

Longitud de un arco de circunferencia

NOTA

Esta relación numérica también se verifica para los ángulos trigonométricos negativos. En general, está definida para todo ángulo trigonométrico.

Sea un ángulo trigonométrico definido por S° . Si lo analizamos en minutos siendo S el número de grados sexagesimales, tenemos que

$$S^\circ = S \cdot \left(\frac{60'}{1^\circ}\right) = (60 S)'$$

Entonces se establece que

$$\left(\begin{matrix} \text{número de minutos} \\ \text{sexagesimales} \end{matrix}\right) = 60 S$$

En forma similar, se establece que

$$\left(\begin{matrix} \text{número de segundos} \\ \text{sexagesimales} \end{matrix}\right) = 3600 S$$

Analizamos en el sistema centesimal para el mismo ángulo

$$C^\circ = C \cdot \left(\frac{100^m}{1^\circ}\right) = (100 C)^m$$

Se establece que

$$\left(\begin{matrix} \text{número de minutos} \\ \text{centesimales} \end{matrix}\right) = 100 C$$

$$\left(\begin{matrix} \text{número de segundos} \\ \text{centesimales} \end{matrix}\right) = 10\,000 C$$

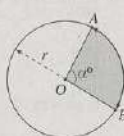
3. Longitud de un arco de circunferencia

3.1. FORMAS DE MEDIR UN ARCO

Los arcos de circunferencia se pueden medir de las siguientes dos formas.

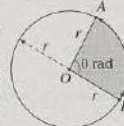
3.1.1. Medida angular (amplitud de un arco)

El arco se puede medir en función de la medida del ángulo central de la circunferencia de centro O . La medida angular del arco AB en unidades angulares es igual a α° .



3.1.2. Medida longitudinal (longitud de un arco)

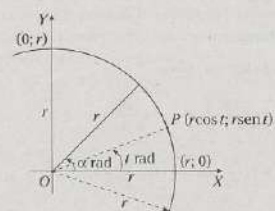
El arco se puede medir en función del número de radianes del ángulo central y de la medida del radio del sector de centro O .



La medida longitudinal del arco AB es el producto del número de radianes del ángulo central (θ) y el valor del radio (r).

3.2. CÁLCULO DE LA LONGITUD DE UN ARCO DE CIRCUNFERENCIA

Sea una circunferencia de radio r ($r > 0$); además se tiene un arco de circunferencia subtendido por un ángulo central, cuya medida es α rad y cuya longitud de arco es l .



Sea $0 \leq t \leq 2\pi$ para el punto P .

$$x = r \cos t; y = r \sin t$$

$$\rightarrow x' = -r \sin t; y' = r \cos t$$

Formalmente, se demuestra que la longitud del arco de circunferencia se determina por el cálculo integral mediante la siguiente relación:

$$l = \int_0^\alpha \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

$$l = \int_0^\alpha \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt$$

$$l = \int_0^\alpha \sqrt{r^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt$$

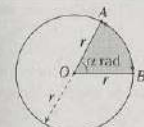
$$l = \int_0^\alpha r \cdot dt; r > 0 \rightarrow l = r \int_0^\alpha dt$$

$$l = r \cdot (\alpha - 0)$$

$$l = \alpha \cdot r$$

Para calcular la longitud de un arco de circunferencia (l) de radio r , el cual subtende un ángulo central α rad, se establece la siguiente fórmula en el sector circular AOB de centro O .

$$l = \alpha \cdot r; 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

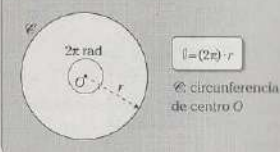


donde

- l : longitud del arco de circunferencia
- α : número de radianes de la medida del ángulo central
- r : medida del radio del sector circular

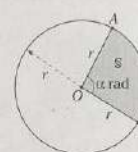
NOTA

La longitud (l) de una circunferencia (φ) de radio r y centro O , cuyo ángulo central es 2π rad, se establece así:



3.3. CÁLCULO DEL ÁREA DE LA REGIÓN DE UN SECTOR CIRCULAR

Un sector circular es una porción de círculo tal como se muestra en el gráfico AOB, limitado por los radios OA , OB y el arco AB . El cálculo del área de la región del sector circular, representado por S , tiene la siguiente relación:



O: centro

$$S = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot r^2; 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

donde

- S : área de la región del sector circular AOB
- α : número de radianes del ángulo central
- r : valor del radio del sector

Consideraciones

a. Sea $S = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot r^2$

Debido a que $l = \alpha \cdot r$

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{(l \cdot r)}{r} \cdot r$$

se establece que

$$S = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r$$

donde

- l : longitud del arco AB
- r : radio del sector circular
- S : área del sector

b. Sea $S = \frac{1}{2} \cdot l \cdot r$

Debido a que $l = \alpha \cdot r$

$$\rightarrow r = \frac{l}{\alpha}$$

$$\text{Luego } S = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \left(\frac{l}{\alpha}\right)$$

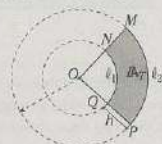
Se establece que

$$S = \frac{l^2}{2\alpha}$$

donde

- S : área del sector
- l : longitud del arco
- α : número de radianes del ángulo central

c. Se establece el cálculo del área de la región del trapecio circular (A_T) según

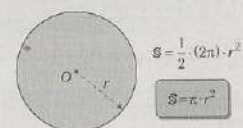


$$A_T = \left(\frac{l_1 + l_2}{2}\right) h$$

donde

- A_T : área de la región del trapecio circular MNPQ
- l_1, l_2 : longitudes de los arcos
- h : distancia de separación entre los arcos

d. El área del círculo de radio r se establece a partir del gráfico mostrado, donde O es el centro de la circunferencia.



3.4. APLICACIONES DEL CÁLCULO DE LA LONGITUD DE UN ARCO

3.4.1. Número de vueltas que da una rueda



En el gráfico se muestra una rueda de radio r que se desplaza de una posición A a otra B , sin resbalar.

