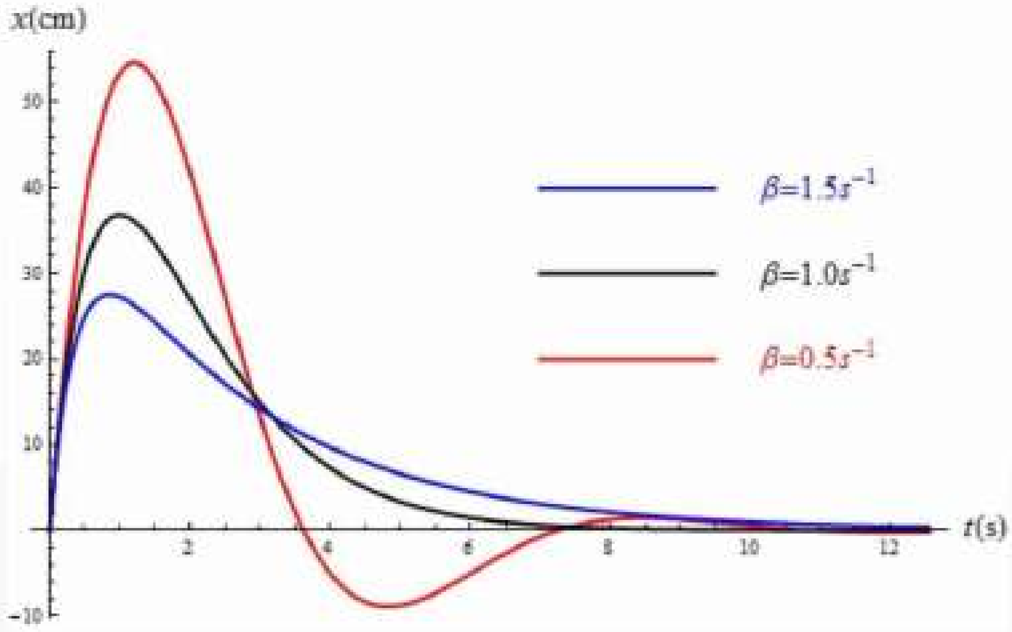
Vectores



Ing. Alex Zavala Chávez

Magnitudes escalares y Vectoriales

Magnitudes escalares y Vectoriales

- **Magnitudes Escalares**

Una magnitud escalar es aquella que queda completamente determinada con un número y sus correspondientes unidades como lo son la longitud de una barra, el volumen, la temperatura y masa de un cuerpo, es decir, no requieren más información.

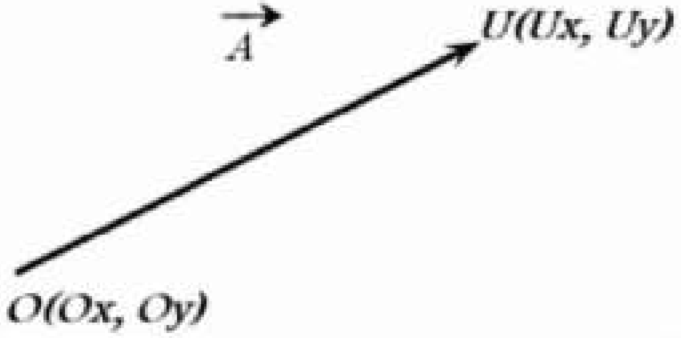
- **Magnitudes Vectoriales**

Una magnitud vectorial es aquella que, además de un valor numérico y sus unidades (al que se le denomina módulo) debemos especificar su dirección y sentido, por ejemplo, para la velocidad de un objeto no basta con conocer su magnitud, se requiere también conocer su dirección y el sentido de movimiento.

Vectores

Definición

Se llama vector a todo segmento orientado, es decir a todo segmento determinado por un par ordenado (O, U) de puntos. Al punto O se llama origen y el punto U se llama extremo del vector.



$$\vec{A} = \overrightarrow{OU} = U_x\hat{\imath} + U_y\hat{\jmath}$$

Se lo representa notacionalmente como $\overrightarrow{OU}$ o mediante el nombre que se le dé al vector

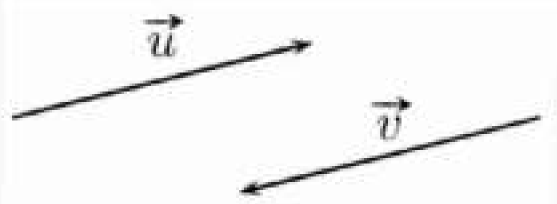
Partes de un vector

- **Dirección**

Está dada por la recta que lo contiene o por una paralela cualquiera a la misma

- **Sentido**

Está dado por la orientación de la flecha (cada dirección tiene dos sentidos)

