{5}{2} & -\frac{33}{4} & -\frac{9}{8} \\ \hline & 2 & 6 & -5 & -\frac{33}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{63}{8} \end{array}$$

$\frac{1}{2}$ no es un cero

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 2 & 5 & -8 & -14 & 6 & 9 \\ & & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 \\ \hline & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 & 0 \end{array}$$

$P(1) = 0$

Entonces 1 es un cero, y $P(x) = (x - 1)(2x^4 + 7x^3 - x^2 - 15x - 9)$. Continuamos factorizando el cociente. Todavía tenemos la misma lista de posibles ceros excepto que $\frac{1}{2}$ se ha eliminado.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 \\ & & 2 & 9 & 8 & -7 \\ \hline & 2 & 9 & 8 & -7 & -16 \end{array}$$

1 no es un cero

$$\begin{array}{r|rrrrr} \frac{3}{2} & 2 & 7 & -1 & -15 & -9 \\ & & 3 & 15 & 21 & 9 \\ \hline & 2 & 10 & 14 & 6 & 0 \end{array}$$

$P\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, todas las entradas no negativas

Vemos que $\frac{3}{2}$ es un cero y un límite superior para los ceros de $P(x)$, de modo que no necesitamos verificar más por ceros positivos, porque todos los candidatos restantes son mayores a $\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(x-\tfrac{3}{2})(2x^3+10x^2+14x+6) && \text{Por división sintética} \\ &= (x-1)(2x-3)(x^3+5x^2+7x+3) && \text{Factorice 2 del último factor, multiplique en segundo factor} \end{aligned}$$

Por la Regla de Descartes de los Signos, $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ no tiene cero positivo, de modo que sus únicos ceros racionales posibles son -1 y -3.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 5 & 7 & 3 \\ & & -1 & -4 & -3 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array} \qquad P(-1) = 0$$

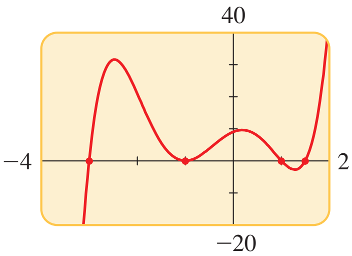


FIGURA 2

$P(x) = 2x^5 + 5x^4 - 8x^3 - 14x^2 + 6x + 9$
$= (x-1)(2x-3)(x+1)^2(x+3)$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(2x-3)(x+1)(x^2+4x+3) && \text{Por división sintética} \\ &= (x-1)(2x-3)(x+1)^2(x+3) && \text{Factorización cuadrática} \end{aligned}$$

Esto significa que los ceros de P son $1, \frac{3}{2}, -1$ y -3. La gráfica de la función polinomial se muestra en la Figura 2.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **79**

Uso de álgebra y calculadoras graficadoras para resolver ecuaciones con polinomios

En la Sección 1.9 utilizamos calculadoras graficadoras para resolver ecuaciones gráficamente. Ahora podemos usar las técnicas algebraicas que hemos aprendido, para seleccionar un rectángulo de vista apropiado cuando resolvamos gráficamente una ecuación con polinomios.

EJEMPLO 7 | Resolver gráficamente una ecuación de cuarto grado

Encuentre todas las soluciones reales de la siguiente ecuación, redondeadas al décimo más cercano.

$$3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3 = 0$$

SOLUCIÓN Para resolver gráficamente la ecuación, graficamos

$$P(x) = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$$

Usamos el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores para ver dónde pueden hallarse las soluciones.

Primero usamos el Teorema de los Límites Superiores e Inferiores para hallar dos números entre los cuales deben estar todas las soluciones. Esto nos permite escoger un rectángulo de vista que seguramente contiene todos los puntos de intersección x de P. Usamos división sintética y procedemos por prueba y error.

Para hallar un límite superior, intentamos los números enteros 1, 2, 3, . . . , como candidatos potenciales. Vemos que 2 es un límite superior para las soluciones.

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 3 & 4 & -7 & -2 & -3 \\ & & 6 & 20 & 26 & 48 \\ \hline & 3 & 10 & 13 & 24 & 45 \end{array} \qquad \text{Todos positivos}$$

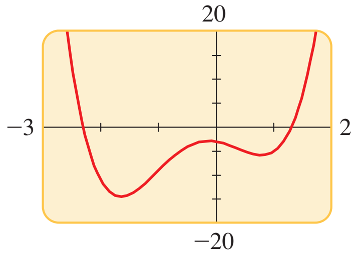


FIGURA 3
$y = 3x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 2x - 3$

Ahora buscamos un límite inferior, intentando con los números -1, -2 y -3 como potenciales candidatos. Vemos que -3 es un límite inferior para las soluciones.

-3	3	4	-7	-2	-3
		-9	15	-24	78
	3	-5	8	-26	75

Las entradas se alternan en signo

Entonces, todas las soluciones se encuentran entre -3 y 2. Por lo tanto, el rectángulo de vista $[-3, 2]$ por $[-20, 20]$ contiene todos los puntos de intersección x de P. La gráfica de la figura 3 tiene dos puntos de intersección x, uno entre -3 y -2 y el otro entre 1 y 2. Si hacemos acercamiento (zoom), encontramos que las soluciones de la ecuación, al décimo más cercano, son -2.3 y 1.3.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **93**

EJEMPLO 8 | Determinar el tamaño de un tanque de combustible

Un tanque de combustible está formado por una sección cilíndrica central de 4 pies de largo y dos secciones hemisféricas de extremo, como se ve en la Figura 4. Si el tanque tiene un volumen de 100 pies³, ¿cuál es el radio r que se muestra en la figura, redondeado al centésimo de pie más cercano?

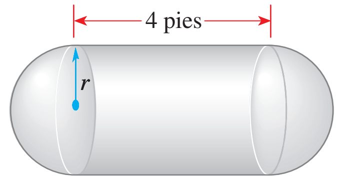


FIGURA 4

SOLUCIÓN Usando la fórmula del volumen al final de este libro, vemos que el volumen de la sección cilíndrica del tanque es

Volumen de un cilindro: $V = \pi r^2 h$

$$\pi \cdot r^2 \cdot 4$$

Las dos partes semiesféricas juntas forman una esfera completa cuyo volumen es

Volumen de una esfera: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3$$

Como el volumen total del tanque es de 100 pies³, obtenemos la siguiente ecuación:

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 = 100$$

Una solución negativa para r no tendría sentido en esta situación física, y por sustitución podemos verificar que $r = 3$ lleva a un tanque que tiene más de 226 pies³ de volumen, mucho mayor que el requerido de 100 pies³. Por lo tanto, sabemos que el radio correcto está entre 0 y 3 pies, de modo que usamos un rectángulo de vista de $[0, 3]$ por $[50, 150]$ para graficar la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$, como se ve en la Figura 5. Como buscamos que el valor de esta función sea 100, también graficamos la recta horizontal $y = 100$ en el mismo rectángulo de vista. El radio correcto será la coordenada x del punto de intersección de la curva y la recta. Usando el cursor y haciendo acercamiento zoom, vemos que en el punto de intersección $x \approx 2.15$, redondeado a dos lugares decimales. Entonces el tanque tiene un radio de aproximadamente 2.15 pies.

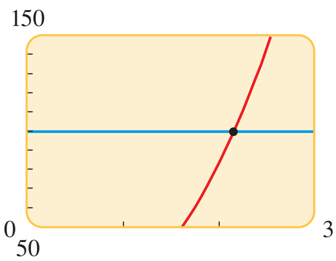


FIGURA 5
$y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2$ y $y = 100$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **99**

Observe que podríamos haber resuelto la ecuación del Ejemplo 8 al escribirla primero como

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 - 100 = 0$$

y luego hallar el punto de intersección x de la función $y = \frac{4}{3}\pi x^3 + 4\pi x^2 - 100$.

71. **(a)** Demuestre que $2i$ y $1 - i$ son soluciones de la ecuación

$$x^2 - (1 + i)x + (2 + 2i) = 0$$

pero que sus complejos conjugados $-2i$ y $1 + i$ no lo son.

(b) Explique por qué el resultado de la parte (a) no viola el Teorema de Ceros Conjugados.

72. **(a)** Encuentre la función polinomial con coeficientes *reales* del grado más bajo posible para el que i y $1 + i$ son ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

(b) Encuentre la función polinomial con coeficientes *complejos* del grado más pequeño posible para el que i y $1 + i$ son ceros y en el que el coeficiente de la potencia más alta es 1.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

73. **Polinomios de grado impar** El Teorema de Ceros Conjugados dice que los ceros complejos de una función polinomial con coeficientes reales se presentan en pares conjugados complejos. Explique la forma en que este hecho demuestra que una función polinomial con coeficientes reales y grado impar tiene al menos un cero real.

74. **Raíces de la unidad** Hay dos raíces cuadradas de 1, es decir, 1 y -1. Éstas son las soluciones de $x^2 = 1$. Las raíces cuartas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^4 = 1$ o $x^4 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cuartas de 1 hay? Encuéntrelas. Las raíces cúbicas de 1 son las soluciones de la ecuación $x^3 = 1$ o $x^3 - 1 = 0$. ¿Cuántas raíces cúbicas de 1 hay? Encuéntrelas. ¿Cómo hallaría usted las raíces sextas de 1? ¿Cuántas raíces hay? Haga una conjetura acerca del número de las n-raíces de 1.

3.7 FUNCIONES RACIONALES

Funciones racionales y asíntotas ▶ Transformaciones de $y = 1/x$ ▶ Asíntotas de funciones racionales ▶ Gráficas de funciones racionales ▶ Asíntotas diagonales y comportamiento final ▶ Aplicaciones

Una función racional es una función de la forma

$$r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P y Q son funciones polinomiales. Suponemos que $P(x)$ y $Q(x)$ no tienen factor en común. Aun cuando las funciones racionales se construyen a partir de polinomios, sus gráficas tienen un aspecto muy diferente del de las gráficas de funciones polinomiales.

▼ Funciones racionales y asíntotas

Los dominios de expresiones racionales se estudian en la Sección 1.4.

El *dominio* de una función racional está formado por todos los números reales x excepto aquellos para los cuales el denominador es cero. Al hacer la gráfica de una función racional, debemos poner especial atención al comportamiento de la gráfica cerca de esos valores x. Empezamos por graficar una función racional muy sencilla.

EJEMPLO 1 | Una función racional sencilla

Grafique la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN La función f no está definida para $x = 0$. Las tablas siguientes muestran que cuando x es cercana a cero, el valor de $|f(x)|$ es grande, y cuanto más se acerque x a cero, más grande se hace $|f(x)|$.

Para números positivos reales,

$$\frac{1}{\text{NÚMERO GRANDE}} = \text{número pequeño}$$

$$\frac{1}{\text{número pequeño}} = \text{NÚMERO GRANDE}$$

x	$f(x)$
-0.1	-10
-0.01	-100
-0.00001	$-100{,}000$
Se aproxima a 0^-	Se aproxima a $-\infty$

x	$f(x)$
0.1	10
0.01	100
0.00001	100,000
Se aproxima a 0^+	Se aproxima a ∞

Describimos este comportamiento en palabras y en símbolos como sigue. La primera tabla muestra que cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, los valores de $y = f(x)$ decrecen sin límite. En símbolos

$$f(x) \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^- \qquad \text{“}y \text{ se aproxima al infinito negativo cuando } x \text{ se aproxima a 0 por la izquierda”}$$

La segunda tabla muestra que cuando x se aproxima a 0 por la derecha, los valores de $f(x)$ aumentan sin límite. En símbolos,

$$f(x) \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 0^+ \qquad \text{“}y \text{ se aproxima al infinito cuando } x \text{ se aproxima a 0 por la derecha”}$$

Las dos tablas siguientes muestran cómo cambia $f(x)$ cuando $|x|$ se hace grande.

x	$f(x)$
-10	-0.1
-100	-0.01
$-100{,}000$	-0.00001

Se aproxima a $-\infty$ Se aproxima a 0

x	$f(x)$
10	0.1
100	0.01
100,000	0.00001

Se aproxima a ∞ Se aproxima a 0

Estas tablas muestran que cuando $|x|$ se hace grande, el valor de $f(x)$ se aproxima y está cerca de cero. Describimos esta situación simbólicamente al escribir.

$$f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty \qquad \text{y} \qquad f(x) \to 0 \quad \text{cuando} \quad x \to \infty$$

Usando la información de estas tablas y localizando unos cuantos puntos adicionales, obtenemos la gráfica de la Figura 1.

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
$-\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	2
1	1
2	$\frac{1}{2}$

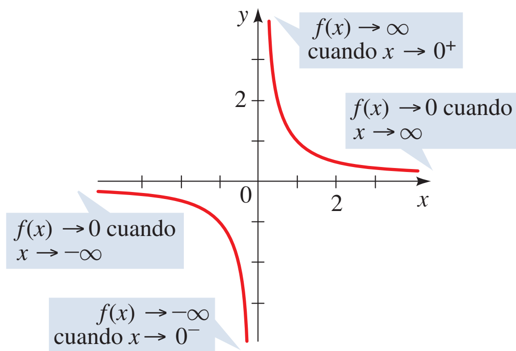


FIGURA 1
$f(x) = \frac{1}{x}$

La función f está definida para todos los valores de x que no sean 0, de modo que el dominio $\{x \mid x \neq 0\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 0\}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

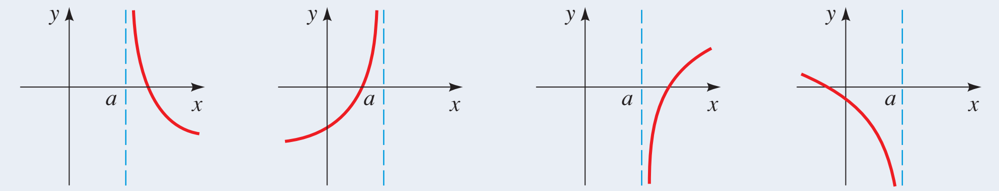
En el Ejemplo 1 utilizamos la siguiente notación de flechas.

Símbolo	**Significado**
$x \to a^-$	x se aproxima a a por la izquierda
$x \to a^+$	x se aproxima a a por la derecha
$x \to -\infty$	x se va al infinito negativo; es decir, x decrece sin límite
$x \to \infty$	x se va al infinito; es decir, x aumenta sin límite

La recta $x = 0$ se denomina *asíntota vertical* de la gráfica de la Figura 1, y la recta $y = 0$ es una *asíntota horizontal*. Informalmente hablando, una asíntota de una función es una recta a la que la gráfica de la función se acerca cada vez más cuando nos movemos a lo largo de la recta.

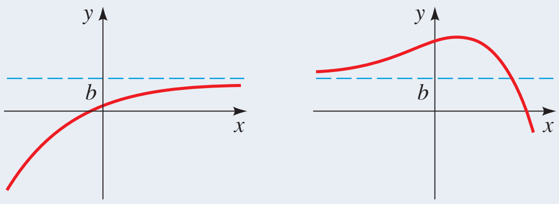
DEFINICIÓN DE ASÍNTOTAS VERTICALES Y HORIZONTALES

1. La recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a $\pm\infty$ cuando x se aproxima a a por la derecha o por la izquierda.



$y \to \infty$ cuando $x \to a^+$ $\quad$ $y \to \infty$ cuando $x \to a^-$ $\quad$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^+$ $\quad$ $y \to -\infty$ cuando $x \to a^-$

2. La recta $y = b$ es una **asíntota horizontal** de la función $y = f(x)$ si y se aproxima a b cuando x se aproxima a $\pm\infty$.



$y \to b$ cuando $x \to \infty$ $\quad$ $y \to b$ cuando $x \to -\infty$

Una función racional tiene asíntotas verticales donde la función no está definida, es decir, donde el denominador es cero.

Transformaciones de $y = 1/x$

Una función racional de la forma

$$r(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

puede graficarse al desplazar, estirar y/o reflejar la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$ mostrada en la Figura 1, usando las transformaciones estudiadas en la Sección 2.5. (Tales funciones se denominan *transformaciones fraccionarias lineales.*)

EJEMPLO 2 | Usar transformaciones para graficar funciones racionales

Grafique cada función racional, y exprese el dominio y rango.

(a) $r(x) = \dfrac{2}{x - 3}$ $\qquad$ **(b)** $s(x) = \dfrac{3x + 5}{x + 2}$

SOLUCIÓN

(a) Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Entonces podemos expresar r en términos de f como sigue:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{2}{x - 3} \\ &= 2\left(\frac{1}{x - 3}\right) && \text{Factorice 2} \\ &= 2(f(x - 3)) && \text{Porque } f(x) = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

De esta forma vemos que la gráfica de r se obtiene de la gráfica de f al desplazar 3 unidades a la derecha y alargar verticalmente en un factor de 2. Entonces, r tiene asíntota vertical $x = 3$ y asíntota horizontal $y = 0$. La gráfica de r se muestra en la Figura 2.

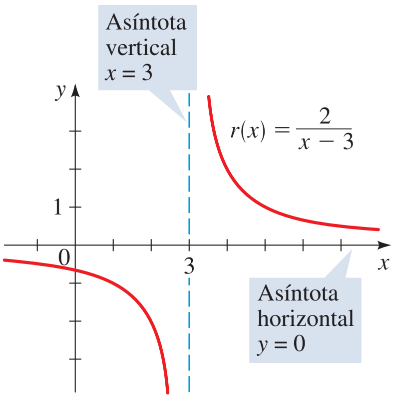


FIGURA 2

$$\begin{array}{r} 3 \\ x + 2 \overline{)\,3x + 5} \\ \underline{3x + 6} \\ -1 \end{array}$$

La función r está definida para toda x que no sea 3, por lo que el dominio es $\{x \mid x \neq 3\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 0\}$.

(b) Usando división larga (vea al margen), obtenemos $s(x) = 3 - \frac{1}{x+2}$. Entonces, podemos expresar s en términos de f como sigue:

$$\begin{aligned} s(x) &= 3 - \frac{1}{x+2} \\ &= -\frac{1}{x+2} + 3 && \text{Reacomodando términos} \\ &= -f(x+2) + 3 && \text{Ya que } f(x) = \tfrac{1}{x} \end{aligned}$$

De esta forma vemos que la gráfica de s se obtiene de la gráfica de f al desplazar 2 unidades a la izquierda, reflejar en el eje x y desplazar hacia arriba 3 unidades. Entonces, s tiene una asíntota vertical $x = -2$ y asíntota horizontal $y = 3$. La gráfica de s se muestra en la Figura 3.

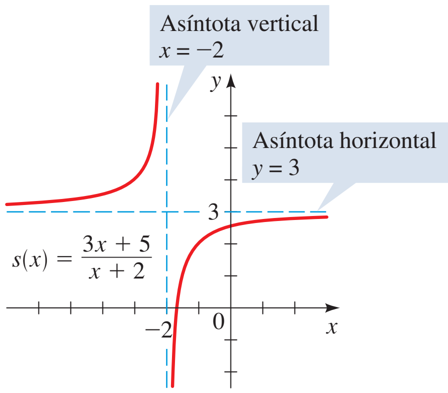


FIGURA 3

La función s está definida para toda x que no sea -2, de modo que el dominio es $\{x \mid x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y \neq 3\}$.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **35** Y **37**

Asíntotas de funciones racionales

Los métodos del Ejemplo 2 se cumplen sólo para funciones racionales simples. Para graficar unas más complicadas, necesitamos dar una mirada más rigurosa al comportamiento de una función racional cerca de sus asíntotas vertical y horizontal.

EJEMPLO 3 | Asíntotas de una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN

Asíntota vertical: Primero factorizamos el denominador

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{(x-1)^2}$$

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical porque el denominador de r es cero cuando $x = 1$.

Para ver cuál es el aspecto de la gráfica de f cerca de la asíntota vertical, hacemos tablas de valores para valores x a la izquierda y derecha de 1. De las tablas mostradas a continuación vemos que

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^- \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to 1^+$$

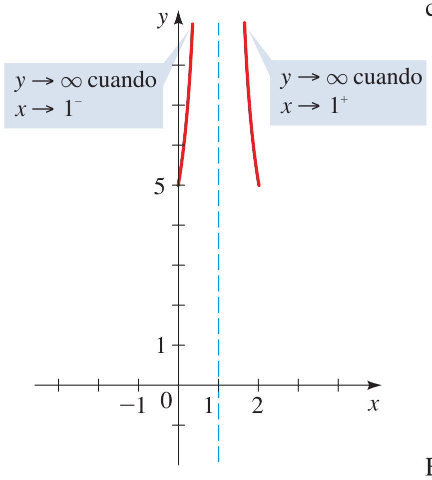


FIGURA 4

$x \to 1^-$

x	y
0	5
0.5	14
0.9	302
0.99	30,002

Se aproxima a 1^- | Se aproxima a ∞

$x \to 1^+$

x	y
2	5
1.5	14
1.1	302
1.01	30,002

Se aproxima a 1^+ | Se aproxima a ∞

Entonces, cerca de la asíntota vertical $x = 1$, la gráfica de r tiene la forma mostrada en la Figura 4.

Asíntota horizontal: La asíntota horizontal es el valor que alcanza y cuando $x \to \pm\infty$. Para ayudarnos a hallar este valor, dividimos numerador y denominador entre x^2, la potencia superior de x que aparece en la expresión:

$$y = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1} \cdot \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Las expresiones fraccionarias $\frac{4}{x}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{2}{x}$ y $\frac{1}{x^2}$ se aproximan todas a 0 cuando $x \to \pm\infty$ (vea Ejercicio 83, página 12). Por lo tanto, cuando $x \to \pm\infty$, tenemos

Estos términos se aproximan a 0

$$y = \frac{2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} \longrightarrow \frac{2 - 0 + 0}{1 - 0 + 0} = 2$$

Estos términos se aproximan a 0

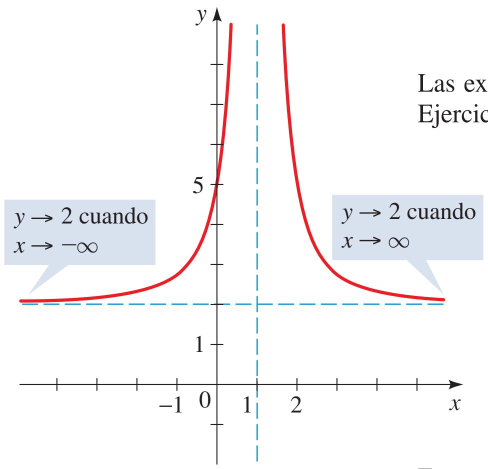


FIGURA 5

$$r(x) = \frac{2x^2 - 4x + 5}{x^2 - 2x + 1}$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

Como la gráfica debe aproximarse a la asíntota horizontal, podemos completarla como en la Figura 5.

Dominio y rango: La función r está definida para todos los valores de x que no sean 1, de modo que el dominio es $\{x \mid x \neq 1\}$. De la gráfica vemos que el rango es $\{y \mid y > 2\}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

Del Ejemplo 3 vemos que la asíntota horizontal está determinada por los coeficientes principales del numerador y denominador, porque después de dividir todo entre x^2 (la potencia superior de x), todos los otros términos se aproximan a cero. En general, si $r(x) = P(x)/Q(x)$ y los grados de P y Q son iguales (ambos n, por ejemplo), entonces dividir entre x^n tanto numerador como denominador muestra que la asíntota horizontal es

$$y = \frac{\text{coeficiente principal de } P}{\text{coeficiente principal de } Q}$$

En el siguiente recuadro se resume el procedimiento para hallar asíntotas.

HALLAR ASÍNTOTAS DE FUNCIONES RACIONALES

Sea r la función racional

$$r(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. Las asíntotas verticales de r son las rectas $x = a$, donde a es un cero del denominador.
2. **(a)** Si $n < m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = 0$.

   (b) Si $n = m$, entonces r tiene asíntota horizontal $y = \dfrac{a_n}{b_m}$.

   (c) Si $n > m$, entonces r no tiene asíntota horizontal.

EJEMPLO 4 | Asíntotas de una función racional

Encuentre las asíntotas vertical y horizontal de $r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$.

SOLUCIÓN

Asíntotas verticales: Primero factorizamos

$$r(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{\underbrace{(2x - 1)}_{\text{Este factor es 0 cuando } x = \frac{1}{2}}\underbrace{(x + 2)}_{\text{Este factor es 0 cuando } x = -2}}$$

Las asíntotas verticales son las rectas $x = \frac{1}{2}$ y $x = -2$.

Asíntota horizontal: Los grados del numerador y denominador son iguales, y

$$\frac{\text{coeficiente principal de numerador}}{\text{coeficiente principal de denominador}} = \frac{3}{2}$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = \frac{3}{2}$.

Para confirmar nuestros resultados, graficamos r usando una calculadora graficadora (vea Figura 6).

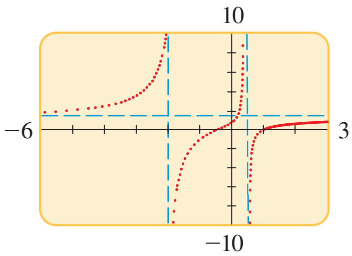


FIGURA 6

$r(x) = \dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 + 3x - 2}$

La gráfica está trazada usando modo de puntos para evitar líneas extrañas.

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **23** Y **25**

Gráficas de funciones racionales

Hemos visto que las asíntotas son importantes cuando se grafican funciones racionales. En general, usamos las siguientes guías para graficar funciones racionales.

Una fracción es 0 si y sólo si su numerador es 0.

TRAZADO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES RACIONALES

1. **Factorizar.** Factorice el numerador y denominador.
2. **Puntos de intersección.** Encuentre los puntos de intersección x al determinar los ceros del numerador, así como los puntos de intersección y a partir del valor de la función en $x = 0$.
3. **Asíntotas verticales.** Encuentre las asíntotas verticales al determinar los ceros del denominador y, a continuación, vea si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical mediante el uso de valores de prueba.
4. **Asíntota horizontal.** Encuentre la asíntota horizontal (si la hay) usando el procedimiento descrito en el recuadro de la página 282.
5. **Trazar la gráfica.** Grafique la información dada por los primeros cuatro pasos. A continuación localice tantos puntos adicionales como sea necesario, para llenar el resto de la gráfica de la función.

