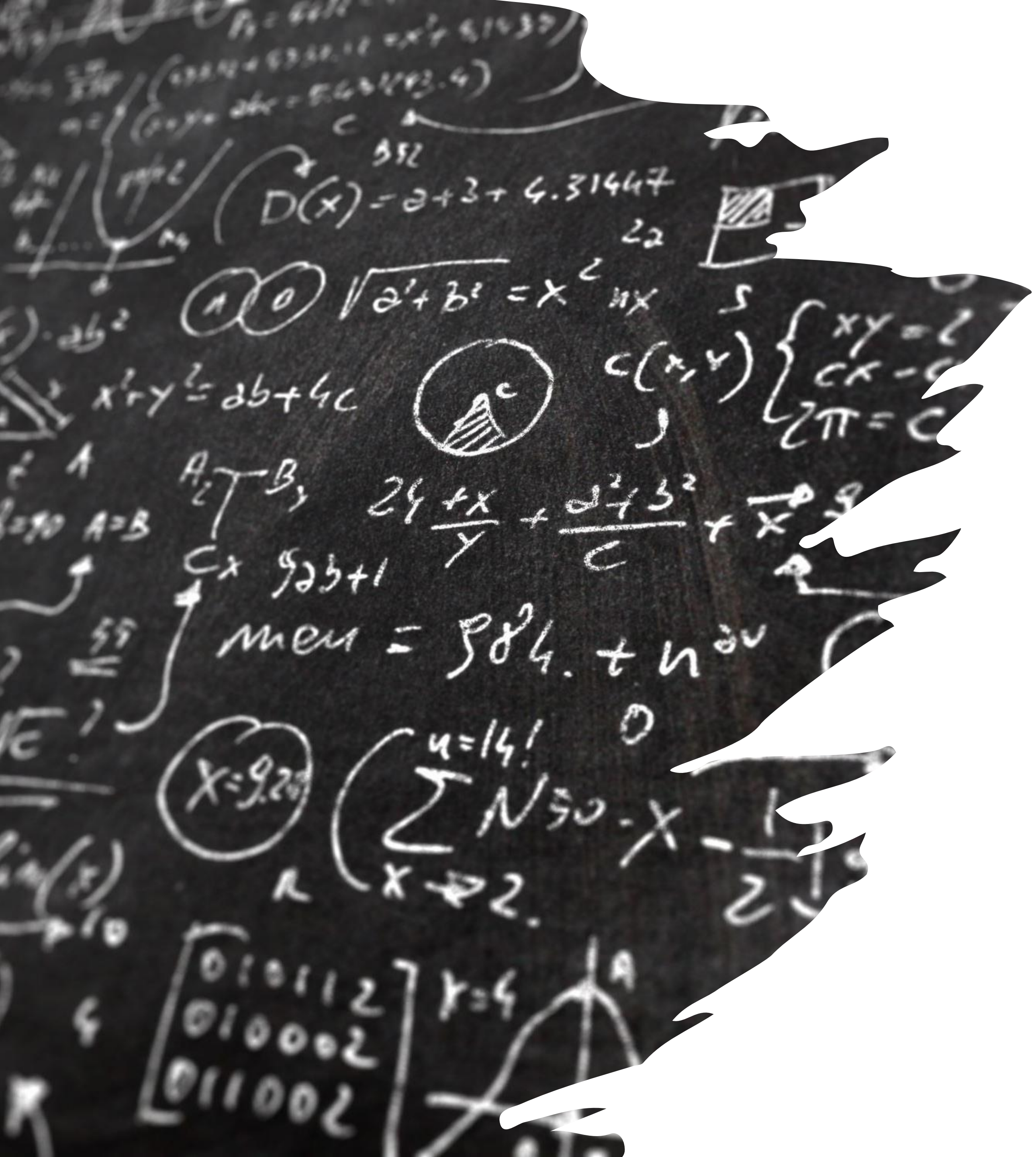
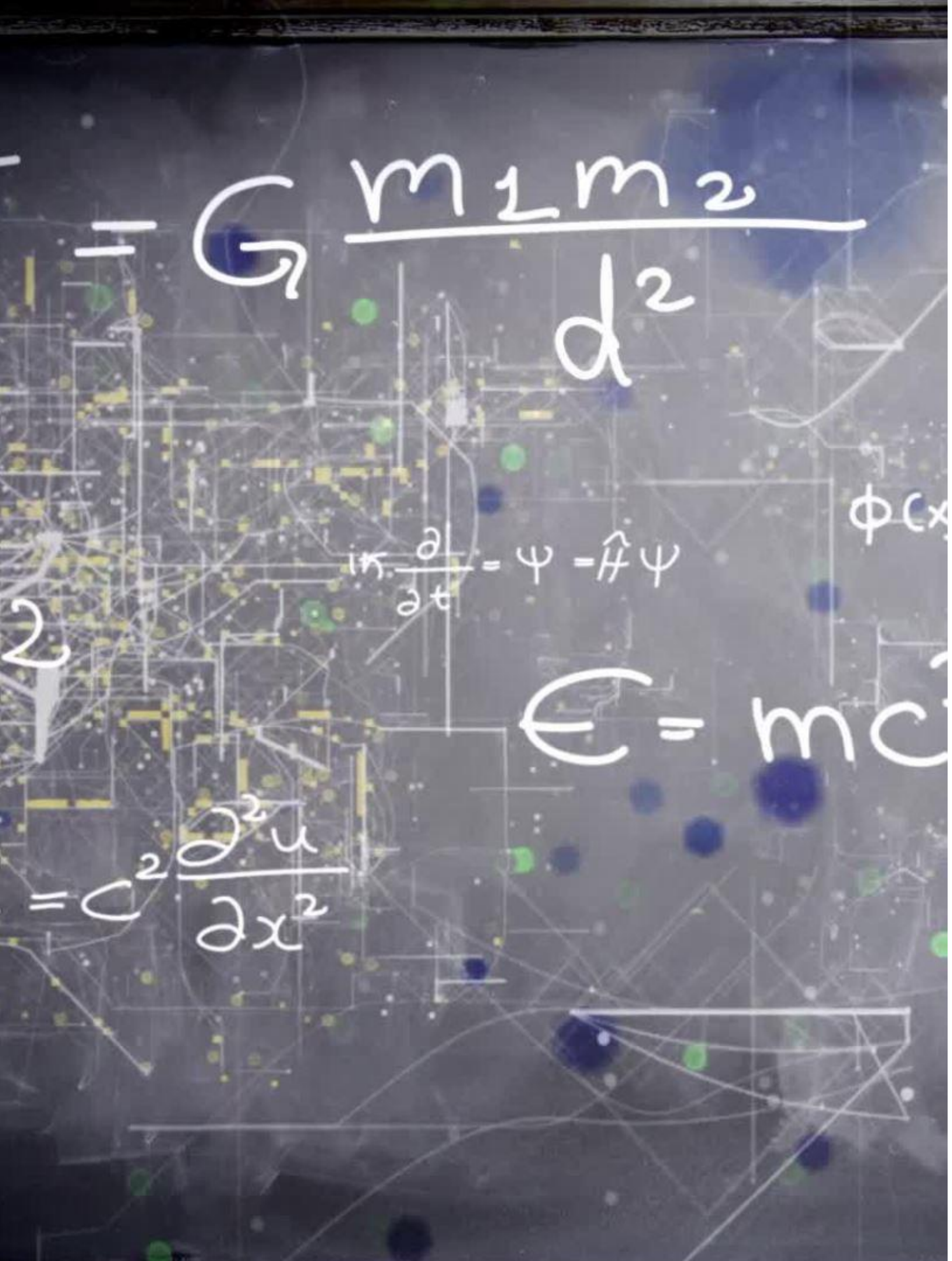