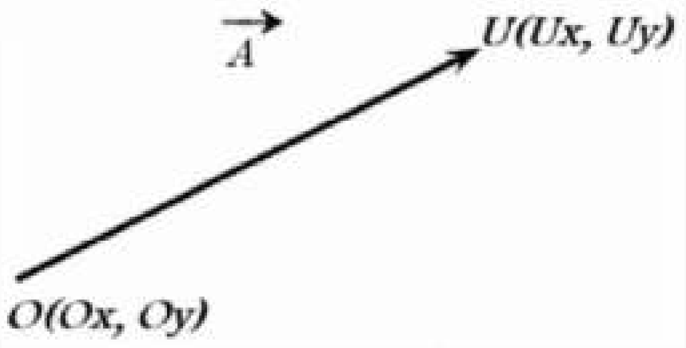


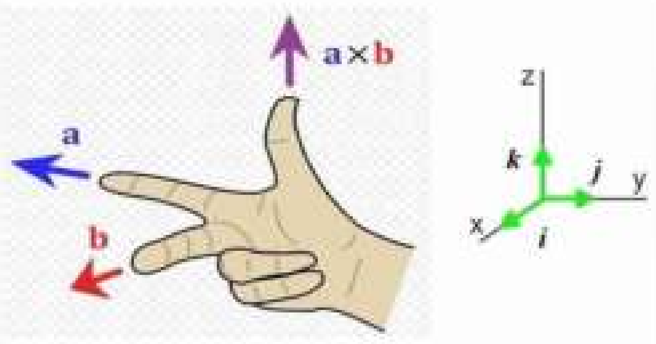
Definición

- **Módulo**

Determinada por la longitud del segmento orientado que define al vector, siendo siempre un valor **no negativo**. Se lo simboliza como $|\vec{A}|$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(U_x - O_x)^2 + \left(U_y - O_y\right)^2}$$



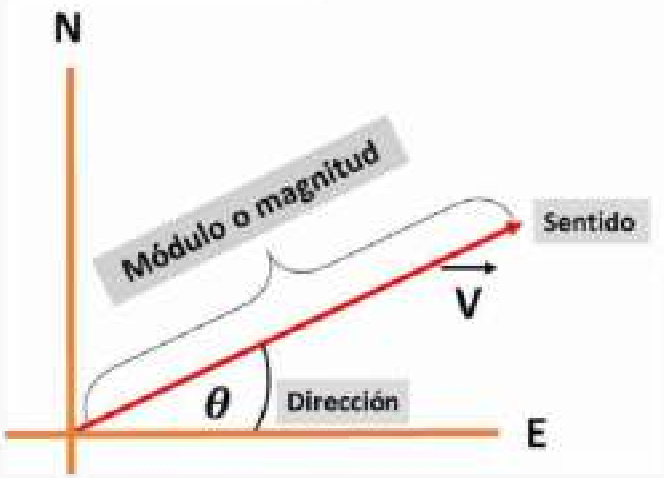


Vector Unitario

Vector Unitario

Vector cuyo modulo es la unidad, se lo denota mediante μ. Este vector da información de dirección y sentido de un vector.

$$\vec{\mu} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(U_x - O_x)\hat{\imath} + (U_y - O_y)\hat{\jmath}}{\sqrt{(U_x - O_x)^2 + (U_y - O_y)^2}}$$



$$\cos(\theta) = \frac{(U_x - O_x)}{\sqrt{(U_x - O_x)^2 + (U_y - O_y)^2}}$$

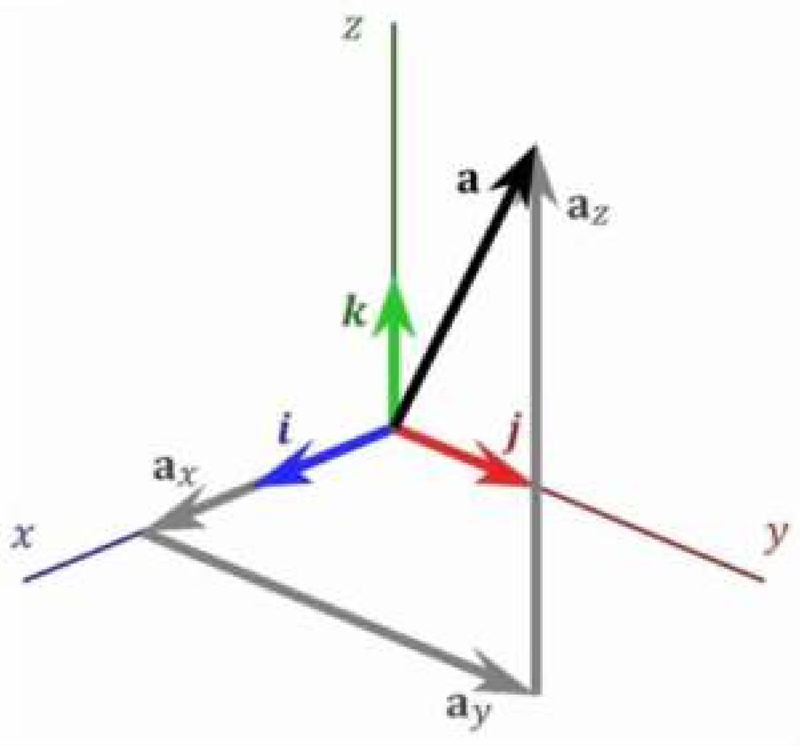
$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{(U_y - O_y)}{\sqrt{(U_x - O_x)^2 + (U_y - O_y)^2}}$$

