Cinemática

CONTENIDO

Todo el Universo se encuentra en constante movimiento. Los cuerpos presentan movimientos rápidos, lentos, periódicos y azarosos. La Tierra **describe un movimiento de rotación girando sobre su propio eje**, al mismo tiempo describe **un movimiento de traslación alrededor del Sol**. La Luna gira alrededor de la Tierra; los electrones alrededor del núcleo atómico. Así, a nuestro alrededor siempre observaremos algo en movimiento: niños corriendo y saltando, nubes desplazándose por el cielo, pájaros volando, árboles balanceándose a uno y otro lado por un fuerte viento. Todo es movimiento. **La mecánica es la rama de la Física encargada de estudiar los movimientos y estados de los cuerpos.** Se divide en dos partes: **1) Cinemática**, estudia los diferentes tipos de movimiento de los cuerpos sin atender las causas que lo producen. **2) Dinámica**, estudia las causas que originan el movimiento de los cuerpos. **La estática** que analiza las situaciones que posibilitan el equilibrio de los cuerpos, queda comprendida dentro del estudio de la dinámica.

Un cuerpo tiene movimiento cuando cambia su posición a medida que transcurre el tiempo. Para poder expresar en forma correcta un movimiento o cambio de posición, debemos relacionarlo con un marco o sistema de referencia claramente establecido. **Un sistema de referencia es absoluto** cuando toma en cuenta un sistema fijo de referencia, tal es el caso de considerar a la Tierra como sistema fijo para analizar el movimiento de automóviles, trenes, barcos o aviones, entre otros. En cambio, **un sistema de referencia relativo** considera móvil al sistema de referencia; un caso representativo lo tenemos al determinar las trayectorias a seguir por una nave espacial que parte de la Tierra a la Luna, pues se debe considerar que las posiciones de la Tierra, la Luna y la nave cambian constantemente. En realidad, el sistema de referencia absoluto no existe porque todo se encuentra en constante movimiento. **El movimiento de los cuerpos puede ser en una dimensión o sobre un eje,** por ejemplo, el desplazamiento en línea recta de un automóvil o el de un tren; **en dos dimensiones o sobre un plano**, como el movimiento de la rueda de la fortuna, de un disco fonográfico, el de un avión al despegar o aterrizar, o el de un proyectil cuya trayectoria es curva; **en tres dimensiones o en el espacio**, como el de un tornillo que al hacerlo girar con un desarmador penetra en la pared.

La Tierra, la Luna, un avión, un tren, un automóvil, una pelota y, en general, un cuerpo físico cualquiera, **puede ser considerado como una partícula**, lo cual nos facilita describir su movimiento.

La velocidad experimentada por un cuerpo puede ser constante o variable y es una magnitud vectorial; su dirección queda determinada por la dirección del desplazamiento.

1 IMPORTANCIA DEL ESTUDIO DE LA CINEMÁTICA

Cuando decimos que un cuerpo se encuentra en movimiento, interpretamos que su posición está variando respecto a un punto de referencia. A este punto también se le da el nombre de **marco de referencia** y constituye el lugar, sitio o espacio, a partir del cual se determina si un cuerpo está en reposo o en movimiento. El estudio de la cinemática nos posibilita conocer y predecir en qué lugar se encontrará un cuerpo, qué velocidad tendrá al cabo de cierto tiempo, o bien, en qué lapso llegará a su destino. Hacer la descripción del movimiento de un cuerpo significa precisar, a cada instante, su posición en el espacio. Para ello, debemos disponer de instrumentos que nos posibiliten hacer mediciones, como es el caso de las cintas métricas, los relojes y las cámaras fotográficas con luz estroboscópica; estas últimas permiten ver, aparentemente inmóviles o con movimientos lentos, aquellos cuerpos que tienen movimientos rápidos, ya sean de rotación o alternativos.

2 CONCEPTO DE PARTÍCULA MATERIAL EN MOVIMIENTO E INTERPRETACIÓN DE SU TRAYECTORIA

En la descripción del movimiento de cualquier objeto material, también llamado cuerpo físico o simplemente cuerpo, resulta útil interpretarlo como una partícula material en movimiento, es decir, como si fuera un solo punto en movimiento. Para ello, se considera la masa de un cuerpo concentrada en un punto. Por supuesto, no se requiere que el cuerpo sea de dimensiones pequeñas para considerarlo como una partícula material, pues sólo se pretende facilitar la descripción de sus cambios de posición al suponer que todas sus partes constitutivas están animadas del mismo movimiento.

El considerar a un cuerpo físico como una simple partícula nos evita analizar en detalle los diferentes movimientos experimentados por el mismo cuerpo durante su desplazamiento de un punto a otro. Pensemos en la trayectoria de un balón de futbol cuando es pateado; en realidad, mientras se desplaza en el aire puede ir girando, pero si lo suponemos una partícula eliminamos los diferentes giros que hace y consideramos únicamente un solo movimiento, de manera que **cualquier cuerpo físico puede ser considerado como una partícula**.

El recorrido de un móvil debido a su cambio de posición lo constituye una línea que recibe el nombre de **trayectoria**, y dependiendo de su forma, el movimiento del móvil puede ser rectilíneo, o bien, curvilíneo si su trayectoria es circular, elíptica o parabólica. Los movimientos de los cuerpos pueden ser uniformes o variados dependiendo de que la velocidad permanezca constante o no.

3 SISTEMAS DE REFERENCIA

En la descripción del movimiento de un objeto o de una partícula es necesario señalar perfectamente cuál es su posición; para ello, se usa un sistema de referencia. Existen dos tipos de sistemas de referencia: el absoluto y el relativo.

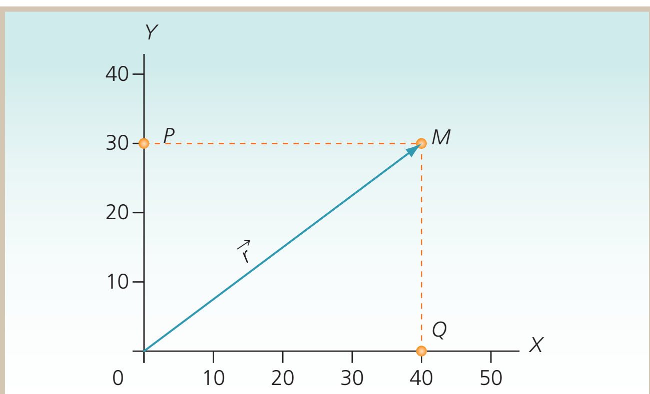
El sistema de referencia absoluto es aquel que considera un sistema de referencia fijo, y el sistema de referencia relativo es el que considera móvil al sistema de referencia. En realidad, el sistema de referencia absoluto no existe; por ejemplo, si una persona parada en una esquina observa a un automóvil circular a una velocidad de 50 km/h hacia el norte podría considerarse que el automóvil se mueve respecto a un punto fijo, el cual es la persona misma parada en la esquina; pero en realidad la persona también se mueve, pues la Tierra está en continuo movimiento de rotación y de traslación alrededor del Sol. Sin embargo, resulta útil tomar en cuenta los movimientos que se producen sobre la superficie de la Tierra, suponiendo a ésta como un sistema de referencia absoluto, es decir, fijo (figura 4.1).

4.1 El movimiento de los esquiadores se analiza suponiendo a la Tierra como un sistema de referencia fijo.

La importancia de definir claramente el sistema de referencia empleado al describir el movimiento de un cuerpo, se comprenderá mejor con los siguientes ejemplos: en un tren cuya marcha es de 80 km/h viaja una persona a la cual se le ocurre caminar en el vagón en la misma dirección que la máquina y a una velocidad cuya magnitud es 5 km/h, esto lo hace considerando al tren como un sistema de referencia inmóvil; sin embargo, si otra persona observa el paso del tren, su sistema de referencia será la Tierra, y para él la magnitud de la velocidad del pasajero se obtendrá al sumar la magnitud de la velocidad de éste y la del tren, dando como resultado 85 km/h. De igual manera, cuando viajamos en un avión y observamos el movimiento de las azafatas por el pasillo central, lo referimos respecto al avión, considerado como un sistema de referencia fijo. Pero para el piloto que supervisa meticulosamente el vuelo del avión y mira en forma permanente hacia el exterior, tendrá como sistema de referencia a la Tierra considerada fija o inmóvil.

Sistema de coordenadas cartesianas o coordenadas rectangulares

Para describir la posición de una partícula sobre una superficie, se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas o coordenadas rectangulares. En este sistema, los ejes se cortan perpendicularmente en un punto 0 llamado origen. El eje horizontal es el de las abscisas o de las *X* y el eje vertical es el de las ordenadas o de las *Y*. Observemos la siguiente figura:



La posición de una partícula *M* situada en el plano está determinada por dos magnitudes: la abscisa o distancia 0*Q* medida entre el origen y la intersección en *Q* de una línea que pasa por *M*, y la ordenada o distancia 0*P* existente entre el origen y la intersección en *P* de una línea que pasa por *M*.

Por tanto, la posición de la partícula es:

$M = (X, Y)$

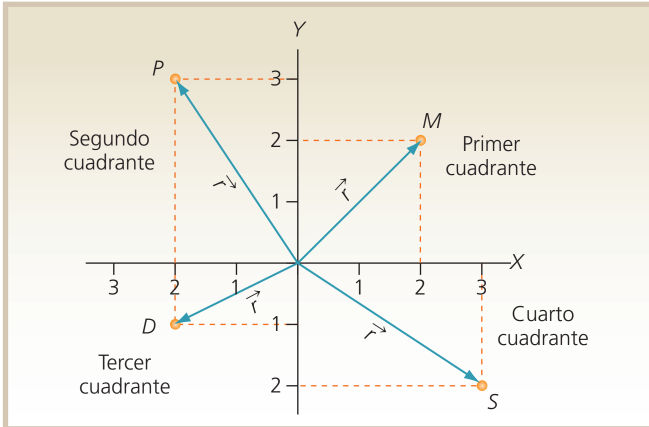
donde: $X = 40$

$Y = 30$

$M = (40, 30)$

Localización de una partícula en el espacio utilizando un vector de posición

La posición de la partícula también puede representarse por el vector $\vec{r}$ llamado vector de posición, cuyas componentes rectangulares son *X*, *Y*. Según el cuadrante en que se encuentren las coordenadas, éstas tendrán signo positivo o negativo:



En el primer cuadrante *X*, *Y* son positivas, $M = (2, 2)$.

En el segundo cuadrante *X* es negativa, *Y* positiva,

$$P = (-2, 3).$$

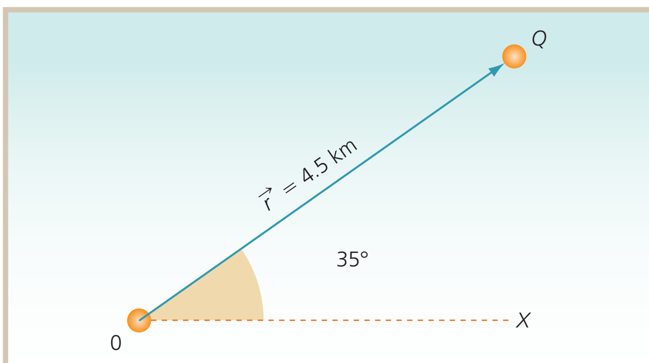
En el tercer cuadrante *X*, *Y* son negativas,

$$D = (-2, -1).$$

En el cuarto cuadrante *X* es positiva, *Y* negativa,

$$S = (3, -2).$$

Para determinar la posición de una partícula, también se utilizan las llamadas coordenadas polares. Consideremos la siguiente figura:



La posición de la partícula *Q* queda determinada por la distancia de esta partícula al origen 0, así como por el ángulo formado por 0*Q* respecto a 0*X*, recta del plano que recibe el nombre de eje polar. Por tanto, para la partícula

Q las coordenadas polares son $\vec{r}$ = 4.5 km, θ = 35°. Observemos que la posición de la partícula Q está determinada por el vector de posición $\vec{r}$ cuya magnitud es de 4.5 km con un ángulo de 35° respecto al eje polar.