EJEMPLO 5 | Graficar una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN Factorizamos el numerador y el denominador, encontramos los puntos de intersección y asíntotas, y trazamos la gráfica.

Factorice: $y = \dfrac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$

Puntos de intersección x: Los puntos de intersección x son los ceros del numerador, $x = \frac{1}{2}$ y $x = -4$.

Puntos de intersección y: Para hallar el punto de intersección y, sustituimos $x = 0$ en la forma original de la función.

$$r(0) = \frac{2(0)^2 + 7(0) - 4}{(0)2 + (0) - 2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

El punto de intersección y es 2.

Asíntotas verticales: Las asíntotas verticales se presentan donde el denominador es 0, es decir, donde la función no está definida. De la forma factorizada vemos que las asíntotas verticales son las rectas $x = 1$ y $x = -2$.

Cuando escojamos valores de prueba, debemos asegurarnos que no haya un punto de intersección x entre el punto de prueba y la asíntota vertical.

Comportamiento cerca de asíntotas verticales: Necesitamos saber si $y \to \infty$ o $y \to -\infty$ en cada lado de cada asíntota vertical. Para determinar el signo de y para valores x cerca de las asíntotas verticales, usamos valores de prueba. Por ejemplo, cuando $x \to 1^-$, usamos un valor de prueba cercano y a la izquierda de 1 ($x = 0.9$, por ejemplo) para comprobar si y es positiva o negativa a la izquierda de $x = 1$.

$$y = \frac{(2(0.9) - 1)((0.9) + 4)}{((0.9) - 1)((0.9) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(-)(+)} \quad \text{(negativo)}$$

Entonces, $y \to -\infty$ cuando $x \to 1^-$. Por otra parte, cuando $x \to 1^+$, usamos un valor de prueba cercano y a la derecha de 1 ($x = 1.1$, por ejemplo), para obtener

$$y = \frac{(2(1.1) - 1)((1.1) + 4)}{((1.1) - 1)((1.1) + 2)} \quad \text{cuyo signo es} \quad \frac{(+)(+)}{(+)(+)} \quad \text{(positivo)}$$

Entonces, $y \to \infty$ cuando $x \to 1^+$. Las otras entradas de la tabla siguiente se calculan de manera semejante.

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	1^-	1^+
el signo de $y = \dfrac{(2x - 1)(x + 4)}{(x - 1)(x + 2)}$ **es**	$\dfrac{(-)(+)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(+)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(+)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(+)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	$-\infty$	∞	$-\infty$	∞

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Códigos indescifrables

Si usted lee novelas de espías, sabe de códigos secretos y cómo es que el héroe "descifra" el código. Hoy en día, los códigos secretos tienen un uso mucho más común. La mayor parte de la información almacenada en computadoras está codificada para evitar su uso por personas no autorizadas. Por ejemplo, los registros bancarios, los historiales médicos, los datos escolares y otros similares están codificados. Un sinnúmero de teléfonos celulares e inalámbricos codifican la señal que lleva la voz para que nadie más pueda oírla. Por fortuna, por los recientes avances en matemáticas, los códigos de la actualidad son "indescifrables".

Los códigos modernos están basados en un principio sencillo: factorizar es mucho más difícil que multiplicar. Por ejemplo, trate de multiplicar 78 y 93; ahora trate de factorizar 9991. Lleva tiempo factorizar 9991 porque es un producto de los dos números primos 97 × 103, de manera que para factorizarlos tenemos que hallar uno de estos primos. Ahora imagine tratar de factorizar un número *N* que es producto de dos primos *p* y *q*, cada uno de ellos de 200 dígitos de largo. Hasta las computadoras más potentes tardarían millones de años en factorizar ese número. Pero la misma computadora tardaría menos de un segundo en multiplicar esos dos números. Este dato fue utilizado por Ron Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman en la década de 1970 para idear el código RSA. El código de ellos utiliza un número extremadamente grande para codificar un mensaje pero exige que conozcamos sus factores para descifrarlo. Como se puede ver, ese código es particularmente indescifrable.

El código RSA es un ejemplo de código de "cifrado público clave". En dichos códigos, cualquiera puede cifrar un mensaje usando un procedimiento conocido públicamente basado en *N*, pero para decodificar el mensaje deben saber *p* y *q*, los factores de *N*. Cuando fue inventado el código RSA, se pensó que un número de 80 dígitos cuidadosamente seleccionado daría un código indescifrable, pero es curioso que recientes avances en el estudio de la factorización hayan hecho necesarios números mucho más grandes.

Asíntota horizontal: Los grados del numerador y el denominador son iguales y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{2}{1} = 2$$

Entonces, la asíntota horizontal es la recta $y = 2$.

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 7.

x	y
-6	0.93
-3	-1.75
-1	4.50
1.5	6.29
2	4.50
3	3.50

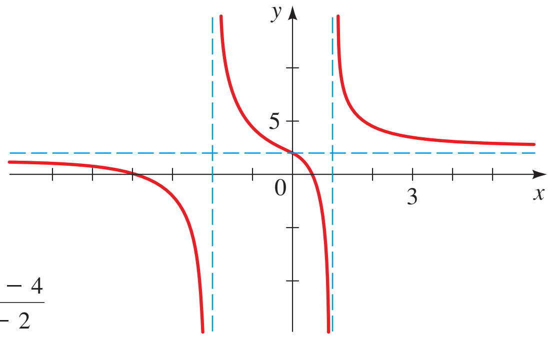


FIGURA 7

$$r(x) = \frac{2x^2 + 7x - 4}{x^2 + x - 2}$$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq 1, x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es todos los números reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **53**

EJEMPLO 6 | Gráfica de una función racional

Grafique $r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$ y exprese el dominio y rango.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$

Punto de intersección *x*: $-\dfrac{21}{5}$, de $5x + 21 = 0$

Punto de intersección *y*: $\dfrac{21}{25}$, porque $r(0) = \dfrac{5 \cdot 0 + 21}{0^2 + 10 \cdot 0 + 25} = \dfrac{21}{25}$

Asíntota vertical: $x = -5$, de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical:

Cuando $x \to$	-5^-	-5^+
el signo de $y = \dfrac{5x + 21}{(x + 5)^2}$ es	$\dfrac{(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	$-\infty$	$-\infty$

Asíntota horizontal: $y = 0$, porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 8.

x	y
-15	-0.5
-10	-1.2
-3	1.5
-1	1.0
3	0.6
5	0.5
10	0.3

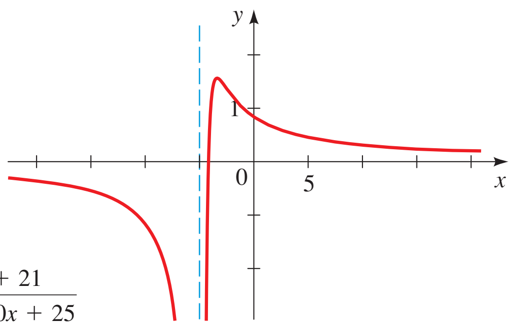


FIGURA 8

$r(x) = \dfrac{5x + 21}{x^2 + 10x + 25}$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq -5\}$. De la gráfica vemos que el rango es aproximadamente el intervalo $(-\infty, 1.5]$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

De la gráfica de la Figura 8 vemos que, al contrario de una mala interpretación, una gráfica puede cruzar una asíntota horizontal. La gráfica de la Figura 8 cruza el eje x (la asíntota horizontal) desde abajo, alcanza un valor máximo cerca de $x = -3$, y luego se aproxima al eje x desde arriba cuando $x \to \infty$.

EJEMPLO 7 | Gráfica de una función racional

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{2x(x + 2)}$

Puntos de intersección x: -1 y 4, de $x + 1 = 0$ y $x - 4 = 0$

Punto de intersección y: Ninguno, porque $r(0)$ no está definido

Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = -2$, de los ceros del denominador

Comportamiento cerca de asíntotas verticales:

Cuando $x \to$	-2^-	-2^+	0^-	0^+
el signo de $y = \dfrac{(x + 1)(x - 4)}{2x(x + 2)}$ es	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(-)}$	$\dfrac{(-)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(-)(+)}$	$\dfrac{(+)(-)}{(+)(+)}$
entonces $y \to$	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$

Asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$, porque el grado del numerador y el grado del denominador son iguales y

$$\frac{\text{coeficiente principal del numerador}}{\text{coeficiente principal del denominador}} = \frac{1}{2}$$

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 9

x	y
-3	2.33
-2.5	3.90
-0.5	1.50
1	-1.00
3	-0.13
5	0.09

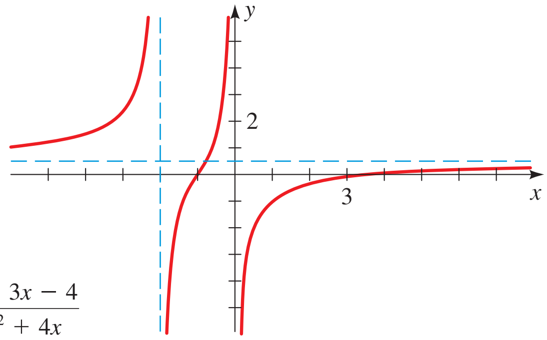


FIGURA 9
$r(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{2x^2 + 4x}$

Dominio y rango: El dominio es $\{x \mid x \neq 0, x \neq -2\}$. De la gráfica vemos que el rango es todos los números reales.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57**

Asíntotas diagonales y comportamiento final

Si $r(x) = P(x)/Q(x)$ es una función racional en la que el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, podemos usar el Algoritmo de división para expresar la función en la forma

$$r(x) = ax + b + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde el grado de R es menor que el grado de Q y $a \neq 0$. Esto significa que cuando $x \to \pm\infty$, $R(x)/Q(x) \to 0$, de modo que para valores grandes de $|x|$ la gráfica de $y = r(x)$ se aproxima a la gráfica de $y = ax + b$. En esta situación decimos que $y = ax + b$ es una **asíntota diagonal**, o una **asíntota oblicua**.

EJEMPLO 8 | Una función racional con una asíntota diagonal

Grafique la función racional $r(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 3}$.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{(x + 1)(x - 5)}{x - 3}$

Puntos de intersección x: -1 y 5, de $x + 1 = 0$ y $x - 5 = 0$

Puntos de intersección y: $\dfrac{5}{3}$, porque $r(0) = \dfrac{0^2 - 4 \cdot 0 - 5}{0 - 3} = \dfrac{5}{3}$

Asíntota horizontal: Ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

Asíntota vertical: $x = 3$, del cero del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical: $y \to \infty$ cuando $x \to 3^-$ y $y \to -\infty$ cuando $x \to 3^+$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ x - 3\overline{)x^2 - 4x - 5} \\ \underline{x^2 - 3x} \\ -x - 5 \\ \underline{-x + 3} \\ -8 \end{array}$$

Asíntota diagonal: Como el grado del numerador es uno más que el grado del denominador, la función tiene una asíntota diagonal. Dividiendo (vea al margen), obtenemos

$$r(x) = x - 1 - \frac{8}{x - 3}$$

Por lo tanto, $y = x - 1$ es la asíntota diagonal.

Gráfica: Usamos la información que hemos encontrado, junto con algunos valores adicionales, para trazar la gráfica de la Figura 10.

x	y
-2	-1.4
1	4
2	9
4	-5
6	2.33

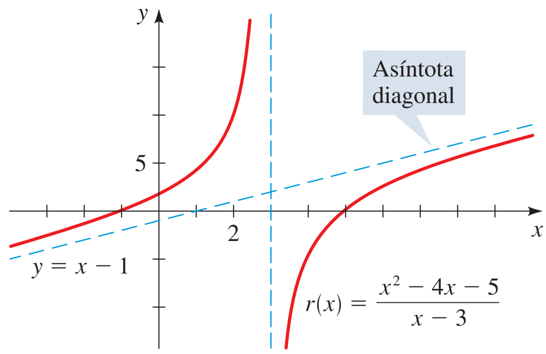


FIGURA 10

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

Hasta este punto, hemos considerado sólo asíntotas horizontales y diagonales como comportamientos finales para funciones racionales. En el siguiente ejemplo graficamos una función cuyo comportamiento final es como el de una parábola.

EJEMPLO 9 | Comportamiento final de una función racional

Grafique la función racional

$$r(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$$

y describa su comportamiento final.

SOLUCIÓN

Factorice: $y = \dfrac{(x + 1)(x^2 - 3x + 3)}{x - 2}$

Puntos de intersección *x*: -1, de $x + 1 = 0$ (El otro factor del numerador no tiene ceros reales.)

Puntos de intersección *y*: $-\frac{3}{2}$, porque $r(0) = \dfrac{0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3}{0 - 2} = -\dfrac{3}{2}$

Asíntota vertical: $x = 2$, del cero del denominador

Comportamiento cerca de asíntota vertical: $y \to -\infty$ cuando $x \to 2^-$ y $y \to \infty$ cuando $x \to 2^+$

Asíntota horizontal: Ninguna, porque el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

$$\begin{array}{r} x^2 \\ x - 2\overline{)x^3 - 2x^2 + 0x + 3} \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ 3 \end{array}$$

Comportamiento final: Dividiendo (vea al margen), tenemos

$$r(x) = x^2 + \frac{3}{x - 2}$$

Esto demuestra que el comportamiento final de r es como el de la parábola $y = x^2$ porque $3/(x - 2)$ es pequeño cuando $|x|$ es grande. Esto es, $3/(x - 2) \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$. Esto significa que la gráfica de r estará cercana a la gráfica de $y = x^2$ para $|x|$ grande.

Gráfica: En la Figura 11(a) graficamos r en un rectángulo de vista pequeño; podemos ver los puntos de intersección, las asíntotas verticales y el mínimo local. En la Figura 11(b) la gráfica r en un rectángulo de vista más grande; aquí la gráfica se ve casi como la gráfica de una parábola. En la figura 11(c) graficamos tanto $y = r(x)$ como $y = x^2$; estas gráficas están muy cercanas entre sí excepto cerca de la asíntota vertical.

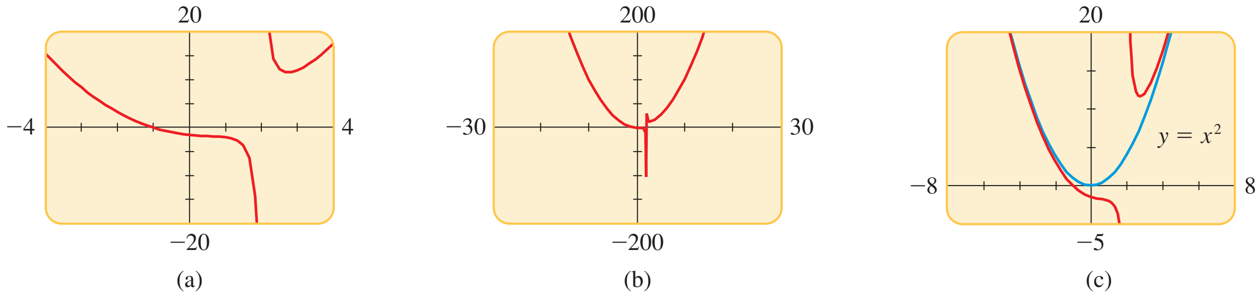


FIGURA 11
$r(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{x - 2}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **73** ■

Aplicaciones

Con frecuencia se presentan funciones racionales en aplicaciones científicas de álgebra. En el ejemplo del texto analizamos la gráfica de una función de teoría de electricidad.

EJEMPLO 10 | Resistencia eléctrica

Cuando dos resistores con resistencias R_1 y R_2 están conectados en paralelo, su resistencia combinada R está dada por la fórmula

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

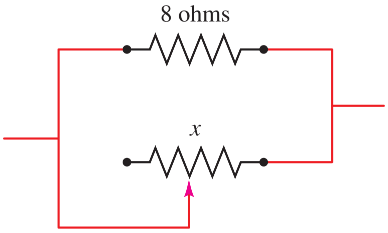


FIGURA 12

Suponga que un resistor fijo de 8 ohms está conectado en paralelo con un resistor variable, como se ve en la Figura 12. Si la resistencia del resistor variable está denotada por x, entonces la resistencia combinada R es una función de x. Grafique R, y dé una interpretación física de la gráfica.

SOLUCIÓN Sustituyendo $R_1 = 8$ y $R_2 = x$ en la fórmula dará la función

$$R(x) = \frac{8x}{8 + x}$$

Como la resistencia no puede ser negativa, esta función tiene significado físico sólo cuando $x > 0$. La función está graficada en la Figura 13(a) usando el rectángulo de vista $[0, 20]$ por $[0, 10]$. La función no tiene asíntota vertical cuando x está restringida a valores positivos. La resistencia combinada R aumenta cuando la resistencia variable x aumenta. Si ampliamos el rectángulo de vista a $[0, 100]$ por $[0, 10]$, obtenemos la gráfica de la Figura 13(b). Para x grande, la resistencia combinada E se nivela, acercándose más y más a la asíntota horizontal $R = 8$. Sin importar lo grande que sea la resistencia variable x, la resistencia combinada nunca es mayor que 8 ohms.

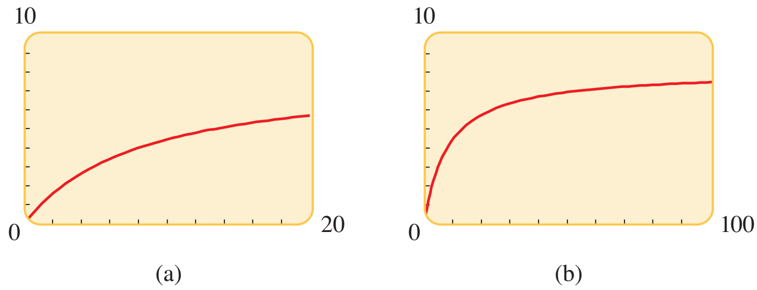


FIGURA 13
$R(x) = \dfrac{8x}{8 + x}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **83** ■

George Marks/Retrofile/Getty Images

CAPÍTULO 4

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

En este capítulo estudiamos una clase de funciones llamadas *funciones exponenciales*. Éstas son funciones, como $f(x) = 2^x$, donde la variable independiente está en el exponente. Las funciones exponenciales se usan para modelar numerosos fenómenos del mundo real, como por ejemplo el crecimiento de una población o el crecimiento de una inversión que gana interés compuesto. Una vez obtenido el modelo exponencial, podemos usar el modelo para predecir el tamaño poblacional o calcular la cantidad de una inversión para cualquier fecha futura. Para investigar *cuándo* una población llegará a cierto nivel, usamos las funciones inversas de funciones exponenciales, llamadas *funciones logarítmicas*. Por lo tanto, si tenemos un modelo exponencial para crecimiento poblacional, podemos contestar preguntas como: ¿Cuándo estará mi ciudad tan congestionada como la calle de Nueva York que se ve en la foto?

4.1 FUNCIONES EXPONENCIALES

En este capítulo estudiamos una nueva clase de funciones llamadas *funciones exponenciales*. Por ejemplo,

$$f(x) = 2^x$$

es una función exponencial (con base 2). Observe la rapidez con la que aumentan los valores de esta función:

$$\begin{aligned} f(3) &= 2^3 = 8 \\ f(10) &= 2^{10} = 1024 \\ f(30) &= 2^{30} = 1{,}073{,}741{,}824 \end{aligned}$$

Compare esto con la función $g(x) = x^2$, donde $g(30) = 30^2 = 900$. El punto es que cuando la variable está en el exponente, incluso un pequeño cambio en la variable puede causar un cambio muy grande en el valor de la función.

▼ Funciones exponenciales

Para estudiar funciones exponenciales, primero debemos definir lo que queremos decir por la expresión a^x cuando x es cualquier número. En la Sección 1.2 definimos a^x para $a > 0$ y x un número racional, pero todavía no hemos definido potencias irracionales. Por lo tanto, ¿qué significa $5^{\sqrt{3}}$ o 2^{π}? Para definir a^x cuando x es irracional, aproximamos x por medio de números racionales.

Por ejemplo, dado que

$$\sqrt{3} \approx 1.73205\ldots$$

es un número irracional, sucesivamente aproximamos $a^{\sqrt{3}}$ mediante las siguientes potencias racionales:

$$a^{1.7}, a^{1.73}, a^{1.732}, a^{1.7320}, a^{1.73205}, \ldots$$

Intuitivamente, podemos ver que estas potencias racionales de a se acercan más y más a $a^{\sqrt{3}}$. Se puede demostrar mediante matemáticas avanzadas que hay exactamente un número al que estas potencias se aproximan. Definimos que $a^{\sqrt{3}}$ es este número.

Por ejemplo, usando calculadora, encontramos

$$\begin{aligned} 5^{\sqrt{3}} &\approx 5^{1.732} \\ &\approx 16.2411\ldots \end{aligned}$$

Cuantos más lugares decimales de $\sqrt{3}$ usemos en nuestro cálculo, es mejor nuestra aproximación de $5^{\sqrt{3}}$.

Las Leyes de Exponentes se dan en la página 14.

Se puede demostrar que las *Leyes de Exponentes todavía son verdaderas cuando los exponentes son números reales.*

FUNCIONES EXPONENCIALES

La **función exponencial con base *a*** está definida para todos los números reales x por

$$f(x) = a^x$$

donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Suponemos que $a \neq 1$ porque la función $f(x) = 1^x = 1$ es precisamente una función constante. A continuación veamos algunos ejemplos de funciones exponenciales:

$$\underbrace{f(x) = 2^x}_{\text{Base 2}} \qquad \underbrace{g(x) = 3^x}_{\text{Base 3}} \qquad \underbrace{h(x) = 10^x}_{\text{Base 10}}$$

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones exponenciales

Sea $f(x) = 3^x$ y evalúe lo siguiente:

(a) $f(2)$ **(b)** $f(-\frac{2}{3})$

(c) $f(\pi)$ **(d)** $f(\sqrt{2})$

SOLUCIÓN Usamos calculadora para obtener los valores de f.

	Tecleo en calculadora	Salida
(a) $f(2) = 3^2 = 9$	3 ^ 2 ENTER	9
(b) $f(-\frac{2}{3}) = 3^{-2/3} \approx 0.4807$	3 ^ ((−) 2 ÷ 3) ENTER	0.4807498
(c) $f(\pi) = 3^{\pi} \approx 31.544$	3 ^ π ENTER	31.5442807
(d) $f(\sqrt{2}) = 3^{\sqrt{2}} \approx 4.7288$	3 ^ √ 2 ENTER	4.7288043

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

Gráficas de funciones exponenciales

Primero graficamos funciones exponenciales al localizar puntos. Veremos que las gráficas de esas funciones tienen una forma fácilmente reconocible.

EJEMPLO 2 | Graficado de funciones exponenciales al localizar puntos

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = 3^x$ **(b)** $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

SOLUCIÓN Calculamos valores de $f(x)$ y $g(x)$ y localizamos puntos para trazar las gráficas de la Figura 1.

x	$f(x) = 3^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
-3	$\frac{1}{27}$	27
-2	$\frac{1}{9}$	9
-1	$\frac{1}{3}$	3
0	1	1
1	3	$\frac{1}{3}$
2	9	$\frac{1}{9}$
3	27	$\frac{1}{27}$

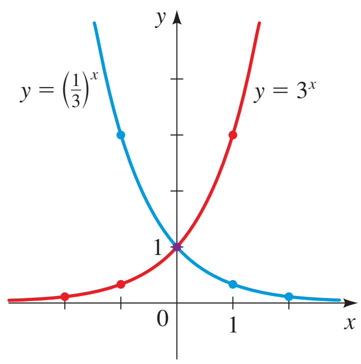


FIGURA 1

Observe que

$$g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x} = 3^{-x} = f(-x)$$

La reflexión de gráficas se explica en la Sección 2.5.

de modo que hemos obtenido la gráfica de g a partir de la gráfica de f al reflejar en el eje y.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **15**

La Figura 2 muestra las gráficas de la familia de funciones exponenciales $f(x) = 2^x$ para varios valores de la base a. Todas estas gráficas pasan por el punto $(0, 1)$ porque $a^0 = 1$ para toda $a \neq 0$. De la Figura 2 se puede ver que hay dos clases de funciones exponenciales: si $0 < a < 1$, la función exponencial decrece rápidamente; si $a > 1$, la función aumenta rápidamente (vea nota al margen).

Para ver la rapidez con la que aumenta $f(x) = 2^x$, realicemos el siguiente experimento de pensamiento. Suponga que empezamos con un trozo de papel de un milésimo de pulgada de grueso, y lo doblamos a la mitad 50 veces. Cada vez que doblamos el papel, se duplica el grosor de la pila del papel, de modo que el grosor de la pila resultante sería $2^{50}/1000$ pulgadas. ¿De qué grosor piensa usted qué es? Resulta que es de más de 17 millones de millas.

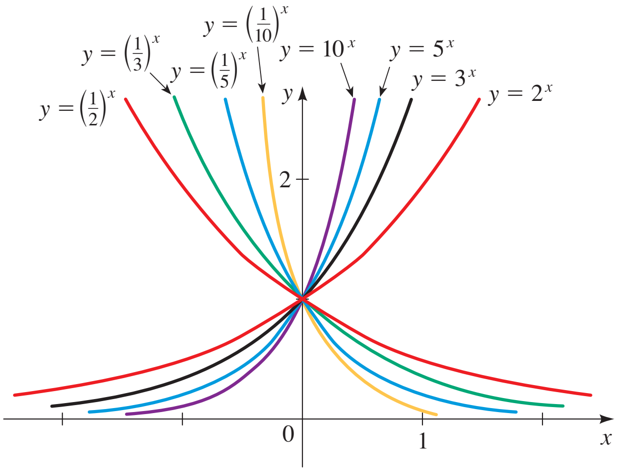


FIGURA 2 Una familia de funciones exponenciales

El eje x es una asíntota horizontal para la función exponencial $f(x) = a^x$. Esto es porque cuando $a > 1$, tenemos que $a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$, y cuando $0 < a < 1$, tenemos $a^x \to 0$ cuando $x \to \infty$ (vea Figura 2). También $a^x > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, de modo que la función $f(x) = a^x$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. Estas observaciones se resumen en el cuadro siguiente.

