INECUACIONES RACIONALES O FRACCIONARIAS

Una inecuación fraccionaria en una incógnita es de la forma:

$$\boxed{\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad ó \quad \frac{P(x)}{Q(x)} < 0, \quad Q(x) \neq 0}$$

donde P(x) y Q(x) son monomios o polinomios diferente de cero.

Para resolver una inecuación fraccionaria debe tenerse en cuenta que las inecuaciones:

$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ o $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, son equivalentes a las inecuaciones

$P(x).Q(x) > 0$ ó $P(x).Q(x) < 0$ es decir: Sí $Q(x) \neq 0 \Rightarrow Q^2(x) > 0$, de donde se tiene:

$$\text{Sí } \frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x).Q^2(x)}{Q(x)} > 0.Q^2(x) \quad \Rightarrow \quad P(x).Q(x) > 0$$

$$\text{Sí } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{P(x).Q^2(x)}{Q(x)} < 0.Q^2(x) \quad \Rightarrow \quad P(x).Q(x) < 0$$

Ejemplo.- Resolver las inecuaciones siguientes:

1. $$\frac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x-5)(x+7)} > 0$$

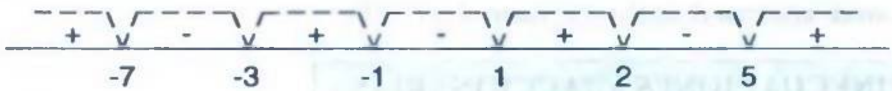
Solución

La inecuación $\dfrac{(x^2-1)(x+3)(x-2)}{(x-5)(x+7)} > 0$, es equivalente a la siguiente inecuación.

$(x^2-1)(x+3)(x-2)(x-5)(x+7) > 0$, para $x \neq -7, 5$

ahora hallaremos las raíces de la ecuación $(x^2-1)(x+3)(x-2)(x-5)(x+7) = 0$.

De donde $r_1 = -7$, $r_2 = -3$, $r_3 = -1$, $r_4 = 1$, $r_5 = 2$, $r_6 = 5$, que son reales diferentes.



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+) es decir: $x \in$ <-∞,-7> U <-3,-1> U <1,2> U <5,+∞>

2 $\dfrac{x-2}{x+3} < \dfrac{x+1}{x}$

Solución

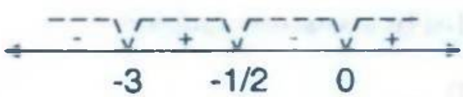
La inecuación dada se expresa en la forma, mayor que cero o menor que cero, es decir:

$\dfrac{x-2}{x+3} - \dfrac{x+1}{x} < 0 \Rightarrow \dfrac{x(x-2)-(x+1)(x+3)}{x(x+3)} < 0$, de donde:

$\dfrac{-6x-3}{x(x+3)} < 0 \Rightarrow \dfrac{2x+1}{x(x+3)} > 0$, que es equivalente a:

$(2x+1)(x+3)x > 0$, para $x \neq -3,0$ ahora encontramos las raíces de la ecuación.

$(2x+1)(x+3)x = 0$, de donde $r_1 = -3$, $r_2 = -\dfrac{1}{2}$, $r_3 = 0$



Como la inecuación es de la forma: $(2x+1)(x+3)x > 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (+), es decir:

$$x \in \; < -3, \frac{1}{2} > U < 0, +\infty >$$

③ $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} < \dfrac{2x}{x+1}$

Solución

La inecuación dada expresaremos en la forma: $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x-1}{x} - \dfrac{2x}{x+1} < 0$

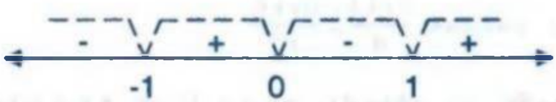
$\dfrac{x^2(x+1)+(x-1)(x-1)(x+1)-2x^2(x-1)}{(x-1)x(x+1)} < 0$, simplificando

$\dfrac{2x^2-x+1}{(x-1)x(x+1)} < 0$, que es equivalente a la inecuación.