4 DISTANCIA, DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y RAPIDEZ

Distancia y desplazamiento

La distancia recorrida por un móvil es una magnitud escalar, ya que sólo interesa saber cuál fue la magnitud de la longitud recorrida por el móvil durante su trayectoria seguida, sin importar en qué dirección lo hizo. Por ejemplo, si a una persona le recomiendan correr 3 km todos los días para tener buena condición física, no importa si lo hace en línea recta corriendo 1.5 km de ida y 1.5 km de regreso, o los recorre dando vueltas a un parque hasta completar los 3 kilómetros. En cambio, el desplazamiento de un móvil es una magnitud vectorial, pues corresponde a una distancia medida en una dirección particular entre dos puntos: el de partida y el de llegada. Así, una persona puede caminar 10 m al norte y 10 m al sur para regresar al mismo punto de donde partió. Tendremos entonces que su distancia recorrida es de 20 m, sin embargo, su desplazamiento es igual a cero, porque regresó al mismo lugar de partida. Encontrará más ejemplos en la sección 8 de esta unidad.

Velocidad y rapidez

La velocidad y la rapidez generalmente se usan como sinónimos en forma equivocada, no obstante que la rapidez es una cantidad escalar que únicamente indica la magnitud de la velocidad, y la velocidad es una magnitud vectorial, pues para quedar bien definida requiere que se señale, además de su magnitud, su dirección y su sentido. Cuando un móvil sigue una trayectoria en línea recta, recorriendo distancias iguales en cada unidad de tiempo, su rapidez y velocidad permanecen constantes; en cambio, si en una trayectoria curva el móvil logra conservar una rapidez constante, por ejemplo, 30 km/h, su velocidad va cambiando, aunque su magnitud, o rapidez, no varía, pero su sentido sí va modificándose. En conclusión, cuando en Física se habla de velocidad, no se refiere sólo a la rapidez con que se mueve un cuerpo, sino también en qué dirección lo hace.

La dirección de la velocidad de un cuerpo móvil queda determinada por la dirección o línea de acción en la cual se efectúa su desplazamiento. La velocidad de un cuerpo puede ser constante o variable. Por ejemplo, un ciclista al inicio de una carrera va aumentando paulatinamente la magnitud de su velocidad y durante algunos tramos en línea recta, la conserva constante; al subir una cuesta reduce la magnitud de su velocidad, misma que se incrementa durante la bajada. Al final de la carrera, trata de incrementar al máximo la magnitud de su velocidad hasta llegar a la meta, después la va disminuyendo hasta detenerse totalmente.

La velocidad se define como el desplazamiento realizado por un móvil dividido entre el tiempo que tarda en efectuarlo:

$$\vec{v} = \frac{\vec{d}}{t}$$

donde: $\vec{v}$ = velocidad del móvil

$\vec{d}$ = desplazamiento del móvil

t = tiempo en que se realiza el desplazamiento

Las unidades de velocidad son:

En el SI $\vec{v}$ = m/s

En el CGS $\vec{v}$ = cm/s

Resolución de problemas de distancia, desplazamiento, velocidad y rapidez

1. Un corredor avanza 3 km en un tiempo de 10 minutos. Calcular su rapidez, es decir, la magnitud de su velocidad, en: *a*) km/h y *b*) m/s.

Solución:

Datos

d = 3 km

t = 10 min

a) v = ? km/h

b) v = ? m/s

Fórmula

$$v = \frac{d}{t}$$

a) **Transformación de unidades**

$$10 \text{ min} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = 0.167 \text{ h}$$

Sustitución y resultado

$$v = \frac{3 \text{ km}}{0.167 \text{ h}} = \mathbf{18\ km/h}$$

b) $$18\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 5 \text{ m/s}$$

$$v = \mathbf{5\ m/s}$$

2. La rapidez de un ciclista es de 10 m/s. ¿Qué distancia recorre en 125 s?

Solución:

Datos

$v = 10$ m/s

$t = 125$ s

$d = ?$

Fórmula

$$v = \frac{d}{t} \quad \therefore \quad d = vt$$

Sustitución y resultado

$$d = 10\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 125\text{ s} = \mathbf{1250\text{ m}}$$

3. Encontrar la velocidad en m/s de un motociclista cuyo desplazamiento es de 8 km al este en 9 minutos.

Solución:

Datos

$\vec{d} = 8$ km al este

$\vec{t} = 9$ min

$\vec{v} = ?$ m/s

Fórmula

$$v = \frac{d}{t}$$

Transformación de unidades

$$8\text{ km} \times \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} = 8000\text{ m}$$

$$9\text{ min} \times \frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 540\text{ s}$$

Sustitución y resultado

$$v = \frac{8000\text{ m}}{540\text{ s}} = 14.81\text{ m/s}$$

$\therefore\ \vec{v} = 14.81$ m/s al este

4. Determinar el desplazamiento en metros que realizará un automóvil al viajar hacia el norte a una velocidad de 80 km/h durante 0.9 minutos.

Solución:

Datos

$\vec{v} = 80$ km/h al norte

$t = 0.9$ min

$\vec{d} = ?$ m

Fórmula

$$v = \frac{d}{t} \quad \therefore \quad d = vt$$

Transformación de unidades

$$80\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = 22.22\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$0.9\text{ min} \times \frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 54\text{ s}$$

Sustitución y resultado

$$d = 22.22\frac{\text{m}}{\text{s}} \times 54\text{ s} = 1199.88\text{ m}$$

$\vec{d} = 1\,199.88$ m al norte

5. Una lancha de motor desarrolla una velocidad cuya magnitud es de 6.5 m/s, si la velocidad que lleva la corriente de un río hacia el este es de 3.4 m/s.

Calcular:

a) La velocidad de la lancha si va en la misma dirección y sentido que la corriente del río.

b) La velocidad de la lancha si va en la misma dirección, pero en sentido contrario a la corriente del río.

c) La velocidad de la lancha si se requiere cruzar perpendicularmente el río de una orilla a la otra. Determinar también cuál será la dirección que llevará la lancha, emplear el método del paralelogramo.

Solución:

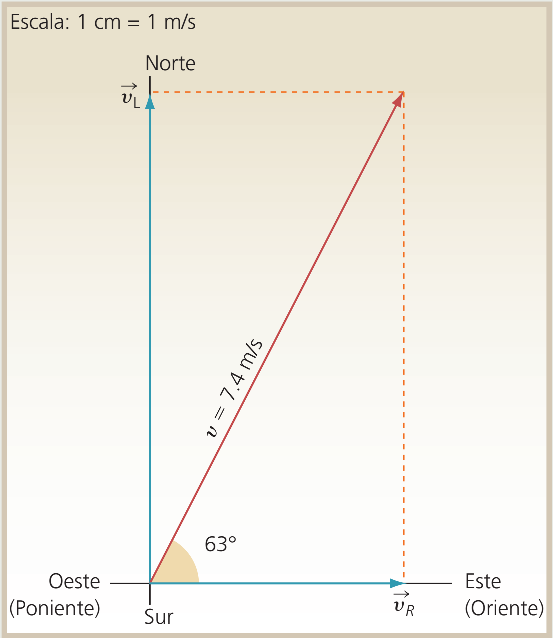
a) $\vec{v} = \vec{v}_L + \vec{v}_R = 6.5\frac{\text{m}}{\text{s}} + 3.4\frac{\text{m}}{\text{s}} = 9.9\frac{\text{m}}{\text{s}}$ al este

b) $\vec{v} = -\vec{v}_L + \vec{v}_R = -6.5\frac{\text{m}}{\text{s}} + 3.4\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$= -3.1\frac{\text{m}}{\text{s}}$ al oeste

Nota: El signo (–) de la velocidad de la lancha (v_L) se debe a que va hacia el oeste (poniente), o sea, hacia la izquierda del eje *X*.

c)



Como puede observarse, la velocidad de la lancha es de 7.4 m/s con un ángulo de 63° en dirección noreste.

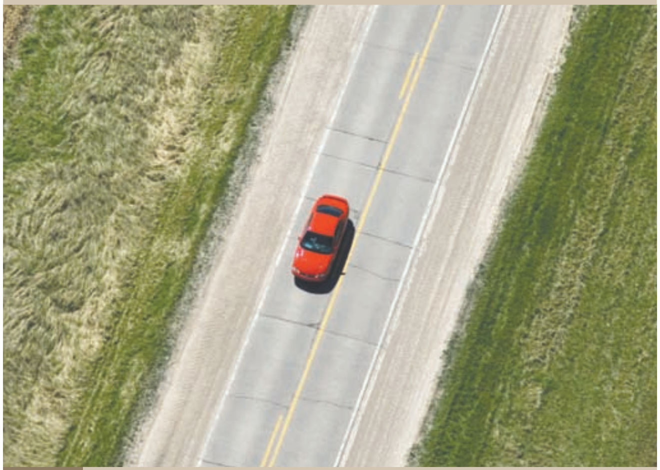
5 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU)

Cuando un móvil sigue una trayectoria recta en la cual realiza desplazamientos iguales en tiempos iguales se dice que efectúa un movimiento rectilíneo uniforme (figura 4.2). Supongamos que en 1 segundo un móvil se desplaza 2 metros; al transcurrir 2 segundos, se habrá desplazado 4 metros; al transcurrir 3 segundos, se habrá desplazado 6 metros y así sucesivamente; en este caso observaremos que la velocidad permanece constante, ya que por cada incremento en el tiempo de 1 segundo, tendrá un incremento de 2 metros en su desplazamiento. Para representar algún cambio en una variable se utiliza la letra griega Δ (delta), por tanto, podemos escribir la fórmula de la velocidad en función de los cambios en su desplazamiento respecto al cambio en el tiempo de la siguiente forma:

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{d}}{\Delta t} = \frac{\vec{d}_2 - \vec{d}_1}{t_2 - t_1}$$

Siempre que se trate del movimiento de un móvil en línea recta, recorriendo desplazamientos iguales en tiempos iguales, la relación: $\frac{\Delta\vec{d}}{\Delta\vec{t}}$ será un valor constante.

Donde: $\frac{\Delta\vec{d}}{\Delta t} = k = \text{constante.}$



4.2 Todo cuerpo físico que describe una trayectoria recta en la cual recorre distancias iguales en tiempos iguales efectúa un movimiento rectilíneo uniforme.

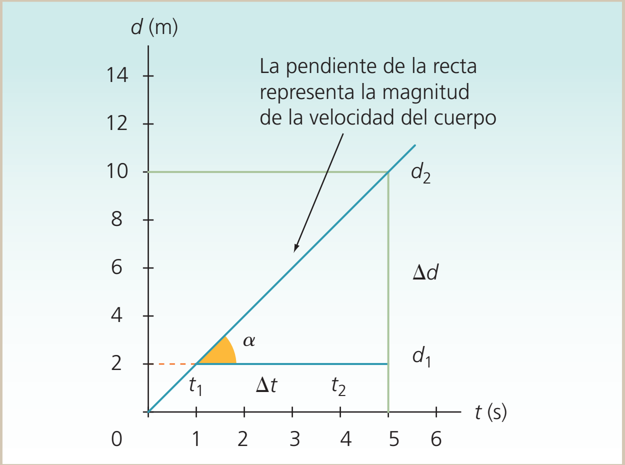
Resolución de un problema de MRU

En el movimiento de un cuerpo se obtuvieron los datos que se anotaron en el cuadro 4.1.

Si graficamos los datos de la magnitud del desplazamiento en función del tiempo que utilizó el cuerpo para realizarlo, tendremos:

cuadro 4.1 Datos del movimiento de un cuerpo

Número de intervalo	t_1 (s)	d_1 (m)	t_2 (s)	d_2 (m)	Δt (s)	Δd (m)	$\Delta d / \Delta d$ (m/s)
1	0	0	1	2	1	2	2
2	1	2	2	4	1	2	2
3	2	3	3	6	1	2	2
4	3	4	4	8	1	2	2
5	4	5	5	10	1	2	2
6	5	6	6	12	1	2	2



Como se observa, al graficar las diferentes magnitudes del desplazamiento en función del tiempo y al unir los puntos se obtuvo una línea recta. La pendiente de la recta representa la magnitud de la velocidad e indica que ésta permanece constante, ya que sólo para una línea recta las variaciones iguales a lo largo de un eje corresponden a variaciones iguales sobre el otro eje. Por tanto, existe una relación de proporcionalidad directa entre la variable desplazamiento del cuerpo y la variable tiempo.