El número de vueltas que da dicha rueda para tal condición se calcula mediante la siguiente relación:

donde

- n : número de vueltas que da la rueda ideal (cálculo aproximado)
- l_c : longitud de la trayectoria descrita por el centro de la rueda
- r : radio de la rueda

Cálculo del número de vueltas sobre una pista plana



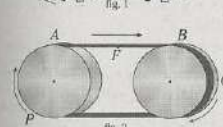
En el gráfico mostrado, la rueda de radio r se desplaza sin resbalar de A hasta B . El número de vueltas n que da dicha rueda se calcula de la siguiente manera:

$$n = \frac{d}{2\pi r}$$

donde

- n : número de vueltas que da la rueda desde la posición A hasta la posición B
- d : distancia que separa las posiciones A y B
- r : radio de la rueda ideal

3.4.2. Sistema de engranajes en contacto y poleas unidas por una faja de transmisión



En la figura 1 se tienen dos engranajes y en la figura 2 se tienen dos poleas unidas por una faja de transmisión. En cada caso, si A gira un ángulo θ_A , entonces B girará otro ángulo θ_B . Además, las longitudes descritas por los puntos P , Q y F son iguales, es decir

$$l_P = l_Q = l_F$$

de donde se deduce que

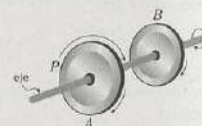
$$\theta_A r_A = \theta_B r_B = l_F$$

donde

- θ_A, θ_B : números de radianes del ángulo de giro de la rueda ideal
- r_A, r_B : radios de la rueda ideal

3.4.3. Sistema de poleas ideales unidas por un eje común

En el gráfico, se tienen dos poleas unidas por un eje. Si la polea A gira un ángulo θ_A , entonces la polea B gira un ángulo θ_B .



Luego, se cumple que

$$\theta_A = \theta_B$$

donde

- θ_A, θ_B : números de radianes del ángulo de giro de las poleas ideales
- n_A, n_B : números de vueltas de las poleas ideales

PROBLEMAS RESUELTOS

Problema N.º 1

Si $36,345^\circ$ se puede expresar como $D^\circ N' T''$,

$$\text{calcule } \frac{U \cdot N \cdot T}{720}.$$

Resolución

Sea $\alpha = 36,345^\circ$. Analizamos la parte decimal

$$\alpha = 36^\circ + 0,345^\circ \quad (*)$$

La parte decimal la expresamos en minutos

$$0,345^\circ = 0,345 \cdot (1')$$

$$0,345^\circ = 0,345 \cdot \left(\frac{60''}{1'}\right)$$

$$(0,345)^\circ = (20,7'')$$

Reemplazamos en (*)

$$\alpha = 36^\circ + 20,7''$$

Analizamos en forma similar convirtiendo de minutos a segundos.

$$\alpha = 36^\circ + 20' + (0,7'')$$

$$\alpha = 36^\circ + 20' + (0,7) \cdot (1'')$$

$$\alpha = 36^\circ + 20' + (0,7) \cdot \left(\frac{60''}{1'}\right)$$

$$\alpha = 36^\circ + 20' + 42''$$

$$\alpha = 36^\circ 20' 42''$$

Por dato

$$36,345^\circ <> D^\circ N' T''$$

Luego

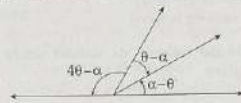
$$36^\circ 20' 42'' <> D^\circ N' T''$$

Por comparación $U=36; N=20; T=42$

$$\therefore \frac{U \cdot N \cdot T}{720} = 42$$

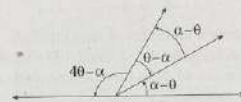
Problema N.º 2

Del siguiente gráfico de ángulos trigonométricos, calcule la suma del máximo y mínimo valor entero que le corresponda a la medida del ángulo θ .



Resolución

Analizamos el gráfico en el sentido antihorario.



Se establece que

$$40 - \alpha + \alpha - \theta + \alpha - \theta = 180^\circ$$

$$2\theta + \alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 2\theta$$

(I)

Además, por el sentido que muestran los ángulos

$$\alpha - \theta > 0 \Leftrightarrow \alpha > \theta$$

$$\text{De (I): } 180^\circ - 2\theta > \theta$$

$$180^\circ > 3\theta$$

$$60^\circ > \theta$$

(II)

$$\alpha - \theta > 0 \Leftrightarrow 40 > \alpha$$

$$\text{De (I): } 40 > 180^\circ - 2\theta$$

$$60 > 180^\circ$$

$$0 > 30^\circ$$

(III)

De (II) y (III)

$$30^\circ < \theta < 60^\circ$$

Luego, el máximo valor entero y el mínimo valor entero para θ son $\theta_{\max} = 59^\circ$ y $\theta_{\min} = 31^\circ$.

$$\therefore \theta_{\max} + \theta_{\min} = 90^\circ$$

Problema N.º 3

El cuadrado de la media geométrica de los números que representan la medida de un ángulo en sexagesimales y centesimales es igual a 45 veces la diferencia de los mismos. Calcule la medida de dicho ángulo en centesimales.

Resolución

Por condición

$$\sqrt{SC^2} = 45(C - S) \quad (*)$$

De la relación numérica

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

En consecuencia

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} \Leftrightarrow S = \frac{9C}{10}$$

En (*)

$$\left(\frac{9C}{10}\right)^2 \cdot C = 45 \cdot \left(C - \frac{9C}{10}\right)$$

$$\frac{9C^2}{10} = 45 \cdot \left(\frac{C}{10}\right)$$

$$C^2 = 5C$$

$$C^2 - 5C = 0$$

$$C \cdot (C - 5) = 0$$

Luego

$$C = 0 \vee C - 5 = 0$$

$$C = 0 \vee C = 5$$

$$\therefore C = (0; 5)$$

Por lo tanto, la medida del ángulo en el sistema centesimal es 0° y 5° .