$(2x^2-x+1)(x-1)x(x+1) < 0$, para $x \neq -1,0,1$

ahora encontramos las raíces de $(2x^2-x+1)(x-1)x(x+1) = 0$, de donde sus raíces son:

$r_1 = -1$, $r_2 = 0$, $r_3 = 1$, $r_4 = \dfrac{1+\sqrt{7}i}{4}$, $r_5 = \dfrac{1-\sqrt{7}i}{4}$



Como la inecuación es de la forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$, la solución es la unión de los intervalos donde aparecen el signo (-), es decir: x ∈ <-∞,-1> U <0, 1>

INECUACIONES IRRACIONALES.-

Las inecuaciones irracionales en una incógnita son de la forma:

$$\boxed{F(x,\sqrt{P_2(x)},\sqrt[3]{P_3(x)},\dots,\sqrt[n]{P_n(x)})>0 \quad ó \quad F(x,\sqrt{P_2(x)},\sqrt[3]{P_3(x)},\dots,\sqrt[n]{P_n(x)})<0}$$

donde $P_2(x),P_3(x),\dots,P_n(x)$ son monomios o polinomios diferentes de cero.

Para que la solución de la inecuación sea válida debe resolverse antes la condición $P_i(x)\geq 0$, i = 2,3,...,n en las expresiones con una radical par, cuyo conjunto solución constituirá el universo o dentro del cuál se resuelve la inecuación dada. Debe observarse que $\sqrt{P(x)}$, quiere decir, $(+\sqrt{P(x)})$ y si se desea la raíz negativa se escribirá expresamente como $(-\sqrt{P(x)})$; es decir:

i) $\forall\ P(x)\geq 0 \quad , \quad \sqrt{P(x)}\geq 0$ ii) $\sqrt{P(x)}=0 \iff P(x)=0$

para resolver las inecuaciones radicales se debe tener en cuenta las siguientes propiedades:

1. $0\leq x\leq y \iff 0\leq\sqrt{x}\leq\sqrt{y}$
2. $0<x<y \iff 0<\sqrt{x}<\sqrt{y}$
3. $0\leq x<y \iff 0\leq\sqrt{x}<\sqrt{y}$
4. i) Si n es un entero positivo par.

   $a_1)\ \forall\ P(x)\geq 0 \quad \therefore \quad \sqrt[n]{P(x)}\geq 0 \iff P(x)\geq 0$

   $a_2)\ \sqrt[n]{P(x)}=0 \iff P(x)=0$

   $a_3)\ \sqrt[n]{P(x)}\leq\sqrt[n]{Q(x)} \iff 0\leq P(x)\leq Q(x)$

ii) Si n es entero positivo impar.

$b_1)$ $\sqrt[n]{P(x)} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \geq 0$

$b_2)$ $\sqrt[n]{P(x)} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x) < 0$

$b_3)$ $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \quad \Leftrightarrow \quad P(x) \leq Q(x)$

Las propiedades $b_1)$, $b_2)$ indican que $\sqrt[n]{P(x)}$ tienen el mismo signo que P(x) si n es impar.

OBSERVACIÓN.- Cuando en una expresión existen k radicales par entonces se calculan los universos relativos $U_1, U_2, ..., U_k$ para cada radical y el universo general será $U = U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_k$.

Daremos algunos ejemplos de ilustración de estas propiedades, para después estudiar las diversas formas de inecuaciones irracionales.

ahora veremos como resolver diversas formas de la inecuación con radicales aplicando criterios de acuerdo a cada tipo de inecuación irracional.

1° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)} > Q(x)$. La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} > Q(x) \Leftrightarrow (P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \leq 0 \vee (P(x) \geq 0 \wedge P(x) > Q^2(x))])$$

2° Para las inecuaciones irracionales de las formas:

a) $\sqrt{P(x)} < Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} < Q(x) \iff [(P(x) \geq 0 \wedge (Q(x) > 0 \wedge P(x) < Q^2(x))]$$

b) $\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$; la solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} \leq Q(x) \iff P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \leq Q^2(x)]$$

3° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

a) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} > 0 \Rightarrow (P(x) \geq 0 \wedge Q(x) > 0) \vee (P(x) > 0 \wedge Q(x) \geq 0)$$

b) $\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq 0 \Rightarrow P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0$$

4° Para la inecuación irracional de la forma:

$\sqrt{P(x) + \sqrt{Q(x)}} \geq K$, K > 0; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \geq K \Rightarrow [(P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0) \wedge P(x) \geq (k - \sqrt{Q(x)})^2]$$

5° Para las inecuaciones irracionales de la forma:

$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0$; La solución se obtiene así:

$$\sqrt{P(x)} + \sqrt{Q(x)} \leq 0 \Rightarrow P(x) = 0 \wedge Q(x) = 0$$

OBSERVACIÓN.-

Consideremos otros casos más generales.