También podemos decir que la pendiente de la recta obtenida en la gráfica desplazamiento-tiempo es la constante de proporcionalidad entre las dos variables y representa a la magnitud de la velocidad. Mientras mayor es la pendiente de la recta, mayor será la magnitud de la velocidad del móvil.

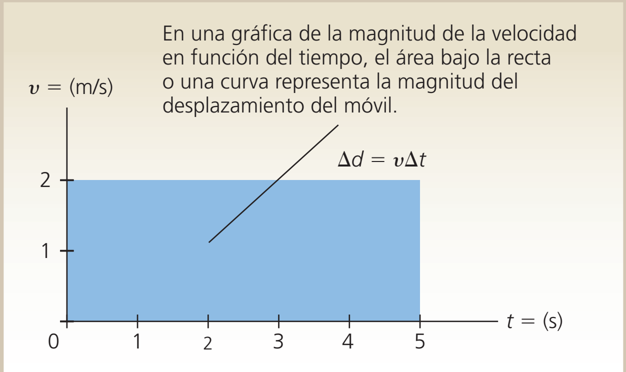
Para calcular la magnitud de la velocidad basta determinar la tangente de la recta, es decir, el valor de su pendiente en cualquier punto de ella. Por tanto, se dibuja un triángulo rectángulo entre dos puntos cualquiera de la recta, misma que equivaldrá a la hipotenusa. De acuerdo con el triángulo rectángulo que trazamos en nuestra gráfica, su tangente es igual a:

$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = v = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

$$v = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{10\text{ m} - 2\text{ m}}{5\text{ s} - 1\text{ s}} = \frac{8\text{ m}}{4\text{ s}} = 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

En conclusión, siempre que grafiquemos los datos de la magnitud del desplazamiento de un móvil en función del tiempo que tarda en realizarlo, la pendiente de la recta o de la curva obtenida representará la magnitud o la velocidad del móvil.

Con los mismos datos del cuadro 4.1 graficaremos la magnitud de la velocidad (relación $\Delta d/\Delta t$) en función del tiempo:



Cuando se grafican la magnitud de la velocidad y el tiempo, y permanece constante la magnitud de la velocidad, se obtiene una línea recta paralela al eje t. Para cualquier tiempo, el área del rectángulo representa el producto $v\Delta t$ equivalente a la magnitud del desplazamiento realizado por el móvil, pues $\Delta d = v\Delta t$.

Por tanto, la magnitud del desplazamiento a un tiempo de 5 segundos con una velocidad cuya magnitud es de 2 m/s será de 10 m.

6 VELOCIDAD MEDIA

La mayoría de los movimientos que realizan los cuerpos no son uniformes, es decir, sus desplazamientos generalmente no son proporcionales al cambio de tiempo; debido a ello es necesario considerar el concepto de velocidad media; por ejemplo, cuando oímos decir que de la Ciudad de México a la de Puebla se hace en autobús una hora treinta minutos, al recorrer la distancia de 128 kilómetros que las separa, podemos calcular la magnitud de la velocidad media durante el viaje:

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{128\text{ km}}{1.5\text{ h}} = 85.3\text{ km/h}$$

Evidentemente, la magnitud de la velocidad del autobús durante el viaje no puede ser constante, pues en las partes rectas su magnitud de velocidad será mayor que en las curvas (figura 4.3). Por tanto, una magnitud de velocidad media

4.3 La magnitud de la velocidad de un vehículo es mayor en las rectas que en las curvas.

representa la relación entre la magnitud del desplazamiento total hecho por un móvil y el tiempo en efectuarlo.

Cuando un móvil experimenta dos o más magnitudes de velocidades distintas durante su movimiento se puede obtener una magnitud de la velocidad media o promedio si sumamos las magnitudes de las velocidades y las dividimos entre el número de las magnitudes de las velocidades sumadas.

Resolución de problemas de velocidad media

1. Calcular la velocidad media de un coche si partió al sur con una velocidad inicial de 1.5 m/s y su velocidad final fue de 12 m/s.

Solución:

Datos

$v_0 = 1.5$ m/s

$v_f = 12$ m/s

$v_m = ?$

Fórmula

$$v_m = \frac{v_0 + v_f}{2}$$

Sustitución y resultado

$$v_m = \frac{1.5\ \text{m/s} + 12\ \text{m/s}}{2} = 6.75\ \text{m/s}$$

$$\therefore \vec{v}_m = 6.75\ \text{m/s al sur}$$

2. Encuentre la velocidad promedio de un camión que durante su recorrido hacia el sur tuvo las siguientes magnitudes de velocidades:

$v_1 = 8$ m/s $\quad v_2 = 10$ m/s

$v_3 = 9.5$ m/s $\quad v_4 = 12$ m/s

Solución:

Datos

$v_1 = 8$ m/s

$v_2 = 10$ m/s

$v_3 = 9.5$ m/s

$v_4 = 12$ m/s

$v_m = ?$

Fórmula

$$v_m = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = \Sigma v$$

$$\therefore v_m = \frac{\Sigma v}{4}$$

Sustitución y resultado

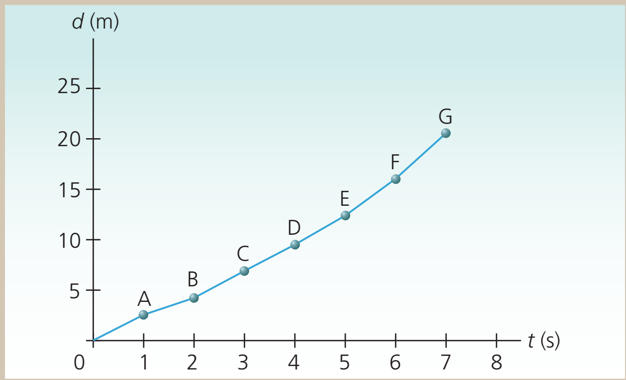
$$\Sigma v = 8\ \text{m/s} + 10\ \text{m/s} + 9.5\ \text{m/s} + 12\ \text{m/s}$$

$$= 39.5\ \text{m/s}$$

$$v_m = \frac{39.5\ \text{m/s}}{4} = 9.88\ \text{m/s}$$

$$\therefore \vec{v}_m = 9.8\ \text{m/s al sur}$$

3. Con los datos de la magnitud del desplazamiento de un automóvil en función del tiempo se obtuvo la siguiente gráfica:

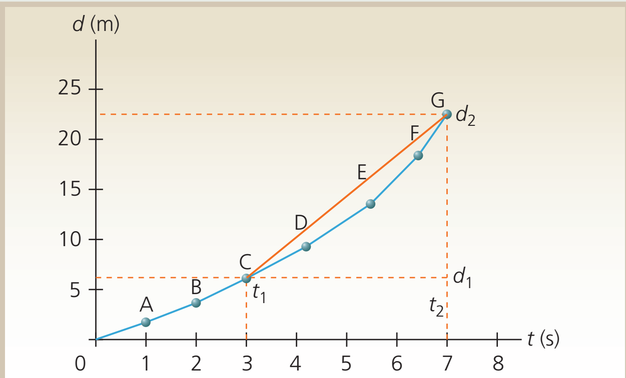


Calcular:

a) La magnitud de la velocidad media del automóvil durante el intervalo de $t_1 = 3$ s a $t_2 = 7$ s.

Solución:

Para encontrar la magnitud de la velocidad media calcularemos la pendiente de una recta hipotética trazada desde C hasta G, como se ve en la gráfica siguiente:



Donde la pendiente que representa la magnitud de la velocidad media del automóvil es igual a:

$$v_m = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{22\ \text{m} - 6\ \text{m}}{7\ \text{s} - 3\ \text{s}} = \frac{16\ \text{m}}{4\ \text{s}} = 4\ \text{m/s}$$

Este resultado indica que durante el intervalo de 4 segundos, desde 3 a 7 segundos, la magnitud de la velocidad media del automóvil fue de 4 m/s.

4. Determine el tiempo en que un deportista recorre una distancia de 50 m si lleva una velocidad media de 6 m/s al oeste.

Solución:

Datos

$d = 50$ m

$v_m = 6$ m/s

$t = ?$

Fórmula

$$v_m = \frac{d}{t} \quad \therefore \quad t = \frac{d}{v_m}$$

Sustitución y resultado

$$t = \frac{50 \text{ m}}{6 \text{ m/s}} = 8.33 \text{ s}$$

5. Calcule la distancia en metros que recorrerá una camioneta durante 40 segundos si lleva una velocidad media de 80 km/h al sur.

Solución:

Datos

$v_m = 80$ km/h

$t = 40$ s

$d = ?$

Fórmula

$$v_m = \frac{d}{t} \quad \therefore \quad d = v_m t$$

Transformación de unidades

$$80 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 22.22 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sustitución y resultado

$d = 22.22 \text{ m/s} \times 40 \text{ s} = 888.8 \text{ m}$

7 VELOCIDAD INSTANTÁNEA

La velocidad media se aproxima a una velocidad instantánea cuando en el movimiento de un cuerpo los intervalos de tiempo considerados son cada vez más pequeños (figura 4.4). Si el intervalo de tiempo es tan pequeño que casi tiende a cero, la velocidad del cuerpo será instantánea. Matemáticamente podemos decir que la velocidad instantánea en un punto es el límite de la velocidad media alrededor del punto cuando el intervalo de tiempo (Δt) es tan pequeño que tiende a cero ($\Delta t \rightarrow 0$) y se representa de la siguiente manera:

$$\vec{v}_{\text{inst}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{d}}{\Delta t}$$

Cuando la velocidad de un móvil permanece constante, la velocidad media y la velocidad instantánea son iguales.

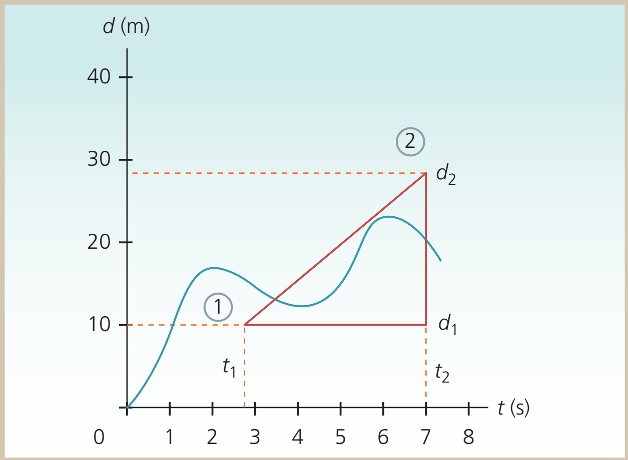
Sin embargo, como es muy común que la velocidad de un móvil varíe constantemente, para conocer cuál es su velocidad en un momento dado, debemos calcular su velocidad instantánea.

4.4 La velocidad media y la instantánea son iguales cuando la velocidad de un móvil permanece constante.

Resolución de un problema de velocidad instantánea

Con los datos de la magnitud del desplazamiento de un móvil en función del tiempo, se construyó la gráfica de la página siguiente y se determinó la magnitud de la velocidad instantánea a los 6 segundos:

Para calcular la magnitud de la velocidad instantánea en cualquier momento, se traza una tangente a la curva en el punto considerado; tomando dos puntos de la tangente se determina la pendiente, es decir, la magnitud de



la velocidad instantánea. En nuestro caso, el instante considerado es a los 6 segundos. Al trazar la tangente a la curva, tomamos los puntos 1 y 2 cuya pendiente tiene el siguiente valor

$$v_{\text{inst}} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{28\text{ m} - 10\text{ m}}{7\text{ s} - 2.7\text{ s}} = \frac{18\text{ m}}{4.3\text{ s}} = 4.18\text{ m/s}$$

Este resultado indica que a los seis segundos, la magnitud de la velocidad instantánea del móvil es de 4.18 m/s.

8 INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS DE LA MAGNITUD DE DESPLAZAMIENTO-TIEMPO Y MAGNITUD DE LA VELOCIDAD-TIEMPO

Para interpretar correctamente el movimiento de un cuerpo mediante el empleo de gráficas: magnitud del desplazamiento-tiempo y magnitud de la velocidad-tiempo, debemos considerar lo siguiente:

a) La magnitud del desplazamiento puede ser positiva o negativa: si d_2 es mayor que d_1 la magnitud del desplazamiento es positiva y si d_2 es menor que d_1, la magnitud del desplazamiento es negativa.