Problema N.º 4

En un nuevo sistema de medida angular N , se establece que un grado N es equivalente a la medida de un ángulo central que subtiende un arco de longitud igual a la quinta parte de la longitud de su radio. Calcule la medida del ángulo recto en grado N .

Resolución

Analizamos la condición del problema en una circunferencia de radio r .

Por dato, se denota un grado N : $1^\circ N$.

Como $1^\circ N$ subtiende un arco cuya longitud es $\frac{r}{5}$, entonces 1 rad subtiende un arco cuya longitud es r .

$$\begin{aligned} 1^\circ N &= \frac{r}{5} \\ 1 \text{ rad} &= r \end{aligned}$$

Luego se establece que $1^\circ N = \frac{1}{5} \cdot (1 \text{ rad})$

$$\rightarrow 1 \text{ rad} = 5^\circ N$$

Convertimos $\frac{\pi}{2}$ rad en el nuevo sistema de grado N

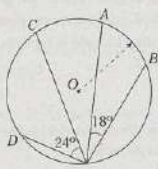
$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \left(\frac{\pi}{2} \text{ rad}\right) \cdot \left(\frac{5^\circ N}{1 \text{ rad}}\right)$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \left(\frac{5\pi}{2}\right)^\circ N$$

Por lo tanto, un ángulo recto en el nuevo sistema mide $\frac{5\pi}{2}$ grados N .

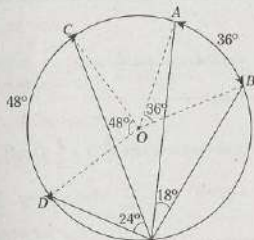
Problema N.º 5

Del gráfico mostrado, calcule $\ell_{AB} + \ell_{CD}$ siendo O el centro de la circunferencia de radio 20 cm.



Resolución

Piden $\ell_{AB} + \ell_{CD}$



Del gráfico, calculamos la longitud de los arcos AB y CD

$$\ell_{AB} = \left(\frac{36\pi}{180}\right) \cdot (20) = 4\pi$$

$$\ell_{CD} = \left(\frac{48\pi}{180}\right) \cdot (20) = \frac{16\pi}{3}$$

$$\therefore \ell_{AB} + \ell_{CD} = \frac{28\pi}{3} \text{ cm}$$

Problema N.º 6

Un triángulo equilátero y un sector circular de ángulo central θ rad tienen igual área y perímetro. Calcule el valor de $\theta + \frac{4}{\theta}$.

Resolución

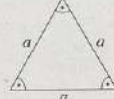
Piden $\theta + \frac{4}{\theta}$. En el sector circular



$$\bullet \text{ (perímetro)} = 2r + \theta r$$

$$\bullet \text{ (área del sector)} = \frac{\theta r^2}{2}$$

En el triángulo equilátero



$$\bullet \text{ (perímetro)} = 3a$$

$$\bullet \text{ (área del triángulo)} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

De la condición del problema

$$\bullet \left(\frac{\text{perímetro del triángulo}}{3a}\right) = \left(\frac{\text{perímetro del sector}}{2r + \theta r}\right)$$

Luego

$$3a = 2r + \theta r$$

(I)

$$\bullet \left(\frac{\text{área del triángulo}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}\right) = \left(\frac{\text{área del sector}}{\frac{\theta r^2}{2}}\right)$$

Luego

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\theta r^2}{2}$$

(II)

De (I) y (II)

$$\frac{9a^2}{2} = (2r + \theta r)^2$$

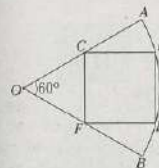
$$\frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \theta r^2$$

Resolviendo el sistema

$$\theta + \frac{4}{\theta} = 6\sqrt{3} - 4$$

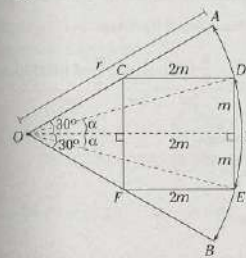
Problema N.º 7

Según el gráfico mostrado, calcule la relación entre la longitud del arco DE y del arco AB si $CDEF$ es un cuadrado inscrito en el sector circular de centro O .

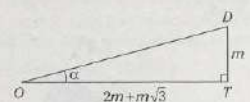


Resolución

Piden $\frac{\ell_{DE}}{\ell_{AB}}$



Del gráfico



$$\cot \alpha = 2 + \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \alpha = 15^\circ$$

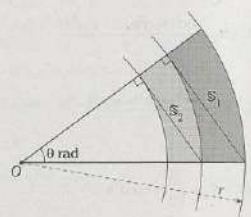
$$\text{Luego } \ell_{DE} = \left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot r$$

$$\text{Además } \ell_{AB} = \left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot r$$

$$\therefore \frac{\ell_{DE}}{\ell_{AB}} = \frac{1}{2}$$

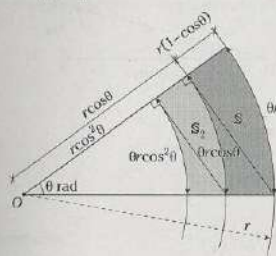
Problema N.º 8

En el gráfico mostrado, calcule $\sqrt{S_1 - S_2}$ en términos de θ y r siendo O centro, y S_1 y S_2 áreas de los trapecios circulares mostrados.



Resolución

Piden $\sqrt{S_1 - S_2}$.



Del gráfico mostrado

$$S_1 = \frac{\theta r^2}{2} \cdot (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = \frac{\theta r^2}{2} \cdot \sin^2 \theta$$

$$S_2 = \frac{\theta r^2}{2} \cdot \cos^2 \theta (1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta) = \frac{\theta r^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta}{2}$$

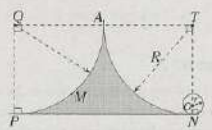
$$S_1 - S_2 = \frac{\theta r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot (1 - \cos^2 \theta)}{2}$$

$$S_1 - S_2 = \frac{\theta r^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin^2 \theta}{2}$$

$$\sqrt{S_1 - S_2} = \sqrt{\frac{\theta}{2} \cdot r \cdot \sin^2 \theta}$$

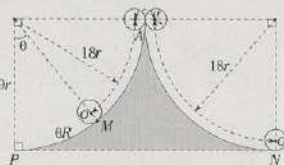
Problema N.º 9

Calcule el valor de θ si la rueda parte del punto N y da 6,5 vueltas hasta llegar al punto M; además $R=19r$; $\ell_{PM}=6R$. Considere que O, T y Q son centros en los sectores mostrados y A, P y N son puntos de tangencia.