1° Caso.- Si n es impar positivo mayor que uno.

a) $\dfrac{P(x)\sqrt[n]{Q(x)}}{R(x)} \geq 0 \iff \dfrac{P(x).Q(x)}{R(x)} \geq 0$

b) $\dfrac{P(x)}{R(x)\sqrt[n]{Q(x)}} \leq 0 \iff \dfrac{P(x)}{R(x)Q(x)} \leq 0$

c) $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \iff P(x) \leq Q(x)$

2° Caso.- Si n es par positivo

a) $\sqrt[n]{P(x)}Q(x) \geq 0 \iff P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \geq 0$

b) $\sqrt[n]{P(x)}Q(x) \leq 0 \iff P(x) \geq 0 \wedge Q(x) \leq 0$

c) $\dfrac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}R(x)} \geq 0 \iff Q(x) > 0 \wedge \dfrac{P(x)}{R(x)} \geq 0$

d) $\dfrac{P(x)}{\sqrt[n]{Q(x)}R(x)} \leq 0 \iff Q(x) > 0 \wedge \dfrac{P(x)}{R(x)} \leq 0$

e) $\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \iff (P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) < 0 \vee (Q(x) \geq 0 \wedge P(x) \geq Q^n(x))]$

f) $\sqrt[n]{P(x)} \leq Q(x) \iff P(x) \geq 0 \wedge [Q(x) \geq 0) \wedge P(x) \leq Q^n(x)]$

OBSERVACIÓN.- Si n es un numero positivo impar, entonces:

(1) $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \iff P(x) \leq Q(x)$ (2) $\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)} \iff P(x) < Q(x)$

(3) $\sqrt[n]{P(x)} \geq \sqrt[n]{Q(x)} \iff P(x) \geq Q(x)$ (4) $\sqrt[n]{P(x)} > \sqrt[n]{Q(x)} \iff P(x) > Q(x)$

OBSERVACIÓN.- Si n es un numero positivo par, entonces:

(1) $\sqrt[n]{P(x)} \leq \sqrt[n]{Q(x)} \iff 0 \leq P(x) \leq Q(x)$ (2) $\sqrt[n]{P(x)} < \sqrt[n]{Q(x)} \iff 0 \leq P(x) < Q(x)$

VALOR ABSOLUTO.-

a) **DEFINICIÓN.-** Al valor absoluto del número real x denotaremos por | x |, y se define por la regla.

$$|x|=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0 \\ -x & \text{si } x<0 \end{cases}$$

Ejemplo.- $|7|=7$, $|-7|=-(-7)=7$

b) **PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO.-**

1. $|a|\geq 0,\ \forall a\in R$
2. $|a|\geq a\ \forall a\in R$
3. $|a|=|-a|$
4. $|ab|=|a||b|$
5. $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|},\ b\neq 0$
6. $|a+b|\leq|a|+|b|$ (desigualdad triangular)

Demostraremos la 6° propiedad,

$$|a+b|^2=|(a+b)^2|=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$\leq|a|^2+2|a||b|+|b|^2=(|a|+|b|)^2$$

$|a+b|^2\leq(|a|+|b|)^2$ entonces $\therefore$ $|a+b|\leq|a|+|b|$

PROPIEDADES BÁSICAS PARA RESOLVER ECUACIONES E INECUACIONES DONDE INTERVIENE VALOR ABSOLUTO.