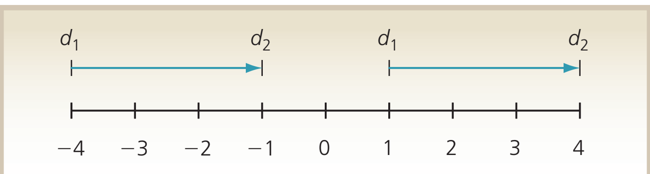
Ejemplo de desplazamientos cuya magnitud es positiva:

$\Delta d = d_2 - d_1 = -1\text{ m} - (-4\text{ m})$

$\Delta d = 3\text{ m}$

$\Delta d = d_2 - d_1 = 4\text{ m} - 1\text{ m}$

$\Delta d = 3\text{ m}$



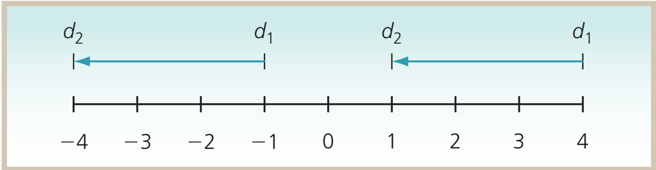
Ejemplo de desplazamientos cuya magnitud es negativa:

$\Delta d = d_2 - d_1 = -4\text{ m} - (-1\text{ m})$

$\Delta d = -3\text{ m}$

$\Delta d = d_2 - d_1 = 1\text{ m} - 4\text{ m}$

$\Delta d = -3\text{ m}$



b) El desplazamiento de un móvil no representa su distancia recorrida, sino su desplazamiento desde el punto de origen al punto final. Por ejemplo, si decimos que un móvil tiene un desplazamiento igual a cero en un intervalo de 20 segundos puede significar que no se ha movido o que se movió de un punto inicial y regresó al mismo, con lo cual, aunque recorrió una distancia, su desplazamiento fue cero.

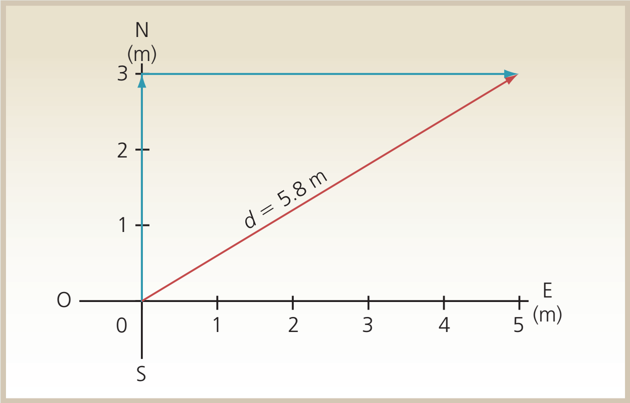
c) La magnitud de la velocidad será positiva o negativa de acuerdo con el signo que tenga el desplazamiento.

Resolución de un problema de desplazamiento de un móvil

1. Una persona caminó 3 m al norte y después recorrió 5 m al este. ¿Cuál fue su desplazamiento?

Solución:

Como se observa en la gráfica, su desplazamiento es de 5.8 m en dirección noreste; no obstante, la distancia que recorrió fue de 8 m.



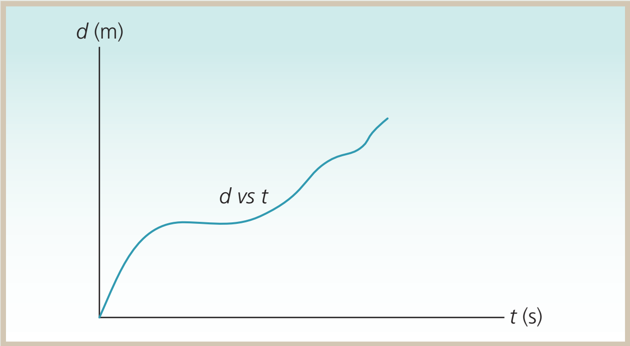
2. Un automóvil partió hacia el norte recorriendo 3 km y después recorrió otros 3 km al sur. ¿Cuál fue su desplazamiento?

Solución:

Resulta evidente que aunque recorrió 6 km en total, su desplazamiento es cero, pues regresó al mismo punto de partida.

Resolución de problemas de la magnitud del desplazamiento-tiempo y magnitud de la velocidad-tiempo

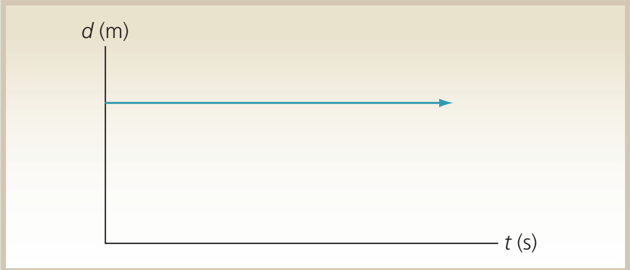
1. ¿Qué representa la curva obtenida en la gráfica siguiente al unir los puntos de la magnitud del desplazamiento de un móvil contra el tiempo?



Solución:

La curva que resulta de graficar las distintas magnitudes del desplazamiento de un cuerpo contra tiempo (magnitud del desplazamiento versus tiempo, o *d vs t*) indica que la magnitud de la velocidad, es decir, su rapidez, está variando al transcurrir el tiempo.

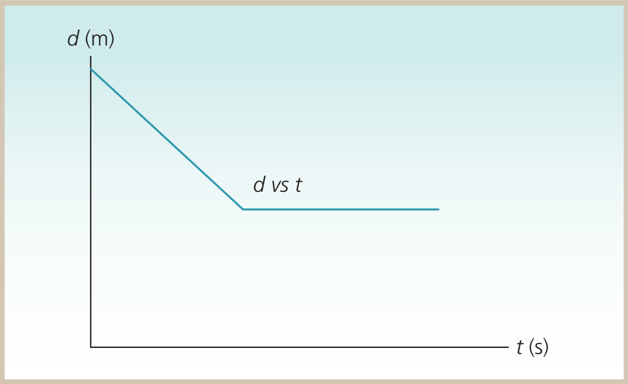
2. Explique cómo se interpreta la siguiente gráfica de *d vs t*.



Solución:

El resultado obtenido al unir los puntos del gráfico *d vs t* indica que al transcurrir el tiempo, la magnitud del desplazamiento era el mismo, es decir, el móvil no se movió y, por tanto, su velocidad es cero porque también es cero el valor de la pendiente de la recta.

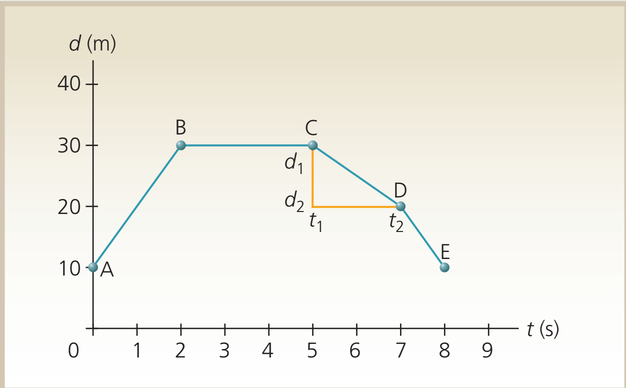
3. Interprete el movimiento de un móvil que al graficar los datos de las distintas magnitudes de su desplazamiento en función del tiempo nos da la siguiente gráfica:



Solución:

Como se observa, a medida que transcurre el tiempo la magnitud de su desplazamiento disminuye, lo cual indica que su posición original ha invertido el sentido de su recorrido, por tanto, la magnitud de su desplazamiento es negativo pues d_2 es menor que d_1. En consecuencia, la magnitud de la velocidad también será negativa, porque el desplazamiento lo es. Por último, el móvil detiene su movimiento totalmente, porque la magnitud del desplazamiento es la misma al transcurrir el tiempo.

4. Con los datos de la magnitud del desplazamiento de un móvil en función del tiempo, se obtuvo la siguiente gráfica:



a) ¿Qué posición tenía el móvil antes de iniciar su movimiento?

b) ¿Cómo se comporta la magnitud de la velocidad del móvil durante los primeros 2 segundos y cuál es su valor?

c) ¿Qué magnitud tiene la velocidad durante el intervalo de tiempo entre los puntos B y C?

d) ¿Cuál fue la posición más alejada del móvil?

e) ¿En qué instante invirtió el sentido de su recorrido?

f) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del móvil del punto C al D?

g) ¿Regresó al punto de partida?

Solución:

a) La posición del móvil era de 10 m antes de iniciar su movimiento.

b) La magnitud de la velocidad del móvil permanece constante y su magnitud es:

$$v = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{30\text{ m} - 10\text{ m}}{2\text{ s} - 0} = \frac{20\text{ m}}{2\text{ s}} = 10\text{ m/s}$$

c) Entre los puntos B y C el móvil permanece detenido, pues no se mueve durante el intervalo de tiempo que va de los 2 a los 5 segundos, conservando su posición de 30 m. Por tanto, la velocidad es cero.

d) La posición más alejada del móvil fue de 30 m.

e) El sentido de su recorrido lo invirtió a los 5 segundos y a los 30 m en el punto C.

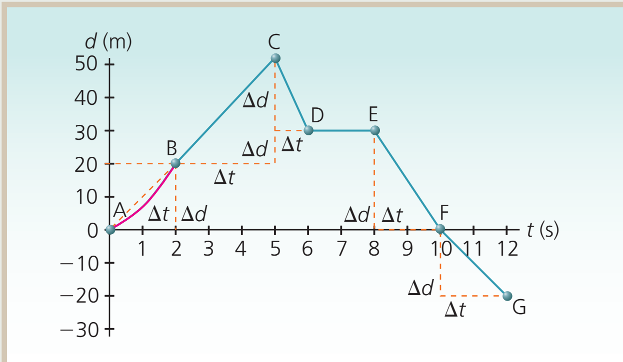
f) La magnitud de la velocidad del móvil se calcula con la pendiente de la recta que va de C a D, trazada en la gráfica:

$$v_{C-D} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{20\text{ m} - 30\text{ m}}{7\text{ s} - 5\text{ s}} = \frac{-10\text{ m}}{2\text{ s}} = -5\text{ m/s}$$

La magnitud de la velocidad tiene signo negativo, ya que la magnitud del desplazamiento es negativa; esto se observa en virtud de que el móvil invirtió su recorrido y, por tanto, d_2 es menor que d_1.

g) El móvil regresó a su punto de partida, porque a los 8 segundos, instante en que terminó su recorrido, se encuentra de nuevo en la posición de 10 m, misma que tenía al iniciar su movimiento.

5. Con los datos de la magnitud del desplazamiento de un móvil en función del tiempo, se obtuvo la siguiente gráfica:



a) ¿Qué posición tenía el móvil antes de iniciar su movimiento?

b) ¿Cómo se comportó la magnitud de la velocidad en el intervalo de tiempo de 0 a 2 segundos? ¿Cuál es la magnitud de la velocidad media durante este intervalo de tiempo?

c) ¿Cómo es la magnitud de la velocidad en el intervalo de tiempo de 2 a 5 segundos y cuánto vale?

d) ¿En qué instante invirtió el sentido de su recorrido?

e) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del punto C al D?

f) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del punto D al E?

g) ¿En qué instante pasó por el mismo punto de donde partió al iniciar su movimiento?

h) ¿Cuál fue la magnitud de su máximo desplazamiento y en qué instante?

i) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad del punto E al F y de F a G?

j) ¿Cuál fue su posición final y a qué tiempo?

k) Determine la magnitud de la velocidad del móvil en cada segundo de su recorrido y, con los datos de la magnitud de la velocidad en función del tiempo, construya la gráfica de magnitudes de la velocidad-tiempo e interprétela.

l) Determine la magnitud del desplazamiento total del móvil, calculando las áreas obtenidas de la gráfica de magnitud de la velocidad-tiempo.

Sugerencia: Antes de ver las respuestas trate de contestar las preguntas con el objetivo de verificar si ya aprendió a interpretar las gráficas de magnitud del desplazamiento-tiempo.