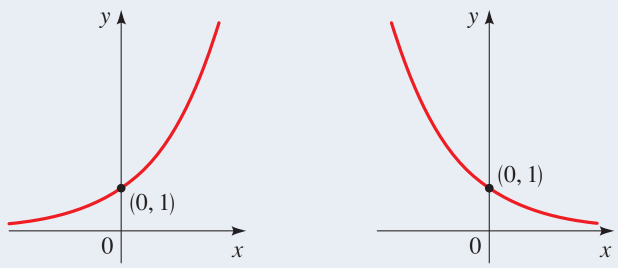
Vea la Sección 3.7, página 278, donde se explica la "notación de flechas" empleada aquí.

GRÁFICAS DE FUNCIONES EXPONENCIALES

La función exponencial

$$f(x) = a^x \qquad (a > 0, a \neq 1)$$

tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$. La recta $y = 0$ (el eje x) es una asíntota horizontal de f. La gráfica de f tiene una de las siguientes formas.

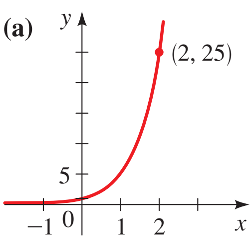


$f(x) = a^x$ para $a > 1$ $\qquad$ $f(x) = a^x$ para $0 < a < 1$

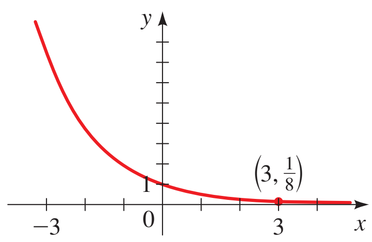
EJEMPLO 3 | Identificar gráficas de funciones exponenciales

Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica se da.

(a)



(b)



SOLUCIÓN

(a) Como $f(2) = a^2 = 25$, vemos que la base es $a = 5$. Entonces $f(x) = 5^x$.

(b) Como $f(3) = a^3 = \frac{1}{8}$, vemos que la base es $a = \frac{1}{2}$. Entonces $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **19**

En el siguiente ejemplo vemos cómo graficar ciertas funciones, no localizando puntos sino tomando las gráficas básicas de las funciones exponenciales de la Figura 2, y aplicando las transformaciones de desplazamiento y reflexión de la Sección 2.5.

EJEMPLO 4 | Transformaciones de funciones exponenciales

Use la gráfica de $f(x) = 2^x$ para trazar la gráfica de cada función.

(a) $g(x) = 1 + 2^x$ **(b)** $h(x) = -2^x$ **(c)** $k(x) = 2^{x-1}$

SOLUCIÓN

El desplazamiento y reflexión de gráficas se explica en la Sección 2.5.

(a) Para obtener la gráfica de $g(x) = 1 + 2^x$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos 1 unidad hacia arriba. Observe de la Figura 3(a) que la recta $y = 1$ es ahora una asíntota horizontal.

(b) De nuevo empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$, pero aquí reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $h(x) = -2^x$ que se ve en la Figura 3(b).

(c) Esta vez empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos a la derecha 1 unidad para obtener la gráfica de $k(x) = 2^{x-1}$ que se muestra en la Figura 3(c).

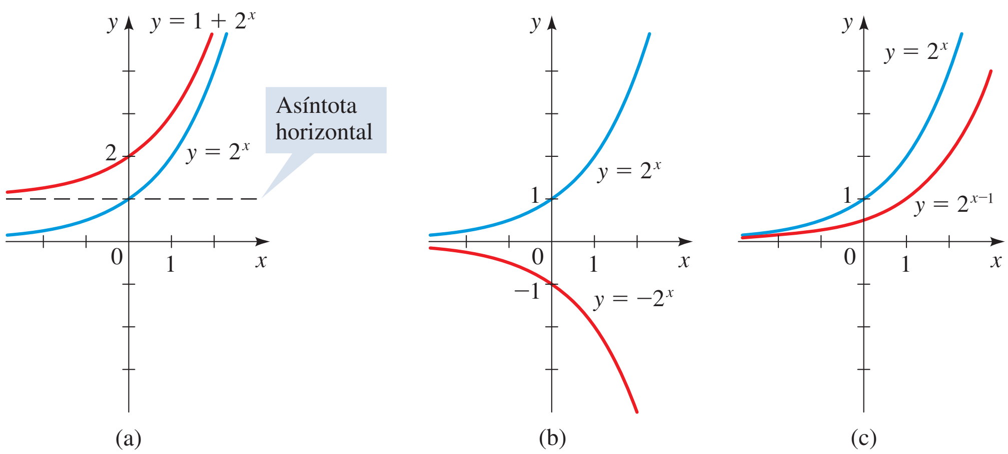


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **25, 27** Y **31**

EJEMPLO 5 | Comparación de funciones exponenciales y potencia

Compare la rapidez de crecimiento de la función exponencial $f(x) = 2^x$ y la función de potencia $g(x) = x^2$ trazando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de vista.

(a) $[0, 3]$ por $[0, 8]$

(b) $[0, 6]$ por $[0, 25]$

(c) $[0, 20]$ por $[0, 1000]$

SOLUCIÓN

(a) La Figura 4(a) muestra que la gráfica de $g(x) = x^2$ alcanza, y hasta supera, a la gráfica de $f(x) = 2^x$ en $x = 2$.

(b) El rectángulo de vista más grande de la Figura 4(b) muestra que la gráfica de $f(x) = 2^x$ alcanza a la de $g(x) = x^2$ cuando $x = 4$.

(c) La Figura 4(c) da una vista más global y muestra que cuando x es grande, $f(x) = 2^x$ es mucho mayor que $g(x) = x^2$.

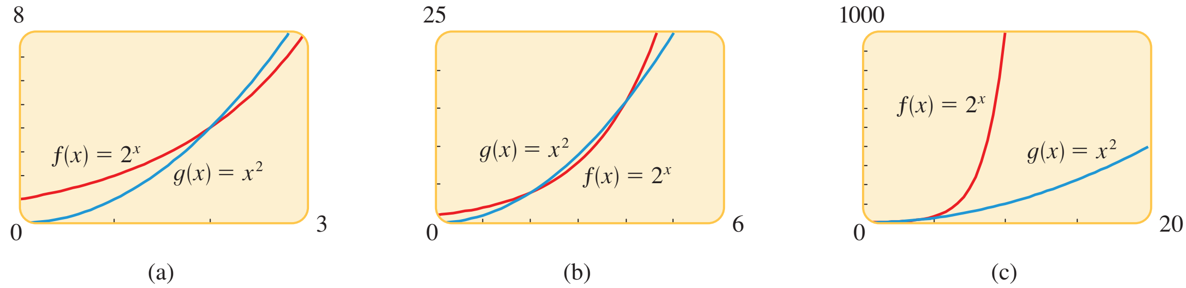


FIGURA 4

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

Interés compuesto

Las funciones exponenciales se presentan al calcular interés compuesto. Si una cantidad de dinero P, llamada **principal**, se invierte a una tasa de interés i por período, entonces después de un período el interés es Pi, y la cantidad A de dinero es

$$A = P + Pi = P(1 + i)$$

Si el interés se reinvierte, entonces el nuevo principal es $P(1 + i)$, y la cantidad después de otro período es $A = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$. Análogamente, después de un tercer período la cantidad es $A = P(1 + i)^3$. En general, después de k períodos la cantidad es

$$A = P(1 + i)^k$$

Observe que ésta es una función exponencial con base $1 + i$.

Si la tasa de interés anual es r y si el interés se capitaliza n veces por año, entonces en cada período la tasa de interés es $i = r/n$, y hay nt períodos en t años. Esto lleva a la siguiente fórmula para la cantidad después de t años.

INTERÉS COMPUESTO

El **interés compuesto** se calcula con la fórmula

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$$

donde
$A(t) =$ cantidad después de t años
$P =$ principal
$r =$ tasa de interés por año
$n =$ número de veces que el interés se capitaliza por año
$t =$ número de años

r se conoce a veces como tasa nominal de interés anual.

EJEMPLO 6 | Cálculo de interés compuesto

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 12% al año. Encuentre las cantidades en la cuenta después de 3 años si el interés se capitaliza anual, semestral, trimestral, mensualmente y a diario.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula de interés compuesto con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$.

Capitalización	n	Cantidad después de 3 años
Anual	1	$1000\left(1 + \dfrac{0.12}{1}\right)^{1(3)} = \$1404.93$
Semestral	2	$1000\left(1 + \dfrac{0.12}{2}\right)^{2(3)} = \$1418.52$
Trimestral	4	$1000\left(1 + \dfrac{0.12}{4}\right)^{4(3)} = \$1425.76$
Mensual	12	$1000\left(1 + \dfrac{0.12}{12}\right)^{12(3)} = \$1430.77$
Diario	365	$1000\left(1 + \dfrac{0.12}{365}\right)^{365(3)} = \$1433.24$

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **51**

Si una inversión gana interés compuesto, entonces el **rendimiento en porcentaje anual** (APY) es la tasa de interés *simple* que rinde la misma cantidad al término de un año.

EJEMPLO 7 | Cálculo del rendimiento en porcentaje anual

Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana interés a una tasa de 6% por año, capitalizado a diario.

SOLUCIÓN Después de un año, un principal P crecerá a

$$A = P\left(1 + \frac{0.06}{365}\right)^{365} = P(1.06183)$$

El interés simple se estudia en la Sección 1.6.

La fórmula para el interés simple es

$$A = P(1 + r)$$

Comparando, vemos que $1 + r = 1.06183$, entonces $r = 0.06183$. Por lo tanto, el rendimiento en porcentaje anual es $6.183.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **57**

4.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La función $f(x) = 5^x$ es una función exponencial con base ______; $f(-2) =$ ______, $f(0) =$ ______, $f(2) =$ ______ y $f(6) =$ ______.

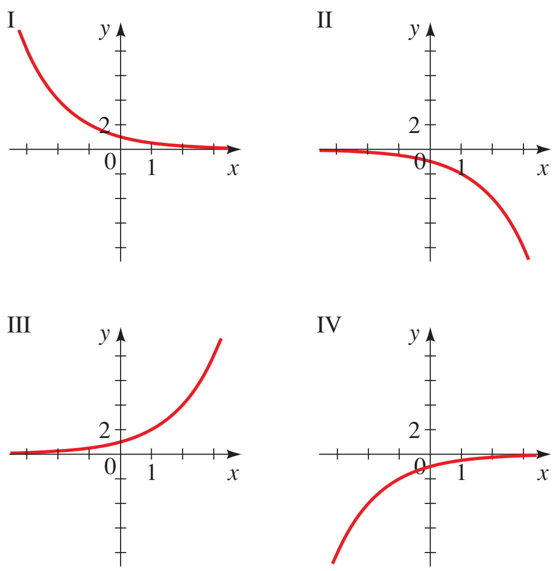
2. Relacione la función exponencial con su gráfica.

(a) $f(x) = 2^x$

(b) $f(x) = 2^{-x}$

(c) $f(x) = -2^x$

(d) $f(x) = -2^{-x}$



3. **(a)** Para obtener la gráfica de $g(x) = 2^x - 1$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos _______ (hacia arriba/abajo) 1 unidad.

(b) Para obtener la gráfica de $h(x) = 2^{x-1}$, empezamos con la gráfica de $f(x) = 2^x$ y la desplazamos _______ (a la izquierda/derecha) 1 unidad.

4. En la fórmula $A(t) = P(1 + \frac{r}{n})^{nt}$ para interés compuesto las letras P, r, n y t representan _______, _______, _______ y _______, respectivamente, y $A(t)$ representa _______. Por lo tanto, si se invierten \$100 a una tasa de interés de 6% capitalizado trimestralmente, entonces la cantidad después de 2 años es _______.

HABILIDADES

5-10 ■ Use calculadora para evaluar la función en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

5. $f(x) = 4^x$; $f(0.5), f(\sqrt{2}), f(-\pi), f(\frac{1}{3})$

6. $f(x) = 3^{x+1}$; $f(-1.5), f(\sqrt{3}), f(e), f(-\frac{5}{4})$

7. $g(x) = (\frac{2}{3})^{x-1}$; $g(1.3), g(\sqrt{5}), g(2\pi), g(-\frac{1}{2})$

8. $g(x) = (\frac{3}{4})^{2x}$; $g(0.7), g(\sqrt{7}/2), g(1/\pi), g(\frac{2}{3})$

9-14 ■ Trace la gráfica de la función haciendo una tabla de valores. Use calculadora si es necesario.

9. $f(x) = 2^x$

10. $g(x) = 8^x$

11. $f(x) = (\frac{1}{3})^x$

12. $h(x) = (1.1)^x$

13. $g(x) = 3(1.3)^x$

14. $h(x) = 2(\frac{1}{4})^x$

15-18 ■ Grafique ambas funciones en un conjunto de ejes.

15. $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 2^{-x}$

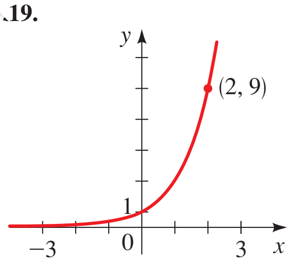
16. $f(x) = 3^{-x}$ y $g(x) = (\frac{1}{3})^x$

17. $f(x) = 4^x$ y $g(x) = 7^x$

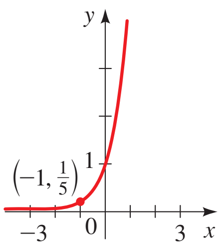
18. $f(x) = (\frac{2}{3})^x$ y $g(x) = (\frac{4}{3})^x$

19-22 ■ Encuentre la función exponencial $f(x) = a^x$ cuya gráfica nos dan.

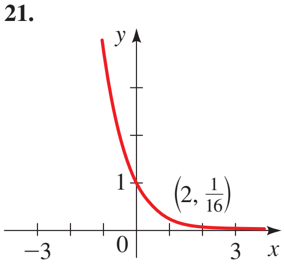
19.



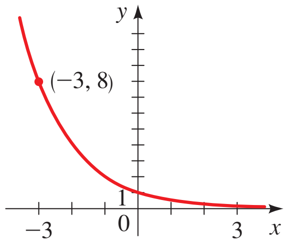
20.



21.



22.

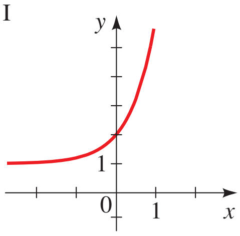


23-24 ■ Relacione la función exponencial con una de las gráficas marcadas I o II.

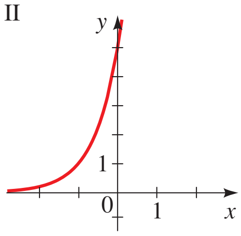
23. $f(x) = 5^{x+1}$

24. $f(x) = 5^x + 1$

I



II



25-36 ■ Grafique la función, no localizando puntos sino empezando desde las gráficas de la Figura 2. Exprese el dominio, rango y asíntota.

25. $f(x) = -3^x$

26. $f(x) = 10^{-x}$

27. $g(x) = 2^x - 3$

28. $g(x) = 2^{x-3}$

29. $h(x) = 4 + (\frac{1}{2})^x$

30. $h(x) = 6 - 3^x$

31. $f(x) = 10^{x+3}$

32. $f(x) = -(\frac{1}{5})^x$

33. $y = 5^{-x} + 1$

34. $g(x) = 1 - 3^{-x}$

35. $y = 3 - 10^{x-1}$

36. $h(x) = 2^{x-4} + 1$

37. **(a)** Trace las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3(2^x)$.
(b) ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

38. **(a)** Trace las gráficas de $f(x) = 2^x$ y $g(x) = 3^x$.
(b) Use las Leyes de Exponentes para explicar la relación entre estas gráficas.

39. Compare las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 3^x$ al evaluarlas ambas para $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 15$, y 20. A continuación trace las gráficas de f y g en el mismo conjunto de ejes.

40. Si $f(x) = 10^x$, demuestre que

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 10^x\left(\frac{10^h - 1}{h}\right).$$

41. **(a)** Compare la rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = x^5$ al trazar las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de observación.

(i) $[0, 5]$ por $[0, 20]$
(ii) $[0, 25]$ por $[0, 10^7]$
(iii) $[0, 50]$ por $[0, 10^8]$

(b) Encuentre las soluciones de la ecuación $2^x = x^5$, redondeadas a un lugar decimal.

42. **(a)** Compare la rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = x^4$ trazando las gráficas de ambas funciones en los siguientes rectángulos de vista:

(i) $[-4, 4]$ por $[0, 20]$
(ii) $[0, 10]$ por $[0, 5000]$
(iii) $[0, 20]$ por $[0, 10^5]$

(b) Encuentre las soluciones de la ecuación $3^x = 4$, redondeada a dos lugares decimales.

43-44 ■ Trace dos gráficas de la familia de funciones dada para $c = 0.25, 0.5, 1, 2, 4$. ¿Cómo están relacionadas las gráficas?

43. $f(x) = c2^x$ **44.** $f(x) = 2^{cx}$

45-46 ■ Encuentre, redondeados a dos lugares decimales, **(a)** los intervalos en los que la función es creciente o decreciente y **(b)** el rango de la función.

45. $y = 10^{x-x^2}$ **46.** $y = x2^x$

APLICACIONES

47. Crecimiento de bacterias Un cultivo de bacterias contiene 1500 bacterias inicialmente y se duplica en cada hora.
(a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.
(b) Encuentre el número de bacterias después de 24 horas.

48. Población de ratones Cierta raza de ratones fue introducida en una pequeña isla, con una población inicial de 320 ratones, y los científicos estiman que la población de ratones se duplica cada año.
(a) Encuentre una función que modele el número de ratones después de t años.
(b) Estime la población de ratones después de 8 años.

49-50 ■ **Interés compuesto** Una inversión de $5000 se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza mensualmente. Complete la tabla escribiendo las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos indicados o tasas de interés.

49. $r = 4\%$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

50. $t = 5$ años

Tasa por año	Cantidad
1%	
2%	
3%	
4%	
5%	
6%	

51. Interés compuesto Si se invierten $10,000 a una tasa de interés del 3% al año, capitalizada semestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 5 años **(b)** 10 años **(c)** 15 años

52. Interés compuesto Si se invierten $2500 a una tasa de interés del 2.5% por año, capitalizado a diario, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 2 años **(b)** 3 años **(c)** 6 años

53. Interés compuesto Si se invierten $500 a una tasa de interés del 3.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 1 año **(b)** 2 años **(c)** 10 años

54. Interés compuesto Si se invierten $4000 a una tasa de interés del 5.75% por año, capitalizado trimestralmente, encuentre la cantidad adeudada al término del número dado de años.
(a) 4 años **(b)** 6 años **(c)** 8 años

55-56 ■ **Valor presente** El **valor presente** de una suma de dinero es la cantidad que debe ser invertida ahora, a una tasa de interés dada, para producir la suma deseada en una fecha posterior.

55. Encuentre el valor presente de $10,000 si se paga interés a razón de 9% al año, capitalizado semestralmente, durante 3 años.

56. Encuentre el valor presente de $10,000 si se paga interés a razón de 8% al año, capitalizado mensualmente, durante 5 años.

57. Rendimiento en porcentaje anual Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana 8% por año, capitalizado mensualmente.

58. Rendimiento en porcentaje anual Encuentre el rendimiento en porcentaje anual para una inversión que gana $5\frac{1}{2}\%$ por año, capitalizado trimestralmente.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

59. Crecimiento de una función exponencial Supongamos que al lector le ofrecen un trabajo que dura un mes, y que estará muy bien pagado. ¿Cuál de los siguientes métodos de pago es más rentable para él?
(a) Un millón de dólares al final del mes.
(b) Dos centavos el primer día del mes, 4 centavos el segundo día, 8 centavos el tercer día, y en general, 2^n centavos en el n día.

60. Altura de la gráfica de una función exponencial El profesor de matemáticas pide al lector que trace una gráfica de la función exponencial

$$f(x) = 2^x$$

para x entre 0 y 40, usando una escala de 10 unidades a 1 pulgada. ¿Cuáles son las dimensiones de la hoja de papel que necesitará para trazar esta gráfica?

PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Explosión exponencial**

En este proyecto exploramos un ejemplo acerca de cómo monedas de a centavo que nos ayudan a ver cómo funciona el crecimiento exponencial. Se puede ver el proyecto en el sitio web del libro acompañante: **www.stewartmath.com**

4.2 LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

El número *e* ▶ La función exponencial natural ▶ Interés capitalizado continuamente

Cualquier número positivo se puede usar como base para una función exponencial. En esta sección estudiamos la base especial e, que es conveniente para aplicaciones donde interviene Cálculo.

▼ El número *e*

El número e se define como el valor al que se aproxima $(1 + 1/n)^n$ cuando n se hace grande. (En Cálculo, esta idea se hace más precisa por medio del concepto de un límite. Vea el Capítulo 13.) La tabla siguiente muestra los valores de la expresión $(1 + 1/n)^n$ para valores cada vez más grandes de n.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2.00000
5	2.48832
10	2.59374
100	2.70481
1000	2.71692
10,000	2.71815
100,000	2.71827
1,000,000	2.71828

El **Gateway Arch** (Arco de Entrada) en St. Louis, Missouri, tiene la forma de la gráfica de una combinación de funciones exponenciales (*no* una parábola, como podría parecer al principio). Específicamente, es una **catenaria**, que es la gráfica de una ecuación de la forma

$$y = a(e^{bx} + e^{-bx})$$

(vea Ejercicio 17). Esta forma se escogió porque es óptima para distribuir las fuerzas estructurales internas del arco. Cadenas y cables suspendidos entre dos puntos (por ejemplo, los tramos de cable entre pares de postes telefónicos) cuelgan en forma de catenaria.

Es evidente que, aproximado a cinco lugares decimales, $e \approx 2.71828$; de hecho, el valor aproximado a 20 lugares decimales es

$$e \approx 2.71828182845904523536$$

Se puede demostrar que e es un número irracional, de modo que no podemos escribir su valor exacto en forma decimal.

▼ La función exponencial natural

La notación fue escogida por Leonhard Euler (vea página 266), probablemente por es la primera letra de la palabra *exponencial*.

El número e es la base para la función exponencial natural. ¿Por qué usamos una base tan extraña para una función exponencial? Podría parecer que con una base como el 10 es más fácil trabajar. Veremos, no obstante, que en ciertas aplicaciones el número e es la mejor base posible. En esta sección estudiamos cómo se presenta el número e en la descripción de interés compuesto.

LA FUNCIÓN EXPONENCIAL NATURAL

La **función exponencial natural** es la función exponencial

$$f(x) = e^x$$

Con base e. Es frecuente llamarla *la* función exponencial.

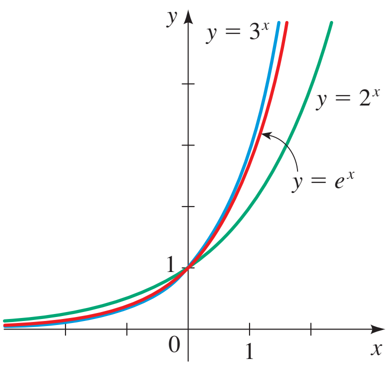


FIGURA 1 Gráfica de la función exponencial natural

Como $2 < e < 3$, la gráfica de la función exponencial natural está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$, como se ve en la Figura 1.

Innumerables calculadoras científicas tienen una tecla especial para la función $f(x) = e^x$. Usamos esta tecla en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 1 | Evaluación de la función exponencial

Evalúe cada expresión redondeada a cinco lugares decimales.

(a) e^3 **(b)** $2e^{-0.53}$ **(c)** $e^{4.8}$

SOLUCIÓN Usamos la tecla $\boxed{e^x}$ de una calculadora para evaluar la función exponencial.

(a) $e^3 \approx 20.08554$ **(b)** $2e^{-0.53} \approx 1.17721$ **(c)** $e^{4.8} \approx 121.51042$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

EJEMPLO 2 | Transformaciones de la función exponencial

Trace la gráfica de cada función.

(a) $f(x) = e^{-x}$ **(b)** $g(x) = 3e^{0.5x}$

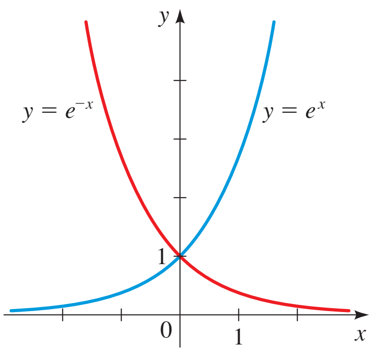


FIGURA 2

SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de $y = e^x$ y reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $y = e^{-x}$ como en la Figura 2.

(b) Calculamos varios valores, localizamos los puntos resultantes y luego enlazamos los puntos con una curva sin irregularidades. La gráfica se ilustra en la Figura 3.

x	$f(x) = 3e^{0.5x}$
-3	0.67
-2	1.10
-1	1.82
0	3.00
1	4.95
2	8.15
3	13.45

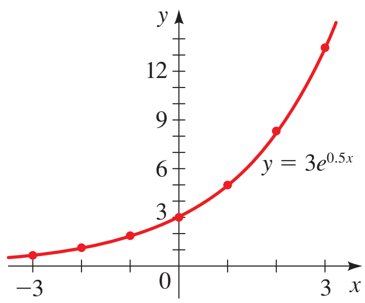


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **5** Y **7**

EJEMPLO 3 | Un modelo exponencial para la propagación de un virus

Una enfermedad infecciosa empieza a propagarse en una ciudad pequeña de 10,000 habitantes. Después de t días, el número de personas que han sucumbido al virus está modelado por la función

$$v(t) = \frac{10,000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

(a) ¿Cuántas personas infectadas hay inicialmente (tiempo $t = 0$)?

(b) Encuentre el número de personas infectadas después de un día, dos días y cinco días.

(c) Grafique la función v y describa su comportamiento.

SOLUCIÓN

(a) Como $v(0) = 10,000/(5 + 1245e^0) = 10,000/1250 = 8$, concluimos que 8 personas inicialmente tienen la enfermedad.

(b) Usando calculadora, evaluamos $v(1)$, $v(2)$ y $v(5)$ y a continuación redondeamos para obtener los siguientes valores.