$$\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Vectores en el espacio

Vectores en el espacio

Siendo una extensión de los vectores en el plano, mediante el uso de las coordenadas cartesianas se puede disponer lo siguiente:

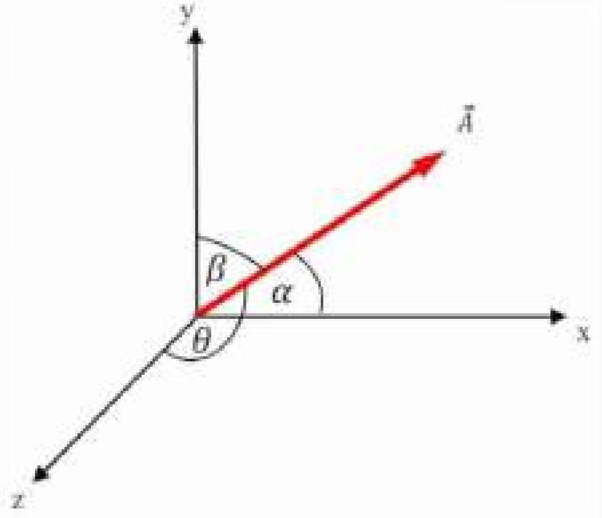


$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_x)^2 + (A_y)^2 + (A_z)^2}$$

Vectores en el espacio

- **Vector unitario**



$$\vec{\mu} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}}{\sqrt{(A_x)^2 + \left(A_y\right)^2 + (A_z)^2}}$$

- **Cosenos directores**

$$\cos(\alpha) = \frac{A_x}{\sqrt{(A_x)^2 + \left(A_y\right)^2 + (A_z)^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{A_z}{\sqrt{(A_x)^2 + \left(A_y\right)^2 + (A_z)^2}}$$

$$\cos(\beta) = \frac{A_y}{\sqrt{(A_x)^2 + \left(A_y\right)^2 + (A_z)^2}}$$

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\theta) = 1$$

Suma de Vectores

Suma de Vectores

La operación de suma de dos o más vectores da como resultado otro vector.

Para realizar la suma de vectores existen distintos métodos, ya sea de manera algebraica (conocido como método directo) o mediante el uso de geometría analítica.

Los métodos usando geometría analítica son conocidos como, el método del polígono que es utilizado para sumar más de dos vectores, el método del triángulo es el caso particular del método del polígono cuando únicamente se suman dos vectores, y el método del paralelogramo igualmente para sumar dos vectores.

Método algebraico

Se suman sus respectivas componentes de cada vector.

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

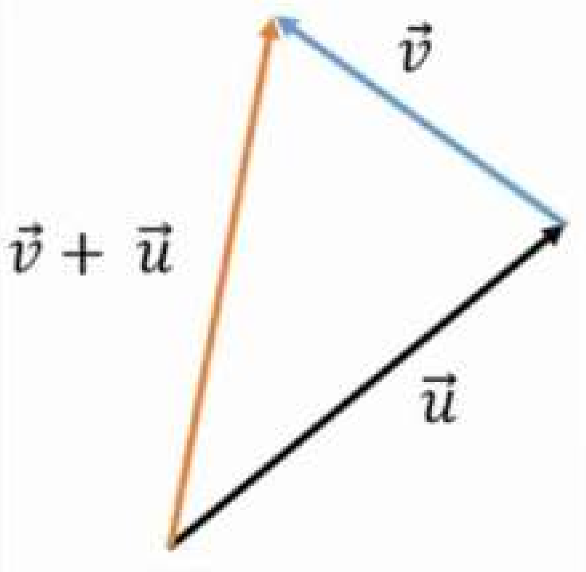
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{R} = (A_x+B_x)\hat{\imath} + (A_y+B_y)\hat{\jmath} + (A_z+B_z)\hat{k}$$