Solución:

a) La posición del móvil antes de iniciar su movimiento se encuentra en el origen, es decir, desplazamiento cero a un tiempo cero.

b) La magnitud de la velocidad fue aumentando en el intervalo de 0 a 2 segundos. Como la magnitud fue variando, determinamos la magnitud de la velocidad media; para ello, trazamos una recta hipotética de A a B como se ve en la gráfica y determinamos el valor de su pendiente:

$$v_m = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{20 \text{ cm} - 0}{2 \text{ s} - 0} = \frac{20 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

c) En el intervalo de tiempo de 2 a 5 segundos la magnitud de la velocidad permanece constante, ya que la línea de B a C es recta. El valor de la pendiente, es decir, la magnitud de la velocidad es:

$$v_{B-C} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{50 \text{ cm} - 20 \text{ cm}}{5 \text{ s} - 2 \text{ s}} = \frac{30 \text{ cm}}{3 \text{ s}} = 10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

d) Invirtió el sentido de su recorrido a los 5 segundos, pues de un desplazamiento cuya magnitud es de 50 cm pasó a uno de 30 cm a los 6 segundos regresándose 20 cm durante ese intervalo de tiempo.

e) La magnitud de la velocidad del punto C al D calculada con la pendiente de la recta, tiene una magnitud de:

$$v_{C-D} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{30 \text{ cm} - 50 \text{ cm}}{6 \text{ s} - 5 \text{ s}} = \frac{-20 \text{ cm}}{1 \text{ s}} = -20 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

La magnitud de la velocidad es negativa porque la magnitud del desplazamiento es negativa: d_2 menor que d_1.

f) La velocidad del punto D al E es igual a cero, pues la pendiente de la recta también es cero por no producirse ningún desplazamiento durante el intervalo de 6 a 8 segundos.

g) El instante en que el móvil pasa por el origen, o el punto donde inició su movimiento, es a los 10 segundos (punto F).

h) La magnitud máxima de su desplazamiento fue de 50 cm a los 5 segundos.

i) La magnitud de la velocidad del punto E al F es:

$$v_{E-F} = \frac{\vec{d}_2 - \vec{d}_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 - 30 \text{ cm}}{10 \text{ s} - 8 \text{ s}} = \frac{-30 \text{ cm}}{2 \text{ s}} = -15 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

y de F a G es:

$$v_{F-G} = \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} = \frac{-20 \text{ cm} - 0}{12 \text{ s} - 10 \text{ s}} = \frac{-20 \text{ cm}}{2 \text{ s}} = -10 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

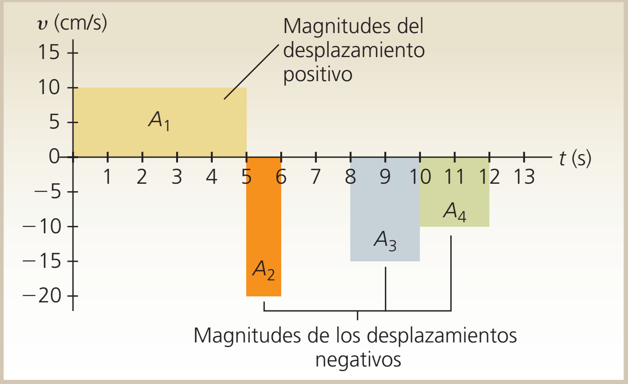
Son velocidades cuyas magnitudes son negativas porque el desplazamiento es negativo (d_2 menor que d_1).

j) La posición final es con una magnitud del desplazamiento de –20 cm a los 12 segundos.

k) Las magnitudes de las velocidades del móvil durante cada segundo de su recorrido los podemos determinar fácilmente:

v al 1er. segundo:	10 cm/s	magnitud de la velocidad
v al 2o. segundo:	10 cm/s	media de 0 a 2 s
v al 3er. segundo:	10 cm/s	magnitud de la velocidad
v al 4o. segundo:	10 cm/s	permanece constante
v al 5o. segundo:	10 cm/s	del 2o. al 5o. s
v al 6o. segundo:	–20 cm/s	magnitud de la velocidad de C a D
v al 7o. segundo:	0	
v al 8o. segundo:	0	
v al 9o. segundo:	–15 cm/s	magnitud de velocidad
v al 10o. segundo:	–15 cm/s	constante del 8o. al 10o. s
v al 11o. segundo:	–10 cm/s	magnitud de velocidad
v al 12o. segundo:	–10 cm/s	constante del 10o. al 12o. s

l) Finalmente, puesto que en una gráfica de rapidez o magnitudes de velocidad-tiempo el área bajo la curva representa la magnitud del desplazamiento de un móvil, en nuestra gráfica podemos determinar la magnitud del desplazamiento total del móvil, sumando las magnitudes de su desplazamiento positivo y su desplazamiento negativo.



Determinación de la magnitud del desplazamiento positivo:

$$A_1 = vt = 10 \text{ cm/s} \times 5 \text{ s} = 50 \text{ cm}$$

Determinación de la magnitud de su desplazamiento negativo:

$A_2 + A_3 + A_4$:

$A_2 = vt = -20 \text{ cm/s} \times 1 \text{ s} = -20 \text{ cm}$

$A_3 = vt = -15 \text{ cm/s} \times 2 \text{ s} = -30 \text{ cm}$

$A_4 = vt = -10 \text{ cm/s} \times 2 \text{ s} = -20 \text{ cm}$

$A_2 + A_3 + A_4 = -20 + (-30) + (-20 \text{ cm})$

Magnitud del desplazamiento negativo = –70 cm

Magnitud del desplazamiento total = magnitud del desplazamiento positivo + magnitud del desplazamiento negativo:

$$d_t = 50 \text{ cm} + (-70 \text{ cm}) = -20 \text{ cm}$$

Este resultado significa que finalmente el móvil quedó a 20 cm del punto de donde partió y con un sentido contrario al inicio de su desplazamiento.

Interpretación de la gráfica:

En la gráfica de rapidez o magnitud de la velocidad-tiempo vemos que hasta el quinto segundo la magnitud de la velocidad media del móvil es de 10 cm/s, después su velocidad es cero y cambia de sentido. En el sexto segundo alcanza una magnitud de máxima velocidad –20 cm/s (el signo menos indica un desplazamiento negativo). En el séptimo y octavo segundos su velocidad es cero, por tanto, el móvil permanece en reposo. En el noveno y décimo segundos la magnitud de su velocidad media es de –15 cm/s para, finalmente, disminuirla a –10 cm/s del décimo al doceavo segundos.

En general, en una gráfica de rapidez o magnitud de la velocidad-tiempo las magnitudes de las velocidades arriba del eje *t* (tiempo) son positivas y abajo del eje *t* son negativas, esto significa que si la magnitud de la velocidad es positiva la magnitud del desplazamiento también lo es y viceversa.

9 ACELERACIÓN Y MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA)

Aceleración

En nuestra vida cotidiana observamos distintos cuerpos en movimiento. La mayoría de ellos no se mueven a velocidad constante, pues ésta varía, ya sea aumentando o disminuyendo su magnitud o cambiando de dirección. Por ejemplo: un autobús de pasajeros en un día de tránsito pesado aumenta y disminuye constantemente la magnitud de su velocidad, lo que fuerza a los pasajeros a mantenerse alertas, sujetándose fuertemente para no sufrir una caída. Un auto de carreras aumenta la magnitud de su velocidad cuando la pista tiene un tramo recto; sin embargo, al acercarse a una curva disminuye la magnitud de su velocidad y luego la vuelve a aumentar (figura 4.5).

4.5 Un cuerpo físico tiene aceleración cuando cambia su velocidad con respecto al tiempo, ya sea que la aumente o la disminuya, o bien, cuando cambia su dirección.

Siempre que un cuerpo tiene un cambio en la magnitud de su velocidad con respecto al tiempo, ya sea positivo, cuando la magnitud de la velocidad final es mayor que la de la velocidad inicial o bien un cambio negativo, cuando la magnitud de la velocidad final es menor a la de la velocidad inicial, o cuando cambia su dirección, decimos que ha tenido una aceleración. Cuando la aceleración es negativa, es común decir que existe una desaceleración. Así pues, la aceleración será positiva si el cambio en la velocidad también es positivo, y será negativa si el cambio en la velocidad es negativo.

La aceleración es una magnitud vectorial, ya que requiere que se especifique su dirección y sentido para quedar definida. En conclusión: La aceleración representa el cambio en la velocidad de un cuerpo en un tiempo determinado, por tanto, la magnitud de la aceleración la podemos calcular así:

$$\text{Magnitud de la aceleración} = \frac{\text{Cambio de la magnitud de la velocidad}}{\text{Tiempo en que ocurre el cambio}} = \frac{\Delta v}{t}$$

como $\Delta v = v_f - v_0$

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} \qquad (1)$$

donde: a = magnitud de la aceleración del móvil en m/s^2 o cm/s^2

v_f = magnitud de la velocidad final del móvil en m/s o cm/s

v_0 = magnitud de la velocidad inicial del móvil en m/s o cm/s

t = tiempo en que se produce el cambio en la magnitud de la velocidad en segundos (s)

Cuando el móvil parte del reposo, su velocidad inicial es igual a cero (v_0 = 0) y la magnitud de su aceleración es igual a:

$$a = \frac{v}{t} \qquad (2)$$

Para determinar las unidades de aceleración, sustituimos las unidades de velocidad y tiempo, según el sistema de unidades utilizado:

Sistema Internacional (SI):

$$a = \frac{\frac{m}{s}}{s} = \frac{m}{s^2}$$

Sistema Cegesimal (CGS):

$$a = \frac{\frac{cm}{s}}{s} = \frac{cm}{s^2}$$

Cuando el móvil no parte del reposo, entonces en el intervalo de tiempo en el cual se considera su movimiento, ya lleva una velocidad inicial diferente de cero ($v_0 \neq 0$), y la magnitud de su aceleración se determina con la ecuación 1.

Comúnmente, al conocer la magnitud de la aceleración de un móvil y la magnitud de su velocidad inicial se desea calcular la magnitud de la velocidad final al cabo de cierto tiempo. Por tanto, despejando por pasos v_f de la ecuación 1 tenemos:

$$at = v_f - v_0$$

$$\therefore v_f = v_0 + at$$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA)

Se tiene un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado cuando la magnitud de la velocidad experimenta cambios iguales en cada unidad de tiempo. En este movimiento la magnitud de la aceleración permanece constante al transcurrir el tiempo. Por ejemplo, si un automóvil al viajar en línea recta lleva una velocidad cuya magnitud es de 2 m/s al primer segundo, una velocidad con una magnitud de 4 m/s al segundo segundo y una velocidad con una magnitud de 6 m/s al tercer segundo, decimos que la magnitud de su velocidad cambia 2 m/s cada segundo. De donde su aceleración es constante en los tres segundos y cuya magnitud es 2 m/s^2.

Aceleración media

De la misma manera como sucede con las velocidades de un móvil que no son constantes, sino que varían durante su movimiento, la aceleración también puede estar variando, toda vez que no siempre es constante. Por tanto, cuando un móvil varía su velocidad es conveniente determinar la magnitud de su aceleración media, conociendo la magnitud de su cambio de velocidad y el tiempo en realizar dicho cambio:

$$a_m = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Aceleración instantánea

Cuando en el movimiento acelerado de un cuerpo los intervalos de tiempo considerados son cada vez más pequeños, la aceleración media se aproxima a una aceleración instantánea.

Cuando el intervalo de tiempo es tan pequeño que tiende a cero, la aceleración del móvil será instantánea y su magnitud se determina con la expresión:

$$a_{\text{inst}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Si la aceleración media de un móvil no permanece constante y se desea conocer la magnitud de la aceleración del móvil en un momento dado, se debe calcular la magnitud de la aceleración instantánea.

Gráficas de magnitud del desplazamiento-tiempo, magnitud del desplazamieto-tiempo al cuadrado, magnitud de la velocidad-tiempo y magnitud de la aceleración-tiempo, para el MRUA

De acuerdo con lo estudiado en la parte correspondiente al movimiento rectilíneo uniforme, se concluye lo siguiente: siempre que tengamos una gráfica de magnitud del desplazamiento-tiempo, la pendiente de la curva representará la magnitud de la velocidad, y en una gráfica de magnitud de la velocidad-tiempo, el área bajo la curva representará la magnitud del desplazamiento del móvil.