Resolución

Piden θ .



Por cálculo del número de vueltas (n)

$$n_{NM} = n_{NA} + n_A + n_{AM}$$

$$6,5 = \frac{\pi \cdot (18r)}{2\pi r} + \frac{\pi}{2\pi r} + \frac{(\frac{\pi}{2} - \theta)(18r)}{2\pi r}$$

Resolvamos

$$\frac{13}{2} = \frac{19}{2} - \frac{9\theta}{\pi}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

Problema N.º 10

Una rueda de radio a metros da 10 vueltas para recorrer un tramo de longitud L metros, otra rueda de radio $(a^2 + 62a - 3)$ metros gira 60° para recorrer el mismo tramo. Calcule $a^2 + 2a$ en metros.

UNI 2008-II

Resolución

Piden $a^2 + 2a$.

Caso 1



Se sabe que

$$n_v = \frac{L}{2\pi r}$$

Datos:

- Radio de la rueda: $r=a$
- Número de vueltas que da la rueda: $n_v=10$
- Recorrido de la rueda: L

$$\Rightarrow L = 20\pi a$$

Caso 2

- Radio de la rueda: $r = a^2 + 62a - 3$
- Recorrido de la rueda: L
- Medida del ángulo de giro: 60°



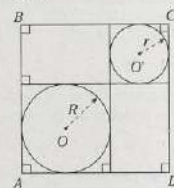
$$\Rightarrow L = \frac{\pi}{3}(a^2 + 62a - 3)$$

$$\Rightarrow 20\pi a = \frac{\pi}{3}(a^2 + 62a - 3) \Rightarrow a^2 + 2a = 3$$

Problema N.º 11

En la figura mostrada, se tiene que el perímetro del cuadrado ABCD es igual al producto de las longitudes de las circunferencias de centro O y O'.

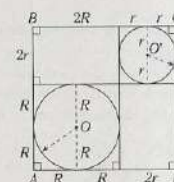
O'. Calcule $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$.



UNI 2014-I

Resolución

Nos piden $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$.



Dato:

$$2p_{ABCD} = (L_O) \cdot (L_{O'})$$

$$4(2R + 2r) = (2\pi R)(2\pi r)$$

De allí

$$R + r = \frac{\pi^2}{2} R \cdot r$$

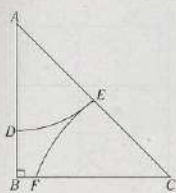
$$\therefore \frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{\pi^2}{2}$$

Resolver los problemas propuestos

Lumbreras Editores

Problema N.º 12

La figura adjunta representa sectores circulares en el triángulo rectángulo isósceles ABC. Calcule (en cm) la suma de las longitudes de los arcos $\widehat{DE}$ y $\widehat{EF}$ si $AC = 1$ cm.



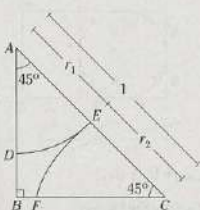
UNI 2014-II

Resolución

Nos piden

$$\ell_{\widehat{DE}} + \ell_{\widehat{EF}}$$

Según los datos



Del gráfico

$$\ell_{\widehat{DE}} = \theta \cdot r_1 = \frac{\pi}{4} r_1$$

$$\ell_{\widehat{EF}} = \alpha \cdot r_2 = \frac{\pi}{4} r_2$$

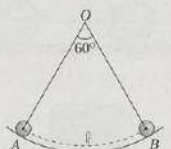
Entonces

$$\ell_{\widehat{DE}} + \ell_{\widehat{EF}} = \frac{\pi}{4} r_1 + \frac{\pi}{4} r_2 = \frac{\pi}{4} (r_1 + r_2) = \frac{\pi}{4} (1)$$

$$\therefore \ell_{\widehat{DE}} + \ell_{\widehat{EF}} = \frac{\pi}{4}$$

Problema N.º 13

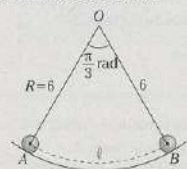
Calcule el número de vueltas que da una rueda de radio $r = 0,5$ cm, al rodar (sin resbalar) en un arco circular $\widehat{AB}$ de radio $R = 6$ cm y ángulo central 60° (ver figura).



UNI 2014-II

Resolución

Nos piden el número de vueltas.



Considere que

$$\ell = 6R$$

$$\ell = \frac{\pi}{3}(6)$$

$$\Rightarrow \ell = 2\pi$$

Calculamos el número de vueltas (n_v)

$$n_v = \frac{\ell}{2\pi r} \Rightarrow n_v = \frac{2\pi}{2\pi(0,5)} = 2$$

NIVEL BÁSICO

1. En un determinado triángulo, las medidas de sus ángulos internos son

$$\frac{\pi x}{18} \text{ rad}; (3x)^\circ \text{ y } (9x - 1)^\circ$$

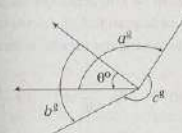
Calcule la medida del menor ángulo en el sistema internacional.

- A) $\frac{\pi}{20}$ rad B) $\frac{\pi}{10}$ rad C) $\frac{3\pi}{20}$ rad
D) $\frac{3\pi}{10}$ rad E) $\frac{5\pi}{20}$ rad

2. Se tienen tres ángulos en progresión aritmética y los dos menores son complementarios. Si la razón de la progresión es $\frac{\pi}{10}$ rad, calcule la suma de los ángulos en el sistema centesimal.