Días	Personas infectadas
1	21
2	54
5	678

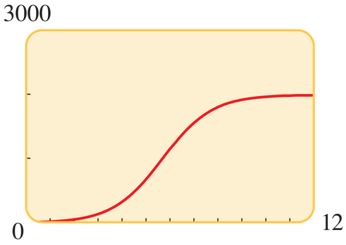


FIGURA 4

$$v(t) = \frac{10,000}{5 + 1245e^{-0.97t}}$$

(c) De la gráfica de la Figura 4 vemos que el número de personas infectadas primero sube lentamente, luego sube con rapidez entre el día 3 y el día 8 y por último se nivela cuando alrededor de 2000 personas están infectadas.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

La gráfica de la Figura 4 recibe el nombre de *curva logística* o *modelo de crecimiento logístico*. Curvas como ésta se presentan con frecuencia en el estudio de crecimiento poblacional. (Vea Ejercicios 25-28.)

Interés capitalizado continuamente

En el Ejemplo 6 de la Sección 4.1 vimos que el interés pagado aumenta cuando aumenta el número n de períodos de capitalización. Veamos qué ocurre cuando n aumenta indefinidamente. Si hacemos $m = n/r$, entonces

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = P\left[\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{n/r}\right]^{rt} = P\left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$$

Recuerde que cuando m se hace grande, la cantidad $(1 + 1/m)^m$ se aproxima al número e. Entonces, la cantidad se aproxima a $A = Pe^{rt}$. Esta expresión da la cantidad cuando el interés se capitaliza "a cada instante".

INTERÉS CAPITALIZADO CONTINUAMENTE

El **interés capitalizado continuamente** se calcula con la fórmula

$$A(t) = Pe^{rt}$$

Donde $A(t)$ = cantidad después de t años
P = principal
r = tasa de interés por año
t = número de años

EJEMPLO 4 | Calcular interés capitalizado continuamente

Encuentre la cantidad después de 3 años si se invierten \$1000 a una tasa de interés de 12% por año, capitalizado continuamente.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$1000$, $r = 0.12$ y $t = 3$ para obtener

$$A(3) = 1000e^{(0.12)3} = 1000e^{0.36} = \$1433.33$$

Compare esta cantidad con las cantidades del Ejemplo 6 de la Sección 4.1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **31**

4.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. La función $f(x) = e^x$ se llama función exponencial _____. El número e es aproximadamente igual a _____.

2. En la fórmula $A(t) = Pe^{rt}$ para interés capitalizado continuamente, las letras P, r y t representan _____, _____ y _____, respectivamente, y $A(t)$ representa _____. Por lo tanto, si se invierten \$100 a una tasa de interés del 6% capitalizado continuamente, entonces la cantidad después de 2 años es _____.

HABILIDADES

3-4 ■ Use calculadora para evaluar la función a los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres lugares decimales.

3. $h(x) = e^x$; $h(3), h(0.23), h(1), h(-2)$

4. $h(x) = e^{-2x}$; $h(1), h(\sqrt{2}), h(-3), h(\frac{1}{2})$

5-6 ■ Complete la tabla de valores, redondeados a dos lugares decimales, y trace una gráfica de la función.

5.

x	$f(x) = 3e^x$
-2	
-1	
-0.5	
0	
0.5	
1	
2	

6.

x	$f(x) = 2e^{-0.5x}$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

7-14 ■ Grafique la función, no localizando los puntos sino empezando desde la gráfica de $y = e^x$. Exprese el dominio, rango y asíntota.

7. $f(x) = -e^x$

8. $y = 1 - e^x$

9. $y = e^{-x} - 1$

10. $f(x) = -e^{-x}$

11. $f(x) = e^{x-2}$

12. $y = e^{x-3} + 4$

13. $h(x) = e^{x+1} - 3$

14. $g(x) = -e^{x-1} - 2$

15. La *función coseno hiperbólico* está definida por

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(a) Trace las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{2}e^x$ y $y = \frac{1}{2}e^{-x}$ en los mismos ejes, y use adición gráfica (vea Sección 2.6) para trazar la gráfica de $y = \cosh(x)$.

(b) Use la definición para demostrar que $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

16. La *función seno hiperbólico* está definida por

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(a) Trace la gráfica de esta función usando adición gráfica como en el Ejercicio 15.

(b) Use la definición para demostrar que $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh}(x)$

17. **(a)** Trace las gráficas de la familia de funciones

$$f(x) = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

para $a = 0.5, 1, 1.5$ y 2.

(b) ¿En qué forma un valor grande de a afecta a la gráfica?

18-19 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que ocurre cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

18. $g(x) = x^x \quad (x > 0)$

19. $g(x) = e^x + e^{-3x}$

APLICACIONES

20. Drogas médicas Cuando cierta droga médica se administra a un paciente, el número de miligramos restante en el torrente sanguíneo del paciente después de t horas se modela con

$$D(t) = 50e^{-0.2t}$$

¿Cuántos miligramos de la droga quedan en el torrente sanguíneo del paciente después de 3 horas?

21. Desintegración radiactiva Una sustancia radiactiva se desintegra en forma tal que la cantidad de masa restante después de t días está dada por la función

$$m(t) = 13e^{-0.015t}$$

donde $m(t)$ se mide en kilogramos.

(a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

(b) ¿Cuánto de la masa resta después de 45 días?

22. Desintegración radiactiva Unos médicos usan yodo radiactivo como trazador en el diagnóstico de ciertas enfermedades de la glándula tiroides. Este tipo de yodo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días está dada por la función

$$m(t) = 6e^{-0.087t}$$

donde $m(t)$ se mide en gramos.

(a) Encuentre la masa en el tiempo $t = 0$.

(b) ¿Cuánta masa resta después de 20 días?

23. Paracaidismo Una paracaidista salta desde una altura razonable sobre el suelo. La resistencia del aire que experimenta es proporcional a la velocidad de ella, y la constante de proporcionalidad es 0.2. Se puede demostrar que la velocidad hacia abajo de la paracaidista en el tiempo t está dada por

$$v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$$

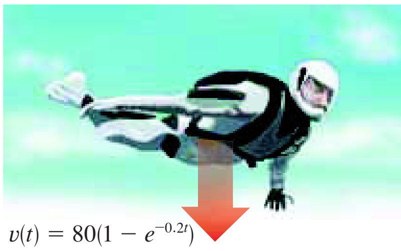
donde t se mide en segundos y $v(t)$ se mide en pies por segundo (pies/s).

(a) Encuentre la velocidad inicial de la paracaidista.

(b) Encuentre la velocidad después de 5 s y después de 10 s.

(c) Trace una gráfica de la función de velocidad $v(t)$.

(d) La velocidad máxima de un cuerpo en caída con resistencia del viento se denomina *velocidad terminal*. De la gráfica de la parte (c), encuentre la velocidad terminal de esta paracaidista.



$v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$

24. Mezclas y concentraciones Un barril de 50 galones se llena por completo de agua pura y, a continuación, se le bombea agua salada con concentración de 0.3 lb/gal al barril, y la mezcla resultante se derrama con la misma rapidez. La cantidad de sal en el barril en el tiempo t está dada por

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

donde t se mide en minutos y $Q(t)$ se mide en libras.

(a) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 5 minutos?

(b) ¿Cuánta sal hay en el barril después de 10 minutos?

(c) Trace una gráfica de la función $Q(t)$.

(d) Use la gráfica de la parte (c) para determinar el valor al que se aproxima la cantidad de sal del barril cuando t se hace grande. ¿Es esto lo que usted esperaba?

$$Q(t) = 15(1 - e^{-0.04t})$$

25. Crecimiento logístico Las poblaciones de animales no son capaces de crecimiento no restringido debido a que el hábitat y la disponibilidad de alimentos son limitados. Bajo estas condiciones, la población sigue un *modelo de crecimiento logístico:*

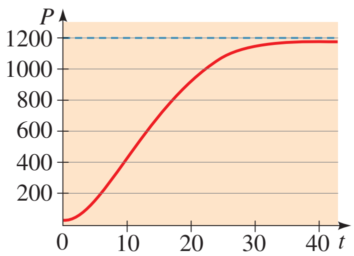
$$P(t) = \frac{d}{1 + ke^{-ct}}$$

donde c, d y k son constantes positivas. Para cierta población de peces de un pequeño estanque, $d = 1200$, $k = 11$, $c = 0.2$ y t se mide en años. Los peces se introdujeron en el estanque en el tiempo $t = 0$.

(a) ¿Cuántos peces fueron introducidos originalmente en el estanque?

(b) Encuentre la población después de 10, 20 y 30 años.

(c) Evalúe $P(t)$ para valores grandes de t. ¿A qué valor se aproxima la población cuando $t \to \infty$? ¿La gráfica siguiente confirma los cálculos de usted?



26. Población de aves La población de cierta especie de aves está limitada por el tipo de hábitat requerido para anidar. La población se comporta de acuerdo con el modelo logístico de crecimiento siguiente

$$n(t) = \frac{5600}{0.5 + 27.5e^{-0.044t}}$$

donde t se mide en años.

(a) Encuentre la población inicial de aves.

(b) Trace una gráfica de la función $n(t)$.

(c) ¿A qué dimensiones se aproxima la población a medida que transcurre el tiempo?

27. Población mundial La tasa de crecimiento relativa de la población mundial ha estado disminuyendo continuamente en años recientes. Con base en esto, algunos modelos de población predicen que la población mundial se estabilizará por último en un nivel que el planeta pueda sostener. Uno de estos modelos logísticos es

$$P(t) = \frac{73.2}{6.1 + 5.9e^{-0.02t}}$$

donde $t = 0$ es el año 2000 y la población se mide en miles de millones.

(a) ¿Qué población mundial predice este modelo para el año 2200? ¿Y para el año 2300?

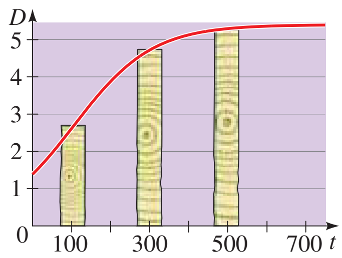
(b) Trace una gráfica de la función P para los años 2000 a 2500.

(c) De acuerdo con este modelo, ¿a qué número parece aproximarse la población mundial a medida que pasa el tiempo?

28. Diámetro de un árbol Para cierto tipo de árboles, el diámetro D (en pies) depende de la edad t del árbol (en años) de acuerdo con el modelo de crecimiento logístico siguiente:

$$D(t) = \frac{5.4}{1 + 2.9e^{-0.01t}}$$

Encuentre el diámetro de un árbol de 20 años de edad.



29-30 ■ Interés compuesto Una inversión de \$7000 se deposita en una cuenta en la que el interés se capitaliza continuamente. Complete la tabla escribiendo las cantidades a las que crece la inversión en los tiempos o tasas de interés indicados.

29. $r = 3\%$

Tiempo (años)	Cantidad
1	
2	
3	
4	
5	
6	

30. $t = 10$ años

Tasa por año	Cantidad
1%	
2%	
3%	
4%	
5%	
6%	

31. Interés compuesto Si se invierten \$2000 a una tasa de interés del 3.5% al año, capitalizado continuamente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 2 años **(b)** 4 años **(c)** 12 años

32. Interés compuesto Si se invierten \$3500 a una tasa del 6.25% al año, capitalizado continuamente, encuentre el valor de la inversión después del número dado de años.
(a) 3 años **(b)** 6 años **(c)** 9 años

33. Interés compuesto Si se invierten \$600 a una tasa del 2.5% al año, encuentre la cantidad de la inversión al término de 10 años para los siguientes métodos de capitalización.
(a) Anualmente **(b)** Semestralmente
(c) Trimestralmente **(d)** Continuamente

34. Interés compuesto Si se invierte \$8000 en una cuenta para la cual el interés se capitaliza continuamente, encuentre la cantidad de la inversión al término de 12 años para las siguientes tasas de interés.
(a) 2% **(b)** 3% **(c)** 4.5% **(d)** 7%

35. Interés compuesto ¿Cuál de las tasas dadas y períodos de capitalización darían la mejor inversión?

(a) $2\frac{1}{2}\%$ al año, capitalizado semestralmente
(b) $2\frac{1}{4}\%$ al año, capitalizado mensualmente
(c) 2% al año, capitalizado continuamente

36. Interés compuesto ¿Cuál de las tasas de interés dadas y períodos de capitalización darían la mejor inversión?

(a) $5\frac{1}{8}\%$ al año, capitalizado semestralmente
(b) 5% al año, capitalizado continuamente

37. Inversión Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 9% al año, capitalizado continuamente.

(a) Encuentre el valor $A(t)$ de la inversión después de t años.
(b) Trace una gráfica de $A(t)$.
(c) Use la gráfica de $A(t)$ para determinar cuándo esta inversión ascenderá a \$25,000.

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

38. La definición de e Ilustre la definición del número e al graficar la curva $y = (1 + 1/x)^x$ y la recta $y = e^x$ en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista $[0, 40]$ por $[0, 4]$.

4.3 FUNCIONES LOGARÍTMICAS

Funciones logarítmicas ▶ Gráficas de funciones logarítmicas ▶ Logaritmos comunes ▶ Logaritmos naturales

En esta sección estudiamos las inversas de funciones exponenciales.

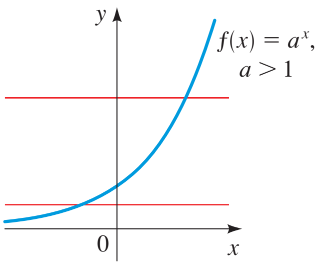


FIGURA 1 $f(x) = a^x$ es biunívoca.

▼ Funciones logarítmicas

Toda función exponencial $f(x) = a^x$, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es una función biunívoca por la Prueba de la Recta Horizontal (vea Figura 1 para el caso $a > 1$) y por tanto tiene una función inversa. La función inversa f^{-1} se denomina *función logarítmica con base a* y se denota con $\log_a$. Recuerde de la Sección 2.6 que f^{-1} está definida por

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Esto lleva a la siguiente definición de la función logarítmica.

Leemos $\log_a x = y$ como "el log base a de x es y".

DEFINICIÓN DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Sea a un número positivo con $a \neq 1$. La **función logarítmica con base a**, denotada por $\mathbf{log}_a$, está definida por

$$\log_a x = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

Por lo tanto, $\log_a x$ es el *exponente* al cual la base a debe ser elevado para obtener x.

Por tradición el nombre de la función logarítmica es $\log_a$, no sólo una letra. También, por lo general omitimos los paréntesis en la notación de función y escribimos

$$\log_a(x) = \log_a x$$

Cuando usamos la definición de logaritmos para pasar entre la **forma logarítmica** $\log_a x = y$ y la **forma exponencial** $a^y = x$, es útil observar que, en ambas formas, la base es la misma:

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
Exponente	Exponente
$\log_a x = y$	$a^y = x$
Base	Base

EJEMPLO 1 | Formas logarítmicas y exponenciales

Las formas logarítmicas y exponenciales son ecuaciones equivalentes: si una es verdadera, también lo es la otra. Por lo tanto, podemos pasar de una forma a la otra como en las siguientes ilustraciones.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{10} 100{,}000 = 5$	$10^5 = 100{,}000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5**

x	$\log_{10} x$
10^4	4
10^3	3
10^2	2
10	1
1	0
10^{-1}	-1
10^{-2}	-2
10^{-3}	-3
10^{-4}	-4

Es importante entender que $\log_a x$ es un *exponente*. Por ejemplo, los números de la columna derecha de la tabla del margen son los logaritmos (base 10) de los números de la columna izquierda. Éste es el caso para todas las bases, como ilustra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Evaluación de logaritmos

(a) $\log_{10} 1000 = 3$ porque $10^3 = 1000$

(b) $\log_2 32 = 5$ porque $2^5 = 32$

(c) $\log_{10} 0.1 = -1$ porque $10^{-1} = 0.1$

(d) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ porque $16^{1/2} = 4$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7** Y **9**

Propiedad de la Función Inversa:

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

Cuando aplicamos la Propiedad de la Función Inversa descrita en la página 201 a $f(x) = a^x$ y $f^{-1}(x) = \log_a x$, obtenemos

$$\log_a(a^x) = x, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x, \qquad x > 0$$

Hacemos una lista de éstas y otras propiedades de logaritmos que estudiamos en esta sección.

PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Propiedad	Razón
1. $\log_a 1 = 0$	Debemos elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Debemos elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Debemos elevar a a la potencia x para obtener a^x.
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la que a debe elevarse para obtener x.

EJEMPLO 3 | Aplicar propiedades de logaritmos

Ilustramos las propiedades de logaritmos cuando la base es 5.

$\log_5 1 = 0$	Propiedad 1	$\log_5 5 = 1$	Propiedad 2
$\log_5 5^8 = 8$	Propiedad 3	$5^{\log_5 12} = 12$	Propiedad 4

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19** Y **25**

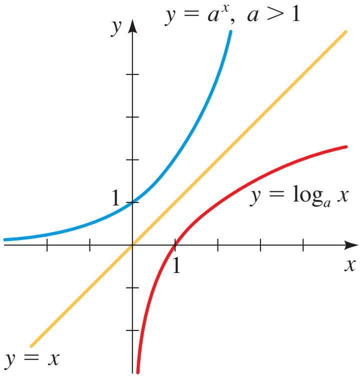


FIGURA 2 Gráfica de la función logarítmica $f(x) = \log_a x$

▼ Gráficas de funciones logarítmicas

Recuerde que si una función biunívoca f tiene dominio A y rango B, entonces su función inversa f^{-1} tiene dominio B y rango A. Como la función exponencial $f(x) = a^x$ con $a \neq 1$ tiene dominio $\mathbb{R}$ y rango $(0, \infty)$, concluimos que su función inversa, $f^{-1}(x) = \log_a x$, tiene dominio $(0, \infty)$ y rango $\mathbb{R}$.

La gráfica de $f^{-1}(x) = \log_a x$ se obtiene al reflejar la gráfica de $f(x) = a^x$ en la recta $y = x$. La Figura 2 muestra el caso $a > 1$. El hecho de que $y = a^x$ (para $a > 1$) sea una función muy rápidamente creciente para $x > 0$ implica que $y = \log_a x$ es una función muy rápidamente creciente para $x > 1$ (vea Ejercicio 92).

Como $\log_a 1 = 0$, el punto de intersección x de la función $y = \log_a x$ es 1. El eje y es una asíntota vertical de $y = \log_a x$ porque $\log_a x \to -\infty$ cuando $x \to 0^+$.

EJEMPLO 4 | Graficar una función logarítmica localizando puntos

Trace la gráfica de $f(x) = \log_2 x$.

SOLUCIÓN Para hacer una tabla de valores, escogemos los valores x que sean potencias de 2 para que podamos fácilmente hallar sus logaritmos. Localizamos estos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 3.

x	$\log_2 x$
2^3	3
2^2	2
2	1
1	0
2^{-1}	-1
2^{-2}	-2
2^{-3}	-3
2^{-4}	-4

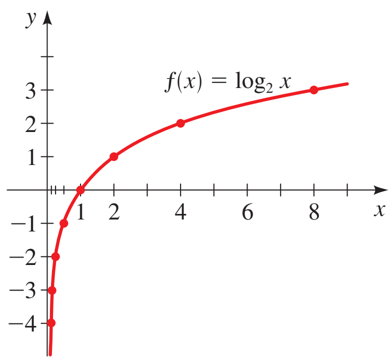


FIGURA 3

✎ AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **41** ■

La Figura 4 muestra las gráficas de la familia de funciones logarítmicas con bases 2, 3, 5 y 10. Estas gráficas se trazan al reflejar las gráficas de $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 5^x$ y $y = 10^x$ (vea Figura 2 en la Sección 4.1) en la recta $y = x$. También podemos localizar puntos como ayuda para trazar estas gráficas, como se ilustra en el Ejemplo 4.

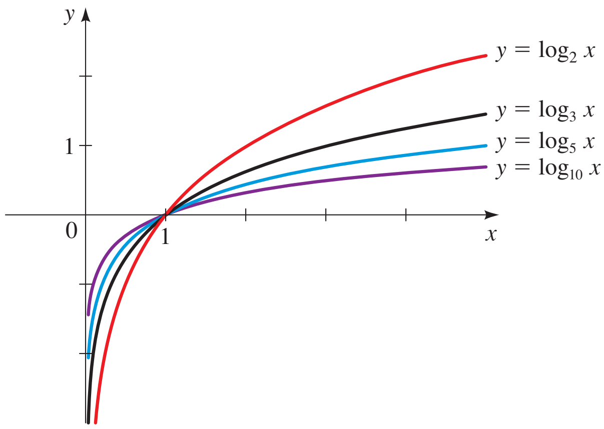


FIGURA 4 Familia de funciones logarítmicas

En los siguientes dos ejemplos graficamos funciones logarítmicas empezando con las gráficas básicas de la Figura 4 y usando las transformaciones de la Sección 2.5.

EJEMPLO 5 | Reflejar gráficas de funciones logarítmicas

Trace la gráfica de cada función.

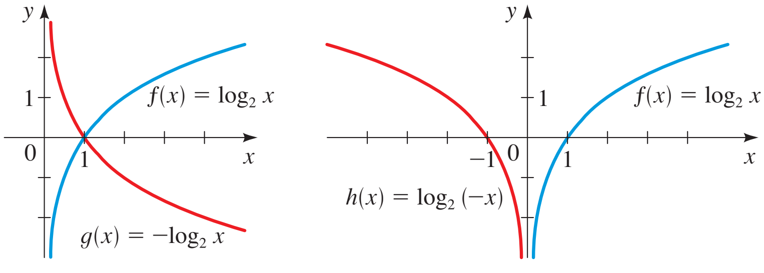
(a) $g(x) = -\log_2 x$

(b) $h(x) = \log_2(-x)$

SOLUCIÓN

(a) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje x para obtener la gráfica de $g(x) = -\log_2 x$ en la Figura 5(a).

(b) Empezamos con la gráfica de $f(x) = \log_2 x$ y la reflejamos en el eje y para obtener la gráfica de $h(x) = \log_2(-x)$ en la Figura 5(b).



(a) (b)

FIGURA 5

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 55

EJEMPLO 6 | Desplazar gráficas de funciones logarítmicas

Encuentre el dominio de cada función y trace la gráfica.

(a) $g(x) = 2 + \log_5 x$

(b) $h(x) = \log_{10}(x - 3)$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de g se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_5 x$ (Figura 4) al desplazar hacia arriba 2 unidades (vea Figura 6). El dominio de f es $(0, \infty)$.

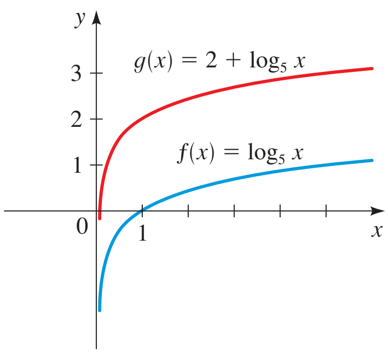


FIGURA 6

(b) La gráfica de h se obtiene de la gráfica de $f(x) = \log_{10} x$ (Figura 4) al desplazar a la derecha 3 unidades (vea Figura 7). La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. Como $\log_{10} x$ está definido sólo cuando $x > 0$, el dominio de $h(x) = \log_{10}(x - 3)$ es

$$\{x \mid x - 3 > 0\} = \{x \mid x > 3\} = (3, \infty)$$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

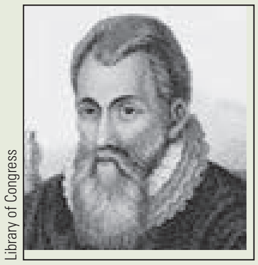
© Bettmann/CORBIS

© Hulton-Deutsch Collection/CORBIS

Aplicación de la ley

Las matemáticas ayudan a la aplicación de la ley en numerosas y sorprendentes formas, desde la reconstrucción de trayectorias de balas hasta determinar el tiempo de una muerte, para calcular la probabilidad de que una muestra de ADN sea de una persona en particular. Un uso interesante está en la búsqueda de personas desaparecidas. Una persona que haya estado desaparecida durante años podría verse muy diferente respecto de su más reciente fotografía disponible. Esto es particularmente cierto si la persona desaparecida es un niño. ¿Alguna vez se ha preguntado usted cómo se verá dentro de 5, 10 o 15 años?

Unos investigadores han hallado que diferentes partes del cuerpo crecen más rápido que otras. Por ejemplo, sin duda usted ha observado que la cabeza de un bebé es mucho más grande con respecto a su cuerpo que la cabeza de un adulto. Como otro ejemplo, la relación entre la longitud del brazo de una persona y la estatura de ésta es $\frac{1}{3}$ en un niño pero alrededor de $\frac{2}{5}$ en un adulto. Al recolectar datos y analizar gráficas, los investigadores pueden determinar las funciones que modelan el crecimiento. Al igual que en todos los fenómenos de crecimiento, las funciones exponenciales y logarítmicas desempeñan una función de importancia decisiva. Por ejemplo, la fórmula que relaciona la longitud l de un brazo con la estatura h es $l = ae^{kh}$ donde a y k son constantes. Estudiando varias características físicas de una persona, biólogos matemáticos modelan cada una de las características con una función que describe la forma en que cambian con el tiempo. Los modelos de características del rostro se pueden programar en una computadora para dar una imagen de cómo cambia con el tiempo la apariencia de una persona. Estas imágenes ayudan a departamentos de aplicación de la ley para localizar a personas extraviadas.



JOHN NAPIER (1550-1617) fue un terrateniente escocés para quien las matemáticas eran un pasatiempo favorito. Hoy lo conocemos por su invención clave: los logaritmos, que él publicó en 1614 bajo el título de *A description of the Marvelous Rule of Logarithms* (*Una descripción de la Maravillosa Regla de los Logaritmos*). En la época de Napier, los logaritmos eran utilizados exclusivamente para simplificar complicados cálculos. Por ejemplo, para multiplicar dos números grandes, los escribiríamos como potencias de 10. Los exponentes son simplemente los logaritmos de los números. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} 4532 \times 57{,}783 &\approx 10^{3.65629} \times 10^{4.76180} \\ &= 10^{8.41809} \\ &\approx 261{,}872{,}564 \end{aligned}$$

La idea es que multiplicar potencias de 10 es fácil (sólo sumamos sus exponentes). Napier produjo extensas tablas que dan los logaritmos (o exponentes) de números. Desde el advenimiento de calculadoras y computadoras, los logaritmos ya no se usan para este propósito, pero las funciones logarítmicas han encontrado numerosas aplicaciones, algunas de las cuales se describen en este capítulo.