Al estudiar ahora las gráficas para un MRUA encontraremos que en una gráfica de magnitud del desplazamiento-tiempo al cuadrado, la pendiente de la curva representa la mitad de la magnitud de la aceleración experimentada por un móvil durante su recorrido. En una gráfica de magnitud de la velocidad-tiempo, la pendiente de la curva representa la magnitud de la aceleración y, finalmente, en una gráfica de magnitud de la aceleración-tiempo, el área bajo la curva representa la magnitud de la velocidad del móvil.

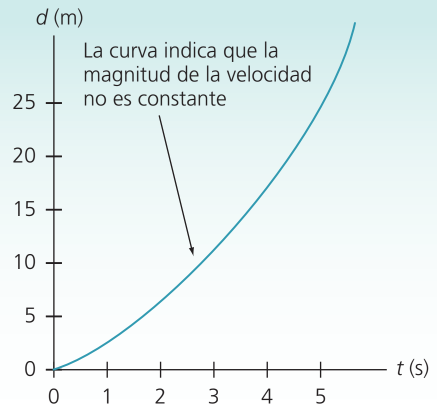
Resolución de un problema de MRUA e interpretación de gráficas

Como resultado del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de un móvil se obtuvieron los datos del cuadro 4.2.

cuadro 4.2	Datos del móvil	
Tiempo (s)	Magnitud del desplazamiento (s)	Magnitud de la velocidad instantánea (m/s)
0	0	0
1	1	2
2	4	4
3	9	6
4	16	8
5	25	10

1. Grafique las magnitudes del desplazamiento en función del tiempo e interprete la gráfica. Si al unir los puntos la línea no es recta, ¿qué sugiere hacer para que lo sea?
2. Grafique los datos de la magnitud de la velocidad instantánea en función del tiempo. ¿Qué obtuvo al unir los puntos? ¿Cuál es el valor de la pendiente de la recta?
3. Grafique los datos de la magnitud de la aceleración en función del tiempo e interprete el significado físico del área obtenida bajo la curva al unir los puntos.

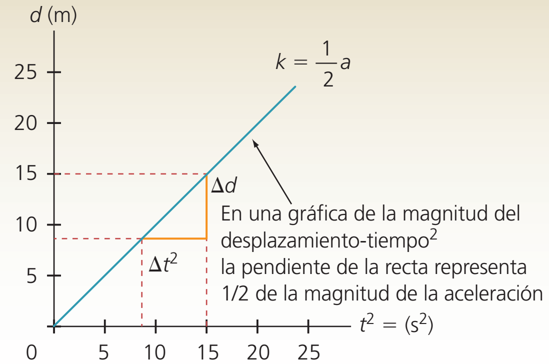
Gráfica 1



Solución:

Al unir los puntos no se obtiene una línea recta, esto es evidente, pues la magnitud de la velocidad no es constante, sino que varía uniformemente en cada unidad de tiempo. Por tanto, la magnitud del desplazamiento no es directamente proporcional al tiempo. Si se eleva el tiempo al cuadrado y graficamos las magnitudes del desplazamiento en función del tiempo al cuadrado, obtenemos la siguiente gráfica:

Gráfica 2



Al unir los puntos hemos obtenido una línea recta, la cual indica que la magnitud del desplazamiento es directamente proporcional al tiempo elevado al cuadrado:

$$d \propto t^2 \quad (1)$$

Si cambiamos el signo de proporcionalidad α por un signo de igual e incluimos una constante de proporcionalidad k, tendremos la expresión 1 de la siguiente manera:

$$d = kt^2 \quad (2)$$

Despejando a k tenemos:

$$k = \frac{d}{t^2} \quad (3)$$

Nuestra constante de proporcionalidad k tiene un valor que resulta de dividir la magnitud del desplazamiento entre su correspondiente tiempo al cuadrado. Debido a que k es constante, en todos los casos su valor será igual a la pendiente de la recta (gráfica 2).

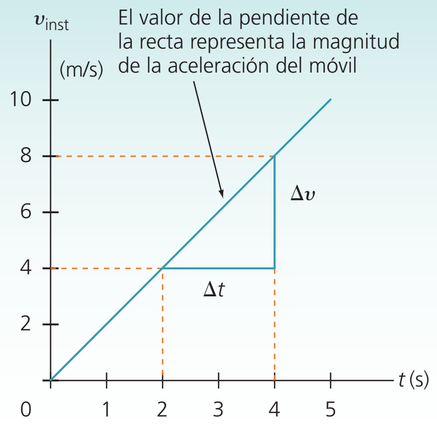
$$k = \frac{16\ \text{m} - 9\ \text{m}}{16\ \text{s}^2 - 9\ \text{s}^2} = \frac{7\ \text{m}}{7\ \text{s}^2} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Este valor es exactamente la mitad de la magnitud de la aceleración que el móvil experimenta durante su recorrido. Por tanto, la magnitud de la aceleración será igual a:

$$a = 2k = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

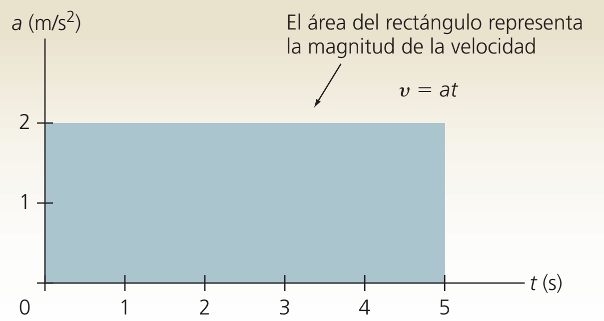
La magnitud de la aceleración también la obtenemos con la pendiente de la gráfica de magnitud de la velocidad instantánea en función del tiempo (gráfica 3).

Gráfica 3



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{8\frac{\text{m}}{\text{s}} - 4\frac{\text{m}}{\text{s}}}{4\ \text{s} - 2\ \text{s}} = \frac{4\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\ \text{s}} = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Como la magnitud de la aceleración permanece constante, si la graficamos en función del tiempo tenemos la siguiente gráfica:



El área obtenida al unir los puntos en una gráfica de la magnitud de la aceleración en función del tiempo, representa la magnitud de la velocidad del móvil. Al multiplicar la base (o tiempo) por la altura (o magnitud de la aceleración), tenemos:

$$v = at = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 5\ \text{s} = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

De donde para el quinto segundo la magnitud de la velocidad del móvil es de 10 m/s.

Deducción de las ecuaciones utilizadas en el MRUA

Como hemos observado en el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado; la velocidad cambia constantemente de magnitud; por ello, si se desea conocer la magnitud del desplazamiento en cualquier tiempo, se puede obtener si utilizamos el concepto de velocidad media que ya estudiamos:

$$v_m = \frac{v_f + v_0}{2}$$

como: $d = v_m t \ \therefore \ d = \dfrac{v_f + v_0}{2}t$

A partir de estas expresiones deduciremos las ecuaciones que se utilizan para calcular las magnitudes de los desplazamientos y velocidades finales cuando el movimiento tiene aceleración constante.

$$v_m = \frac{d}{t} \qquad (1)$$

$$d = v_m t \qquad (2)$$

$$v_m = \frac{v_f + v_0}{2} \qquad (3)$$

Sustituyendo 3 en 2:

$$d = \frac{v_f + v_0}{2}t \qquad (4)$$

Sabemos que:

$$v_f = v_0 + at \qquad (5)$$

Sustituyendo 5 en 4:

$$d = \frac{v_0 + at + v_0}{2}t \qquad (6)$$

$$d = \frac{v_0 + at}{2}t \qquad (7)$$

Multiplicando por t y dividiendo entre 2:

$$d = v_0 t + \frac{at^2}{2} \qquad (8)$$

si $v_0 = 0$

$$d = \frac{at^2}{2} \qquad (9)$$

Para calcular la magnitud de las velocidades finales en un MRUA partimos de la ecuación:

$$d = \frac{v_f + v_0}{2}t \qquad (4)$$

Sabemos que:

$$a = \frac{v_f - v_0}{2} \qquad (10)$$

Multiplicando 10 por 4:

$$ad = \frac{(v_f - v_0)}{t}\frac{(v_f + v_0)}{2}t \qquad (11)$$

$$ad = \frac{(v_f^2 - v_0^2)}{2} \qquad (12)$$

Despejando la magnitud de la velocidad final:

$$v_f^{\,2} = v_0^{\,2} + 2ad \qquad (13)$$

si $v_0 = 0$

$$v_f^{\,2} = 2ad \qquad (14)$$

De la ecuación 12 podemos despejar la magnitud del desplazamiento:

$$d = \frac{(v_f^2 - v_0^2)}{2a} \qquad (15)$$

si $v_0 = 0$

$$d = \frac{v_f^2}{2a} \qquad (16)$$

En conclusión, para calcular las magnitudes de los desplazamientos y las velocidades finales en un MRUA, tenemos varias ecuaciones que usaremos dependiendo de las situaciones en las cuales se presente el movimiento, es decir, si hay o no velocidad inicial, además de los datos conocidos. Las siguientes fórmulas resumen las ecuaciones utilizadas cuando **el movimiento es uniformemente acelerado**:

a) Ecuaciones para calcular las magnitudes de los desplazamientos en un movimiento uniformemente acelerado.

1. $d = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ 2. $d = \frac{v_f^2 - v_0^2}{2a}$ 3. $d = \frac{v_f + v_0}{2}t$

Cualquiera de estas tres ecuaciones nos da el mismo resultado, por tanto, su uso sólo depende de los datos del problema, y si éstos pueden sustituirse en cualquiera de ellas se escogerá la que nos resulte más sencilla.

Cuando se desea conocer la magnitud del desplazamiento de un móvil y éste parte del reposo, la velocidad inicial vale cero y las tres ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes expresiones:

1. $d = \frac{at^2}{2}$ 2. $d = \frac{v_f^2}{2a}$ 3. $d = \frac{v_f}{2}t$

b) Ecuaciones para calcular la magnitud de las velocidades finales en un movimiento uniformemente acelerado.

1. $v_f = v_0 + at$
2. $v_f^{\,2} = v_0^{\,2} + 2ad$

Igual que en el caso de los desplazamientos, para calcular la magnitud de la velocidad de un móvil uniformemente acelerado tenemos la opción de emplear cualquiera de las dos ecuaciones, dependiendo de los datos o de la que nos resulte más sencilla.

Cuando se desea conocer la magnitud de la velocidad final que alcanzará un móvil cuando parte del reposo, tendremos que en esa circunstancia la velocidad inicial es cero y las dos ecuaciones anteriores se reducen a las siguientes expresiones:

1. $v_f = at$
2. $v_f^{\,2} = 2ad$

Resolución de problemas de MRUA

1. Un avión vuela en la misma dirección y sentido a 980 km/h durante un tiempo de 8 minutos. ¿Cuál es su aceleración durante ese intervalo de tiempo y por qué?

Solución:

La aceleración es igual a cero, ya que no hay cambio en la velocidad.

2. Un automóvil parte del reposo y experimenta una aceleración cuya magnitud es de 1.5 m/s^2. ¿Qué distancia habrá recorrido después de 2 segundos?

Solución:

Datos

$v_0 = 0$

$a = 1.5\ \text{m/s}^2$

$t = 2\ \text{s}$

$d = ?$

Fórmula

$$d = \frac{at^2}{2}$$

Sustitución y resultado

$$d = \frac{1.5\frac{\text{m}}{\text{s}^2}(2\ \text{s})^2}{2} = 3\ \text{m}$$

3. Un camioneta adquiere una velocidad de 50 km/h al norte en 6 s. ¿Cuál es su aceleración en m/s^2?

Solución:

Datos

$v = 50$ km/h al norte

$t = 6$ s

$a = ?$ m/s^2

Fórmula

$$a = \frac{v}{t}$$

Transformación de unidades

$$50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = 13.89\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sustitución y resultado

$$a = \frac{13.89\text{ m/s}}{6\text{ s}} = 2.315\text{ m/s}^2$$

$\therefore \vec{a} = 2.315$ m/s^2 al norte

4. Un camión lleva una velocidad inicial de 6 m/s al norte; a los 4 segundos su velocidad es de 8 m/s.

Calcular:

a) Su aceleración media.

b) Su desplazamiento en ese tiempo.