- A) 120° B) 180° C) 220°
D) 100° E) 90°

3. En el gráfico mostrado, calcule el valor de θ en términos de a ; b y c .



$$A) \frac{9}{10}(b - a - c - 400)$$

$$B) b - a - c - 400$$

$$C) \frac{9}{10}(b - a - c - 360)$$

$$D) b - a - c - 360$$

$$E) \frac{9}{10}(b - a - c + 400)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

4. Halle tres ángulos expresados en grados sexagesimales sabiendo que la suma del primero con el segundo es 16° , del segundo más el tercero es 20° y la suma del primero y el tercero es $\pi/6$ rad. Luego calcule el menor de ellos en el sistema sexagesimal.

- A) 6° B) 4° C) 2°
D) 0° E) -2°

5. Siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo en los sistemas respectivos, se establece que $C^2 - S^2 - R^2 = 10R \left(\frac{7\pi}{\pi} - \frac{\pi}{100} \right)$. Calcule el complemento de dicho ángulo en el sistema radial.

- A) $\frac{8\pi}{5}$ rad B) $\frac{\pi}{2}$ rad C) $\frac{6\pi}{5}$ rad
D) $\frac{4\pi}{5}$ rad E) $\frac{2\pi}{5}$ rad

6. La media armónica de los números de grados sexagesimales y centesimales de un cierto ángulo es a la recíproca de la media aritmética de los mismos como 10 es a π^2 . Halle el número de radianes de dicho ángulo.

- A) $\frac{1}{60}$ B) $\frac{1}{60}$ C) $\frac{1}{60}$
D) $\pm \frac{1}{30}$ E) $\frac{1}{30}$

7. Calcule el suplemento de un ángulo en el sistema internacional sabiendo que la suma del número de minutos sexagesimales y el número de segundos centesimales es 402160.

- A) $\frac{\pi}{5}$ rad B) $-\frac{\pi}{5}$ rad C) $\frac{2\pi}{5}$ rad
D) $\frac{4\pi}{5}$ rad E) $-\frac{4\pi}{5}$ rad

8. Siendo S , C y R lo convencional para los sistemas respectivos, se establece que $R^\circ = S^\circ$. Calcule el valor numérico de $180\sqrt{S}$.

A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{3\pi}{4}$
D) $\frac{1}{\pi}$ E) π

9. Se establece que $\left(\frac{1241}{1200}\right)^\circ = a^\circ b' c''$.

A partir de la igualdad, calcule el valor de $a+b+c$.

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 15

10. Siendo S y C lo convencional de un mismo ángulo en los sistemas respectivos, se establece que $S^\circ + C^\circ = 2SC + 16$.

Calcule $\frac{2}{C(C+2)} + \frac{2}{(C+4)(C+2)} + \frac{1}{C+4}$

A) $\frac{1}{40}$ B) $\frac{1}{20}$ C) $\frac{1}{10}$
D) $\frac{1}{5}$ E) 1

11. Un determinado ángulo contiene α minutos sexagesimales y β minutos centesimales. Si $\alpha = 10x$, $(2x+3)$ y $\beta = 50x$, $(x-2)$, calcule el número de grados centesimales de dicho ángulo.

A) 30 B) 60 C) 90
D) 120 E) 150

12. Siendo S , C y R lo conocido para un mismo ángulo en los sistemas respectivos, se establece que

$$\sqrt{\frac{14R}{11}} + \sqrt{\frac{198}{7R}} + 95 \cdot \left(\frac{S-C}{S+C}\right) = 0.$$

Calcule el valor numérico de la medida del ángulo en radianes.

A) π B) 2π C) 3π
D) 4π E) 5π

13. Al medir un ángulo generado en el sentido horario, se observó que los números que representan sus medidas en los sistemas convencionales se relacionan como se indica: 8π es a la diferencia entre el doble del número intermedio y el menor como 1,25 es al recíproco del mayor número. Calcule la medida de dicho ángulo en el sistema internacional.

A) $-\frac{\pi}{3}$ rad B) $-\frac{\pi}{5}$ rad C) $-\frac{\pi}{6}$ rad
D) $-\frac{\pi}{4}$ rad E) $-\pi$ rad

14. Se sabe que la suma del número de grados centesimales del complemento de un ángulo con el número de grados sexagesimales del suplemento de otro ángulo es 90. Si la relación de los ángulos es 0,81, calcule la diferencia de dichos ángulos expresada en radianes.

A) $\frac{\pi}{3}$ rad B) $\frac{17\pi}{180}$ rad C) $\frac{19}{180}$ rad
D) $\frac{\pi}{180}$ rad E) $\frac{19\pi}{180}$ rad

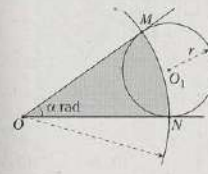
15. Si el complemento del ángulo $\frac{139\pi}{400}$ rad es equivalente a $\overline{ab}^\circ \overline{ab}$, entonces halle el valor de $a-b$.

A) -3 B) -5 C) -7
D) -9 E) -11

16. Un sector circular y un cuadrado tienen igual área y perímetro. Calcule la medida del ángulo central de dicho sector.

A) 1 rad B) 2 rad C) 3 rad
D) 4 rad E) 5 rad

17. Del gráfico, calcule el perímetro de la región sombreada en términos de r y α siendo O_1 centros y N , M puntos de tangencia.



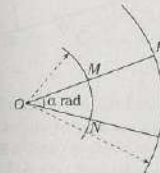
A) $r \cdot \cot \frac{\alpha}{2} \cdot (\alpha + 2)$ B) $r \cdot \cot \frac{\alpha}{2} \cdot (\alpha + 1)$

C) $r \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$

D) $\frac{\alpha \cdot r^2 \cdot \cot \frac{\alpha}{2}}{2}$

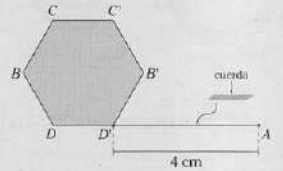
E) $\alpha \cdot r^2 \cdot \cot \frac{\alpha}{2}$

18. Se sabe que O es el centro de los sectores circulares POQ y MON . Calcule la longitud OM , en el gráfico mostrado, si $MP = \alpha$; $\ell_{MN} = 3$ cm y $\ell_{PQ} = 7$ cm.