# Inecuaciones irracionales

- Una inecuación racional es una desigualdad que contiene una expresión algebraica fraccionaria. Estas inecuaciones involucran tanto numeradores como denominadores polinómicos. La meta es encontrar los valores que satisfacen la desigualdad.
- Una inecuación racional general tiene la siguiente forma:
- $f(x)/g(x) < 0$ o $f(x)/g(x) > 0$,
- donde $f(x)$ y $g(x)$ son expresiones algebraicas polinómicas y $g(x)$ no es igual a cero.



# Propiedades: de las Inecuaciones Racionales

- **Dominio restringido:** En las inecuaciones racionales, debes considerar las restricciones en el dominio. Para garantizar que el denominador no sea cero, identifica los valores de x que hacen que g(x) sea igual a cero y exclúyelos del dominio.
- **Intervalos críticos:** Los intervalos críticos son los puntos en los que el numerador o el denominador se anulan. Pueden afectar el signo de la fracción y determinar los intervalos de solución. Encuentra los valores de x que hacen que f(x) o g(x) sean cero y marcalos en una línea numérica.
- **Regla del signo:** La regla del signo es una herramienta importante para determinar los intervalos de solución. Consiste en analizar los signos de f(x) y g(x) en cada intervalo crítico y escribir el signo correspondiente en cada intervalo. Recuerda que "<" indica negativo y ">" indica positivo.

# Propiedades de las Inecuaciones Racionales

Propiedad de conservación del signo: Si multiplicamos o dividimos ambos lados de una inecuación racional por un número positivo, el sentido de la desigualdad se mantiene. Si lo multiplicamos o dividimos por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte.