Solución:

Datos

$v_0 = 6$ m/s

$t = 4$ s

$v_f = 8$ m/s

a) $a = ?$

b) $d = ?$

Fórmulas

a) $a = \dfrac{v_f - v_0}{t}$

b) $d = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

Sustitución y resultados

a) $a = \dfrac{8\text{ m/s} - 6\text{ m/s}}{4\text{ s}} = 0.5\text{ m/s}^2$

$\vec{a} = 0.5$ m/s^2 al norte

b) $d = 6\text{ m/s} \times 4\text{ s} + \dfrac{0.5\text{ m/s}^2 (4\text{ s})^2}{2}$

$d = 24\text{ m} + 4\text{ m} = 28\text{ m}$

$\vec{a} = 28$ m al norte

5. Determine la rapidez que llevará un muchacho en su patineta a los 6 segundos, si al bajar por una pendiente adquiere una aceleración cuya magnitud es de 0.7 m/s^2 y parte con una rapidez inicial de 4 m/s.

Solución:

Datos

$v_f = ?$

$t = 6$ s

$a = 0.7$ m/s^2

$v_0 = 4$ m/s

Fórmula

$v_f = v_0 + at$

Sustitución y resultado

$v_f = 4\text{ m/s} + (0.7\text{ m/s}^2 \times 6\text{ s}) = 4\text{ m/s} + 4.2\text{ m/s}$

$= 8.2$ m/s

6. Un barco parte del reposo hacia el este y en 0.2 minutos alcanza una velocidad de 30 km/h.

Calcular:

a) ¿Cuál fue su aceleración en m/s^2?

b) ¿Cuántos metros se desplazó en ese tiempo?

Solución:

Datos

$v_0 = 0$

$t = 0.2$ min

$v_f = 30$ km/h

a) $a = ?$

b) $d = ?$

Fórmulas

a) $a = \dfrac{v}{t}$

b) $d = \dfrac{at^2}{2}$

Transformación de unidades

$$0.2\text{ min} \times \frac{60\text{ s}}{1\text{ min}} = 12\text{ s}$$

$$30\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = 8.33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sustitución y resultados

a) $a = \dfrac{8.33\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{12\text{ s}} = 0.69\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \therefore \quad \vec{a} = 0.69\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$ al este

b) $d = \dfrac{0.69\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}(12\text{ s})^2}{2} = 49.68\text{ m}$

$\vec{d} = 49.68$ m al este

7. Un tráiler parte del reposo al norte y experimenta una aceleración cuya magnitud es de 0.3 m/s^2 durante 0.5 minutos.

Calcular:

a) ¿Qué distancia recorre en ese tiempo?

b) ¿Qué velocidad lleva?

Solución:

Datos

$v_0 = 0$

$a = 0.3\ \text{m/s}^2$

$t = 0.5\ \text{min}$

a) $d = ?$

b) $v_f = ?$

Fórmulas

a) $d = \dfrac{at^2}{2}$

b) $v_f = at$

Transformación de unidades

$$0.5\ \text{min} \times \frac{60\ \text{s}}{1\ \text{min}} = 30\ \text{s}$$

Sustitución y resultados

a) $d = \dfrac{0.3\ \text{m/s}^2 (30\ \text{s})^2}{2} = 135\ \text{m}$

b) $v_f = 0.3\ \text{m/s}^2 \times 30\ \text{s} = 9\ \text{m/s}$

$\vec{v}_f = 9$ m/s al norte

8. Un coche tiene una velocidad inicial de 4 m/s al este y experimenta una aceleración cuya magnitud es de 2 m/s^2, la cual dura 12 segundos.

Calcular:

a) ¿Qué desplazamiento tiene a los 12 segundos?

b) ¿Qué velocidad lleva a los 12 segundos?

Solución:

Datos

$v_0 = 4\ \text{m/s}$

$a = 2\ \text{m/s}^2$

$t = 12\ \text{s}$

a) $d = ?$

b) $v_f = ?$

Fórmulas

a) $d = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

b) $v_f = v_0 + at$

Sustitución y resultados

a) $d = 4\ \text{m/s} \times 12\ \text{s} + \dfrac{2\ \text{m/s}^2 (12\ \text{s})^2}{2} = 48\ \text{m} + 144\ \text{m}$

$\vec{d} = 192$ m al este

b) $v_f = 4\ \text{m/s} + (2\ \text{m/s}^2 \times 12\ \text{s}) = 4\ \text{m/s} + 24\ \text{m/s}$

$\vec{v}_f = 28$ m/s al este

9. Un camión de pasajeros con una rapidez de 20 km/h se lanza cuesta abajo de una pendiente y adquiere una rapidez de 70 km/h en 1 minuto. Si se considera que su aceleración fue constante.

Calcular:

a) La magnitud de la aceleración en m/s^2.

b) La distancia recorrida en metros durante ese tiempo.

Solución:

Datos

$v_0 = 20\ \text{km/h}$

$v_f = 70\ \text{km/h}$

$t = 1\ \text{min}$

a) $a = ?$

b) $d = ?$

Fórmulas

a) $a = \dfrac{v_f - v_0}{t}$

b) $d = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

Transformación de unidades

$$v_0 = 20\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \times \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = 5.55\ \text{m/s}$$

$$v_f = 70\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\ \text{m}}{1\ \text{km}} \times \frac{1\ \text{h}}{3600\ \text{s}} = 19.44\ \text{m/s}$$

$t = 1\ \text{min} = 60\ \text{s}$

Sustitución y resultados

a) $a = \dfrac{19.44\ \text{m/s} - 5.55\ \text{m/s}}{60\ \text{s}} = 0.23\ \text{m/s}^2$

b) $d = 5.55\ \text{m/s} \times 60\ \text{s} + \dfrac{0.23\ \text{m/s}^2 (60\ \text{s})^2}{2}$

$= 333\ \text{m} + 414\ \text{m} = 747\ \text{m}$

10. Una lancha con motor fuera de borda arranca desde el reposo y mantiene una aceleración constante cuya magnitud es de 0.14 m/s^2.

Calcular:

a) ¿En qué tiempo recorrerá una distancia de 1.3 km?

b) ¿Qué rapidez llevará en ese tiempo en m/s y en km/h?

Solución:

Datos

$v_0 = 0$

$a = 0.14\ \text{m/s}^2$

$d = 1.3\ \text{km}$

$= 1\,300\ \text{m}$

a) $t = ?$

b) $v_f = ?$

Fórmulas

a) $d = \dfrac{at^2}{2} \quad \therefore \quad t = \sqrt{\dfrac{2d}{a}}$

b) $v_f = at$

Sustitución y resultados

a) $t = \sqrt{\dfrac{2 \times 1300\ \text{m}}{0.14\ \text{m/s}^2}} = 136.28\ \text{s}$

b) $v_f = 0.14\ \text{m/s}^2 \times 136.28\ \text{s} = 19.08\ \text{m/s}$

Transformación de unidades

$$19.08\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times \frac{1\ \text{km}}{1000\ \text{m}} \times \frac{3600\ \text{s}}{1\ \text{h}} = 68.7\ \text{km/h}$$

11. Un autobús de pasajeros que viaja al norte con una velocidad de 70 km/h, aplica bruscamente los frenos y se detiene en 15 segundos.

Calcular:

a) La aceleración.

b) La distancia total recorrida desde que aplicó los frenos hasta detenerse.

c) La velocidad que lleva a los 6 segundos de haber aplicado los frenos.

d) La distancia que recorrió durante los primeros 6 segundos de haber frenado.

Dar todos los resultados en unidades del Sistema Internacional.

Solución:

Datos

$v_0 = 70$ km/h

$t = 15$ s

a) $a = ?$

b) $d_{\text{total}} = ?$

c) $v_{\text{a los 6 s}} = ?$

d) $d_{\text{a los 6 s}} = ?$

Fórmulas

a) $a = \dfrac{v_f - v_0}{t}$

b) $d = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

c) $v = v_0 + at$

d) $d = \dfrac{v_f + v_0}{2}t$

Transformación de unidades

$$v_0 = 70\frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = 19.44\text{ m/s}$$

Sustitución y resultados

a) $a = \dfrac{0 - 19.44\text{ m/s}}{15\text{ s}} = -1.3\text{ m/s}^2$

$\vec{a} = -1.3\text{ m/s}^2$ al norte

b) $d_{\text{total}} = 19.44\text{ m/s} \times 15\text{ s} + \dfrac{-1.3\text{ m/s}^2(15\text{ s})^2}{2}$

$= 291.6\text{ m} - 146.25\text{ m} = 145.35\text{ m}$

c) $v_{6\text{ s}} = 19.44\text{ m/s} + (-1.3\text{ m/s}^2 \times 6\text{ s})$

$= 19.44\text{ m/s} - 7.8\text{ m/s} = 11.64\text{ m/s}$

$\vec{v} = -11.64\text{ m/s}^2$ al norte

d) $d_{6\text{ s}} = \dfrac{11.64\text{ m/s} + 19.44\text{ m/s}}{2}(6\text{ s})$

$= 15.54\text{ m/s} \times 6\text{ s} = 93.24\text{ m}$

o bien: $d_{6\text{ s}} = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

Sustituyendo:

$$d_{6\text{ s}} = 19.44\text{ m/s} \times 6\text{ s} + \frac{-1.3\text{ m/s}^2(6\text{ s})^2}{2} = 93.24\text{ m}$$

12. Una avioneta lleva una velocidad de 110 km/h al norte en el momento en que inicia su aterrizaje y ha recorrido 1.3 km antes de detenerse. Si la aceleración es constante, determinar en unidades del Sistema Internacional:

Calcular:

a) La aceleración.

b) El tiempo que emplea para detenerse.

c) La distancia que recorre a los 7 segundos de haber iniciado su aterrizaje.

Solución:

Datos

$v_0 = 110$ km/h

$= 30.55$ m/s

$d = 1.3$ km

$= 1\,300$ m

a) $a = ?$

b) t en parar $= ?$

c) d a los 7 s $= ?$

Fórmulas

a) $v_f^{\,2} = v_0^{\,2} + 2ad$

como $v_f = 0$ tenemos que:

$a = -\dfrac{v_0^2}{2d}$

b) $v_f = v_0 + at$

$\therefore t = -\dfrac{v_0}{a}$

c) $d = v_0 t + \dfrac{at^2}{2}$

Sustitución y resultados

a) $v_f = 0 = v_0^2 + 2ad \quad \therefore \quad a = -\dfrac{v_0^2}{2d}$

$a = -\dfrac{(30.55\text{ m/s}^2)}{2 \times 1300\text{ m}} = -0.359\text{ m/s}^2$

$\vec{a} = -0.359\text{ m/s}^2$ al norte

b) $v_f = 0 = v_0 + at \quad \therefore \quad t = -\dfrac{v_0}{a}$

$t = -\dfrac{30.55\text{ m/s}}{-0.359\text{ m/s}^2} = 85.1$ s en detenerse

c) $d = 30.55\text{ m/s} \times 7\text{ s} + \dfrac{-0.359\text{ m/s}^2(7\text{ s})^2}{2}$

$= 213.85\text{ m} - 8.8\text{ m} = 205.05\text{ m}$

Caída libre de los cuerpos y tiro vertical

Caída libre

Un cuerpo tiene una caída libre si desciende sobre la superficie de la Tierra y no sufre ninguna resistencia originada por el aire o cualquier otra sustancia. De manera práctica, cuando la resistencia del aire sobre los cuerpos es tan pequeña que se puede despreciar es posible interpretar su movimiento como una caída libre. Para cualquiera de nosotros es muy común observar la caída de los cuerpos sobre la superficie de la Tierra, pero, ¿nos hemos puesto a pensar en el tiempo que tardan en caer dos cuerpos de diferente tamaño desde una misma altura y de manera simultánea? Demos respuesta a esta interrogante experimentando con una hoja de papel y un cuaderno. Observemos que la hoja de papel cae más despacio y con un movimiento irregular, mientras la caída del cuaderno es vertical y es el primero en llegar al suelo. Ahora, hagamos una bolita con la hoja de papel comprimiéndola con las manos y dejémosla caer en forma simultánea con el cuaderno; el resultado será que ambos cuerpos caen verticalmente y al mismo tiempo, porque al comprimir la hoja de papel casi hemos eliminado los efectos de la resistencia del aire. Cuando en un tubo al vacío se dejan caer simultáneamente una pluma de ave, una piedra, una moneda y un pedazo de metal, su caída será vertical y al mismo tiempo, independientemente de su tamaño y peso, por tanto, su movimiento es en caída libre (figura 4.6). Aunque al caer al suelo un cuerpo sufre los efectos de la resistencia del aire, por lo general son despreciables y los consideramos como si fueran en caída libre.