Napier escribió sobre innumerables temas. Una de sus obras más pintorescas es un libro titulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John*, en el que predijo que el mundo se acabaría en el año 1700.

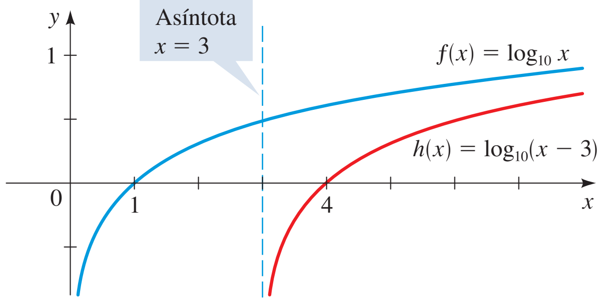


FIGURA 7

✎ AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **53** Y **57**

Logaritmos comunes

Ahora estudiamos logaritmos con base 10.

> **LOGARITMO COMÚN**
>
> El logaritmo común con base 10 se llama **logaritmo común** y se denota omitiendo la base:
>
> $$\log x = \log_{10} x$$

De la definición de logaritmos podemos fácilmente hallar que

$$\log 10 = 1 \qquad \text{y} \qquad \log 100 = 2$$

Pero ¿cómo definimos log 50? Necesitamos hallar el exponente y tal que $10^y = 50$. Claramente, 1 es demasiado pequeño y 2 es demasiado grande. Por lo tanto

$$1 < \log 50 < 2$$

Para obtener una mejor aproximación, podemos experimentar para hallar una potencia de 10 más cercana a 50. Por fortuna, las calculadoras científicas están equipadas con una tecla LOG que directamente da valores de logaritmos comunes.

EJEMPLO 7 | Evaluar logaritmos comunes

Use calculadora para hallar valores apropiados de $f(x) = \log x$ y utilice los valores para trazar la gráfica.

SOLUCIÓN Hacemos una tabla de valores, usando una calculadora para evaluar la función en aquellos valores de x que no sean potencias de 10. Localizamos esos puntos y los enlazamos con una curva sin irregularidades como en la Figura 8.

x	$\log x$
0.01	−2
0.1	−1
0.5	−0.301
1	0
4	0.602
5	0.699
10	1

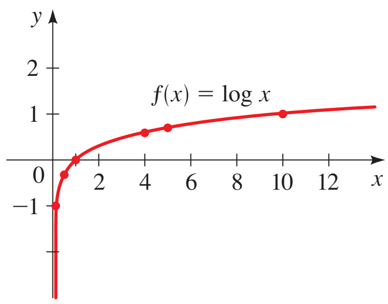


FIGURA 8

✎ AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

La respuesta humana al sonido e intensidad luminosa es logarítmica.

Los científicos modelan la respuesta humana a estímulos (sonido, luz o presión) usando funciones logarítmicas. Por ejemplo, la intensidad de un sonido debe ser aumentado muchas veces antes que "sintamos" que la intensidad simplemente se ha duplicado. El psicólogo Gustav Fechner formuló la ley como

$$S = k \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde S es la intensidad subjetiva del estímulo, I es la intensidad física del estímulo, I_0 representa el umbral de intensidad física y k es una constante que es diferente para cada estímulo sensorial.

EJEMPLO 8 | Logaritmos comunes y sonido

La percepción de la intensidad B (en decibeles, dB) de un sonido con intensidad física I (en W/m^2) está dada por

$$B = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Estudiamos la escala de decibeles en más detalle en la Sección 4.6.

donde I_0 es la intensidad física de un sonido apenas audible. Encuentre el nivel de decibeles (intensidad) de un sonido cuya intensidad física I es 100 veces la de I_0.

SOLUCIÓN Encontramos el nivel de decibeles B usando el hecho de que $I = 100I_0$.

$$\begin{aligned} B &= 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) && \text{Definición de } B \\ &= 10 \log\left(\frac{100I_0}{I_0}\right) && I = 100I_0 \\ &= 10 \log 100 && \text{Cancele } I_0 \\ &= 10 \cdot 2 = 20 && \text{Definición de log} \end{aligned}$$

La intensidad del sonido es de 20 dB.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **87**

Logaritmos naturales

La notación ln es una abreviatura del nombre latino *logarithmus naturalis.*

De todas las posibles bases a para logaritmos, resulta que la opción más cómoda para los propósitos de cálculo es el número e, que definimos en la Sección 4.2.

LOGARITMO NATURAL

El logaritmo con base e se denomina **logaritmo natural** y se denota con **ln:**

$$\ln x = \log_e x$$

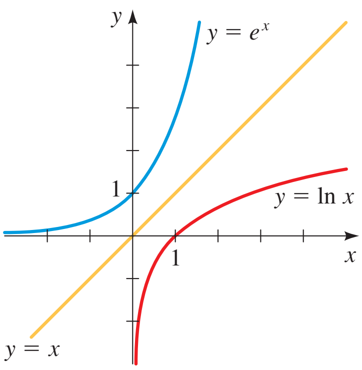


FIGURA 9 Gráfica de la función de logaritmo natural

La función de logaritmo natural $y = \ln x$ es la función inversa de la función exponencial natural $y = e^x$. Ambas funciones están graficadas en la Figura 9. Por la definición de funciones inversas tenemos

$$\boxed{\ln x = y \quad \Leftrightarrow \quad e^y = x}$$

Si sustituimos $a = e$ y escribimos "ln" por "log$_e$" en las propiedades de logaritmos ya citadas antes, obtenemos las siguientes propiedades de logaritmos naturales.

PROPIEDADES DE LOGARITMOS NATURALES

Propiedad	Razón
1. $\ln 1 = 0$	Debemos elevar e a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\ln e = 1$	Debemos elevar e a la potencia 1 para obtener e.
3. $\ln e^x = x$	Debemos elevar e a la potencia x para obtener e^x.
4. $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ es la potencia a la que e debe elevarse para obtener x.

Las calculadoras están equipadas con una tecla LN que directamente presenta los valores de logaritmos naturales.

EJEMPLO 9 | Evaluar la función de logaritmo natural

(a) $\ln e^8 = 8$ — Definición de logaritmo natural

(b) $\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right) = \ln e^{-2} = -2$ — Definición de logaritmo natural

(c) $\ln 5 \approx 1.609$ — Use la tecla LN de su calculadora

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

EJEMPLO 10 | Hallar el dominio de una función logarítmica

Encuentre el dominio de la función $f(x) = \ln(4 - x^2)$.

SOLUCIÓN Igual que con cualquier función logarítmica, $\ln x$ está definida cuando $x > 0$. Entonces, el dominio de f es

$$\{x \mid 4 - x^2 > 0\} = \{x \mid x^2 < 4\} = \{x \mid |x| < 2\}$$
$$= \{x \mid -2 < x < 2\} = (-2, 2)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

EJEMPLO 11 | Trazar la gráfica de una función logarítmica

Trace la gráfica de la función $y = x \ln(4 - x^2)$, y úsela para hallar las asíntotas y valores máximo y mínimo locales.

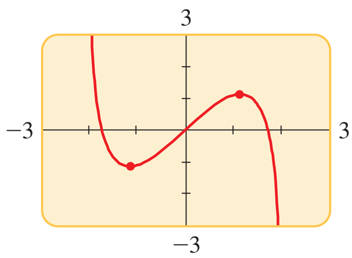


FIGURA 10
$y = x \ln(4 - x^2)$

SOLUCIÓN Como en el Ejemplo 10, el dominio de esta función es el intervalo $(-2, 2)$, de modo que escogemos el rectángulo de vista $[-3, 3]$ por $[-3, 3]$. La gráfica se muestra en la Figura 10, y de ella vemos que las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

La función tiene un punto máximo local a la derecha de $x = 1$ y un punto mínimo local a la izquierda de $x = -1$. Al hacer acercamiento (zoom) y trazar a lo largo de la gráfica con el cursor, encontramos que el valor máximo local es aproximadamente 1.13 y esto ocurre cuando $x \approx 1.15$. Del mismo modo (o al observar que la función es impar), encontramos que el valor mínimo local es alrededor de -1.13 y se presenta cuando $x \approx -1.15$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

4.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. log x es el exponente al cual la base 10 debe elevarse para obtener ________. Por lo tanto, podemos completar la tabla siguiente para log x.

x	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	$10^{1/2}$
log x								

2. La función $f(x) = \log_9 x$ es la función logarítmica con base ________. Por tanto, $f(9) =$ ________, $f(1) =$ ________, $f(\frac{1}{9}) =$ ________, y $f(3) =$ ________.

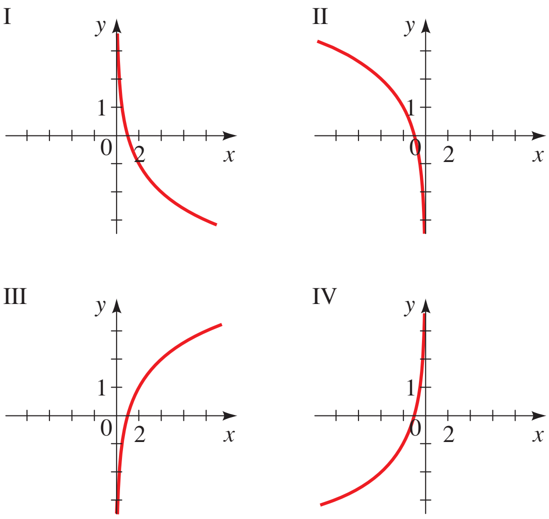
3. (a) $5^3 = 125$, entonces $\log_{\square} \square = \square$

(b) $\log_5 25 = 2$, entonces $\square^{\square} = \square$

4. Relacione la función logarítmica con su gráfica.

(a) $f(x) = \log_2 x$ **(b)** $f(x) = \log_2(-x)$

(c) $f(x) = -\log_2 x$ **(d)** $f(x) = -\log_2(-x)$



HABILIDADES

5-6 ■ Complete la tabla al hallar la forma logarítmica o exponencial apropiada de la ecuación, como en el Ejemplo 1.

5.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_8 8 = 1$	
$\log_8 64 = 2$	
	$8^{2/3} = 4$
	$8^3 = 512$
$\log_8\left(\frac{1}{8}\right) = -1$	
	$8^{-2} = \frac{1}{64}$

6.

Forma logarítmica	Forma exponencial
	$4^3 = 64$
$\log_4 2 = \frac{1}{2}$	
	$4^{3/2} = 8$
$\log_4\left(\frac{1}{16}\right) = -2$	
$\log_4\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$	
	$4^{-5/2} = \frac{1}{32}$

7-12 ■ Exprese la ecuación en forma exponencial.

7. (a) $\log_5 25 = 2$ **(b)** $\log_5 1 = 0$

8. (a) $\log_{10} 0.1 = -1$ **(b)** $\log_8 512 = 3$

9. (a) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ **(b)** $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$

10. (a) $\log_3 81 = 4$ **(b)** $\log_8 4 = \frac{2}{3}$

11. (a) $\ln 5 = x$ **(b)** $\ln y = 5$

12. (a) $\ln(x + 1) = 2$ **(b)** $\ln(x - 1) = 4$

13-18 ■ Exprese la ecuación en forma logarítmica.

13. (a) $5^3 = 125$ **(b)** $10^{-4} = 0.0001$

14. (a) $10^3 = 1000$ **(b)** $81^{1/2} = 9$

15. (a) $8^{-1} = \frac{1}{8}$ **(b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$

16. (a) $4^{-3/2} = 0.125$ **(b)** $7^3 = 343$

17. (a) $e^x = 2$ **(b)** $e^3 = y$

18. (a) $e^{x+1} = 0.5$ **(b)** $e^{0.5x} = t$

19-28 ■ Evalúe la expresión.

19. (a) $\log_3 3$ **(b)** $\log_3 1$ **(c)** $\log_3 3^2$

20. (a) $\log_5 5^4$ **(b)** $\log_4 64$ **(c)** $\log_3 9$

21. (a) $\log_6 36$ **(b)** $\log_9 81$ **(c)** $\log_7 7^{10}$

22. (a) $\log_2 32$ **(b)** $\log_8 8^{17}$ **(c)** $\log_6 1$

23. (a) $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$ **(b)** $\log_{10} \sqrt{10}$ **(c)** $\log_5 0.2$

24. (a) $\log_5 125$ **(b)** $\log_{49} 7$ **(c)** $\log_9 \sqrt{3}$

25. (a) $2^{\log_2 37}$ **(b)** $3^{\log_3 8}$ **(c)** $e^{\ln\sqrt{5}}$

26. (a) $e^{\ln \pi}$ **(b)** $10^{\log 5}$ **(c)** $10^{\log 87}$

27. (a) $\log_8 0.25$ **(b)** $\ln e^4$ **(c)** $\ln(1/e)$

28. (a) $\log_4 \sqrt{2}$ **(b)** $\log_4\left(\frac{1}{2}\right)$ **(c)** $\log_4 8$

29-36 ■ Use la definición de la función logarítmica para hallar x.

29. (a) $\log_2 x = 5$ **(b)** $\log_2 16 = x$

30. (a) $\log_5 x = 4$ **(b)** $\log_{10} 0.1 = x$

31. (a) $\log_3 243 = x$ **(b)** $\log_3 x = 3$

32. (a) $\log_4 2 = x$ **(b)** $\log_4 x = 2$

33. (a) $\log_{10} x = 2$ **(b)** $\log_5 x = 2$

34. **(a)** $\log_x 1000 = 3$ **(b)** $\log_x 25 = 2$

35. **(a)** $\log_x 16 = 4$ **(b)** $\log_x 8 = \frac{3}{2}$

36. **(a)** $\log_x 6 = \frac{1}{2}$ **(b)** $\log_x 3 = \frac{1}{3}$

37-40 ■ Use calculadora para evaluar la expresión, aproximada a cuatro lugares decimales.

37. **(a)** $\log 2$ **(b)** $\log 35.2$ **(c)** $\log\left(\frac{2}{3}\right)$

38. **(a)** $\log 50$ **(b)** $\log \sqrt{2}$ **(c)** $\log(3\sqrt{2})$

39. **(a)** $\ln 5$ **(b)** $\ln 25.3$ **(c)** $\ln(1 + \sqrt{3})$

40. **(a)** $\ln 27$ **(b)** $\ln 7.39$ **(c)** $\ln 54.6$

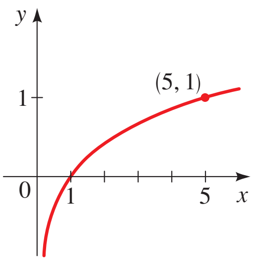
41-44 ■ Trace la gráfica de la función al localizar puntos.

41. $f(x) = \log_3 x$ **42.** $g(x) = \log_4 x$

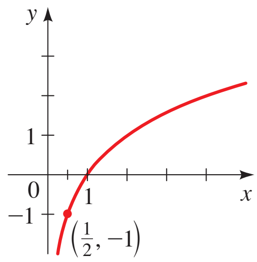
43. $f(x) = 2 \log x$ **44.** $g(x) = 1 + \log x$

45-48 ■ Encuentre la función de la forma $y = \log_a x$ cuya gráfica se da.

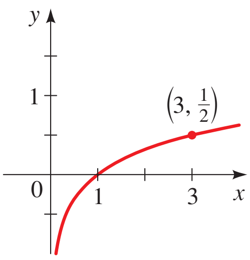
45.



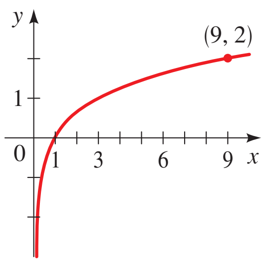
46.



47.

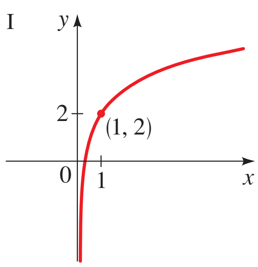


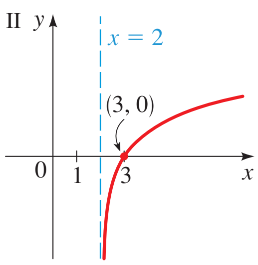
48.



49-50 ■ Relacione la función logarítmica con una de las gráficas marcadas I o II.

49. $f(x) = 2 + \ln x$ **50.** $f(x) = \ln(x - 2)$





51. Trace la gráfica de $y = 4^x$ y, a continuación, úsela para trazar la gráfica de $y = \log_4 x$.

52. Trace la gráfica de $y = 3^x$ y, a continuación, úsela para trazar la gráfica de $y = \log_3 x$.

53-62 ■ Grafique la función, no al localizar puntos sino empezando de las gráficas de las Figuras 4 y 9. Exprese el dominio, rango y asíntota.

53. $f(x) = \log_2(x - 4)$ **54.** $f(x) = -\log_{10} x$

55. $g(x) = \log_5(-x)$ **56.** $g(x) = \ln(x + 2)$

57. $y = 2 + \log_3 x$ **58.** $y = \log_3(x - 1) - 2$

59. $y = 1 - \log_{10} x$ **60.** $y = 1 + \ln(-x)$

61. $y = |\ln x|$ **62.** $y = \ln |x|$

63-68 ■ Encuentre el dominio de la función.

63. $f(x) = \log_{10}(x + 3)$ **64.** $f(x) = \log_5(8 - 2x)$

65. $g(x) = \log_3(x^2 - 1)$ **66.** $g(x) = \ln(x - x^2)$

67. $h(x) = \ln x + \ln(2 - x)$

68. $h(x) = \sqrt{x - 2} - \log_5(10 - x)$

69-74 ■ Trace la gráfica de la función en un rectángulo de vista apropiado, y úsela para hallar el dominio, las asíntotas y los valores máximo y mínimo locales.

69. $y = \log_{10}(1 - x^2)$ **70.** $y = \ln(x^2 - x)$

71. $y = x + \ln x$ **72.** $y = x(\ln x)^2$

73. $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **74.** $y = x \log_{10}(x + 10)$

75-78 ■ Encuentre las funciones $f \circ g$ y $g \circ f$ y sus dominios.

75. $f(x) = 2^x$, $g(x) = x + 1$

76. $f(x) = 3^x$, $g(x) = x^2 + 1$

77. $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = x - 2$

78. $f(x) = \log x$, $g(x) = x^2$

79. Compare las rapidez de crecimiento de las funciones $f(x) = \ln x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ al trazar sus gráficas en una pantalla común usando el rectángulo de vista $[-1, 30]$ por $[-1, 6]$.

80. **(a)** Trazando las gráficas de las funciones

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x) \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt{x}$$

en un rectángulo de vista apropiado, demuestre que aun cuando una función logarítmica empieza más alta que una función de raíz, es finalmente superada por la función de raíz.

(b) Encuentre, aproximadas a dos lugares decimales, las soluciones de la ecuación $\sqrt{x} = 1 + \ln(1 + x)$.

81-82 ■ Nos dan una familia de funciones. **(a)** Trace gráficas de la familia para $c = 1, 2, 3$ y 4. **(b)** ¿Cómo están relacionadas las gráficas de la parte (a)?

81. $f(x) = \log(cx)$ **82.** $f(x) = c \log x$

83-84 ■ Nos dan una función $f(x)$. **(a)** Encuentre el dominio de la función f. **(b)** Encuentre la función inversa de f.

83. $f(x) = \log_2(\log_{10} x)$ **84.** $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$

85. **(a)** Encuentre la inversa de la función $f(x) = \dfrac{2^x}{1 + 2^x}$.

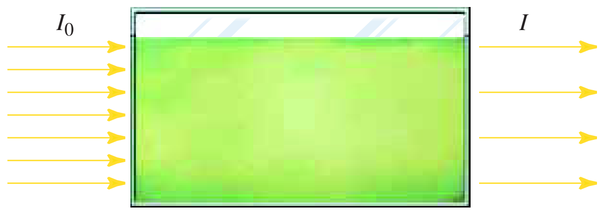
(b) ¿Cuál es el dominio de la función inversa?

APLICACIONES

86. Absorción de luz Un espectrofotómetro mide la concentración de una muestra disuelta en agua al hacer brillar una luz a través de ella y registrar la cantidad de luz que emerge. En otras palabras, si sabemos la cantidad de luz que es absorbida, podemos calcular la concentración de la muestra. Para cierta sustancia, la concentración (en moles por litro) se encuentra usando la fórmula

$$C = -2500 \ln\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

donde I_0 es la intensidad de la luz incidente e I es la intensidad de la luz que emerge. Encuentre la concentración de la sustancia si la intensidad I es 70% de I_0.



87. Determinación de la edad por carbono La edad de un artefacto antiguo puede ser determinada por la cantidad de carbono 14 radiactivo restante en una muestra. Si D_0 es la cantidad original de carbono 14 y D es la cantidad restante, entonces la edad A del artefacto (en años) está dada por

$$A = -8267 \ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de carbono 14 que queda en el objeto es 73% de la cantidad original D_0.

88. Colonia de bacterias Cierta cepa de bacterias se divide cada tres horas. Si una colonia se inicia con 50 bacterias, entonces el tiempo t (en horas) necesario para que la colonia crezca a N bacterias está dado por

$$t = 3\frac{\log(N/50)}{\log 2}$$

Encuentre el tiempo necesario para que la colonia crezca a un millón de bacterias.

89. Inversión El tiempo necesario para duplicar la cantidad de una inversión a una tasa de interés r capitalizado continuamente está dado por

$$t = \frac{\ln 2}{r}$$

Encuentre el tiempo necesario para duplicar una inversión al 6%, 7% y 8%.

90. Carga de una batería La rapidez a la que se carga una batería es más lenta cuanto más cerca está la batería de su carga máxima C_0. El tiempo (en horas) necesario para cargar una batería completamente descargada a una carga C está dado por

$$t = -k \ln\left(1 - \frac{C}{C_0}\right)$$

donde k es una constante positiva que depende de la batería. Para cierta batería, $k = 0.25$. Si esta batería está completamente descargada, ¿cuánto tomará cargarla al 90% de su carga máxima C_0?

91. Dificultad de una tarea La dificultad en "alcanzar un objetivo" (por ejemplo usar el ratón para hacer clic en un icono en la pantalla de la computadora) depende de la distancia a la que está el objetivo y el tamaño de éste. De acuerdo con la Ley de Fitts, el índice de dificultad (ID) está dado por

$$\text{ID} = \frac{\log(2A/W)}{\log 2}$$

donde W es el ancho del objetivo y A es la distancia al centro del objetivo. Compare la dificultad de hacer clic en un icono de 5 mm de ancho con hacer clic en uno de 10 mm de ancho. En cada caso, suponga que el ratón está a 100 mm del icono.

DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

92. Altura de la gráfica de una función logarítmica Suponga que la gráfica de $y = 2^x$ está trazada en un plano de coordenadas donde la unidad de medición es 1 pulgada.

(a) Demuestre que, a una distancia de 2 pies a la derecha del origen, la altura de la gráfica es de unas 265 millas.

(b) Si la gráfica de $y = \log_2 x$ se traza en el mismo conjunto de ejes, ¿a qué distancia a la derecha del origen tenemos que ir antes que la altura de la curva llegue a 2 pies?

93. El Googolplex Un **googol** es 10^{100}, y un **googolplex** es 10^{googol}. Encuentre

$$\log(\log(\text{googol})) \qquad \text{y} \qquad \log(\log(\log(\text{googolplex})))$$

94. Comparación de logaritmos ¿Cuál es más grande, $\log_4 17$ o $\log_5 24$? Explique su razonamiento.

95. Número de dígitos de un entero Compare log 1000 con el número de dígitos de 1000. Haga lo mismo para 10,000. ¿Cuántos dígitos tiene cualquier número entre 1000 y 10,000? ¿Entre cuáles dos valores debe encontrarse el logaritmo común de tal número? Use sus observaciones para explicar por qué el número de dígitos de cualquier entero positivo x es $[\![\log x]\!] + 1$. (El símbolo $[\![n]\!]$ es la función entero mayor definida en la Sección 2.2.) ¿Cuántos dígitos tiene el número 2^{100}?

4.4 LEYES DE LOGARITMOS

Leyes de logaritmos ▶ Expansión y combinación de expresiones logarítmicas ▶ Fórmula para cambio de base

En esta sección estudiamos propiedades de logaritmos. Estas propiedades dan a las funciones logarítmicas una amplia variedad de aplicaciones, como veremos en la Sección 4.6.

▼ Leyes de logaritmos

Como los logaritmos son exponentes, las Leyes de Exponentes dan lugar a las Leyes de Logaritmos.

LEYES DE LOGARITMOS

Sea a un número positivo, con $a \neq 1$. Sean A, B y C cualesquier números reales con $A > 0$ y $B > 0$.

Ley	Descripción
1. $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$	El logaritmo de un producto de números es la suma de los logaritmos de los números.
2. $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$	El logaritmo de un cociente de números es la diferencia de los logaritmos de los números.
3. $\log_a(A^C) = C \log_a A$	El logaritmo de una potencia de un número es el exponente por el logaritmo del número.

DEMOSTRACIÓN Hacemos uso de la propiedad $\log_a a^x = x$ de la Sección 4.3.

Ley 1 Sean $\log_a A = u$ y $\log_a B = v$. Cuando se escriben en forma exponencial, estas cantidades se convierten en

$$a^u = A \qquad \text{y} \qquad a^v = B$$

Por lo tanto,

$$\log_a(AB) = \log_a(a^u a^v) = \log_a(a^{u+v})$$
$$= u + v = \log_a A + \log_a B$$

Ley 2 Usando la Ley 1, tenemos

$$\log_a A = \log_a\left[\left(\frac{A}{B}\right)B\right] = \log_a\left(\frac{A}{B}\right) + \log_a B$$

Así

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$$

Ley 3 Sean $\log_a A = u$. Entonces $a^u = A$, por lo que

$$\log_a(A^C) = \log_a(a^u)^C = \log_a(a^{uC}) = uC = C \log_a A$$

■

EJEMPLO 1 | Uso de las leyes de logaritmos para evaluar expresiones

Evalúe las expresiones siguientes.