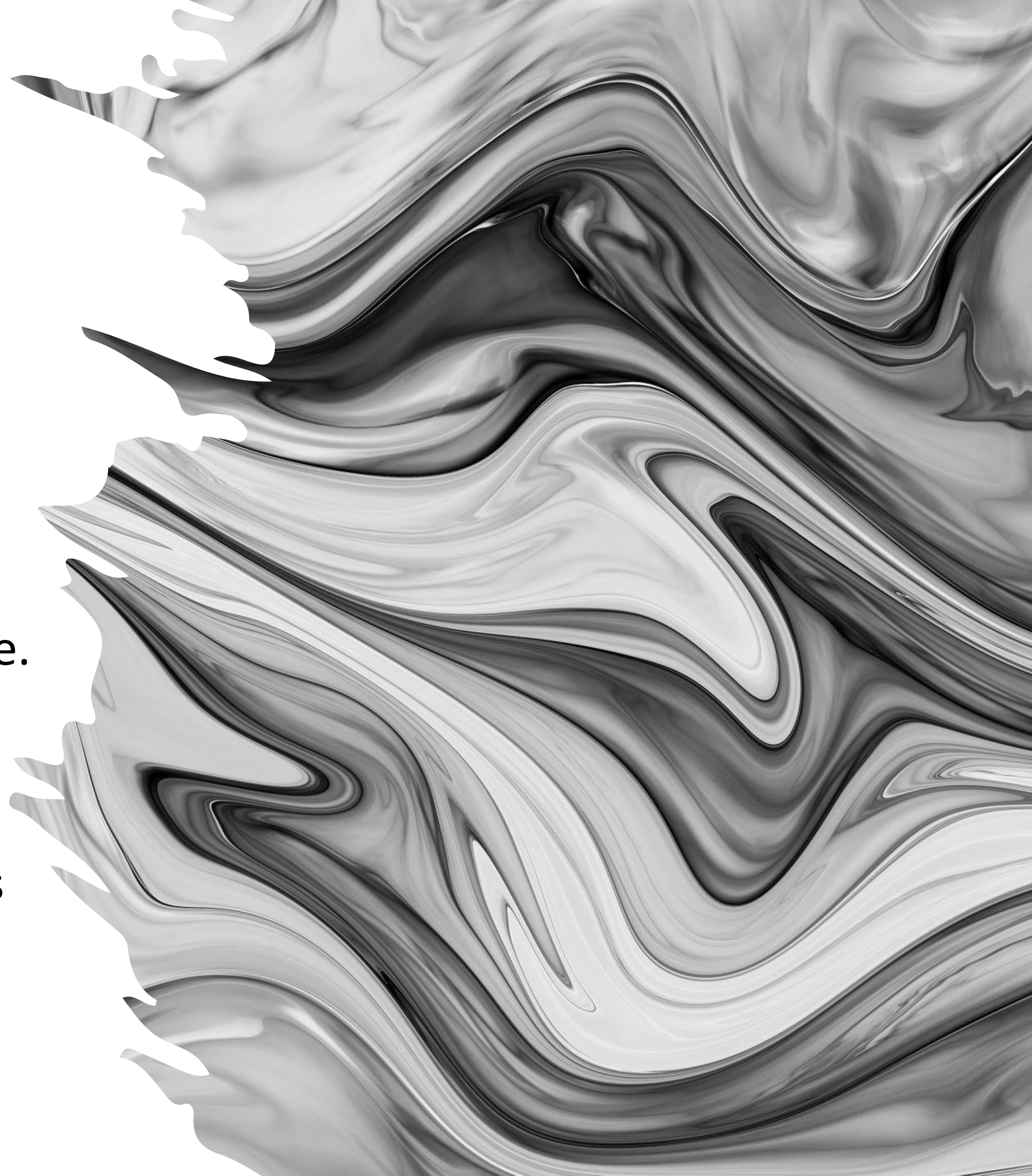
Ejemplo: Considera la inecuación

**$(2x - 1)/(x + 3) > 0$.**

Si multiplicamos ambos lados por 2, obtenemos

**$4x - 2)/(x + 3) > 0$.**

La dirección de la desigualdad sigue siendo la misma.



# Propiedades de las Inecuaciones Racionales

Propiedad de adición y sustracción: Si a ambos lados de una inecuación racional se les suma o resta una cantidad, la desigualdad se mantiene.