1. $|a| = 0 \iff a = 0$

2. $|a| = b \iff [b \geq 0 \wedge (a = b \vee a = -b)]$

3. $|a| = |b| \iff a = b \vee a = -b$

4. **Sí $b > 0$, entonces:**

   i) $|a| < b \iff -b < a < b$ **ii)** $|a| \leq b \iff -b \leq a \leq b$

5. **Si $a, b \in R$ se verifica**

   i) $|a| > b \iff a > b \vee a < -b$ **ii)** $|a| \geq b \iff a \geq b \vee a \leq -b$

6. **i)** $|a| = \sqrt{a^2}$ **ii)** $|a|^2 = a^2$

MÁXIMO ENTERO.-

Si x es un número real, el máximo entero de x representaremos por $[|x|]$ y es el mayor de todo los entero menores o iguales a x, es decir:

$$\boxed{[|x|] = \text{máx}\{n \in Z / x \geq n\}}$$

Para calcular el máximo entero de un número real x, se observa todos los enteros que se encuentran a la izquierda de x (o que coinciden con x, en caso que x sea entero) y el mayor de todos ellos es el máximo entero $[|x|]$, por ejemplo:

De donde $[|x|] = 2$

Ejemplo.- Hallar $[\![3.7]\!]$

De donde $[\![3.7]\!] = 3$

Si x se encuentra entre dos enteros consecutivos de la forma:

Entonces: $\boxed{[\![x]\!] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1,\ n \in Z}$

Ejemplo.- Sí $[\![x]\!] = 5 \Leftrightarrow 5 \leq x < 6$

$$[\![x]\!] = -5 \Leftrightarrow -5 \leq x < -4$$

NOTA.- Como se podrá observar siempre se toma él número entero más próximo a la izquierda.

OBSERVACIÓN.- Por definición de máximo entero se tiene:

$$[\![x]\!] = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1,\ n \in Z$$

$$\Leftrightarrow x \in [n, n+1\rangle,\ n \in Z$$

$$\boxed{\therefore\ [\![x]\!] = n \Leftrightarrow x \in [n, n + 1\rangle,\ n \in Z}$$

Ejemplo.- $[\![x]\!] = -4 \Leftrightarrow -4 \leq x < -3 \Rightarrow x \in [-4,-3\rangle$

Ejemplo.- $[\![x]\!] = 2.15$, es absurdo, puesto que todo máximo entero es un número entero.

PROPIEDADES DEL MÁXIMO ENTERO.-

1. $[\![x]\!] \in Z$, por definición
2. $[\![x]\!] = x \Leftrightarrow x \in Z$
3. $\forall\, x \in R$, $[\![x]\!] \leq x$, por definición
4. $[\![x]\!] \leq x < [\![x]\!] + 1$, $\forall\, x \in R$
5. $0 \leq x - [\![x]\!] < 1$, $\forall\, x \in R$
6. $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!]$, $\forall\, x \in R$
7. $[\![x + n]\!] = [\![x]\!] + n$, $n \in Z$

En efecto: Sea $[\![x]\!] = k$, $k \in Z$, entonces $k \leq x < k + 1$

$$\Rightarrow\ k + n \leq x + n < (k + n) + 1$$

$$\Rightarrow\ [\![x + n]\!] = k + n = [\![x]\!] + n$$

8. $[\![x]\!] \leq n \Leftrightarrow x < n + 1$, $n \in Z$
9. $[\![x]\!] < n \Leftrightarrow x < n$, $n \in Z$
10. $[\![x]\!] \geq n \Leftrightarrow x \geq n$, $n \in Z$, $x \in R$
11. $[\![x]\!] > n \Leftrightarrow x \geq n + 1$
12. $\forall\, x, y \in R$, sí $x \leq y \Leftrightarrow [\![x]\!] \leq [\![y]\!]$
13. $[\![x + y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

En efecto: Sean $\begin{cases} [\![x]\!] = m \\ [\![y]\!] = n \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} m \leq x < m + 1 \\ n \leq y < n + 1 \end{matrix}$

$$m + n \leq x + y < (m + n) + 2$$

entonces $[\![x + y]\!] = m + n$ o $m + n + 1$

por lo tanto $[\![x + y]\!] \geq m + n$ $\therefore\ [\![x + y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

14. Sí $n \in Z^{+}$ $\Rightarrow [\![nx]\!] \geq n [\![x]\!]$

En efecto: Sea $[\![x]\!] = m \Rightarrow m \leq x < m + 1$

$$\Rightarrow\ nm \leq nx < mn + n$$

$$\Rightarrow\ [\![nx]\!] \geq nm \qquad \therefore\ [\![nx]\!] \geq n [\![x]\!]$$

(15) Si $x \in R$ y $n \in Z^+$, entonces $[| \frac{[| x |]}{n} |] = [| \frac{x}{n} |]$