A) $\frac{2}{3}$ cm B) $\frac{5}{2}$ cm C) $\frac{2}{5}$ cm
D) $\frac{3}{2}$ cm E) 1 cm

19. Según el gráfico mostrado, calcule la longitud del arco que describe el extremo de la cuerda cuando esta a su vez envuelve al hexágono regular de lado 1 cm, de tal manera que el punto A coincida con el punto B.

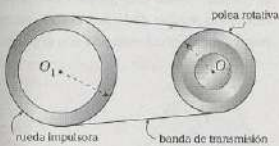


A) 3π cm B) $\frac{\pi}{3}$ cm C) $\frac{10\pi}{3}$ cm
D) $\frac{13\pi}{3}$ cm E) 4π cm

20. En un determinado sector circular AOB de centro O , se tiene que la longitud del arco AB es $(\tan x + 2)$ cm y la medida del ángulo central es $(\tan x)$ rad. Calcule el mínimo valor del área de la región determinada por el sector circular.

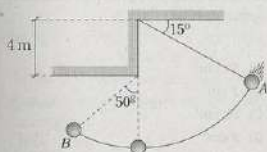
A) 4π cm²
B) 2π cm²
C) 2π cm²
D) 3π cm²
E) 4π cm²

21. Una rueda impulsora por medio de un motor de radio $5\sqrt{3}$ u y una polea de radio $\sqrt{3}$ u forman un sistema de transmisión, de tal manera que los ejes de la rueda y de la polea están a $8\sqrt{3}$ u de distancia. Calcule la longitud de la banda de transmisión que une a estos dispositivos. (O_1 , O_2 : centros)



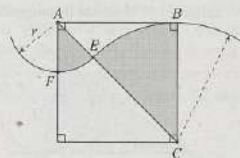
A) $\left(\frac{22\pi\sqrt{3}}{3} + 11\right)$ u B) $\left(\frac{11\pi\sqrt{3}}{3} + 12\right)$ u
C) $\left(\frac{22\pi\sqrt{3}}{3} + 12\right)$ u
D) $\left(\frac{22\pi\sqrt{3}}{3} + 24\right)$ u E) $(22\pi\sqrt{3} + 24)$ u

22. En el gráfico mostrado, el péndulo se mueve como indica la figura. Calcule la longitud del péndulo si su extremo recorre 3π m desde la posición A hasta la posición B.



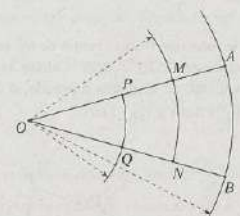
A) 2 m B) 4 m C) 6 m
D) 8 m E) 10 m

23. Se sabe que $ABCD$ es un cuadrado y los sectores circulares son FAE y ECB de centros A y C , respectivamente. Si el arco BEF mide 2π u, calcule el valor numérico de $(\sqrt{2} + 1)(8 - 2r)$.



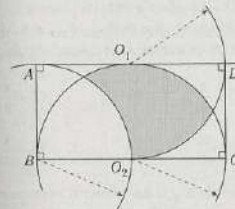
A) 8 B) 10 C) 12
D) 4 E) 2

24. En el gráfico mostrado, calcule el radio del sector circular AOB , de centro O siendo $\ell_{PO} = PM = MA = NB$; $OP = OQ$ y $\ell_{AB} = \sqrt{5} - 1$.



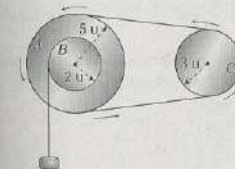
A) 1 u B) 2 u C) 3 u
D) 4 u E) 5 u

25. Calcule el perímetro de la región sombreada siendo O_1 , O_2 y B centros de los sectores según el gráfico mostrado.



A) $\frac{11\pi}{6}$ u B) $\frac{\pi}{6}$ u C) $\frac{7\pi}{6}$ u
D) $\frac{5\pi}{6}$ u E) $\frac{\pi}{3}$ u

26. En el sistema mostrado, la polea C gira un ángulo de $\frac{\pi}{6}$ rad. Calcule la longitud desplazada por el bloque ideal.



A) $\frac{\pi}{5}$ u B) $\frac{\pi}{36}$ u C) $\frac{\pi}{6}$ u
D) $\frac{\pi}{3}$ u E) $\frac{\pi}{4}$ u

27. Si las ciudades A y B están ubicadas en la línea ecuatorial y C está ubicada en el Polo Norte, asumiendo que la Tierra es una esfera de radio R , y la diferencia horaria entre la

ciudades A y B es de ocho horas, calcule el perímetro del triángulo esférico formado por las posiciones de las tres ciudades: A, B y C.

A) $\frac{\pi}{3} \cdot R$ B) $\frac{7\pi}{3} \cdot R$ C) $\frac{5\pi}{3} \cdot R$
D) $\frac{2\pi}{3} \cdot R$ E) $\frac{9\pi}{7} \cdot R$

28. Una bicicleta de 25 u de radio en cada rueda es impulsada a una velocidad de 22 km/h. Calcule el número de vueltas que realizan las ruedas en cada minuto.

A) 230,33 B) 233,33 C) 236,33
D) 239,33 E) 241,33

NIVEL INTERMEDIO

29. Si a n veces la suma de las inversas de los números de grados sexagesimales y centesimales les restamos el doble de la diferencia de dichas inversas, obteniendo cuatro veces la inversa del número de grados centesimales, calcule el valor de $n^2 + 2n$.