(a) $\log_4 2 + \log_4 32$

(b) $\log_2 80 - \log_2 5$

(c) $-\frac{1}{3}\log 8$

SOLUCIÓN

(a) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4(2 \cdot 32)$ — Ley 1

$= \log_4 64 = 3$ — Porque $64 = 4^3$

(b) $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{80}{5}\right)$ — Ley 2

$= \log_2 16 = 4$ — Porque $16 = 2^4$

(c) $-\frac{1}{3}\log 8 = \log 8^{-1/3}$ — Ley 3

$= \log\left(\frac{1}{2}\right)$ — Propiedad de exponentes negativos

≈ -0.301 — Calculadora

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **7, 9** Y **11** ■

Expansión y combinación de expresiones logarítmicas

Las Leyes de Logaritmos nos permiten escribir el logaritmo de un producto o un cociente como la suma o diferencia de logaritmos. Este proceso, llamado *expansión* de una expresión logarítmica, se ilustra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Expansión de expresiones logarítmicas

Use las Leyes de Logaritmos para expandir estas expresiones.

(a) $\log_2(6x)$ **(b)** $\log_5(x^3y^6)$ **(c)** $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right)$

SOLUCIÓN

(a) $\log_2(6x) = \log_2 6 + \log_2 x$ — Ley 1

(b) $\log_5(x^3y^6) = \log_5 x^3 + \log_5 y^6$ — Ley 1

$= 3\log_5 x + 6\log_5 y$ — Ley 3

(c) $\ln\left(\dfrac{ab}{\sqrt[3]{c}}\right) = \ln(ab) - \ln\sqrt[3]{c}$ — Ley 2

$= \ln a + \ln b - \ln c^{1/3}$ — Ley 1

$= \ln a + \ln b - \frac{1}{3}\ln c$ — Ley 3

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19, 21** Y **33** ■

Las Leyes de Logaritmos también nos permiten invertir el proceso de expansión que se hizo en el Ejemplo 2. Es decir, podemos escribir sumas y diferencias de logaritmos como un solo logaritmo. Este proceso, llamado *combinar* expresiones logarítmicas, está ilustrado en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 | Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\log x + \frac{1}{2}\log(x + 1)$ en un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$3\log x + \frac{1}{2}\log(x + 1) = \log x^3 + \log(x + 1)^{1/2}$ — Ley 3

$= \log(x^3(x + 1)^{1/2})$ — Ley 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **47** ■

EJEMPLO 4 | Combinar expresiones logarítmicas

Combine $3\ln s + \frac{1}{2}\ln t - 4\ln(t^2 + 1)$ en un solo logaritmo.

SOLUCIÓN

$$
\begin{aligned}
3 \ln s + \tfrac{1}{2} \ln t - 4 \ln(t^2 + 1) &= \ln s^3 + \ln t^{1/2} - \ln(t^2 + 1)^4 && \text{Ley 3} \\
&= \ln(s^3 t^{1/2}) - \ln(t^2 + 1)^4 && \text{Ley 1} \\
&= \ln\left(\frac{s^3 \sqrt{t}}{(t^2 + 1)^4}\right) && \text{Ley 2}
\end{aligned}
$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

Advertencia Aun cuando las Leyes de Logaritmos nos dicen cómo calcular el logaritmo de un producto o un cociente, *no hay regla correspondiente para el logaritmo de una suma o una diferencia.* Por ejemplo,

$$\log_a(x + y) \cancel{=} \log_a x + \log_a y$$

De hecho, sabemos que el lado derecho es igual a $\log_a(xy)$. Del mismo modo, no simplifique incorrectamente cocientes o potencias de logaritmos. Por ejemplo,

$$\frac{\log 6}{\log 2} \cancel{=} \log\left(\frac{6}{2}\right) \qquad \text{y} \qquad (\log_2 x)^3 \cancel{=} 3 \log_2 x$$

Se usan funciones logarítmicas para modelar diversas situaciones donde interviene el comportamiento humano. Uno de éstos es la rapidez con la que olvidamos cosas que hemos aprendido. Por ejemplo, si usted aprende álgebra a cierto nivel (por ejemplo 90% en un examen) y no usa álgebra durante un tiempo, ¿cuánto retendrá después de una semana, un mes o un año? Hermann Ebbinghaus (1850-1909) estudió este fenómeno y formuló la ley descrita en el ejemplo siguiente.

Olvidar lo que hemos aprendido depende de cuánto tiempo hace que lo aprendimos.

EJEMPLO 5 | La ley de olvido

Si una tarea se aprende a cierto nivel P_0, después de cierto tiempo t el nivel de recordatorio P satisface la ecuación

$$\log P = \log P_0 - c \log(t + 1)$$

donde c es una constante que depende del tipo de tarea y t se mide en meses.

(a) Despeje P.

(b) Si su calificación en el examen de historia es 90, ¿qué calificación esperaría obtener en un examen similar después de dos meses? ¿Después de un año? (Suponga que $c = 0.2$.)

SOLUCIÓN

(a) Primero combinamos el lado derecho.

$$
\begin{aligned}
\log P &= \log P_0 - c \log(t + 1) && \text{Ecuación dada} \\
\log P &= \log P_0 - \log(t + 1)^c && \text{Ley 3} \\
\log P &= \log \frac{P_0}{(t + 1)^c} && \text{Ley 2} \\
P &= \frac{P_0}{(t + 1)^c} && \text{Porque log es biunívoco}
\end{aligned}
$$

(b) Aquí $P_0 = 90$, $c = 0.2$ y t se mide en meses.

$$\text{En dos meses:} \qquad t = 2 \qquad \text{y} \qquad P = \frac{90}{(2 + 1)^{0.2}} \approx 72$$

$$\text{En un año:} \qquad t = 12 \qquad \text{y} \qquad P = \frac{90}{(12 + 1)^{0.2}} \approx 54$$

Sus calificaciones esperadas después de dos meses y un año son 72 y 54, respectivamente.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **69**

Fórmula para cambio de base

Para algunos propósitos encontramos útil cambiar de logaritmos de una base a logaritmos de otra base. Suponga que nos dan $\log_a x$ y deseamos hallar $\log_b x$. Sea

$$y = \log_b x$$

Escribimos esto en forma exponencial y tomamos el logaritmo, con base a, de cada lado.

$$\begin{aligned} b^y &= x && \text{Forma exponencial} \\ \log_a(b^y) &= \log_a x && \text{Tome } \log_a \text{ de cada lado} \\ y \log_a b &= \log_a x && \text{Ley 3} \\ y &= \frac{\log_a x}{\log_a b} && \text{Divida entre } \log_a b \end{aligned}$$

Esto demuestra la siguiente fórmula.

Podemos escribir la Fórmula para Cambio para Base como

$$\log_b x = \left(\frac{1}{\log_a b}\right)\log_a x$$

Entonces $\log_a x$ es sólo un múltiplo constante de $\log_a x$; la constante es $\dfrac{1}{\log_a b}$.

FÓRMULA PARA CAMBIO DE BASE

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

En particular, si ponemos $x = a$, entonces $\log_a a$, y esta fórmula se convierte en

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ahora podemos evaluar un logaritmo a *cualquier* base con el uso de la Fórmula para Cambio de Base, para expresar el logaritmo en términos de logaritmos comunes o logaritmos naturales y luego usar calculadora.

EJEMPLO 6 | Evaluar logaritmos con la Fórmula para Cambio de Base

Use la Fórmula para Cambio de Base y logaritmos comunes o naturales para evaluar cada logaritmo, aproximado a cinco lugares decimales.

(a) $\log_8 5$ **(b)** $\log_9 20$

SOLUCIÓN

(a) Usamos la Fórmula para Cambio de Base con $b = 8$ y $a = 10$:

$$\log_8 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 8} \approx 0.77398$$

(b) Usamos la Fórmula para Cambio de Base con $b = 9$ y $a = e$:

$$\log_9 20 = \frac{\ln 20}{\ln 9} \approx 1.36342$$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **55** Y **57**

EJEMPLO 7 | Usar la Fórmula para Cambio de Base para graficar una función logarítmica

Use calculadora graficadora para graficar $f(x) = \log_6 x$.

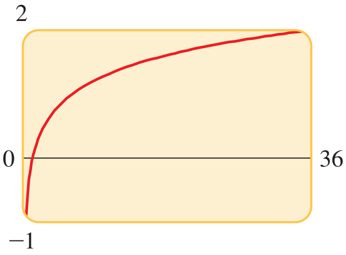


FIGURA 1 $f(x) = \log_6 x = \dfrac{\ln x}{\ln 6}$

SOLUCIÓN Las calculadoras no tienen tecla para $\log_6$, de modo que usamos la Fórmula para Cambio de Base para escribir

$$f(x) = \log_6 x = \frac{\ln x}{\ln 6}$$

Como las calculadoras tienen una tecla LN, podemos ingresar esta nueva forma de la función y graficarla. La gráfica se muestra en la Figura 1.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

4.4 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. El logaritmo de un producto de dos números es igual que la___ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(25 \cdot 125) =$___+____.
2. El logaritmo de un cociente de dos números es igual que la ___ de los logaritmos de estos números. Por tanto, $\log_5(\frac{25}{125}) =$ ________ − ________..
3. El logaritmo de un número elevado a una potencia es igual que la potencia _____ el logaritmo del número. Por tanto, $\log_5(25^{10}) =$________.
4. **(a)** Podemos expandir $\left(\dfrac{x^2 y}{z}\right)$ para obtener ________.
   (b) Podemos combinar $2 \log x + \log y - \log z$ para obtener ________.
5. La mayor parte de calculadoras pueden hallar logaritmos con base _____ y base ____. Para hallar logaritmos con bases diferentes, usamos la Fórmula _____. Para Hallar $\log_7 12$, escribimos
$$\log_7 12 = \frac{\log \square}{\log \square} = \_\_\_\_\_\_$$
6. *¿Verdadero o falso?* Obtenemos la misma respuesta si hacemos el cálculo del Ejercicio 5 usando ln en lugar de log.

HABILIDADES

7-18 ■ Evalúe la expresión.

7. $\log_3 \sqrt{27}$
8. $\log_2 160 - \log_2 5$
9. $\log 4 + \log 25$
10. $\log \dfrac{1}{\sqrt{1000}}$
11. $\log_4 192 - \log_4 3$
12. $\log_{12} 9 + \log_{12} 16$
13. $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20$
14. $\log_3 100 - \log_3 18 - \log_3 50$
15. $\log_4 16^{100}$
16. $\log_2 8^{33}$
17. $\log(\log 10^{10{,}000})$
18. $\ln(\ln e^{e^{200}})$

19-44 ■ Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión.

19. $\log_2(2x)$
20. $\log_3(5y)$
21. $\log_2(x(x-1))$
22. $\log_5 \dfrac{x}{2}$
23. $\log 6^{10}$
24. $\ln \sqrt{z}$
25. $\log_2(AB^2)$
26. $\log_6 \sqrt[4]{17}$
27. $\log_3(x\sqrt{y})$
28. $\log_2(xy)^{10}$
29. $\log_5 \sqrt[3]{x^2+1}$
30. $\log_a\left(\dfrac{x^2}{yz^3}\right)$
31. $\ln \sqrt{ab}$
32. $\ln \sqrt[3]{3r^2 s}$
33. $\log\left(\dfrac{x^3 y^4}{z^6}\right)$
34. $\log\left(\dfrac{a^2}{b^4\sqrt{c}}\right)$
35. $\log_2\left(\dfrac{x(x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}}\right)$
36. $\log_5 \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$
37. $\ln\left(x\sqrt{\dfrac{y}{z}}\right)$
38. $\ln \dfrac{3x^2}{(x+1)^{10}}$
39. $\log \sqrt[4]{x^2+y^2}$
40. $\log\left(\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}\right)$
41. $\log \sqrt{\dfrac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}}$
42. $\log \sqrt{x\sqrt{y\sqrt{z}}}$
43. $\ln\left(\dfrac{x^3\sqrt{x-1}}{3x+4}\right)$
44. $\log\left(\dfrac{10^x}{x(x^2+1)(x^4+2)}\right)$

45-54 ■ Use las Leyes de Logaritmos para combinar la expresión.

45. $\log_3 5 + 5 \log_3 2$
46. $\log 12 + \frac{1}{2} \log 7 - \log 2$
47. $\log_2 A + \log_2 B - 2 \log_2 C$
48. $\log_5(x^2-1) - \log_5(x-1)$
49. $4 \log x - \frac{1}{3} \log(x^2+1) + 2 \log(x-1)$
50. $\ln(a+b) + \ln(a-b) - 2 \ln c$
51. $\ln 5 + 2 \ln x + 3 \ln(x^2+5)$
52. $2(\log_5 x + 2 \log_5 y - 3 \log_5 z)$

53. $\frac{1}{3}\log(x + 2)^3 + \frac{1}{2}[\log x^4 - \log(x^2 - x - 6)^2]$

54. $\log_a b + c\log_a d - r\log_a s$

55-62 ■ Use la Regla para Cambio de Base y una calculadora para evaluar el logaritmo, redondeado a seis lugares decimales. Use logaritmos naturales o comunes.

55. $\log_2 5$

56. $\log_5 2$

57. $\log_3 16$

58. $\log_6 92$

59. $\log_7 2.61$

60. $\log_6 532$

61. $\log_4 125$

62. $\log_{12} 2.5$

63. Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que

$$\log_3 x = \frac{\ln x}{\ln 3}$$

A continuación use este dato para trazar la gráfica de la función $f(x) = \log_3 x$.

64. Trace gráficas de la familia de funciones $y = \log_a x$ para $a = 2$, e, 5 y 10 en la misma pantalla, usando el rectángulo de vista $[0, 5]$ por $[-3, 3]$. ¿Cómo están relacionadas estas gráficas?

65. Use la Fórmula para Cambio de Base para demostrar que

$$\log e = \frac{1}{\ln 10}$$

66. Simplifique: $(\log_2 5)(\log_5 7)$

67. Demuestre que $-\ln(x - \sqrt{x^2 - 1}) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

APLICACIONES

68. Olvido Use la Ley de Olvido (Ejemplo 5) para estimar la calificación de un estudiante, en un examen de biología, dos años después que obtuvo una calificación de 80 en un examen sobre el mismo material. Suponga que $c = 0.3$ y t se mide en meses.

69. Distribución de riqueza Vilfredo Pareto (1848-1923) observó que la mayor parte de la riqueza de un país es propiedad de unos cuantos miembros de la población. El **Principio de Pareto** es

$$\log P = \log c - k\log W$$

donde W es el nivel de riqueza (cuánto dinero tiene una persona) y P es el número de personas de la población que tiene ese dinero.

(a) De esa ecuación, despeje P.

(b) Suponga que $k = 2.1$, $c = 8000$, y W se mide en millones de dólares. Use la parte (a) para hallar el número de personas que tienen \$2 millones de dólares o más. ¿Cuántas personas tienen \$10 millones de dólares o más?

70. Diversidad Algunos biólogos modelan el número de especies S en un área fija A (por ejemplo una isla) con la relación especie-área

$$\log S = \log c + k\log A$$

donde c y k son constantes positivas que dependen del tipo de especie y hábitat.

(a) De la ecuación, despeje S.

(b) Use la parte (a) para demostrar que si $k = 3$, entonces duplicar el área aumenta ocho veces el número de especies.

71. Magnitud de estrellas La magnitud M de una estrella es una medida del brillo que una estrella parece tener a la vista del hombre. Está definida como

$$M = -2.5\log\left(\frac{B}{B_0}\right)$$

donde B es el brillo real de la estrella y B_0 es una constante.

(a) Expanda el lado derecho de la ecuación.

(b) Use la parte (a) para demostrar que cuanto más brillante sea una estrella, menor es su magnitud.

(c) Betelgeuse es unas 100 veces más brillante que Albiero. Use la parte (a) para demostrar que Betelgeuse es 5 magnitudes menos brillante que Albiero.

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

72. ¿Verdadero o falso? Discuta cada una de las ecuaciones siguientes y determine si es verdadera para todos los valores posibles de las variables. (Ignore valores de las variables para las que cualquier término no esté definido.)

(a) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\log x}{\log y}$

(b) $\log_2(x - y) = \log_2 x - \log_2 y$

(c) $\log_5\left(\frac{a}{b^2}\right) = \log_5 a - 2\log_5 b$

(d) $\log 2^z = z\log 2$

(e) $(\log P)(\log Q) = \log P + \log Q$

(f) $\frac{\log a}{\log b} = \log a - \log b$

(g) $(\log_2 7)^x = x\log_2 7$

(h) $\log_a a^a = a$

(i) $\log(x - y) = \frac{\log x}{\log y}$

(j) $-\ln\left(\frac{1}{A}\right) = \ln A$

73. Encuentre el error ¿Qué está mal en el siguiente argumento?

$$\begin{aligned} \log 0.1 &< 2 \log 0.1 \\ &= \log(0.1)^2 \\ &= \log 0.01 \\ \log 0.1 &< \log 0.01 \\ 0.1 &< 0.01 \end{aligned}$$

74. Desplazamiento, contracción y alargamiento de gráficas de funciones Sea $f(x) = x^2$. Demuestre que $f(2x) = 4f(x)$ y explique la forma en que esto demuestra que la contracción de la gráfica de f, horizontalmente, tiene el mismo efecto que alargarla verticalmente. A continuación use las identidades $e^{2+x} = e^2 e^x$ y $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ para demostrar que para $g(x) = e^x$ un desplazamiento horizontal es igual que un alargamiento vertical y para $h(x) = \ln x$ una contracción horizontal es lo mismo que un desplazamiento vertical.

4.5 ECUACIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Ecuaciones exponenciales ▶ Ecuaciones logarítmicas ▶ Interés compuesto

En esta sección resolvemos ecuaciones que contienen funciones exponenciales o logarítmicas. Las técnicas que desarrollamos aquí se usarán en la siguiente sección para resolver problemas aplicados.

▼ Ecuaciones exponenciales

Una *ecuación exponencial* es aquella en la que la variable aparece en el exponente. Por ejemplo,

$$2^x = 7$$

La variable x presenta una dificultad porque está en el exponente. Para resolver esta dificultad, tomamos el logaritmo de cada lado y luego usamos las Leyes de Logaritmos para "bajar x" del exponente.

$$\begin{aligned} 2^x &= 7 && \text{Ecuación dada} \\ \ln 2^x &= \ln 7 && \text{Tome ln de cada lado} \\ x \ln 2 &= \ln 7 && \text{Ley 3 (bajar exponente)} \\ x &= \frac{\ln 7}{\ln 2} && \text{Despeje } x \\ &\approx 2.807 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

Recuerde que la Ley 3 de las Leyes de Logaritmos dice que $\log_a A^c = C \log_a A$.

El método que usamos para resolver $2^x = 7$ es típico de cómo resolvemos ecuaciones exponenciales en general.

GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES EXPONENCIALES

1. Aísle la expresión exponencial en un lado de la ecuación.
2. Tome el logaritmo de cada lado y a continuación use las Leyes de Logaritmos para "bajar el exponente".
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 1 | Resolver una ecuación exponencial

Encuentre la solución de la ecuación $3^{x+2} = 7$, redondeada a seis lugares decimales.

SOLUCIÓN Tomamos el logaritmo común de cada lado y usamos la Ley 3.

$$
\begin{aligned}
3^{x+2} &= 7 && \text{Ecuación dada}\\
\log(3^{x+2}) &= \log 7 && \text{Tome log de cada lado}\\
(x+2)\log 3 &= \log 7 && \text{Ley 3 (bajar exponente)}\\
x+2 &= \frac{\log 7}{\log 3} && \text{Divida entre log 3}\\
x &= \frac{\log 7}{\log 3} - 2 && \text{Reste 2}\\
&\approx -0.228756 && \text{Calculadora}
\end{aligned}
$$

Podríamos haber usado logaritmos naturales en lugar de logaritmos comunes. De hecho, usando los mismos pasos, obtenemos

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3} - 2 \approx -0.228756$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = -0.228756$ en la ecuación original y usando calculadora, obtenemos

$$3^{(-0.228756)+2} \approx 7 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7** ■

EJEMPLO 2 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $8e^{2x} = 20$.

SOLUCION Primero dividimos entre 8 para aislar el término exponencial en un lado de la ecuación.

$$
\begin{aligned}
8e^{2x} &= 20 && \text{Ecuación dada}\\
e^{2x} &= \tfrac{20}{8} && \text{Divida entre 8}\\
\ln e^{2x} &= \ln 2.5 && \text{Tome ln de cada lado}\\
2x &= \ln 2.5 && \text{Propiedad de ln}\\
x &= \frac{\ln 2.5}{2} && \text{Divida entre 2}\\
&\approx 0.458 && \text{Calculadora}
\end{aligned}
$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Sustituyendo $x = 0.458$ en la ecuación original y utilizando una calculadora, tenemos

$$8e^{2(0.458)} \approx 20 \quad ✔$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9** ■

EJEMPLO 3 | Resolver una ecuación exponencial de forma algebraica y gráfica

Resuelva la ecuación $e^{3-2x} = 4$ de manera algebraica y gráfica.

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Como la base del término exponencial es e, usamos logaritmos naturales para resolver esta ecuación.

$$
\begin{aligned}
e^{3-2x} &= 4 && \text{Ecuación dada}\\
\ln(e^{3-2x}) &= \ln 4 && \text{Tome ln de cada lado}\\
3 - 2x &= \ln 4 && \text{Propiedad de ln}\\
-2x &= -3 + \ln 4 && \text{Reste 3}\\
x &= \tfrac{1}{2}(3 - \ln 4) \approx 0.807 && \text{Multiplique por } -\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Es necesario verificar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

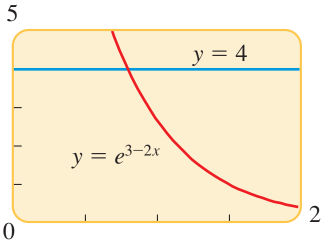


FIGURA 1

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Graficamos las ecuaciones $y = e^{3-2x}$ y $y = 4$ en el mismo rectángulo de vista como en la Figura 1. Las soluciones se presentan donde las gráficas se intersecan. Si hacemos acercamiento (zoom) en el punto de intersección de las dos gráficas, vemos que $x \approx 0.81$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

EJEMPLO 4 | Una ecuación exponencial de tipo cuadrático

Resuelva la ecuación $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

SOLUCIÓN Para aislar el término exponencial, factorizamos.

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$(e^x)^2 - e^x - 6 = 0 \qquad \text{Ley de Exponentes}$$

$$(e^x - 3)(e^x + 2) = 0 \qquad \text{Factorice (un cuadrático en } e^x\text{)}$$

$$e^x - 3 = 0 \quad \text{o bien} \quad e^x + 2 = 0 \qquad \text{Propiedad del Producto Cero}$$

$$e^x = 3 \qquad\qquad e^x = -2$$

Si hacemos $w = e^x$, obtenemos la ecuación cuadrática

$$w^2 - w - 6 = 0$$

que se factoriza como

$$(w - 3)(w + 2) = 0$$

La ecuación $e^x = 3$ lleva a $x = \ln 3$. Pero la ecuación $e^x = -2$ no tiene solución porque $e^x > 0$ para toda x. Entonces, $x = \ln 3 \approx 1.0986$ es la única solución. Es necesario comprobar que esta respuesta satisfaga la ecuación original.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

EJEMPLO 5 | Resolver una ecuación exponencial

Resuelva la ecuación $3xe^x + x^2e^x = 0$.

SOLUCIÓN Primero factorizamos el lado izquierdo de la ecuación.

$$3xe^x + x^2e^x = 0 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x(3 + x)e^x = 0 \qquad \text{Factorizamos factores comunes}$$

$$x(3 + x) = 0 \qquad \text{Dividimos entre } e^x \text{ (porque } e^x \neq 0\text{)}$$

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 3 + x = 0 \qquad \text{Propiedad del Producto Cero}$$

Entonces las soluciones son $x = 0$ y $x = -3$.

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = 0$:

$3(0)e^0 + 0^2e^0 = 0$ ✔

$x = -3$:

$3(-3)e^{-3} + (-3)^2e^{-3}$

$= -9e^{-3} + 9e^{-3} = 0$ ✔

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

La **determinación de la edad por radiocarbono** es un método que los arqueólogos usan para determinar la edad de objetos antiguos. El dióxido de carbono en la atmósfera siempre contiene una fracción fija de carbono radiactivo, carbono 14 (^{14}C), con una vida media de unos 5730 años. Las plantas absorben dióxido de carbono de la atmósfera, que luego pasa a los animales a través de la cadena alimentaria. Entonces, todos los seres vivientes contienen las mismas proporciones fijas entre ^{14}C y ^{12}C no radiactivo como la atmósfera.

Después que un organismo muere, deja de asimilar ^{14}C y la cantidad de ^{14}C en su interior empieza a desintegrarse exponencialmente. Podemos entonces determinar el tiempo transcurrido desde la muerte del organismo si medimos la cantidad de ^{14}C que tenga.

Por ejemplo, si el hueso de un borrico que murió hace t años contiene 73% del ^{14}C que tenga uno vivo, entonces por la fórmula para desintegración radiactiva (Sección 4.6),

$$0.73 = (1.00)e^{-(t \ln 2)/5730}$$

Resolvemos esta ecuación exponencial para hallar $t \approx 2600$, de modo que el hueso tiene unos 2600 años de antigüedad.

Ecuaciones logarítmicas

Una *ecuación logarítmica* es aquella en la que aparece un logaritmo de la variable. Por ejemplo,

$$\log_2(x + 2) = 5$$

Para despejar x, escribimos la ecuación en forma exponencial

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

Otra forma de ver el primer paso es elevar la base, 2, a cada lado de la ecuación.

$$2^{\log_2(x+2)} = 2^5 \qquad \text{Eleve 2 a cada lado}$$

$$x + 2 = 2^5 \qquad \text{Propiedad de logaritmos}$$

$$x = 32 - 2 = 30 \qquad \text{Despeje } x$$

El método empleado para resolver este sencillo problema es típico. Resumimos los pasos como sigue:

GUÍAS PARA RESOLVER ECUACIONES LOGARÍTMICAS

1. Aísle el término logarítmico en un lado de la ecuación; es posible que primero sea necesario combinar los términos logarítmicos.
2. Escriba la ecuación en forma exponencial (o elevar la base a cada lado de la ecuación).
3. Despeje la variable.