(16) Si a y b $\in$ Z, $x \in R$, entonces se cumple:

i) $a \leq [| x |] \leq b \Rightarrow a \leq x < b + 1$

ii) $a \leq [| x |] < b \Rightarrow a \leq x < b$

iii) $a < [| x |] < b \Rightarrow a + 1 \leq x < b$

INECUACIONES LOGARÍTMICAS.-

Para el estudio de las inecuaciones logarítmicas es necesario recordar lo siguiente:

En primer lugar la definición de logaritmo es decir:

$$\boxed{\log_b N = x \quad \Leftrightarrow \quad N = b^x\,,\ \mathrm{N}>0 \ \wedge \ \mathrm{b}>0}$$

En segundo lugar las propiedades del logaritmo

a) $\log_b AB = \log_b A + \log_b B$

b) $\log_b \dfrac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$

c) $\log_b A^n = n \log_b A$

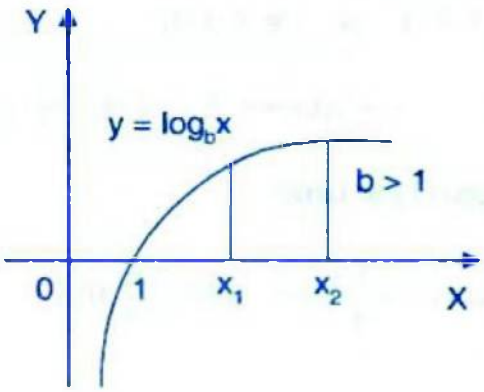
d) $\log_b \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n} \log_b A$

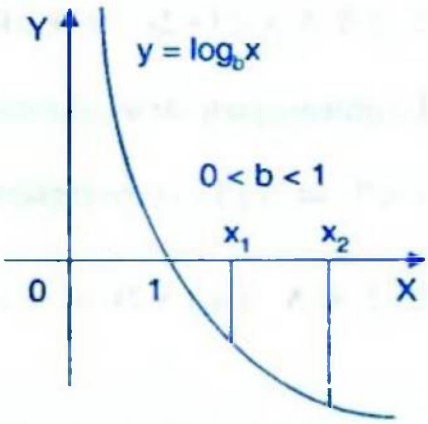
e) $\log_b 1 = 0$

f) $\log_b b = 1$

g) $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

En tercer lugar se observa la gráfica $y = \log_b x$ cuando $\mathrm{b} > 1$ y $0 < \mathrm{b} < 1$. También dentro del campo de los números reales, sólo tiene logaritmo los números reales positivo: ahora gratificamos la ecuación $y = \log_b x$.





Al observar la gráfica se tiene los siguientes casos:

1° CASO.- Cuando la base es b > 1, en la gráfica podemos observar:

i) Los números mayores que 1 tiene logaritmo positivo.

ii) Los números entre 0 y 1 tiene logaritmo negativo, entonces para cualquier $x_1, x_2 \in R^+$ se tiene

Sí $b > 1$ y $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_b x_1 < \log_b x_2$

De donde deducimos las relaciones siguientes:

a) Sí $x > 0,\ b > 1;\ N \in R \Rightarrow \log_b x > N \Leftrightarrow x > b^n$

b) Si $x > 0,\ b > 1;\ N \in R \Rightarrow \log_b x < N \Leftrightarrow x < b^n$

2° CASO.- Cuándo la base es $0 < b < 1$, en ia gráfica podemos observar:

i) Los números mayores que 1 tiene logaritmo negativo.

ii) Los números entre 0 y 1 tiene logaritmo positivo, entonces para cualquier x_1, x_2 de R^+ se tiene:

Sí $0 < b < 1$ y $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_b x_1 > \log_b x_2$

de donde deducimos las relaciones siguientes:

Sí $x > 0,\ 0 < b < 1$ y $N \in R \Rightarrow \log_b x > N \Leftrightarrow 0 < x < b^N$

Sí $x > 0,\ 0 < b < 1$ y $E \in R \Rightarrow \log_b x < N \Leftrightarrow x > b^N$

OBSERVACIÓN.- Resumiendo, para la solución de las inecuaciones logarítmicas se obtiene de la siguiente manera:

$$\log_b a > \log_b c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > c & \text{si } b > 1 \\ a < c & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\log_b a > c \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > b^c & \text{si } b > 1 \\ a < b^c & \text{si } 0 < b < 1 \end{cases}$$