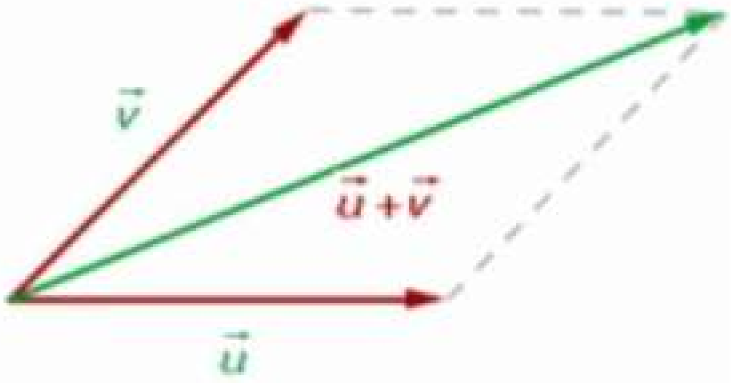
Método del triángulo

Se trata de un método gráfico. Para sumar dos vectores se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo de uno coincida con el origen del otro vector.



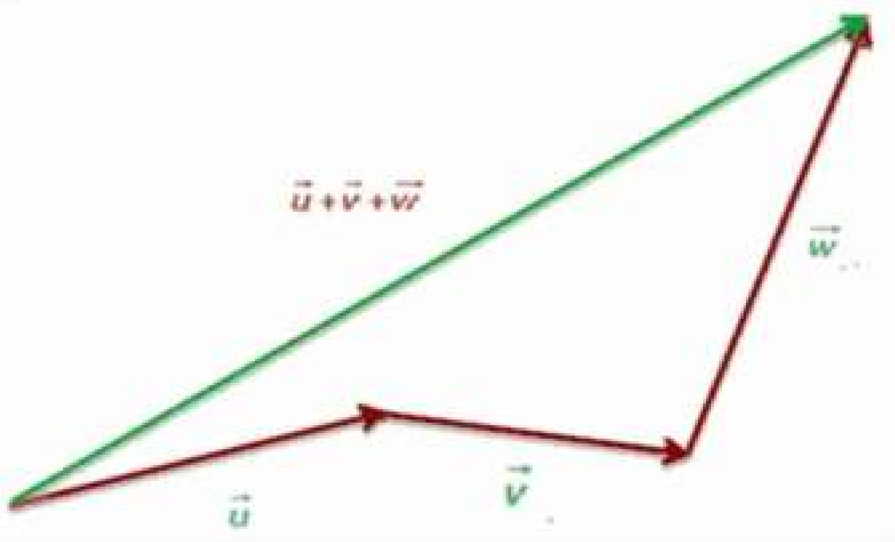
Método del paralelogramo

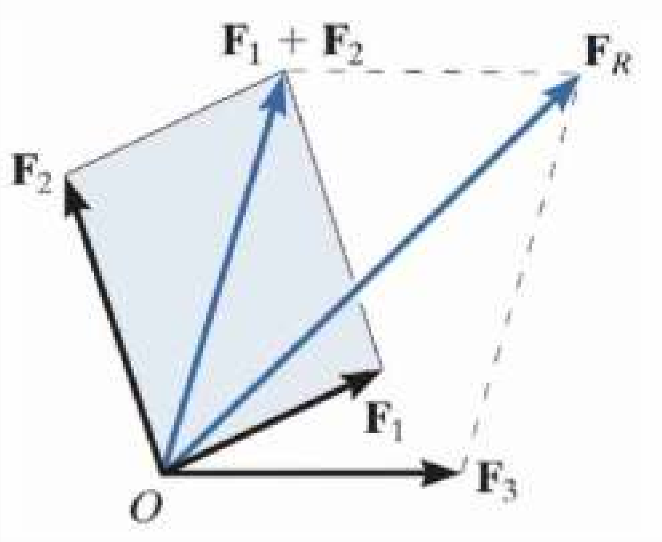
Se trata de un método gráfico. Para sumar dos vectores se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la suma de los vectores.



Método del polígono

Se trata de un método gráfico. El método del polígono es utilizado cuando queremos sumar más de dos vectores, y consiste en colocar un vector a continuación del otro, de modo que el extremo de uno coincida con el origen del otro, y así sucesivamente, hasta colocar todos los vectores, la resultante será el vector que cierra el polígono, es decir, es aquel que va desde el inicio del primero al extremo del último vector.





Resta de Vectores

Resta de Vectores

La operación de resta de dos o más vectores da como resultado otro vector.

Para realizar la resta de vectores existen distintos métodos, ya sea de manera algebraica (conocido como método directo) o mediante el uso de geometría analítica.

Los métodos usando geometría analítica son conocidos como, el método del polígono que es utilizado para restar más de dos vectores, el método del triángulo es el caso particular del método del polígono cuando únicamente se restan dos vectores, y el método del paralelogramo igualmente para restar dos vectores.