EJEMPLO 6 | Resolver ecuaciones logarítmicas

De cada ecuación, despeje x.

(a) $\ln x = 8$ **(b)** $\log_2(25 - x) = 3$

SOLUCIÓN

(a)

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Forma exponencial}$$

Por lo tanto, $x = e^8 \approx 2981$.

También podemos resolver este problema en otra forma:

$$\ln x = 8 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$e^{\ln x} = e^8 \qquad \text{Eleve } e \text{ a cada lado}$$

$$x = e^8 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

(b) El primer paso es reescribir la ecuación en forma exponencial.

$$\log_2(25 - x) = 3 \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$25 - x = 2^3 \qquad \text{Forma exponencial (o eleve 2 a cada lado)}$$

$$25 - x = 8$$

$$x = 25 - 8 = 17$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 17$, tenemos

$\log_2(25 - 17) = \log_2 8 = 3$ ✔

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **37** Y **41**

EJEMPLO 7 | Resolver una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $4 + 3\log(2x) = 16$.

SOLUCIÓN Primero aislamos el término logarítmico. Esto nos permite escribir la ecuación en forma exponencial.

$$
\begin{aligned}
4 + 3\log(2x) &= 16 && \text{Ecuación dada} \\
3\log(2x) &= 12 && \text{Reste 4} \\
\log(2x) &= 4 && \text{Divida entre 3} \\
2x &= 10^4 && \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\
x &= 5000 && \text{Divida entre 2}
\end{aligned}
$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

Si $x = 5000$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
4 + 3\log 2(5000) &= 4 + 3\log 10{,}000 \\
&= 4 + 3(4) \\
&= 16 \quad ✔
\end{aligned}
$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **43**

EJEMPLO 8 | Resolver algebraica y gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva algebraica y gráficamente la ecuación $\log(x + 2) + \log(x - 1) = 1$.

SOLUCIÓN 1: Algebraica

Primero combinamos los términos logarítmicos, usando las Leyes de Logaritmos.

$$
\begin{aligned}
\log[(x + 2)(x - 1)] &= 1 && \text{Ley 1} \\
(x + 2)(x - 1) &= 10 && \text{Forma exponencial (o eleve 10 a cada lado)} \\
x^2 + x - 2 &= 10 && \text{Expanda lado izquierdo} \\
x^2 + x - 12 &= 0 && \text{Reste 10} \\
(x + 4)(x - 3) &= 0 && \text{Factorice} \\
x = -4 \quad \text{o} \quad x &= 3
\end{aligned}
$$

VERIFIQUE SU RESPUESTA

$x = -4$:

$\log(-4 + 2) + \log(-4 - 1)$

$= \log(-2) + \log(-5)$

no definido ✗

$x = 3$:

$\log(3 + 2) + \log(3 - 1)$

$= \log 5 + \log 2 = \log(5 \cdot 2)$

$= \log 10 = 1$ ✔

Verificamos estas potenciales soluciones en la ecuación original y encontramos que $x = -4$ no es una solución (porque los logaritmos de números negativos no están definidos), pero $x = 3$ es una solución. (Vea *Verifique sus respuestas.*)

SOLUCIÓN 2: Gráfica

Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación:

$$\log(x + 2) + \log(x - 1) - 1 = 0$$

A continuación graficamos

$$y = \log(x + 2) + \log(x - 1) - 1$$

como en la Figura 2. Las soluciones son los puntos de intersección x de la gráfica. Entonces, la única solución es $x \approx 3$.

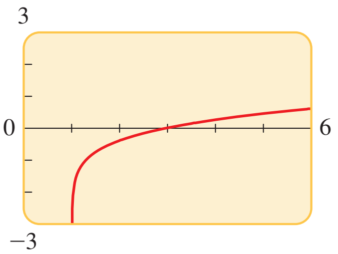


FIGURA 2

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **49**

En el Ejemplo 9 no es posible aislar x algebraicamente, de modo que debemos resolver gráficamente la ecuación.

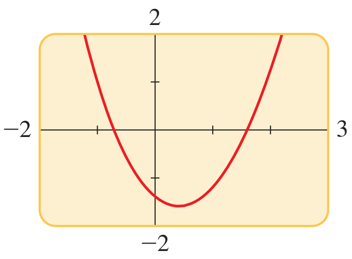


FIGURA 3

EJEMPLO 9 | Resolver gráficamente una ecuación logarítmica

Resuelva la ecuación $x^2 = 2 \ln(x + 2)$.

SOLUCIÓN Primero movemos todos los términos a un lado de la ecuación.

$$x^2 - 2 \ln(x + 2) = 0$$

Entonces graficamos

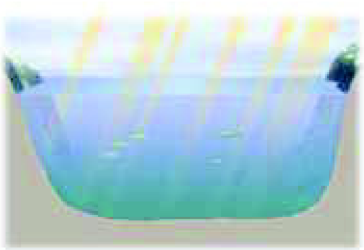
$$y = x^2 - 2 \ln(x + 2)$$

como en la Figura 3. Las soluciones son los puntos de intersección x de la gráfica. Si hacemos zoom en los puntos de intersección x, vemos que hay dos soluciones

$$x \approx -0.71 \qquad \text{y} \qquad x \approx 1.60$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

Se usan ecuaciones logarítmicas para determinar la cantidad de luz que llega a diversas profundidades en un lago. (Esta información ayuda a biólogos a determinar los tipos de fauna que un lago puede soportar.) Cuando pasa luz por el agua (u otros materiales transparentes como vidrio o plástico), parte de la luz es absorbida. Es fácil ver que cuanto más turbia sea el agua, más luz se absorbe. La relación exacta entre absorción de luz y la distancia que viaja la luz en un material está descrita en el siguiente ejemplo.



La intensidad de la luz en un lago disminuye con la profundidad.

EJEMPLO 10 | Transparencia de un lago

Si I_0 e I denotan la intensidad de luz antes y después de pasar por un material y x es la distancia (en pies) que la luz se desplaza en el material, entonces, de acuerdo con la **Ley de Beer-Lambert**,

$$-\frac{1}{k} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x$$

donde k es una constante que depende del tipo de material.

(a) Despeje I de la ecuación

(b) Para cierto lago, $k = 0.025$, y la intensidad de la luz es $I_0 = 14$ lumen (lm). Encuentre la intensidad de luz a una profundidad de 20 pies.

SOLUCIÓN

(a) Primero aislamos el término logarítmico.

$$-\frac{1}{k} \ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = x \qquad \text{Ecuación dada}$$

$$\ln\left(\frac{I}{I_0}\right) = -kx \qquad \text{Multiplique por } -k$$

$$\frac{I}{I_0} = e^{-kx} \qquad \text{Forma exponencial}$$

$$I = I_0 e^{-kx} \qquad \text{Multiplique por } I_0$$

(b) Encontramos I usando la fórmula de la parte (a).

$$\begin{aligned} I &= I_0 e^{-kx} && \text{De la parte (a)} \\ &= 14e^{(-0.025)(20)} && I_0 = 14,\ k = 0.025,\ x = 20 \\ &\approx 8.49 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

La intensidad de luz a una profundidad de 20 pies es alrededor de 8.5 lm.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **85**

Interés compuesto

Recuerde las fórmulas para interés que hallamos en la Sección 4.1. Si un principal P se invierte a una tasa de interés r durante un tiempo de t años, entonces la cantidad A de la inversión está dada por

$$A = P(1 + r) \qquad \text{Interés simple (para un año)}$$

$$A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} \qquad \text{Interés capitalizado } n \text{ veces por año}$$

$$A(t) = Pe^{rt} \qquad \text{Interés capitalizado continuamente}$$

Podemos usar logaritmos para determinar el tiempo que tarda el principal en aumentar a una cantidad dada.

EJEMPLO 11 | Hallar el tiempo para que una inversión se duplique

Una suma de \$5000 se invierte a una tasa de interés del 5% al año. Encuentre el tiempo necesario para que el dinero se duplique si el interés se capitaliza de acuerdo con el siguiente método.

(a) Semestralmente **(b)** Continuamente

SOLUCIÓN

(a) Usamos la fórmula para interés compuesto con $P = \$5000$, $A(t) = \$10{,}000$, $r = 0.05$ y $n = 2$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$5000\left(1 + \frac{0.05}{2}\right)^{2t} = 10{,}000 \qquad P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt} = A$$

$$(1.025)^{2t} = 2 \qquad \text{Divida entre 5000}$$

$$\log 1.025^{2t} = \log 2 \qquad \text{Tome log de cada lado}$$

$$2t \log 1.025 = \log 2 \qquad \text{Ley 3 (baje el exponente)}$$

$$t = \frac{\log 2}{2 \log 1.025} \qquad \text{Divida entre 2 log 1.025}$$

$$t \approx 14.04 \qquad \text{Calculadora}$$

El dinero se duplicará en 14.04 años.

(b) Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$5000$, $A(t) = \$10{,}000$ y $r = 0.05$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$5000e^{0.05t} = 10{,}000 \qquad Pe^{rt} = A$$

$$e^{0.05t} = 2 \qquad \text{Divida entre 5000}$$

$$\ln e^{0.05t} = \ln 2 \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$0.05t = \ln 2 \qquad \text{Propiedad de ln}$$

$$t = \frac{\ln 2}{0.05} \qquad \text{Divida entre 0.05}$$

$$t \approx 13.86 \qquad \text{Calculadora}$$

El dinero se duplicará en 13.86 años.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **75**

EJEMPLO 12 | Tiempo necesario para crecer una inversión

Una suma de \$1000 se invierte a una tasa de interés de 4% al año. Encuentre el tiempo necesario para que la cantidad crezca a \$4000 si el interés se capitaliza continuamente.

SOLUCIÓN Usamos la fórmula para interés capitalizado continuamente con $P = \$1000$, $A(t) = \$4000$ y $r = 0.04$ y de la ecuación exponencial resultante se despeja t.

$$1000e^{0.04t} = 4000 \qquad Pe^{rt} = A$$

$$e^{0.04t} = 4 \qquad \text{Divida entre 1000}$$

$$0.04t = \ln 4 \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$t = \frac{\ln 4}{0.04} \qquad \text{Divida entre 0.04}$$

$$t \approx 34.66 \qquad \text{Calculadora}$$

La cantidad será $4000 en 34 años y 8 meses.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

4.5 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Resolvamos la ecuación exponencial $2e^x = 50$.

(a) Primero, aislamos e^x para obtener la ecuación equivalente___.

(b) A continuación, tomamos ln de cada lado para obtener la ecuación equivalente _____.

(c) Ahora usamos una calculadora para hallar $x =$ _____.

2. Resolvamos la ecuación logarítmica

$\log 3 + \log(x - 2) = \log x$.

(a) Primero, combinamos los logaritmos para obtener la ecuación equivalente_______.

(b) A continuación, escribimos cada lado en forma exponencial para obtener la ecuación equivalente______.

(c) Ahora encontramos $x =$ _______.

HABILIDADES

3-28 ■ Encuentre la solución de la ecuación exponencial, redondeada a cuatro lugares decimales.

3. $10^x = 25$ **4.** $10^{-x} = 4$

5. $e^{-2x} = 7$ **6.** $e^{3x} = 12$

7. $2^{1-x} = 3$ **8.** $3^{2x-1} = 5$

9. $3e^x = 10$ **10.** $2e^{12x} = 17$

11. $e^{1-4x} = 2$ **12.** $4(1 + 10^{5x}) = 9$

13. $4 + 3^{5x} = 8$ **14.** $2^{3x} = 34$

15. $8^{0.4x} = 5$ **16.** $3^{x/14} = 0.1$

17. $5^{-x/100} = 2$ **18.** $e^{3-5x} = 16$

19. $e^{2x+1} = 200$ **20.** $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 75$

21. $5^x = 4^{x+1}$ **22.** $10^{1-x} = 6^x$

23. $2^{3x+1} = 3^{x-2}$ **24.** $7^{x/2} = 5^{1-x}$

25. $\dfrac{50}{1 + e^{-x}} = 4$ **26.** $\dfrac{10}{1 + e^{-x}} = 2$

27. $100(1.04)^{2t} = 300$ **28.** $(1.00625)^{12t} = 2$

29-36 ■ Resuelva la ecuación.

29. $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ **30.** $e^{2x} - e^x - 6 = 0$

31. $e^{4x} + 4e^{2x} - 21 = 0$ **32.** $e^x - 12e^{-x} - 1 = 0$

33. $x^2 2^x - 2^x = 0$ **34.** $x^2 10^x - x10^x = 2(10^x)$

35. $4x^3 e^{-3x} - 3x^4 e^{-3x} = 0$ **36.** $x^2 e^x + xe^x - e^x = 0$

37-54 ■ De la ecuación logarítmica despeje x.

37. $\ln x = 10$ **38.** $\ln(2 + x) = 1$

39. $\log x = -2$ **40.** $\log(x - 4) = 3$

41. $\log(3x + 5) = 2$ **42.** $\log_3(2 - x) = 3$

43. $4 - \log(3 - x) = 3$ **44.** $\log_2(x^2 - x - 2) = 2$

45. $\log_2 3 + \log_2 x = \log_2 5 + \log_2(x - 2)$

46. $2\log x = \log 2 + \log(3x - 4)$

47. $\log x + \log(x - 1) = \log(4x)$

48. $\log_5 x + \log_5(x + 1) = \log_5 20$

49. $\log_5(x + 1) - \log_5(x - 1) = 2$

50. $\log_3(x + 15) - \log_3(x - 1) = 2$

51. $\log_2 x + \log_2(x - 3) = 2$

52. $\log x + \log(x - 3) = 1$

53. $\log_9(x - 5) + \log_9(x + 3) = 1$

54. $\ln(x - 1) + \ln(x + 2) = 1$

55. ¿Para qué valor de x es verdadero lo siguiente?

$$\log(x + 3) = \log x + \log 3$$

56. ¿Para qué valor de x es verdadero que $(\log x)^3 = 3\log x$?

57. Despeje x: $2^{2/\log_5 x} = \frac{1}{16}$

58. Despeje x: $\log_2(\log_3 x) = 4$

59-66 ■ Use calculadora graficadora para hallar todas las soluciones de la ecuación, redondeadas a dos lugares decimales.

59. $\ln x = 3 - x$

60. $\log x = x^2 - 2$

61. $x^3 - x = \log(x + 1)$

62. $x = \ln(4 - x^2)$

63. $e^x = -x$

64. $2^{-x} = x - 1$

65. $4^{-x} = \sqrt{x}$

66. $e^{x^2} - 2 = x^3 - x$

67-70 ■ Resuelva la desigualdad.

67. $\log(x - 2) + \log(9 - x) < 1$

68. $3 \le \log_2 x \le 4$

69. $2 < 10^x < 5$

70. $x^2e^x - 2e^x < 0$

71-74 ■ Encuentre la función inversa de f.

71. $f(x) = 2^{2x}$

72. $f(x) = 3^{x+1}$

73. $f(x) = \log_2(x - 1)$

74. $f(x) = \log 3x$

APLICACIONES

75. Interés compuesto Un hombre invierte \$5000 en una cuenta que paga 8.5% de interés por año, capitalizado trimestralmente.
(a) Encuentre la cantidad después de 3 años.
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la inversión se duplique?

76. Interés compuesto Una mujer invierte \$6500 en una cuenta que paga 6% de interés por año, capitalizado continuamente.
(a) ¿Cuál es la cantidad después de 2 años?
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad sea \$8000?

77. Interés compuesto Encuentre el tiempo necesario para que una inversión de \$5000 crezca a \$8000 a una tasa de interés de 7.5% por año, capitalizado trimestralmente.

78. Interés compuesto Nancy desea invertir \$4000 en certificados de ahorro que pagan una tasa de interés de 9.75% por año, capitalizado semestralmente. ¿Cuánto tiempo debe ella escoger para ahorrar una cantidad de \$5000?

79. Duplicar una inversión ¿Cuánto tiempo tardará una inversión de \$1000 en duplicar su valor, si la tasa de interés es 8.5% por año, capitalizado continuamente?

80. Tasa de interés Una suma de \$1000 se invirtió durante 4 años, y el interés se capitalizó semestralmente. Si esta suma ascendió a \$1435.77 en el tiempo dado, ¿cuál fue la tasa de interés?

81. Desintegración radiactiva Una muestra de 15 g de yodo radiactivo se desintegra en forma tal que la masa restante después de t días está dada por $m(t) = 15e^{-0.087t}$, donde $m(t)$ se mide en gramos. ¿Después de cuántos días quedan sólo 5 gramos?

82. Paracaidismo La velocidad de un paracaidista t segundos después de saltar está dada por $v(t) = 80(1 - e^{-0.2t})$. ¿Después de cuántos segundos será de 70 pies/s la velocidad?

83. Población de peces En un pequeño lago se introduce cierta especie de peces. La población de peces está modelada por la función

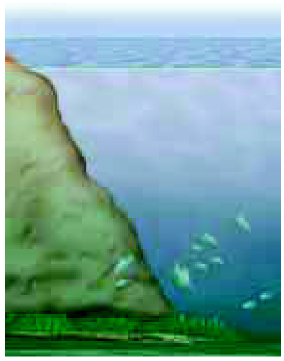
$$P = \frac{10}{1 + 4e^{-0.8t}}$$

donde P es el número de peces en miles y t se mide en años desde que el lago fue poblado por estos peces.
(a) Encuentre la población de peces después de 3 años.
(b) ¿Después de cuántos años la población de peces llegará a 5000?

84. Transparencia de un lago Científicos ambientalistas miden la intensidad de luz a varias profundidades en un lago, para hallar la "transparencia" del agua. Ciertos niveles de transparencia se requieren para la biodiversidad de la población macroscópica sumergida. En cierto lago, la intensidad de luz a una profundidad x está dada por

$$I = 10e^{-0.008x}$$

donde I se mide en lumen y x en pies.
(a) Encuentre la intensidad I a una profundidad de 30 pies.
(b) ¿A qué profundidad la intensidad de luz habrá bajado a $I = 5$?



85. Presión atmosférica La presión atmosférica P (en kilopascals, kPa) a una altitud h (en kilómetros, km) está regida por la fórmula

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{h}{k}$$

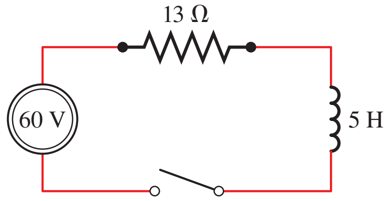
donde $k = 7$ y $P_0 = 100$ kPa son constantes.
(a) De la ecuación, despeje P.
(b) Use la parte (a) para hallar la presión P a una altitud de 4 km.

86. Enfriamiento de un motor Supongamos que el lector está manejando su auto en un frío día de invierno (20ºF al exterior) y el motor se sobrecalienta (a unos 220ºF). Cuando se estaciona, el motor empieza a enfriarse. La temperatura T del motor t minutos después de estacionarlo satisface la ecuación

$$\ln\left(\frac{T - 20}{200}\right) = -0.11t$$

(a) De la ecuación, despeje T.
(b) Use la parte (a) para hallar la temperatura del motor después de 20 minutos $(t = 20)$.

87. Circuitos eléctricos Un circuito eléctrico contiene una batería que produce un voltaje de 60 volts (V), un resistor con una resistencia de 13 ohms (Ω), y un inductor con una inductancia de 5 henrys (H), como se muestra en la figura. Usando cálculo, se puede demostrar que la corriente $I = I(t)$ (en amperes, A) t segundos después de cerrar el interruptor es $I = \frac{60}{13}(1 - e^{-13t/5})$.
(a) Use la ecuación para expresar el tiempo t como función de la corriente I.
(b) ¿Después de cuántos segundos será la corriente de 2 A?



88. Curva de aprendizaje Una *curva de aprendizaje* es una gráfica de una función $P(t)$ que mide el rendimiento de alguien que aprende una disciplina como función del tiempo t de capacitación. Al principio, la rapidez de aprendizaje es alta. Entonces, a medida que el rendimiento aumenta y se aproxima a un valor máximo M, la rapidez de aprendizaje disminuye. Se ha encontrado que la función

$$P(t) = M - Ce^{-kt}$$

donde k y C son constantes positivas y $C < M$ es un modelo razonable para aprendizaje.

(a) Exprese el tiempo de aprendizaje t como función del nivel de rendimiento P.

(b) Para un atleta de salto con pértiga en entrenamiento, la curva de aprendizaje está dada por

$$P(t) = 20 - 14e^{-0.024t}$$

donde $P(t)$ es la altura que él es capaz de saltar con pértiga después de t meses. ¿Después de cuántos meses de aprendizaje podrá saltar 12 pies?

(c) Trace una gráfica de la curva de aprendizaje de la parte (b).

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

89. Estimar una solución Sin resolver realmente la ecuación, encuentre dos números enteros entre los cuales debe estar la solución de $9^x = 20$. Haga lo mismo para $9^x = 100$. Explique cómo ha llegado a esa conclusión.

90. Una ecuación sorprendente Tome logaritmos para demostrar que la ecuación

$$x^{1/\log x} = 5$$

no tiene solución. ¿Para qué valores de k tiene solución la ecuación

$$x^{1/\log x} = k?$$

¿Qué nos dice esto acerca de la gráfica de la función $f(x) = x^{1/\log x}$? Confirme su respuesta usando una calculadora graficadora.

91. Ecuaciones disfrazadas Cada una de estas ecuaciones se puede transformar en una ecuación de tipo lineal o cuadrático si se aplica la sugerencia. Resuelva cada ecuación.

(a) $(x - 1)^{\log(x-1)} = 100(x - 1)$ [Tome log de cada lado.]

(b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$ [Cambie todos los log a base 2.]

(c) $4^x - 2^{x+1} = 3$ [Escriba como cuadrática en 2^x.]

4.6 MODELADO CON FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación) ▶ Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento relativa) ▶ Desintegración radiactiva ▶ Ley de Newton de Enfriamiento ▶ Escalas logarítmicas

Un gran número de procesos que se presentan en la naturaleza, por ejemplo el crecimiento poblacional, la desintegración radiactiva, la difusión de calor y otros muchos, se pueden modelar usando funciones exponenciales. Se usan funciones logarítmicas en modelos para la intensidad de sonidos, la intensidad de terremotos y otros numerosos fenómenos. En esta sección estudiamos modelos exponenciales y logarítmicos.

▼ Crecimiento exponencial (tiempo de duplicación)

Supóngase que empezamos con una sola bacteria, que se divide cada hora. Después de una hora tenemos 2 bacterias, después de dos horas tenemos 2^2 o sea 4 bacterias, después de tres horas tenemos 2^3 o sea 8 bacterias, y así sucesivamente (vea Figura 1). Vemos que podemos modelar la población de bacterias después de t horas, por medio de $f(t) = 2^t$.

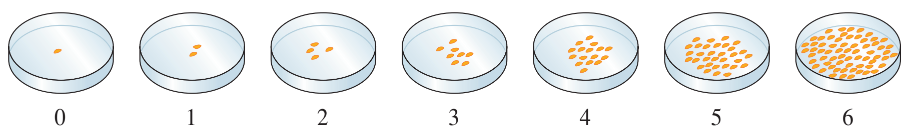


FIGURA 1 Población de bacterias

Si empezamos con 10 de estas bacterias, entonces la población está modelada por $f(t) = 10 \cdot 2^t$. Una especie de bacteria, de crecimiento más lento, se duplica cada 3 horas; en este caso la población está modelada por $f(t) = 10 \cdot 2^{t/3}$. En general, tenemos lo siguiente.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TIEMPO DE DUPLICACIÓN)

Si el tamaño inicial de una población es n_0 y el tiempo de duplicación es a, entonces el tamaño de la población en el tiempo t es

$$n(t) = n_0 2^{t/a}$$

donde a y t se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etcétera).

EJEMPLO 1 | Población de bacterias

Bajo condiciones ideales, cierta población de bacterias se duplica cada tres horas. Inicialmente hay 1000 en una colonia.

(a) Encuentre un modelo para la población de bacterias después de t horas.

(b) ¿Cuántas bacterias hay en la colonia después de 15 horas?

(c) ¿Cuándo llegará a 100,000 el número de bacterias?

SOLUCIÓN

(a) La población en el tiempo t está modelada por

$$n(t) = 1000 \cdot 2^{t/3}$$

donde t se mide en horas.

(b) Después de 15 horas el número de bacterias es

$$n(15) = 1000 \cdot 2^{15/3} = 32{,}000$$

(c) Hacemos $n(t) = 100{,}000$ en el modelo que encontramos en la parte (a) y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$\begin{aligned}
100{,}000 &= 1000 \cdot 2^{t/3} && n(t) = 1000 \cdot 2^{t/3} \\
100 &= 2^{t/3} && \text{Divida entre 1000} \\
\log 100 &= \log 2^{t/3} && \text{Tome log de cada lado} \\
2 &= \frac{t}{3} \log 2 && \text{Propiedades de log} \\
t &= \frac{6}{\log 2} \approx 19.93 && \text{Despeje } t
\end{aligned}$$

Busque guías para trabajar con cifras significativas, vea el Apéndice: *Calculations and Significant Figures* (Cálculos y Cifras Significativas).

El nivel de bacterias llega a 100,000 en unas 20 horas.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **1** ■

EJEMPLO 2 | Población de conejos

Cierta clase de conejos fue introducida en una pequeña isla hace 8 meses. La población actual de conejos en la isla se estima en 4100 y se duplica cada 3 meses.

(a) ¿Cuál fue el tamaño inicial de la población de conejos?

(b) Estime la población a un año después que los conejos fueron introducidos en la isla.

(c) Trace una gráfica de la población de conejos.