A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

30. Siendo S , C y R lo convencional para un mismo ángulo, se establece que $S^\circ = C^\circ$. A partir de esta condición, y asumiendo un valor aproximado para π , calcule

$$\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{10}}{2} \cdot R + 11,995$$

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

31. La diferencia de los números de grados centesimales y sexagesimales de un mismo ángulo es igual a 20 veces su número de segundos sexagesimales dividido por su número de minutos centesimales. Calcule la medida de dicho ángulo en el sistema centesimal.

A) 5832° B) 6000° C) 6480°
D) 6471° E) 6491°

32. Siendo S , C y R lo convencional para un mismo ángulo en los sistemas respectivos, se establece que

$$1 + \frac{4C - 6S}{S - C} < \frac{5R}{2} < \frac{2C}{C - S}$$

Calcule la medida del ángulo en grados sexagesimales siendo R un número entero.

A) $\left(\frac{1260}{\pi}\right)^\circ$ B) $\left(\frac{630}{\pi}\right)^\circ$ C) $\left(\frac{415}{\pi}\right)^\circ$
D) $\left(\frac{1260}{7}\right)^\circ$ E) $\left(\frac{\pi}{1260}\right)^\circ$

33. Para un ángulo trigonométrico se establece la siguiente relación:

$$\log_5 \frac{S}{2} + \log_3 \frac{C}{3} > 2$$

Siendo S y C lo convencional para un mismo ángulo en los sistemas respectivos, entonces el número de radianes de dicho ángulo se encuentra comprendido entre

A) $\left\langle 0; \frac{\pi}{2400} \right\rangle$ B) $\left\langle 0; \frac{\pi\sqrt{10}}{1200} \right\rangle$
C) $\left\langle 0; \frac{\pi\sqrt{10}}{2400} \right\rangle$
D) $\left\langle 0; \frac{\pi\sqrt{7}}{120} \right\rangle$ E) $\left\langle 0; \frac{\pi\sqrt{60}}{3800} \right\rangle$

34. Siendo S el número de grados sexagesimales de un ángulo trigonométrico, se establece la siguiente relación:

$$\sqrt{S+3} + \sqrt{4-S} > -33$$

Calcule el valor de $R_{\max}/R_{\min}$ si R es el número de radianes del mismo ángulo.

A) $-\frac{3}{5}$ B) $-\frac{5}{4}$ C) $-\frac{4}{5}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$

35. Siendo S y C los números convencionales de un ángulo positivo, se establece que $\log S \cdot \log 2S \cdot \log 3S \cdot \log 4S \dots \log nS = a$; $a = R$. Calcule la suma de valores que asume $\log C$.

A) $\log \left(\left(\frac{9}{10} \right)^n \cdot n! \right)$ B) $n \log \left(\frac{9}{10} \right) - n!$
C) $-\log \left(\left(\frac{9}{10} \right)^n \cdot n! \right)$
D) $\frac{9n}{10} + n!$ E) $n \cdot \log n^n$

36. Para un determinado ángulo se establece que $S^2 = C^2 = R$ rad.

Además

$$\left(\frac{20RS}{9\pi} \right)^3 + \left(\frac{C}{10} \right)^6 = x$$

$$\left(\frac{2RC}{\pi} \right)^4 + \left(\frac{S}{9} \right)^8 = y$$

Calcule la medida del ángulo en el sistema sexagesimal considerando que $y \cdot S^2 = x \cdot C^2$ siendo S , C y R lo conocido para dicho ángulo.

A) 5° B) 10° C) 15°
D) 20° E) 25°

37. Calcule la medida de un ángulo en el sistema internacional si se verifica que las raíces de la siguiente ecuación son S y C .

$$x^3 - (43+a)x^2 + (43a-90)x + 90a = 0$$

Considere que S y C son lo conocido para un mismo ángulo y $a > 0$.

A) $\left[\frac{\pi}{4} \text{ rad}; \frac{\pi}{2} \text{ rad} \right]$
B) $\left[\frac{9\pi}{40} \text{ rad}; \pi \text{ rad} \right]$
C) $\left[\frac{\pi}{4} \text{ rad}; \frac{\pi}{3} \text{ rad} \right]$
D) $\left[\frac{\pi}{4} \text{ rad}; \frac{9\pi}{40} \text{ rad} \right]$
E) $\left[\frac{9\pi}{40} \text{ rad}; \frac{\pi}{6} \text{ rad} \right]$

38. Se sabe que S , C y R son lo conocido para un mismo ángulo de los sistemas respectivos. Calcule la medida de dicho ángulo en el sistema radial si

$$\frac{S^5}{9} + \frac{C^8}{10} + \frac{20 \cdot R^8}{\pi} = 4 \cdot (S^7 + C^7 + R^7)$$

A) $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ B) $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$ C) $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$
D) $\frac{\pi}{12} \text{ rad}$ E) $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$

39. Se tiene la siguiente expresión: $120S - 81SC$. Calcule el máximo valor de esta expresión si S y C son los números convencionales establecidos para un ángulo positivo.

A) 40 B) 20 C) 60
D) 10 E) 80

40. Calcule $\sqrt[3]{R^S}$ siendo S , C y R los números convencionales de un mismo ángulo; además, $\sqrt[3]{C^S} + \sqrt[3]{S^C} = 1081$.

A) $\frac{\pi}{50}$ B) $\frac{\pi}{40}$ C) $\frac{\pi}{20}$
D) $\frac{\pi}{10}$ E) $\frac{\pi}{3}$

41. Calcule la medida del menor ángulo en el sistema internacional si el número de minutos sexagesimales del primer ángulo es al número de segundos centesimales del segundo ángulo como tres es a mil. Además, la diferencia entre el número de grados sexagesimales, del primer y segundo ángulo es 164.

A) $\frac{40\pi}{15} \text{ rad}$ B) $\frac{41\pi}{36} \text{ rad}$ C) $\frac{5\pi}{8} \text{ rad}$
D) $\frac{4\pi}{9} \text{ rad}$ E) $\frac{5\pi}{18} \text{ rad}$

42. Un ángulo trigonométrico al ser medido en los sistemas sexagesimal y centesimal obtiene medidas, cuyos valores numéricos son

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}; h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1}$$

Calcule la medida de este ángulo en el sistema internacional si se logra medir en sentido contrario a los medidos en los otros dos sistemas.