Método algebraico

Se restan sus respectivas componentes de cada vector.

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B}$$

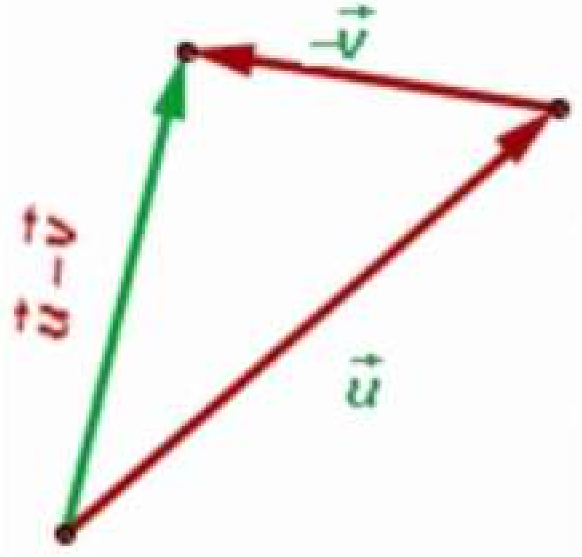
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{R} = (A_x - B_x)\hat{\imath} + (A_y - B_y)\hat{\jmath} + (A_z - B_z)\hat{k}$$

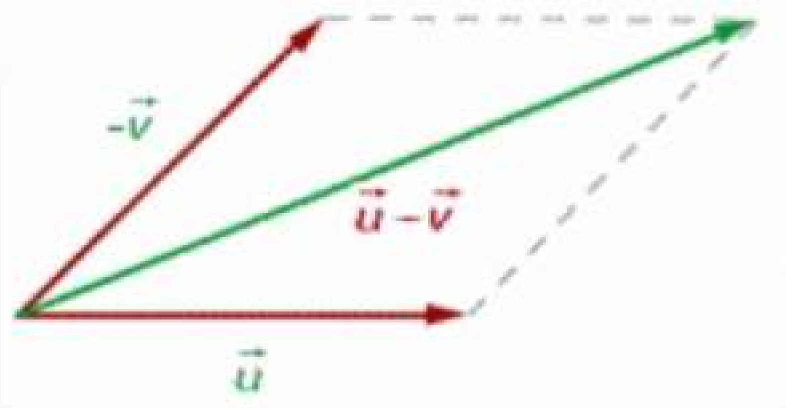
Método del triángulo

Se trata de un método gráfico. Para restar dos vectores se escogen como representantes dos vectores tales que el extremo de uno coincida con el origen del otro vector.



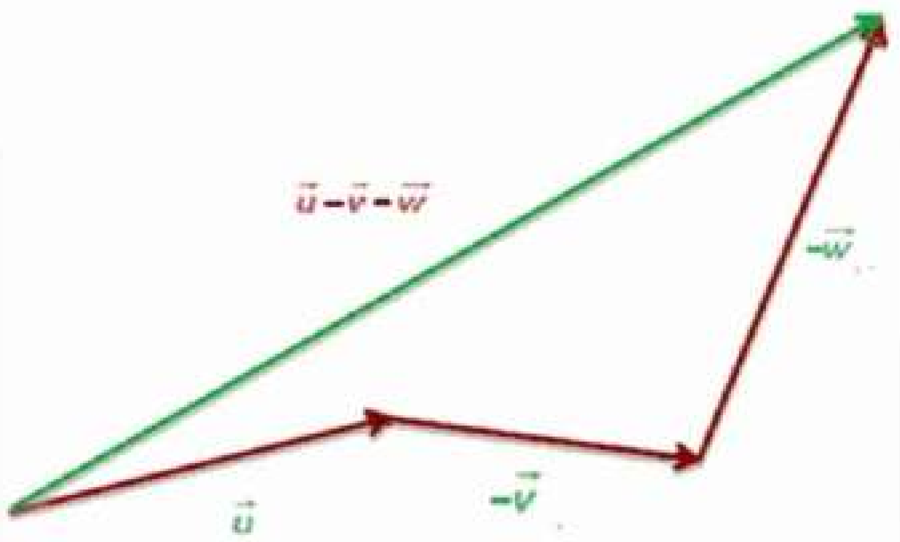
Método del paralelogramo

Se trata de un método gráfico. Para restar dos vectores se toman como representantes dos vectores con el origen en común, se trazan rectas paralelas a los vectores obteniéndose un paralelogramo cuya diagonal coincide con la resta de los vectores.