SOLUCIÓN

(a) El tiempo de duplicación es $a = 3$, de modo que la población en el tiempo t es

$$n(t) = n_0 2^{t/3} \qquad \text{Modelo}$$

donde n_0 es la población inicial. Como la población es 4100 cuando t es 8 meses, tenemos

$$\begin{aligned} n(8) &= n_0 2^{8/3} && \text{Del modelo} \\ 4100 &= n_0 2^{8/3} && \text{Porque } n(8) = 4100 \\ n_0 &= \frac{4100}{2^{8/3}} && \text{Divida entre } 2^{8/3} \text{ e intercambie lados} \\ n_0 &\approx 645 && \text{Calcule} \end{aligned}$$

Entonces estimamos que 645 conejos fueron introducidos en la isla.

(b) De la parte (a) sabemos que la población inicial es $n_0 = 645$, de modo que podemos modelar la población después de t meses por medio de

$$n(t) = 645 \cdot 2^{t/3} \qquad \text{Modelo}$$

Después de un año $t = 12$, y entonces

$$n(12) = 645 \cdot 2^{12/3} \approx 10{,}320$$

Por lo tanto, después de un año, habría unos 10,000 conejos.

(c) Primero observamos que el dominio es $t \geq 0$. La gráfica se muestra en la Figura 2.

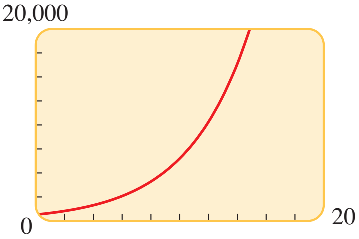


FIGURA 2 $n(t) = 645 \cdot 2^{t/3}$

Busque guías para trabajar con cifras significativas, vea el Apéndice: *Calculations and Significant Figures* (Cálculos y Cifras Significativas).

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

Crecimiento exponencial (tasa de crecimiento relativa)

Hemos utilizado una función exponencial con base 2 para modelar el crecimiento poblacional (en términos del tiempo de duplicación). También modelaríamos la misma población con una función exponencial con base 3 (en términos del tiempo de triplicación). De hecho, podemos hallar un modelo exponencial con cualquier base. Si usamos la base e, obtenemos el siguiente modelo de una población en términos de la **tasa de crecimiento relativa** r: la tasa de crecimiento poblacional expresada como una proporción de la población en cualquier momento. Por ejemplo, si $r = 0.02$, entonces en cualquier tiempo t la tasa de crecimiento es 2% de la población en el tiempo t.

CRECIMIENTO EXPONENCIAL (TASA DE CRECIMIENTO RELATIVA)

Una población que experimenta un crecimiento exponencial aumenta de acuerdo con el modelo

$$n(t) = n_0 e^{rt}$$

donde
$n(t)$ = población en el tiempo t
n_0 = tamaño inicial de la población
r = tasa de crecimiento relativa (expresada como una proporción de la población)
t = tiempo

Observe que la fórmula para el crecimiento poblacional es la misma que para interés capitalizado continuamente. De hecho, el mismo principio funciona en ambos casos: el crecimiento de una población (o una inversión) por período es proporcional al tamaño de la población (o la cantidad de la inversión). Una población de 1,000,000 aumentará más en un año que una población de 1000; en exactamente la misma forma, una inversión de \$1,000,000 aumentará más en un año que una inversión de \$1000.

En los siguientes ejemplos suponemos que las poblaciones crecen exponencialmente.

EJEMPLO 3 | Predicción del tamaño de una población

La cantidad inicial de bacterias en un cultivo es 500. Posteriormente, un biólogo hace un conteo de muestra de bacterias del cultivo y encuentra que la tasa de crecimiento relativa es 40% por hora.

(a) Encuentre una función que modele el número de bacterias después de t horas.

(b) ¿Cuál es la cantidad estimada después de 10 horas?

(c) ¿Cuándo llegará a 80,000 la cantidad de bacterias?

(d) Trace la gráfica de la función $n(t)$.

SOLUCIÓN

(a) Usamos el modelo de crecimiento exponencial con $n_0 = 500$ y $r = 0.4$ para obtener

$$n(t) = 500e^{0.4t}$$

donde t se mide en horas.

(b) Usando la función de la parte (a), encontramos que la cantidad de bacterias después de 10 horas es

$$n(10) = 500e^{0.4(10)} = 500e^4 \approx 27{,}300$$

(c) Hacemos $n(t) = 80{,}000$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t:

$$80{,}000 = 500 \cdot e^{0.4t} \qquad n(t) = 500 \cdot e^{0.4t}$$

$$160 = e^{0.4t} \qquad \text{Divida entre 500}$$

$$\ln 160 = 0.4t \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$t = \frac{\ln 160}{0.4} \approx 12.68 \qquad \text{Despeje } t$$

El nivel de bacterias llega a 80,000 en unas 12.7 horas.

(d) La gráfica se muestra en la Figura 3.

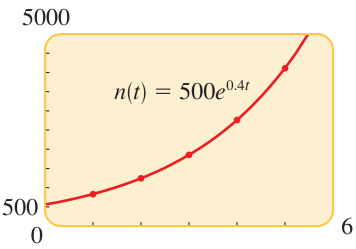


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 5

EJEMPLO 4 | Comparación de diferentes tasas de crecimiento poblacional

El crecimiento relativo de la población mundial ha estado bajando en las últimas décadas, de 2% en 1995 a 1.3% en 2006.

En el año 2000 la población mundial era de 6100 millones, y la tasa de crecimiento relativa era de 1.4% por año. Se dice que una tasa del 1.0% haría una diferencia importante en la población total en sólo unas pocas décadas. Pruebe esta frase estimando la población mundial del año 2050 usando una tasa de crecimiento relativa de (a) 1.4% al año y (b) 1.0% al año.

Grafique las funciones de población para los siguientes 100 años para las dos tasas de crecimiento relativas en el mismo rectángulo de observación.

Únicamente de pie

La población mundial era aproximadamente de 6100 millones en 2000 y estaba creciendo 1.4% al año. Suponiendo que cada persona ocupe un promedio de 4 pies^2 de la superficie terrestre, el modelo exponencial para crecimiento poblacional proyecta que para el año 2801 habrá espacio únicamente para estar de pie. (El área total de superficie terrestre del mundo es alrededor de 1.8×10^{15} pies^2.)

SOLUCIÓN

(a) Con el modelo de crecimiento exponencial tenemos

$$n(t) = 6.1e^{0.014t}$$

donde $n(t)$ se mide en miles de millones y t se mide en años desde 2000. Como el año 2050 es 50 años después del 2000, encontramos que

$$n(50) = 6.1e^{0.014(50)} = 6.1e^{0.7} \approx 12.3$$

La población estimada en el año 2050 es 12,300 millones.

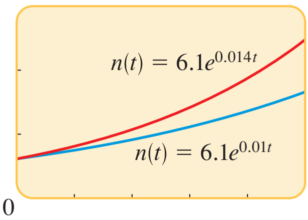


FIGURA 4

(b) Usamos la función

$$n(t) = 6.1e^{0.010t}$$

y encontramos

$$n(50) = 6.1e^{0.010(50)} = 6.1e^{0.50} \approx 10.1$$

La población estimada en el año 2050 es alrededor de 10,100 millones.

Las gráficas de la Figura 4 muestran que un pequeño cambio en la tasa de crecimiento relativa hará, con el tiempo, una gran diferencia en el tamaño de la población.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

EJEMPLO 5 | Expresar el modelo en términos de *e*

Un cultivo se inicia con 10,000 bacterias, y el número se duplica a cada 40 minutos.

(a) Encuentre una función $n(t) = n_0 2^{t/a}$ que modele el número de bacterias después de t minutos.

(b) Encuentre una función $n(t) = n_0 e^{rt}$ que modele el número de bacterias después de t minutos.

(c) Trace una gráfica del número de bacterias en el tiempo t.

SOLUCIÓN

(a) La población inicial es $n_0 = 10{,}000$. El tiempo de duplicación es $a = 40$ min $= 2/3$ h. Como $1/a = 3/2 = 1.5$, el modelo es

$$n(t) = 10{,}000 \cdot 2^{1.5t}$$

(b) La población inicial es $n_0 = 10{,}000$. Necesitamos hallar la tasa de crecimiento relativa r. Como hay 20,000 bacterias cuando $t = 2/3$ h, tenemos

$$\begin{aligned} 20{,}000 &= 10{,}000e^{r(2/3)} && n(t) = 10{,}000e^{rt} \\ 2 &= e^{r(2/3)} && \text{Divida entre 10,000} \\ \ln 2 &= \ln e^{r(2/3)} && \text{Tome ln de cada lado} \\ \ln 2 &= r(2/3) && \text{Propiedad de ln} \\ r &= \frac{3 \ln 2}{2} \approx 1.0397 && \text{Despeje } r \end{aligned}$$

Ahora que sabemos la tasa de crecimiento relativa r, podemos hallar el modelo:

$$n(t) = 10{,}000e^{1.0397t}$$

(c) Podemos graficar el modelo de la parte (a) o el de la parte (b). Las gráficas son idénticas. Vea la Figura 5.

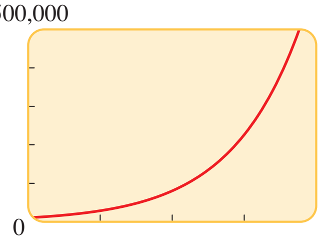


FIGURA 5 Gráficas de $y = 10{,}000 \cdot 2^{1.5t}$ y $y = 10{,}000e^{1.0397t}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

Desintegración radiactiva

Las sustancias radiactivas se desintegran al emitir radiación espontáneamente. La rapidez de desintegración es proporcional a la masa de la sustancia. Esto es análogo al crecimiento poblacional excepto que la masa *decrece*. Los físicos expresan la rapidez de desintegración en términos de **vida media**. Por ejemplo, la vida media del radio 226 es 1600 años, de modo que una muestra de 100 g se desintegra a 50 g (o 1 × 100 g) en 1600 años, entonces 25 g (o $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 100$ g) en 3200 años, y así sucesivamente. En general, para una

Las vidas medias de **elementos radiactivos varían** de muy largas a muy cortas. A continuación veamos unos ejemplos.

Elemento	**Vida media**
Torio-23	14.5 mil millones de años
Uranio-235	4.5 mil millones de años
Torio-230	80,000 años
Plutonio-239	24,360 años
Carbono-1	5,730 años
Radio-226	1,600 años
Cesio-137	30 años
Estroncio -90	28 años
Polonio-210	140 días
Torio-234	25 días
Yodo-135	8 días
Radón-222	3.8 días
Plomo-211	3.6 minutos
Criptón-91	10 segundos

sustancia radiactiva con masa m_0 y vida media h, la cantidad restante en el tiempo t está modelada por

$$\boxed{m(t) = m_0 2^{-t/h}}$$

donde h y t se miden en las mismas unidades de tiempo (minutos, horas, días, años, etcétera).

Para expresar este modelo en la forma $m(t) = m_0 e^{rt}$, necesitamos hallar la tasa relativa de desintegración r. Como h es la vida media, tenemos

$$m(t) = m_0 e^{-rt} \qquad \text{Modelo}$$

$$\frac{m_0}{2} = m_0 e^{-rh} \qquad h \text{ es la vida media}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-rh} \qquad \text{Divida entre } m_0$$

$$\ln \frac{1}{2} = -rh \qquad \text{Tome ln de cada lado}$$

$$r = \frac{\ln 2}{h} \qquad \text{Despeje } r$$

Esta última ecuación nos permite hallar la tasa r a partir de la vida media h.

MODELO DE DESINTEGRACIÓN RADIACTIVA

Si m_0 es la masa inicial de una sustancia radiactiva con vida media h, entonces la masa restante en el tiempo t está modelada por la función

$$m(t) = m_0 e^{-rt}$$

donde $r = \dfrac{\ln 2}{h}$.

EJEMPLO 6 | Desintegración radiactiva

El polonio 210 (^{210}Po) tiene una vida media de 140 días. Suponga que una muestra de esta sustancia tiene una masa de 300 mg.

(a) Encuentre una función $m(t)= m_0 2^{-t/h}$ que modele la masa restante después de t días.

(b) Encuentre una función $m(t)= m_0 e^{-rt}$ que modele la masa restante después de t días.

(c) Encuentre la masa restante después de un año.

(d) ¿Cuánto tiempo tomará la muestra en desintegrarse a una masa de 200 mg?

(e) Trace una gráfica de la masa de la muestra como función del tiempo.

SOLUCIÓN

(a) Tenemos $m_0 = 300$ y $h = 140$, de modo que la cantidad restante después de t días es

$$m(t) = 300 \cdot 2^{-t/140}$$

(b) Tenemos $m_0 = 300$ y $r = \ln 2/140 \approx -0.00495$, de modo que la cantidad restante después de t días es

$$m(t) = 300 \cdot e^{-0.00495t}$$

En las partes (c) y (d) también podemos usar el modelo encontrado en la parte (a). Compruebe que el resultado sea el mismo usando cualquiera de estos dos modelos.

(c) Usamos la función que encontramos en la parte (a) con $t = 365$ (un año)

$$m(365) = 300e^{-0.00495(365)} \approx 49.256$$

Entonces, aproximadamente 49 mg de ^{210}Po quedarán después de un año.

Desechos radiactivos

Se producen peligrosos isótopos radiactivos siempre que ocurre una reacción nuclear, ya sea como resultado de una prueba de una bomba atómica, un accidente nuclear como el de Chernobyl en 1986, o la producción sin incidentes de electricidad en una planta generadora nuclear.

Un material que se produce en bombas atómicas es el isótopo estroncio 90 (^{90}Sr), con una vida media de 28 años. Éste se deposita como el calcio en el tejido óseo humano, donde puede causar leucemia y otros tipos de cáncer. No obstante, en las décadas transcurridas desde que dejaron de realizarse pruebas atmosféricas de armas nucleares, los niveles del ^{90}S en el ambiente han bajado a un nivel que ya no plantea una amenaza para la salud.

Las plantas nucleares para generación de energía eléctrica producen plutonio radiactivo 239 (^{239}Pu), que tiene una vida media de 24,360 años. Debido a su larga vida media, el ^{239}Pu podría representar una amenaza para el ambiente durante miles de años, por lo cual debe tenerse gran cuidado para eliminarlo en forma apropiada. La dificultad de garantizar la seguridad del desecho radiactivo eliminado es una razón por la que las plantas nucleares para generación de electricidad siguen siendo controvertidas.

(d) Usamos la función que encontramos en la parte (a) con $m(t) = 200$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$\begin{aligned}
300e^{-0.00495t} &= 200 && m(t) = m_0e^{-rt} \\
e^{-0.00495t} &= \tfrac{2}{3} && \text{Divida entre 300} \\
\ln e^{-0.00495t} &= \ln \tfrac{2}{3} && \text{Tome ln de cada lado} \\
-0.00495t &= \ln \tfrac{2}{3} && \text{Propiedad de ln} \\
t &= -\frac{\ln \frac{2}{3}}{0.00495} && \text{Despeje } t \\
t &\approx 81.9 && \text{Calculadora}
\end{aligned}$$

El tiempo necesario para que la muestra se desintegre a 200 mg es de unos 82 días.

(e) Podemos graficar el modelo de la parte (a) o el de la parte (b). Las gráficas son idénticas. Vea Figura 6.

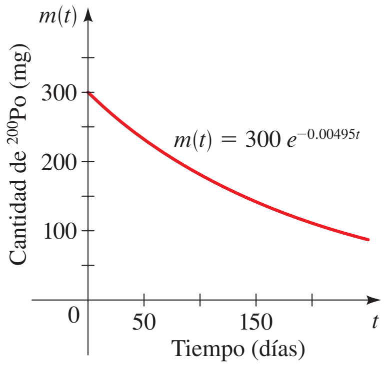


FIGURA 6

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **17**

Ley de Newton de Enfriamiento

La Ley de Newton de Enfriamiento dice que la rapidez a la que un cuerpo se enfría es proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y su entorno, siempre que la diferencia de temperatura no sea demasiado grande. Mediante cálculo, el siguiente modelo puede ser deducido a partir de esta ley.

LEY DE NEWTON DE ENFRIAMIENTO

Si D_0 es la diferencia inicial de temperatura entre un cuerpo y su entorno, y si su entorno tiene temperatura T_s, entonces la temperatura del cuerpo en el tiempo t está modelada por la función

$$T(t) = T_s + D_0e^{-kt}$$

donde k es una constante positiva que depende del tipo de cuerpo.

EJEMPLO 7 | Ley de Newton de Enfriamiento

Una taza de café tiene una temperatura de 200ºF y se coloca en un cuarto que tiene una temperatura de 70ºF. Después de 10 minutos, la temperatura del café es 150ºF.

(a) Encuentre una función que modele la temperatura del café en el tiempo t.

(b) Encuentre la temperatura del café después de 15 minutos.

(c) ¿Cuándo se habrá enfriado el café a 100ºF?

(d) Haga una gráfica de la función de temperatura.

SOLUCIÓN

(a) La temperatura del cuarto es $T_s = 70$ºF, y la diferencia inicial de temperatura es

$$D_0 = 200 - 70 = 130ºF$$

Entonces, por la Ley de Newton de Enfriamiento, la temperatura después de t minutos está modelada con la función

$$T(t) = 70 + 130e^{-kt}$$

Necesitamos hallar la constante k asociada con esta taza de café. Para hacer esto, usamos el hecho de que cuando $t = 10$, la temperatura $T(10) = 150$. Por lo tanto, tenemos

$$\begin{aligned} 70 + 130e^{-10k} &= 150 && T_s + D_0e^{-kt} = T(t) \\ 130e^{-10k} &= 80 && \text{Reste 70} \\ e^{-10k} &= \tfrac{8}{13} && \text{Divida entre 130} \\ -10k &= \ln \tfrac{8}{13} && \text{Tome ln de cada lado} \\ k &= -\tfrac{1}{10} \ln \tfrac{8}{13} && \text{Despeje } k \\ k &\approx 0.04855 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de k en la expresión para $T(t)$, obtenemos

$$T(t) = 70 + 130e^{-0.04855t}$$

(b) Usamos la función que encontramos en la parte (a) con $t = 15$.

$$T(15) = 70 + 130e^{-0.04855(15)} \approx 133°F$$

(c) Usamos la función que hallamos en la parte (a) con $T(t) = 100$ y de la ecuación exponencial resultante despejamos t.

$$\begin{aligned} 70 + 130e^{-0.04855t} &= 100 && T_s + D_0e^{-kt} = T(t) \\ 130e^{-0.04855t} &= 30 && \text{Reste 70} \\ e^{-0.04855t} &= \tfrac{3}{13} && \text{Divida entre 130} \\ -0.04855t &= \ln \tfrac{3}{13} && \text{Tome ln de cada lado} \\ t &= \frac{\ln \frac{3}{13}}{-0.04855} && \text{Despeje } t \\ t &\approx 30.2 && \text{Calculadora} \end{aligned}$$

El café se habrá enfriado a 100ºF después de media hora.

(d) La gráfica de la función de temperatura aparece en la Figura 7. Observe que la recta $t = 70$ es una asíntota horizontal. (¿Por qué?)

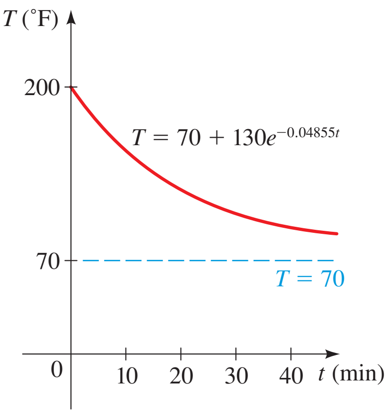


FIGURA 7 Temperatura del café después de 7 minutos

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

Escalas logarítmicas

Cuando una cantidad física varía con un margen muy grande, a veces es conveniente tomar su logaritmo para tener un conjunto de números más manejable. Estudiamos tres de estas situa-

pH para algunas sustancias comunes

Sustancia	pH
Leche de magnesia	10.5
Agua de mar	8.0–8.4
Sangre humana	7.3–7.5
Galletas	7.0–8.5
Maíz molido	6.9–7.9
Leche de vaca	6.4–6.8
Espinacas	5.1–5.7
Tomates	4.1–4.4
Naranjas	3.0–4.0
Manzanas	2.9–3.3
Limones	1.3–2.0
Ácido de batería	1.0

ciones: la escala pH, que mide acidez; la escala Richter, que mide la intensidad de terremotos, y la escala de decibeles, que mide la intensidad de sonidos. Otras cantidades que se miden en escalas logarítmicas son la intensidad de luz, capacidad de información, y radiación.

La escala pH Los químicos medían la acidez de una solución dando su concentración de iones de hidrógeno hasta que Soren Peter Lauritz Sorensen, en 1909, propuso una medida más cómoda. Él definió

$$\boxed{\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+]}$$

donde $[\mathrm{H}^+]$ es la concentración de iones de hidrógeno medida en moles por litro (M). Hizo esto para evitar números muy pequeños y exponentes negativos. Por ejemplo,

$$\text{si} \qquad [\mathrm{H}^+] = 10^{-4}\,\mathrm{M}, \qquad \text{entonces} \qquad \mathrm{pH} = -\log_{10}(10^{-4}) = -(-4) = 4$$

Las soluciones con un pH de 7 se definen como *neutras*, aquellas con pH < 7 son *ácidas*, y las que tengan pH > 7 son *básicas*. Observe que cuando el pH aumenta en una unidad, el $[\mathrm{H}^+]$ disminuye en un factor de 10.

EJEMPLO 8 | Escala de pH y concentración de iones de hidrógeno

(a) La concentración de iones de hidrógeno de una muestra de sangre humana se midió y resultó ser $[\mathrm{H}^+] = 3.16 \times 10^{-18}$ M. Encuentre el pH y clasifique la sangre como ácida o básica.

(b) La lluvia más ácida jamás medida ocurrió en Escocia en 1974; su pH fue de 2.4. Encuentre la concentración de iones de hidrógeno.

SOLUCIÓN

(a) Una calculadora da

$$\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H}^+] = -\log(3.16 \times 10^{-8}) \approx 7.5$$

Como esto es mayor a 7, la sangre es básica.

(b) Para hallar la concentración de iones de hidrógeno, necesitamos despejar $[\mathrm{H}^+]$ de la ecuación logarítmica

$$\log[\mathrm{H}^+] = -\mathrm{pH}$$

Por lo tanto, la escribimos en forma exponencial.

$$[\mathrm{H}^+] = 10^{-\mathrm{pH}}$$

En este caso pH $= 2.4$, por lo cual

$$[\mathrm{H}^+] = 10^{-2.4} \approx 4.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{M}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **29**

Terremotos más fuertes

Lugar	Fecha	Magnitud
Chile	1960	9.5
Alaska	1964	9.2
Sumatra	2004	9.1
Alaska	1957	9.1
Kamchatka	1952	9.0
Chile	2010	8.8
Ecuador	1906	8.8
Alaska	1965	8.7
Sumatra	2005	8.7
Tibet	1950	8.6
Kamchatka	1923	8.5
Indonesia	1938	8.5
Islas Kuriles	1963	8.5

La escala Richter En 1935, el geólogo estadounidense Charles Richter (1900-1984) definió la magnitud M de un terremoto como

$$\boxed{M = \log \frac{I}{S}}$$

donde I es la intensidad del terremoto, medida por la amplitud de la lectura de un sismógrafo tomada a 100 km del epicentro del terremoto, y S es la intensidad de un terremoto "estándar" (cuya amplitud es 1 micrón $= 10^{-4}$ cm). La magnitud de un terremoto estándar es

$$M = \log \frac{S}{S} = \log 1 = 0$$

Richter estudió numerosos terremotos que ocurrieron entre 1900 y 1950. El más grande tuvo una magnitud de 8.9 en la escala de Richter y, el más pequeño, tuvo magnitud 0. Esto corresponde a una relación de intensidades de 800,000,000, de modo que la escala de Richter da números más manejables para trabajar. Por ejemplo, un terremoto de magnitud 6 es diez veces más fuerte que uno de magnitud 5.

EJEMPLO 9 | Magnitud de terremotos

El terremoto de 1906 en San Francisco tuvo una magnitud estimada de 8.3 en la escala de Richter. En el mismo año ocurrió un poderoso terremoto en la frontera entre Colombia y Ecuador, que fue cuatro veces más intenso. ¿Cuál fue la magnitud del temblor entre Colombia y Ecuador en la escala de Richter?

SOLUCIÓN Si I es la intensidad del terremoto de San Francisco, entonces por la definición de magnitud tenemos

$$M = \log \frac{I}{S} = 8.3$$

La intensidad del terremoto entre Colombia y Ecuador fue $4I$, de modo que su magnitud fue

$$M = \log \frac{4I}{S} = \log 4 + \log \frac{I}{S} = \log 4 + 8.3 \approx 8.9$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**


© Roger Ressmeyer/CORBIS

EJEMPLO 10 | Intensidad de terremotos

El terremoto de 1989 de Loma Prieta que sacudió San Francisco tuvo una magnitud de 7.1 en la escala de Richter. ¿Cuántas veces más intenso fue el temblor de 1906 (vea Ejemplo 9) que el evento de 1989?

SOLUCIÓN Si I_1 e I_2 son las intensidades de los terremotos de 1906 y 1989, entonces nos piden hallar I_1/I_2. Para relacionar esto con la definición de magnitud, dividimos el numerador y el denominador entre S.

$$\log \frac{I_1}{I_2} = \log \frac{I_1/S}{I_2/S}$$ Divida numerador y denominador entre S

$$= \log \frac{I_1}{S} - \log \frac{I_2}{S}$$ Ley 2 de logaritmos

$$= 8.3 - 7.1 = 1.2$$ Definición de magnitud de terremotos

Por lo tanto,

$$\frac{I_1}{I_2} = 10^{\log(I_1/I_2)} = 10^{1.2} \approx 16$$

El terremoto de 1906 fue unas 16 veces más intenso que el de 1989.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **37**

Escala de decibeles Nuestro oído es sensible a una gama extremadamente grande de intensidades de sonido. Tomamos como referencia la intensidad $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 (watts por metro cuadrado) a una frecuencia de 1000 hertz, que mide un sonido que es apenas audible (el umbral de escucha). La sensación psicológica de intensidad varía con el logaritmo de la intensidad (Ley de Weber-Fechner), de modo que el **nivel de intensidad** B, medido en decibeles, está definido como

$$\boxed{B = 10 \log \frac{I}{I_0}}$$