El científico italiano Galileo Galilei fue el primero en demostrar en 1590 que todos los cuerpos, ya sean grandes o pequeños, en ausencia de fricción, caen a la Tierra con

4.6 Al extraer casi totalmente el aire del interior del recipiente, se elimina la fricción y los cuerpos caen al mismo tiempo.

la misma aceleración. Por tanto, si dejamos caer simultáneamente desde cierta altura una piedra grande y una pequeña, las dos piedras caerán al suelo en el mismo tiempo. Con base en estos resultados podemos afirmar que la aceleración gravitacional produce sobre los cuerpos con caída libre un movimiento uniformemente acelerado, motivo por el cual la magnitud de su velocidad aumenta en forma constante, mientras la aceleración permanece fija. La caída libre de los cuerpos es un ejemplo práctico de movimiento uniformemente acelerado.

Al hacer la medición de la magnitud de la aceleración de la gravedad en distintos lugares de la Tierra, se ha encontrado que ésta no es igual en todas partes, pues existen pequeñas diferencias; sin embargo, para fines prácticos la magnitud aceptada es de 9.8066 m/s^2, cantidad que redondeada puede considerarse en forma aproximada como 9.8 m/s^2.

Para hacer una correcta interpretación del fenómeno que se presenta durante una caída libre, en un tiro vertical o en un tiro parabólico, que veremos más adelante, al resolver problemas, debemos considerar que **la aceleración de la gravedad es una magnitud vectorial cuya dirección está dirigida hacia el centro de la Tierra**. Como ya se ha señalado, los vectores dirigidos hacia arriba son positivos, y los dirigidos hacia abajo son negativos; entonces, **puesto que la aceleración de la gravedad está dirigida hacia abajo, tendrá signo negativo**. Generalmente, se acostumbra representar a la aceleración de la gravedad con la letra g, y para fines prácticos se le da una magnitud de:

$$g = -9.8 \text{ m/s}^2$$

Para resolver problemas de caída libre se utilizan las mismas ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, resumidas en la Deducción de las ecuaciones utilizadas en el MRUA, pero se acostumbra cambiar la letra a de la magnitud de la aceleración por g que representa la magnitud de la aceleración de la gravedad, y la letra d de distancia por h que representa la altura. Por tanto, las ecuaciones generales para caída libre de los cuerpos serán:

1. $h = v_0 t + \dfrac{gt^2}{2}$
2. $h = \dfrac{v_f^2 - v_0^2}{2g}$
3. $h = \dfrac{v_f - v_0}{2} t$
4. $v_f = v_0 + gt$
5. $v_f^2 = v_0^2 + 2gh$

Efectos ocasionados por la resistencia del aire sobre los cuerpos durante su caída

Velocidad terminal

Con seguridad recuerda la sensación que experimenta en su cara y tronco cuando viaja rápido en una bicicleta, por ejemplo, en una bajada; o cuando va en un automóvil o autobús a una velocidad alta y se asoma por la ventana. Cuando un cuerpo sólido se mueve desplazándose en un fluido (líquidos y gases), como puede ser aire, agua, aceite, etc., experimenta una resistencia que se opone a su movimiento, es decir, se presenta una fuerza en sentido contrario al del movimiento del cuerpo. Dicha fuerza recibe el nombre de fuerza de fricción viscosa, y depende de la velocidad del sólido, de la viscosidad (resistencia que opone un fluido a fluir) del fluido, así como de la forma geométrica del cuerpo.

Cuando un paracaidista se lanza desde un avión recibe la fuerza de fricción viscosa del aire, que actúa hacia arriba, contrarrestando la fuerza de atracción de la gravedad, es decir, su peso que actúa hacia abajo. Cuando la fuerza de fricción viscosa del aire tiene la misma magnitud que la fuerza de atracción de la gravedad, la fuerza neta o resultante que actúa sobre el paracaidista es igual a cero, por lo que **su descenso lo realiza con una velocidad constante, que recibe el nombre de velocidad terminal,** cuya magnitud es aproximadamente de 200 km/h. Observe la figura 4.7.

4.7 El paracaidista alcanza su velocidad terminal cuando $F = P$.

En general, todo cuerpo al caer, como gotas de lluvia, granizo, paracaidista, etc., alcanzará **su velocidad terminal** cuando su peso tenga la misma magnitud que la fuerza debida a la resistencia del aire.

Esta velocidad dura muy pocos segundos, ya que al abrir su paracaídas la fuerza de fricción viscosa del aire se incrementa considerablemente y la velocidad terminal del paracaidista tendrá una magnitud muy por debajo de los 200 km/h.

Tiro vertical

Este movimiento se presenta cuando un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba observándose que la magnitud de su velocidad va disminuyendo hasta anularse al alcanzar su altura máxima. Inmediatamente inicia su regreso para llegar al mismo punto donde fue lanzado y adquiere la misma magnitud de velocidad con la cual partió. De igual manera, el tiempo empleado en subir es el mismo utilizado en bajar. En conclusión, el tiro vertical sigue las mismas leyes de la caída libre de los cuerpos y, por tanto, emplea las mismas ecuaciones.

En este tipo de movimiento generalmente resulta importante calcular la altura máxima alcanzada por un cuerpo, el tiempo que tarda en subir hasta alcanzar su altura máxima y el tiempo de permanencia en el aire; por tal motivo, haremos la deducción de las ecuaciones necesarias para calcular dichas magnitudes a partir de las ecuaciones generales para la caída libre de los cuerpos.

Para calcular la altura máxima que alcanza un cuerpo lanzado verticalmente hacia arriba usamos la ecuación:

$$v_f{}^2 = v_0{}^2 + 2\,gh$$

Cuando el cuerpo alcanza su altura máxima ($h_{\text{máx}}$) su velocidad final es cero, por consiguiente:

$$v_f{}^2 = 0 = v_0{}^2 + 2\,gh_{\text{máx}}$$

Despejando a la altura máxima tenemos:

$$\boxed{h_{\text{máx}} = -\frac{v_0^2}{2g}}$$

Para calcular el tiempo que tarda en subir utilizamos la ecuación:

$$v_f = v_0 + gt$$

Cuando el cuerpo alcanza su altura máxima ya no sube más y, como ya mencionamos, en ese instante su velocidad final es cero, por tanto:

$$v_f = 0 = v_0 + gt_{(\text{subir})}$$

Despejando al tiempo que tarda en subir [$t_{(\text{subir})}$] tenemos:

$$\boxed{t_{(\text{subir})} = -\frac{v_0}{g}}$$

Como el tiempo que tarda en subir es el mismo para bajar, entonces el tiempo de permanencia en el aire será:

$$t_{(\text{aire})} = 2\,t_{(\text{subir})}$$

es decir:

$$\boxed{t_{(\text{aire})} = -\frac{2v_0}{g}}$$

Resolución de problemas de caída libre y tiro vertical

1. Una niña deja caer una muñeca desde una ventana que está a 60 m de altura sobre el suelo.

Calcular:

a) ¿Qué tiempo tardará en caer?

b) ¿Con qué magnitud de velocidad choca contra el suelo?

Solución:

Datos	**Fórmulas**
$v_0 = 0$	a) $h = \frac{gt^2}{2} \quad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$
$h = -60$ m	
$g = -9.8$ m/s^2	b) $v_f = gt$
a) $t = ?$	
b) $v_f = ?$	

Sustitución y resultados

a) $t = \sqrt{\dfrac{2(-60\text{ m})}{-9.8\text{ m/s}^2}} = 3.5\text{ s}$

b) $v_f = -9.8\text{ m/s}^2 \times 3.5\text{ s} = -34.3\text{ m/s}$

2. Una maceta cae desde la azotea de un edificio y tarda en llegar al suelo 4 segundos.

Calcular:

a) La altura del edificio.

b) La magnitud de la velocidad con que choca contra el suelo.

Solución:

Datos	**Fórmulas**
$v_0 = 0$	a) $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$

$t = 4$ s

$g = -9.8$ m/s^2

a) $h = ?$

b) $v_f = ?$

b) $v_f = v_0 + gt$

Como $v_0 = 0$, las ecuaciones quedan:

a) $h = \frac{gt^2}{2}$

b) $v_f = gt$

Sustitución y resultados

a) $h = \frac{-9.8 \text{ m/s}^2 (4 \text{ s})^2}{2} = -78.4 \text{ m}$

El signo menos de la altura es porque se mide desde la azotea hasta el suelo.

b) $v_f = -9.8 \text{ m/s}^2 \times 4 \text{ s} = -39.2 \text{ m/s}$

El signo menos es porque la velocidad es hacia abajo.

3. Se lanza verticalmente hacia abajo una canica al vacío con una velocidad inicial cuya magnitud es de 5 m/s.

Calcular:

a) ¿Qué magnitud de velocidad llevará a los 3 segundos de su caída?

b) ¿Qué distancia recorrerá entre los segundos 3 y 4?

Solución:

Datos

$v_0 = -5$ m/s

$g = -9.8$ m/s^2

a) $v_{\text{a los 3 s}} = ?$

b) $d_{\text{entre 3 y 4 s}} = ?$

Fórmulas

a) $v_f = v_0 + at$

b) $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$

Sustitución y resultados

a) $v_f = -5 \text{ m/s} + (-9.8 \text{ m/s}^2 \times 3 \text{ s})$

$= -5 \text{ m/s} - 29.4 \text{ m/s} = -34.4 \text{ m/s}$

$d_{3\text{ s}} = -5 \text{ m/s} \times 3 \text{ s} + \frac{-9.8 \text{m/s}^2 (3 \text{ s})^2}{2}$

$= -15 \text{ m} - 44.1 \text{ m} = -59.1 \text{ m}$

b) $d_{4\text{ s}} = -5 \text{ m/s} \times 4 \text{ s} + \frac{-9.8 \text{m/s}^2 (4 \text{ s})^2}{2}$

$= -20 \text{ m} - 78.4 \text{ m} = -98.4 \text{ m}$

$d_{4\text{ s}} - d_{3\text{ s}} = -98.4 \text{ m} - (-59.1 \text{ m}) = -39.3 \text{ m}$

4. Un balón de voleibol es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad cuya magnitud es de 29.4 m/s.

Calcular:

a) ¿Qué altura habrá subido al primer segundo?

b) ¿Qué magnitud de velocidad llevará al primer segundo?

c) ¿Qué altura máxima alcanzará?

d) ¿Qué tiempo tardará en subir?

e) ¿Cuánto tiempo durará en el aire?

Solución:

Datos

$v_0 = 29.4$ m/s

(positiva porque va hacia arriba)

$g = -9.8$ m/s^2

a) $h_{1\text{ s}} = ?$

b) $v_{1\text{ s}} = ?$

c) $h_{\text{máx}} = ?$

d) $t_{(\text{subir})} = ?$

e) $t_{(\text{aire})} = ?$

Fórmulas

a) $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2}$

b) $v_f = v_0 + gt$

c) $h_{\text{máx}} = -\frac{v_0^2}{2\,g}$

d) $t_{(\text{subir})} = -\frac{v_0}{g}$

e) $t_{(\text{aire})} = 2t_{(\text{subir})}$

Sustitución y resultados

a) $h_{1\text{ s}} = 29.4 \text{ m/s} \times 1 \text{ s} + \frac{-9.8 \text{ m/s}^2 (1 \text{ s})^2}{2}$

$= 29.4 \text{ m} - 4.9 \text{ m} = 24.5 \text{ m}$

b) $v_{1\text{ s}} = 29.4 \text{ m/s} + (-9.8 \text{ m/s}^2 \times 1 \text{ s})$

$= 29.4 \text{ m/s} - 9.8 \text{ m/s} = 19.6 \text{ m/s}$

c) $h_{\text{máx}} = -\frac{(29.4 \text{ m/s})^2}{2(-9.8 \text{ m/s}^2)} = 44.1 \text{ m}$

d) $t_{(\text{subir})} = -\frac{29.4 \text{ m/s}}{-9.8 \text{ m/s}^2} = 3 \text{ s}$

e) $t_{(\text{aire})} = 2 \times 3 \text{ s} = 6 \text{ s}$