Método del polígono

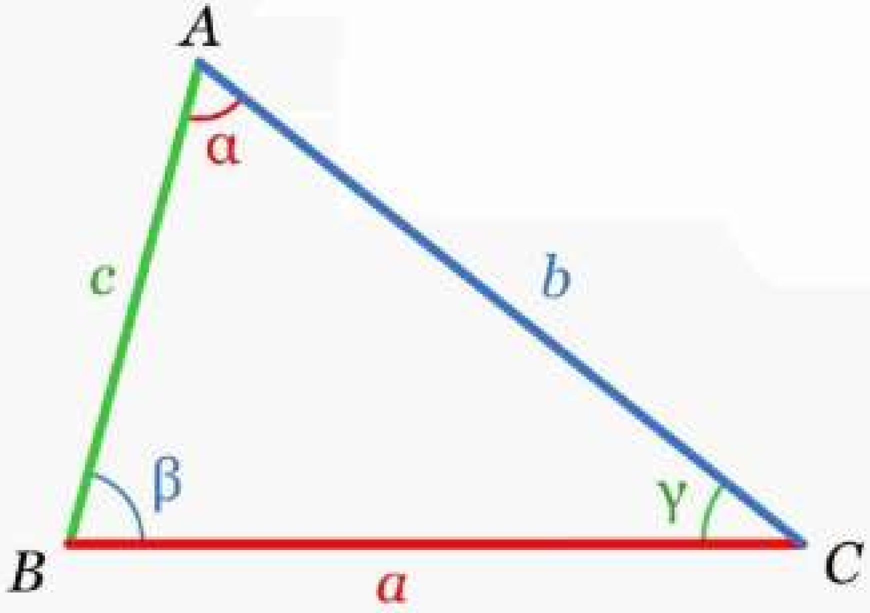
Se trata de un método gráfico. El método del polígono es utilizado cuando queremos sumar más de dos vectores, y consiste en colocar un vector a continuación del otro, de modo que el extremo de uno coincida con el origen del otro, y así sucesivamente, hasta colocar todos los vectores, la resultante será el vector que cierra el polígono, es decir, es aquel que va desde el inicio del primero al extremo del último vector.



Ley de senos

Ley de senos

La ley de los senos es la relación entre los lados y ángulos de triángulos no rectángulos (oblicuos). Simplemente, establece que la relación de la longitud de un lado de un triángulo al seno del ángulo opuesto a ese lado es igual para todos los lados y ángulos en un triángulo dado.

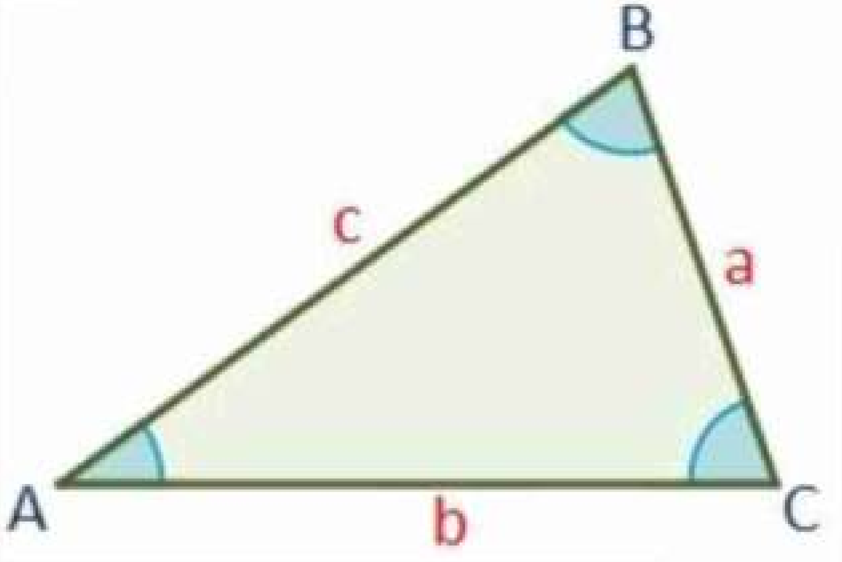


$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

Ley de cosenos

Ley de cosenos

La ley de los cosenos es usada para encontrar las partes faltantes de un triángulo oblicuo (no rectángulo) cuando ya sea las medidas de dos lados y la medida del ángulo incluido son conocidas (LAL) o las longitudes de los tres lados (LLL) son conocidas. En cualquiera de estos casos, es imposible usar la ley de los senos porque no podemos establecer una proporción que pueda resolverse..