A) $-\frac{\pi}{19} \text{ rad}$ B) $-\frac{\pi}{6} \text{ rad}$ C) $-\frac{\pi}{3} \text{ rad}$
D) $-\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ E) $-\frac{\pi}{38} \text{ rad}$

43. Se define la siguiente función, con regla de correspondencia $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$. Calcule el mayor valor de un ángulo en el sistema internacional para la condición $f(S, C)$ siendo S , C y R lo conocido para un mismo ángulo.

A) $\frac{\pi}{5\sqrt{181}} \text{ rad}$ B) $\frac{1}{5\sqrt{815}} \text{ rad}$ C) $\frac{\pi}{5} \text{ rad}$
D) $\frac{5\sqrt{181}}{\pi} \text{ rad}$ E) $\frac{\pi}{\sqrt{181}} \text{ rad}$

44. Calcule la medida de un ángulo en grados sexagesimales siendo S , C y R lo convencional y considerando que

$$\log_C S + \log_C R - 3 = 0$$

A) $\left(\left(\frac{3}{10} \right)^4 \cdot \frac{\pi}{2} \right)^\circ$ B) $\left(\left(\frac{3}{10} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \right)^\circ$
C) $\left(\left(\frac{3}{10} \right)^3 \cdot \frac{\pi}{2} \right)^\circ$
D) $\left(\left(\frac{3}{10} \right)^5 \cdot \frac{\pi}{2} \right)^\circ$ E) $\left(\left(\frac{3}{10} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right)^\circ$

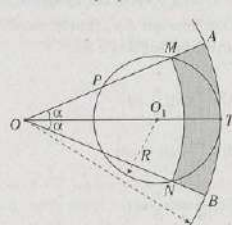
45. Calcule la medida de un ángulo en el sistema radial si se verifica que

$$\left(\frac{12}{S} \right)^7 + \left(\frac{\pi}{15R} \right)^7 + \left(\frac{40}{3C} \right)^7 = \frac{\pi C - 197R}{\pi S - 52R}$$

Considere que S , C y R son lo convencional.

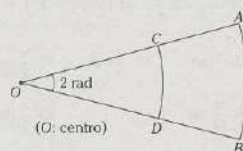
A) $\frac{2\pi}{13} \text{ rad}$ B) $\frac{2\pi}{15} \text{ rad}$ C) $\frac{2\pi}{17} \text{ rad}$
D) $\frac{2\pi}{19} \text{ rad}$ E) $\frac{2\pi}{21} \text{ rad}$

46. Del gráfico mostrado, calcule el área de la región sombreada siendo AOB y MON sectores circulares; además, $OP = O_1T$ y $m\angle AOB = 30^\circ$ (O y O_1 son centros).



A) $\frac{\pi R^2}{3} \cdot \sqrt{3}$ B) $\pi R^2 \cdot \sqrt{3}$ C) $\frac{\pi R^2}{2} \cdot \sqrt{3}$
D) $\frac{\pi R^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ E) $\frac{\pi R^2}{9} \cdot \sqrt{3}$

47. Del gráfico mostrado, calcule $BD + AB$ si AB asume su mínimo valor; además, $CD \cdot BD = 1$. Considere que O es centro de los sectores circulares mostrados.



A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\frac{5}{2}\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

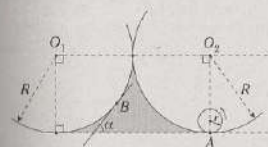
48. Se sabe que l_1 y l_2 son longitudes del arco de un trapecio circular de área mínima, donde $l_1 = 210 - 40x$ y $l_2 = 7x^2 - 30x$.

Además α es el número de radianes del ángulo central, y la longitud 4 u es la separación entre los arcos de circunferencia.

$$\text{Calcule } \frac{l_2}{\alpha \cdot l_1}$$

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{2}{3}$ E) 1

49. En el gráfico mostrado, la rueda parte del punto A y da 6,5 vueltas hasta llegar al punto B. Calcule el valor del ángulo α si $R = 19$; además, B es punto de tangencia y O_1, O_2 son centros.



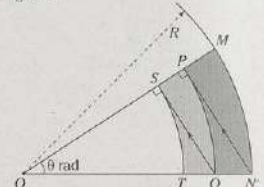
A) $\frac{\pi}{6} \text{ rad}$ B) $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$ C) $\frac{\pi}{12} \text{ rad}$
D) $\frac{5\pi}{12} \text{ rad}$ E) $\frac{\pi}{3} \text{ rad}$

50. En un tronco de cono, se sabe que los radios de sus bases son R y r ($R > r$), y una generatriz está contenida en un plano horizontal. Se le hace girar una vuelta completa

alrededor de su eje, tal que siempre esté en contacto con el plano. Siendo la medida de su generatriz g y el desplazamiento angular de su eje α rad, calcule el área que genera dicho tronco en el plano.

A) $\frac{\alpha g}{Rr}$
B) $\frac{\alpha}{2} \cdot \left(\frac{R+r}{R-r} \right) \cdot g^2$
C) $\frac{\alpha g}{2} \cdot \left(\frac{R+r}{R-r} \right)$
D) $\alpha \cdot g^2 \cdot \left(\frac{R+r}{R-r} \right)$
E) $\frac{\alpha g}{R-r}$

51. En el gráfico mostrado, calcule el valor de $9A - B$ en términos de R y θ siendo B el área del trapecio circular $MINPQ$, A el área del trapecio circular $SPQT$, O es el centro, y además $2NP = 3SQ$. Considere S y P puntos de tangencia.



A) $8R^2 \cdot \sin^2 \theta$
B) $8R^2 \cdot \cos^2 \theta$
C) $8R^2 \cdot \tan^2 \theta$
D) $8R^2 \cdot \cos \theta$
E) $8R^2 \cdot \sin^2 \theta$