Ejemplo: Sea la inecuación

**$(3x - 4)/(x^2 + 1) < 2$.**

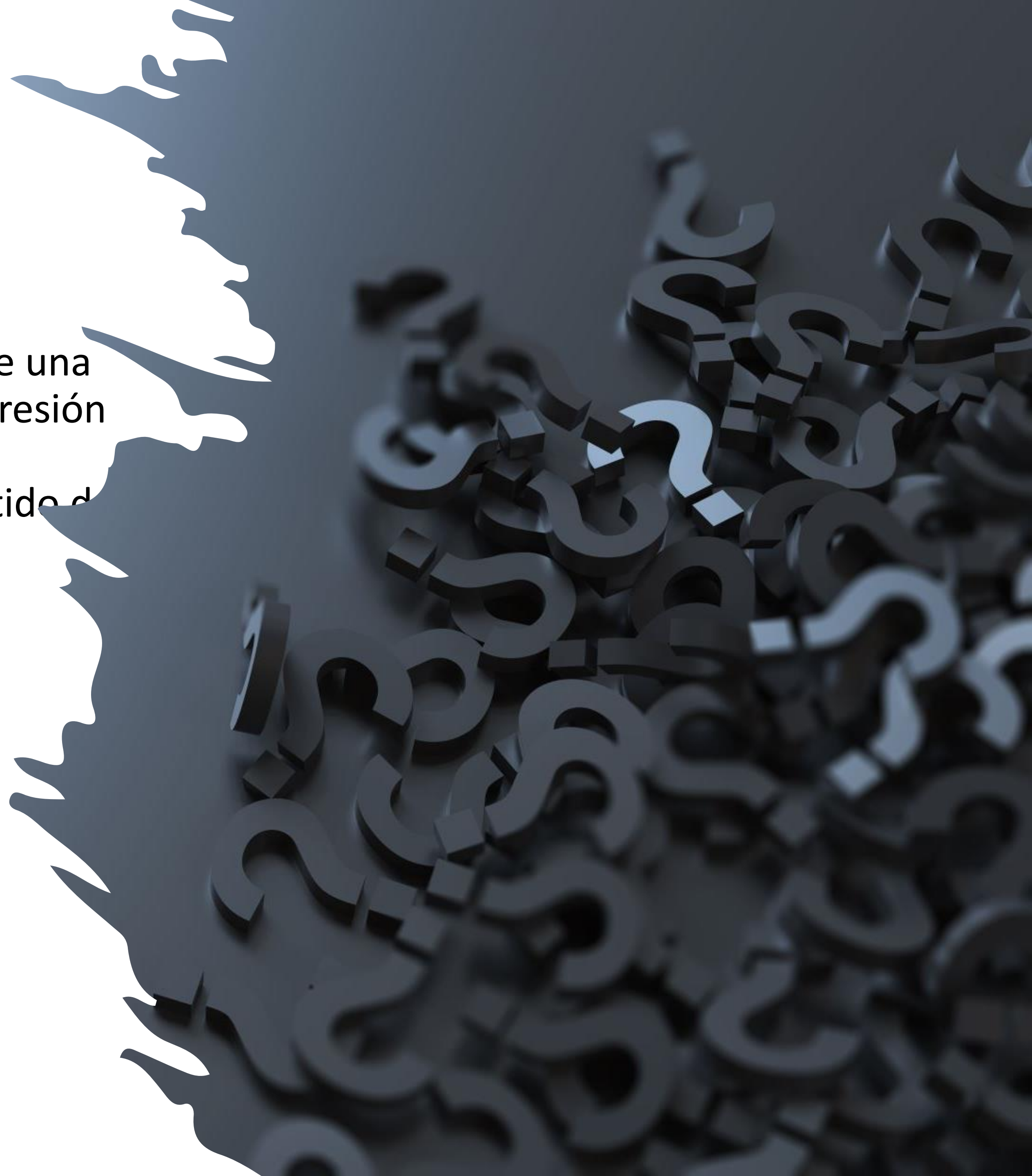
Si sumamos 1 a ambos lados, obtenemos

**$(3x - 4)/(x^2 + 1) + 1 < 2 + 1$.**

La desigualdad sigue siendo válida.

# Propiedades de las Inecuaciones Racionales

- Propiedad de multiplicación y división: Si ambos lados de una inecuación racional se multiplican o dividen por una expresión positiva, la desigualdad se mantiene. Sin embargo, si se multiplican o dividen por una expresión negativa, el sentido de la desigualdad se invierte.
- Ejemplo: Considera la inecuación
- $(x^2 + 3)/(2x - 1) < 5$.
- Si multiplicamos ambos lados por $2x - 1$ (una expresión positiva), obtenemos
- $(x^2 + 3) < 5(2x - 1)$.
- La desigualdad sigue siendo válida.



# Propiedades de las Inecuaciones Racionales

Propiedad de simplificación: Si el numerador y el denominador de una inecuación racional se dividen por una expresión común, la desigualdad se mantiene.

Ejemplo: Sea la inecuación

$(2x^2 - 4x)/(x - 2) > 0$.

$2x\,(x-2) \,/\, (x-2) > 0$

Si dividimos el numerador y el denominador por 2x, obtenemos

$(x - 2)/(1) > 0.$

La desigualdad sigue siendo válida.

# Características de las Inecuaciones Racionales

Soluciones exclusivas: A diferencia de las ecuaciones racionales, las inecuaciones racionales pueden tener múltiples intervalos de solución. Estos se encuentran en los intervalos donde la fracción es positiva o negativa, dependiendo de si la desigualdad es mayor que cero o menor que cero.

Puntos de discontinuidad: Los puntos de discontinuidad ocurren en los valores de x que hacen que g(x) sea igual a cero. En estos puntos, la función no está definida y se producen saltos en la gráfica.