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$$

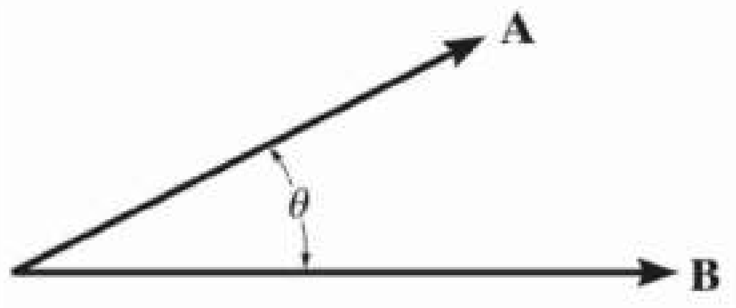
siendo a, b y c los costados y A, B y C los ángulos del triángulo

Multiplicación de Vectores

Producto punto

Producto punto

En resumen, está operación se utiliza para localizar el ángulo entre dos líneas o las componentes de una fuerza paralela y perpendicular a una línea

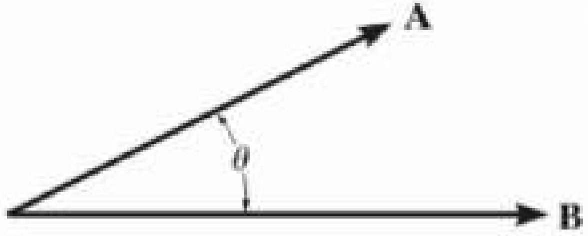


Es evidente que al tratarse de 2 dimensiones puede resolverse fácilmente con trigonometría. Sin embargo, en tres o más dimensiones esto suele ser difícil y, en consecuencia, deben emplearse métodos vectoriales para encontrar la solución.

Producto punto

El producto punto de los vectores A y B, que se escribe

$$\boxed{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta}$$



Se lee como **"A punto B"**, y se define como el producto de las magnitudes de A y B y el coseno del ángulo " que se forma entre ellos

Note que $0° \leq \theta \leq 180$, además que el resultado es un número escalar

Producto punto

Desglosando la representación del producto punto, en específico el termino izquierdo, se obtiene la siguiente descomposición

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k})\cdot(B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) \\ &\quad + A_yB_x(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) \\ &\quad + A_zB_x(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\end{aligned}$$

Donde la multiplicación de la misma coordenada de dirección equivale a la unidad, es decir, $\boldsymbol{i} * \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} * \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} * \boldsymbol{k} = \mathbf{1}$, mientras que la multiplicación de diferentes coordenadas de direcciones se anula

$$\boxed{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

Aplicaciones del Producto punto

Ángulo formado entre dos vectores o líneas que se intersecan.

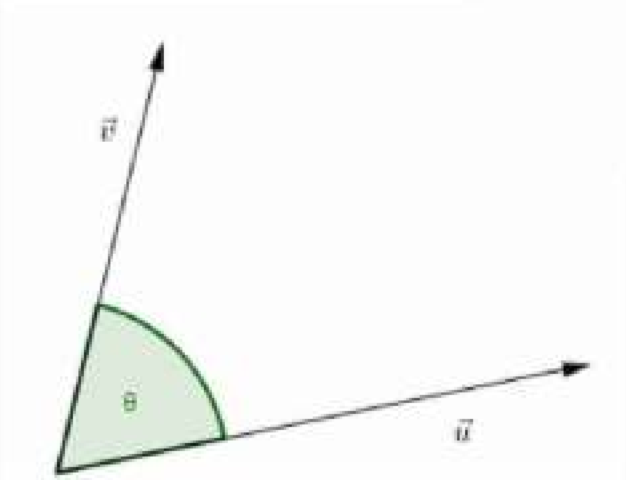
Esta aplicación busca encontrar el ángulo formado entre dos vectores, por lo que reescribiendo la ecuación que define al producto punto

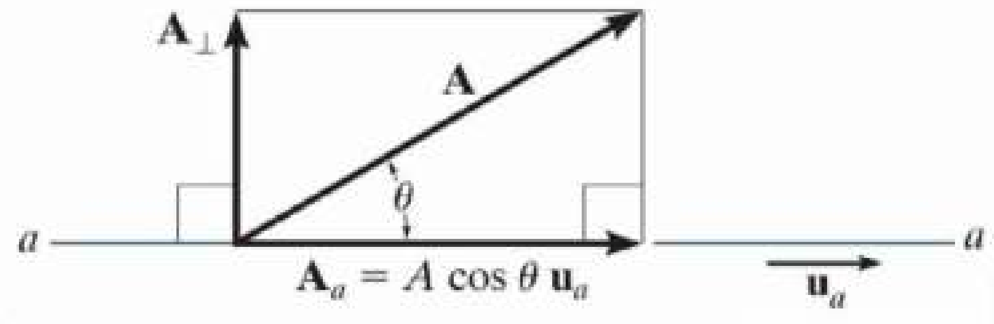
$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right) \qquad 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

Nótese que si $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$ tendría que $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{90}^\circ$ por lo que los vectores A y B serían perpendiculares