Asíntotas verticales: Las inecuaciones racionales pueden tener asintotas verticales en los valores de x que hacen que el denominador g(x) sea igual a cero. Las asintotas verticales son líneas verticales que la gráfica se acerca pero nunca toca.

# Ejemplos de las Inecuaciones Racionales

- Ejemplo 1: **$(2x - 5)/(x + 1) > 0$**
- Solución: En este caso, primero encontramos los puntos críticos, que son los valores de x que hacen que el numerador o el denominador sean cero. Aquí, el denominador se anula cuando $x = -1$. Marcamos este valor en una línea numérica y probamos un número en cada uno de los intervalos formados.
- Tomemos $x = -2$, un número en el intervalo $(-\infty, -1)$. Evaluamos la fracción: $(2(-2) - 5)/(-2 + 1) = (-9)/(-1) = 9$
- Como el resultado es positivo, este intervalo satisface la desigualdad.
- Tomemos $x = 0$, un número en el intervalo $(-1, \infty)$. Evaluamos la fracción: $(2(0) - 5)/(0 + 1) = (-5)/(1) = -5$
- Como el resultado es negativo, este intervalo no satisface la desigualdad.
- Por lo tanto, la solución es $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$.

# Ejemplos de las Inecuaciones Racionales

- Ejemplo 2: $(x^2 - 4)/(x + 3) \leq 0$
- Solución: En este ejemplo, encontramos los puntos críticos al igualar el numerador y el denominador a cero. Aquí, el numerador se anula cuando $x = -2$ y $x = 2$, y el denominador se anula cuando $x = -3$.
- Marcamos estos valores en una línea numérica y probamos un número en cada uno de los intervalos formados.
- Tomemos $x = -4$, un número en el intervalo $(-\infty, -3)$. Evaluamos la fracción: $((-4)^2 - 4)/(-4 + 3) = (12)/(-1) = -12$
- Como el resultado es negativo, este intervalo satisface la desigualdad.
- Tomemos $x = 0$, un número en el intervalo $(-3, -2)$. Evaluamos la fracción: $((0)^2 - 4)/(0 + 3) = (-4)/(3) = -4/3$
- Como el resultado es negativo, este intervalo también satisface la desigualdad.
- Por lo tanto, la solución es $(-\infty, -3] \cup (-2, 2]$.

# Ejemplos de las Inecuaciones Racionales

Ejemplo 1: $(2x^2 + 3x - 5)/(x^2 - 4) > 0$

Solución: En este ejemplo, encontramos los puntos críticos al igualar el numerador y el denominador a cero. Aquí, el numerador se anula cuando $x \approx -2.5$ y $x \approx 1$. El denominador se anula cuando $x = -2$ y $x = 2$.

Marcamos estos valores en una línea numérica y probamos un número en cada uno de los intervalos formados.

Tomemos $x = -3$, un número en el intervalo $(-\infty, -2)$. Evaluamos la fracción: $(2(-3)^2 + 3(-3) - 5)/((-3)^2 - 4) = (28)/(5) = 5.6$

Como el resultado es positivo, este intervalo satisface la desigualdad.

Tomemos $x = 0$, un número en el intervalo $(-2, 1)$. Evaluamos la fracción: $(2(0)^2 + 3(0) - 5)/(0^2 - 4) = (-5)/(-4) = 5/4$

Como el resultado es positivo, este intervalo también satisface la desigualdad.

Por lo tanto, la solución es $(-\infty, -2)$ U $(1, 2)$.

# Ejemplos de las Inecuaciones Racionales

Ejemplo 2: $(x^3 - 4x)/(x^2 - 9) \leq 0$

Solución: En este ejemplo, encontramos los puntos críticos al igualar el numerador y el denominador a cero. Aquí, el numerador se anula cuando $x = 0$ y el denominador se anula cuando $x = -3$ y $x = 3$.

Marcamos estos valores en una línea numérica y probamos un número en cada uno de los intervalos formados.

Tomemos $x = -4$, un número en el intervalo $(-\infty, -3)$. Evaluamos la fracción: $((-4)^3 - 4(-4))/((-4)^2 - 9) = (-128 + 16)/(-7) = -16/7$

Como el resultado es negativo, este intervalo satisface la desigualdad.

Tomemos $x = 1$, un número en el intervalo $(-3, 0)$. Evaluamos la fracción: $((1)^3 - 4(1))/((1)^2 - 9) = (-3)/(-8) = 3/8$

Como el resultado es positivo, este intervalo no satisface la desigualdad.

Por lo tanto, la solución es $(-\infty, -3] \cup [0, 3)$.

# Métodos de resolución

- Método de los signos alternados.
- Método de los intervalos críticos.
- Método de las pruebas en intervalos.
- Método de la gráfica.

# Método de los signos alternados:

Paso 1: Encuentra los puntos críticos al igualar el numerador y el denominador a cero. En este caso, el numerador no se anula, pero el denominador se anula cuando x = -2 y x = 2.

Paso 2: Marca estos puntos críticos en una línea numérica y elige un número en cada intervalo formado.

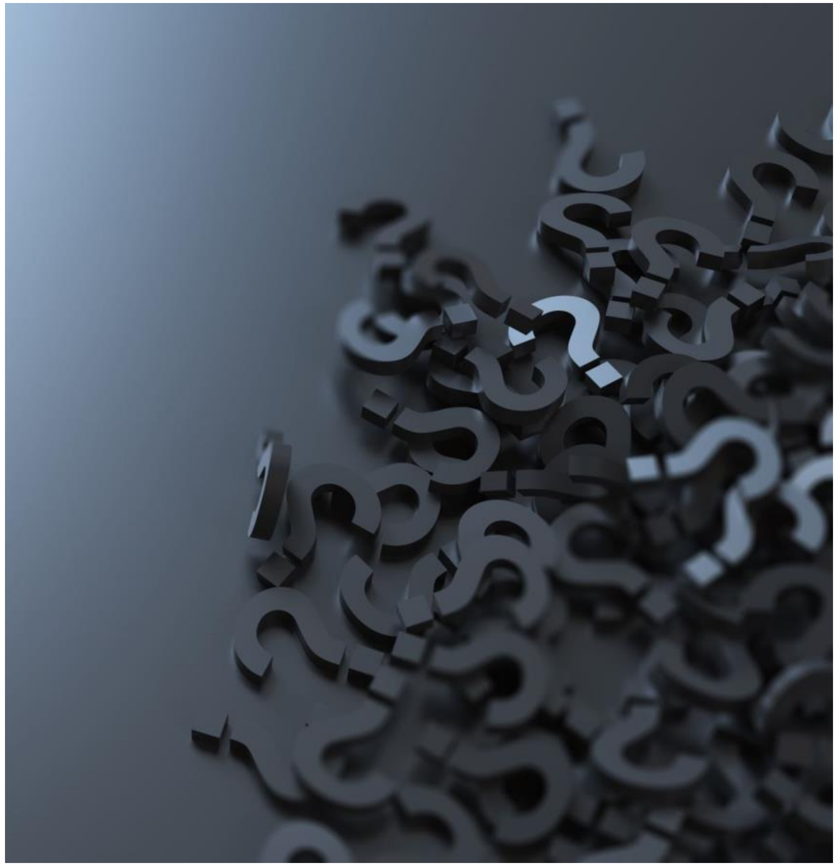
Tomemos x = -3, un número en el intervalo (-∞, -2). Evaluamos la fracción: (3(-3) - 1)/((-3)^2 - 4) = (-10)/(5) = -2

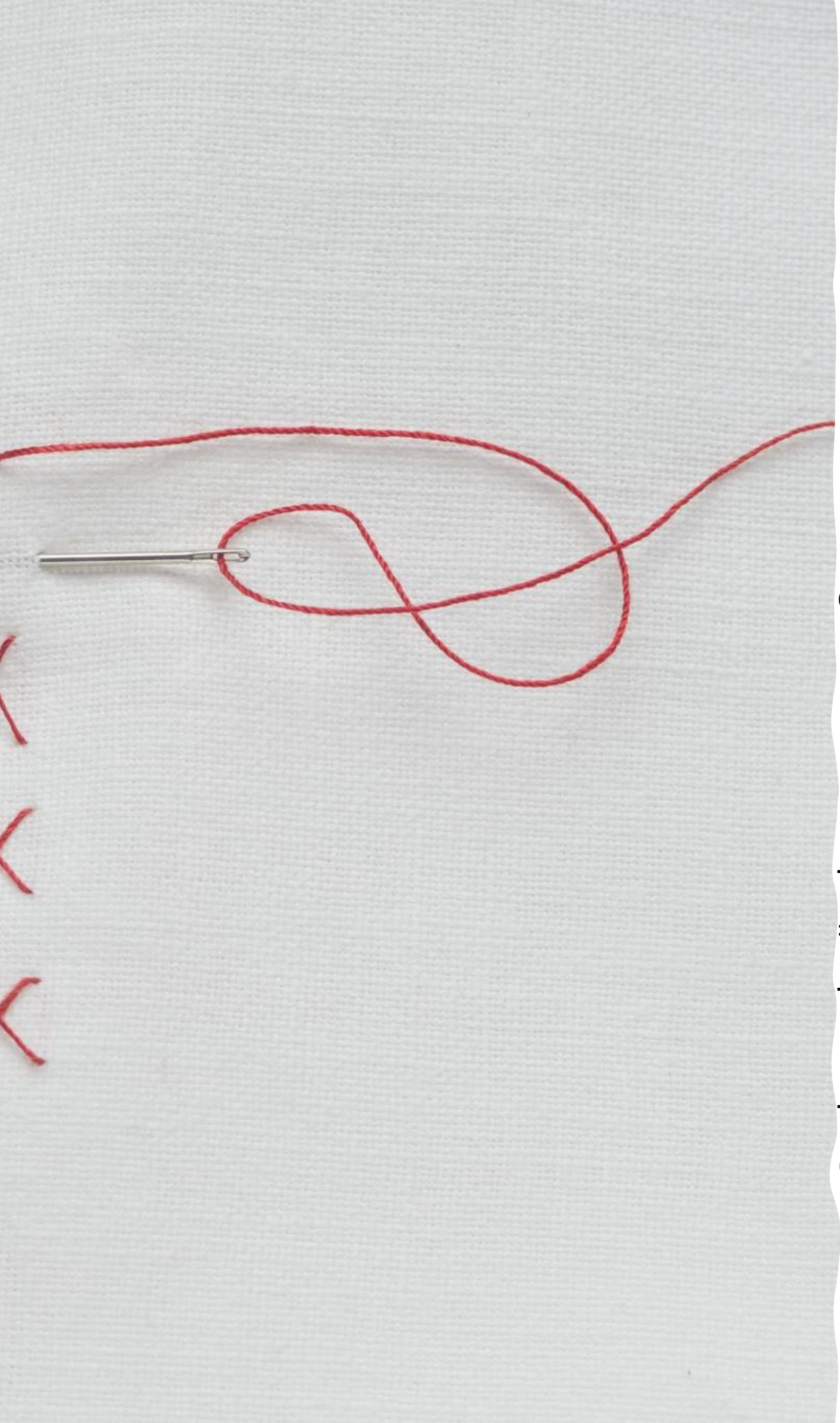
Tomemos x = 0, un número en el intervalo (-2, 2). Evaluamos la fracción: (3(0) - 1)/(0^2 - 4) = (-1)/(-4) = 1/4