Componentes de un vector paralelo y perpendicular a una línea

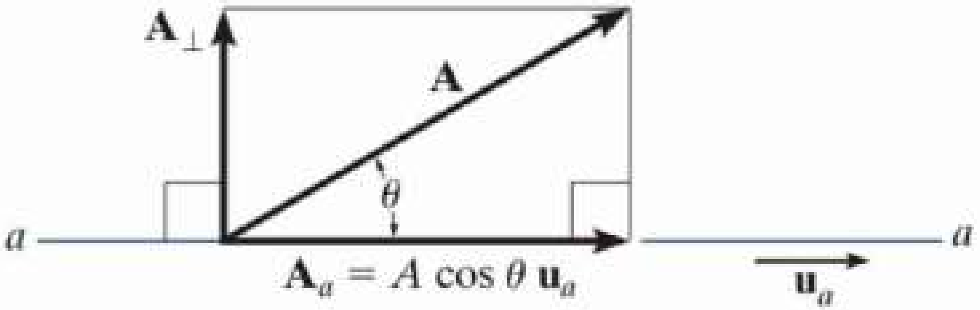
Esta aplicación es usada cuando se tiene un vector en concreto y se quiere saber cómo actúa sobre una línea en específico, a la cual se le conoce como **proyección**, y se lee como **la proyección del vector *"V"* sobre la línea (a la línea normalmente se le representa con un vector unitario μ)**





$$A_a = A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_a$$

Componentes de un vector paralelo y perpendicular a una línea



Observe que, si el resultado es positivo, entonces el vector proyección tiene un sentido direccional que es igual que la dirección de la línea propuesta $\boldsymbol{\mu_a}$, mientras que, si es negativo el vector proyección tiene el sentido opuesto de dirección a $\boldsymbol{\mu_a}$.

Producto cruz

Producto cruz

A diferencia del producto punto, el producto cruz de dos vectores A y B da como resultado otro vector, llamémosle C, y se lee "C es igual a A producto cruz B".

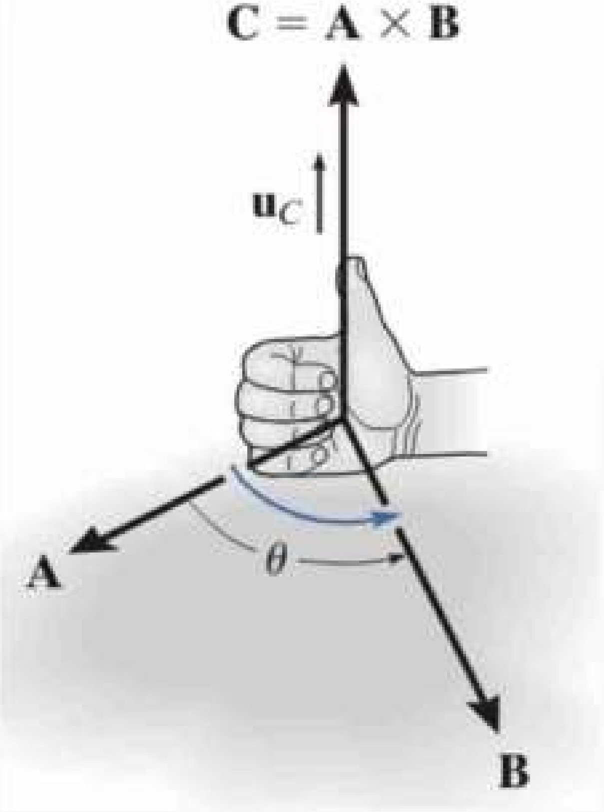
$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

La magnitud de C se define como el producto de las magnitudes de A y B y el seno del ángulo θ que se forma entre ellos.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \text{ sen } \theta)\mathbf{u}_C$$

Producto cruz

El vector C tiene una dirección perpendicular al plano que contiene a los vectores A y B, siendo así que la dirección del vector se puede especificar mediante la regla de la mano derecha



$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} \quad \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$$

Producto cruz

Resolviendo el producto cruz

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \times (B_x\mathbf{i} + B_y\mathbf{j} + B_z\mathbf{k}) \\ &= A_xB_x(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + A_xB_y(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + A_xB_z(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + A_yB_x(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + A_yB_y(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + A_yB_z(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + A_zB_x(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + A_zB_y(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + A_zB_z(\mathbf{k} \times \mathbf{k})\end{aligned}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

Producto cruz

Resolviendo el producto cruz

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

$$\boxed{\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}}$$

Producto cruz

Tiene muchas aplicaciones, entre ellas el momento en un espacio n-decimal formulado por un vector posición y su respectivo vector fuerza.

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$