Tomemos x = 1, un número en el intervalo (2, ∞). Evaluamos la fracción: (3(1) - 1)/(1^2 - 4) = (2)/(-3) = -2/3

Paso 3: Observa el patrón de los signos de los resultados obtenidos. En este caso, los signos son negativo, positivo y negativo en orden.

Paso 4: La solución final es el intervalo donde los signos son negativo. En este caso, la solución es (-∞, -2) U (2, ∞).





# Método de los intervalos críticos:

Paso 1: Encuentra los puntos críticos al igualar el numerador y el denominador a cero. En este caso, el numerador no se anula, pero el denominador se anula cuando $x = -2$ y $x = 2$.

Paso 2: Marca estos puntos críticos en una línea numérica y crea los intervalos entre ellos.

Los intervalos serán: $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$.

Paso 3: Selecciona un número de prueba en cada intervalo y evalúa la fracción.

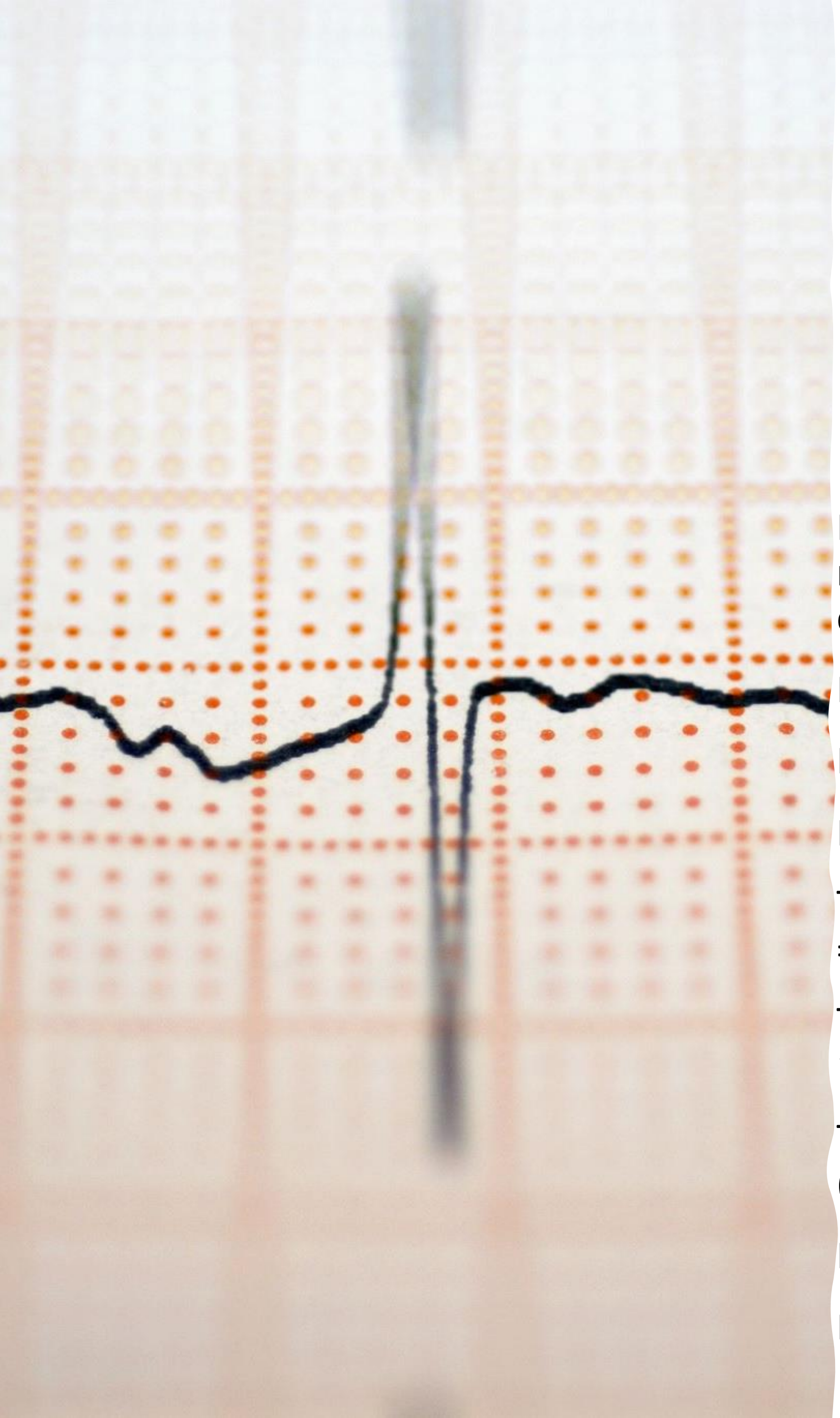
Tomemos $x = -3$, un número en el intervalo $(-\infty, -2)$. Evaluamos la fracción: $(3(-3) - 1)/((-3)^2 - 4) = (-10)/(5) = -2$

Tomemos $x = 0$, un número en el intervalo $(-2, 2)$. Evaluamos la fracción: $(3(0) - 1)/(0^2 - 4) = (-1)/(-4) = 1/4$

Tomemos $x = 1$, un número en el intervalo $(2, \infty)$. Evaluamos la fracción: $(3(1) - 1)/(1^2 - 4) = (2)/(-3) = -2/3$

Paso 4: Analiza los resultados y determina los intervalos que satisfacen la inecuación.

En este caso, el intervalo $(-\infty, -2)$ satisface la desigualdad. Por lo tanto, la solución es $(-\infty, -2)$.



# Método de los intervalos críticos:

Método de las pruebas en intervalos: Paso 1: Encuentra los puntos críticos al igualar el numerador y el denominador a cero. En este caso, el numerador no se anula, pero el denominador se anula cuando $x = -2$ y $x = 2$.

Paso 2: Marca estos puntos críticos en una línea numérica y crea los intervalos entre ellos.

Los intervalos serán: $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ y $(2, \infty)$.

Paso 3: Elige un número de prueba en cada intervalo y evalúa la fracción.

Tomemos $x = -3$, un número en el intervalo $(-\infty, -2)$. Evaluamos la fracción: $(3(-3) - 1)/((-3)^2 - 4) = (-10)/(5) = -2$

Tomemos $x = 0$, un número en el intervalo $(-2, 2)$. Evaluamos la fracción: $(3(0) - 1)/(0^2 - 4) = (-1)/(-4) = 1/4$

Tomemos $x = 1$, un número en el intervalo $(2, \infty)$. Evaluamos la fracción: $(3(1) - 1)/(1^2 - 4) = (2)/(-3) = -2/3$

Paso 4: Analiza los resultados y determina los intervalos que satisfacen la inecuación.

En este caso, el intervalo $(-\infty, -2)$ satisface la desigualdad. Por lo tanto, la solución es $(-\infty, -2)$.

# Método de las pruebas en intervalos

: Paso 1: Encuentra los puntos críticos al igualar el numerador y el denominador a cero. En este caso, el numerador no se anula, pero el denominador se anula cuando x = -2 y x = 2.

Paso 2: Marca estos puntos críticos en una línea numérica y crea los intervalos entre ellos.

Los intervalos serán: (-∞, -2), (-2, 2) y (2, ∞).

Paso 3: Elige un número de prueba en cada intervalo y evalúa la fracción.

Tomemos x = -3, un número en el intervalo (-∞, -2). Evaluamos la fracción: (3(-3) - 1)/((-3)^2 - 4) = (-10)/(5) = -2

Tomemos x = 0, un número en el intervalo (-2, 2). Evaluamos la fracción: (3(0) - 1)/(0^2 - 4) = (-1)/(-4) = 1/4

Tomemos x = 1, un número en el intervalo (2, ∞). Evaluamos la fracción: (3(1) - 1)/(1^2 - 4) = (2)/(-3) = -2/3

Paso 4: Analiza los resultados y determina los intervalos que satisfacen la inecuación.

En este caso, el intervalo (-∞, -2) satisface la desigualdad. Por lo tanto, la solución es (-∞, -2).