MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

Se le llama en dos dimensiones, porque la posición de la partícula en cada instante, se puede representar por dos coordenadas, respecto a unos ejes de referencia. El movimiento en 2 dimensiones es cuando la partícula se mueve tanto horizontal como verticalmente.

El movimiento de una partícula en dos dimensiones es la trayectoria de la partícula en un plano (vertical, horizontal, o en cualquier otra dirección del plano).Las variables a las que está sometida la partícula son dos y por eso se le denomina movimiento en dos dimensiones.

CARACTERÍSTICAS

El movimiento en dos dimensiones se caracteriza por dos movimientos uno ascendente, y otro descendente, como caso particular, un objeto o móvil. Esto puede desarrollar dentro de un espacio el movimiento descendente desde un punto alto, esto se llama, movimiento semi-parabólico figura 1.
El movimiento parabólico o tiro oblicuo resulta de la composición de un movimiento rectilíneo uniforme (mru horizontal) y un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de lanzamiento hacia arriba o hacia abajo (mrua vertical) como muestra la grafica.. Este movimiento se forma cuando un objeto se mueve en una trayectoria definida por una parábola, figura 2.

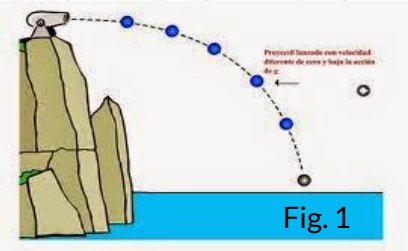


Fig. 1

Fig. 2

Tomadas de :
http://fisica4toantoniosandoval.blogspot.com.co/2014/10/movimiento-en-dimensiones.html

Movimientos Parabólico.

La composición de un movimiento uniforme y otro uniformemente acelerado resulta un movimiento cuya trayectoria es una parábola.

- Un MRU horizontal de velocidad v_x constante.
- Un MRUA vertical con velocidad inicial v_{oy} hacia arriba.

Este movimiento está estudiado desde la antigüedad. Se recoge en los libros más antiguos de balística para aumentar la precisión en el tiro de un proyectil. Denominamos proyectil a todo cuerpo que una vez lanzado se mueve solo bajo la aceleración de la gravedad.

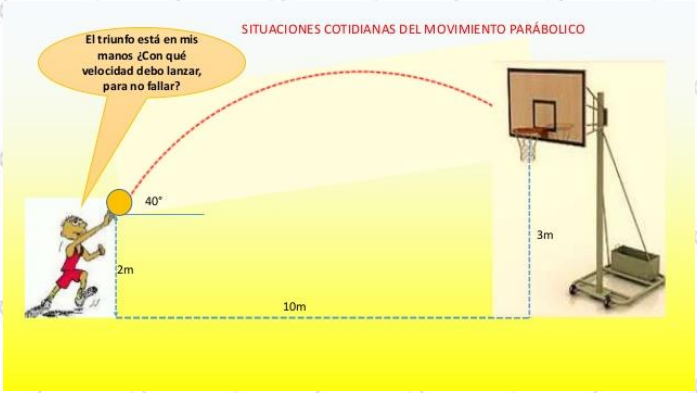
un proyectil tiene solamente una fuerza que actúa sobre él, esta es la fuerza de gravedad. Si hubiera alguna otra fuerza que actuara sobre un objeto, ese objeto no sería un proyectil

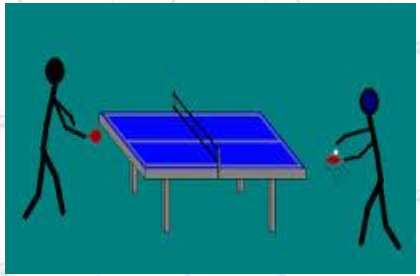
Hay una variedad de ejemplos de proyectiles:

- Un objeto que se lanza desde un precipicio es un proyectil.
- Un objeto que se lanza verticalmente hacia arriba es también un proyectil.
- Un objeto es qué lanzado hacia arriba en ángulo también está un proyectil.
- Todos estos ejemplos se dan con la condición de que la resistencia del aire se considera insignificante.
- Un proyectil es cualquier objeto que se proyectara una vez que continúa en el movimiento por su propia inercia y es influenciado solamente por la fuerza hacia abajo de la gravedad.

Tomadas de:
http://mdm.unicundi.edu.co/repositorio/libres/fisica1/modulo4/mod4_4.html

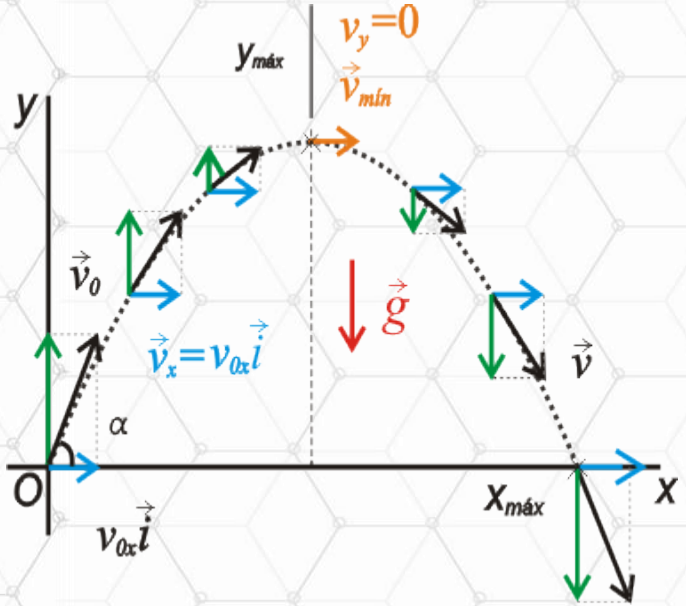
Aplicaciones del movimiento parabólico



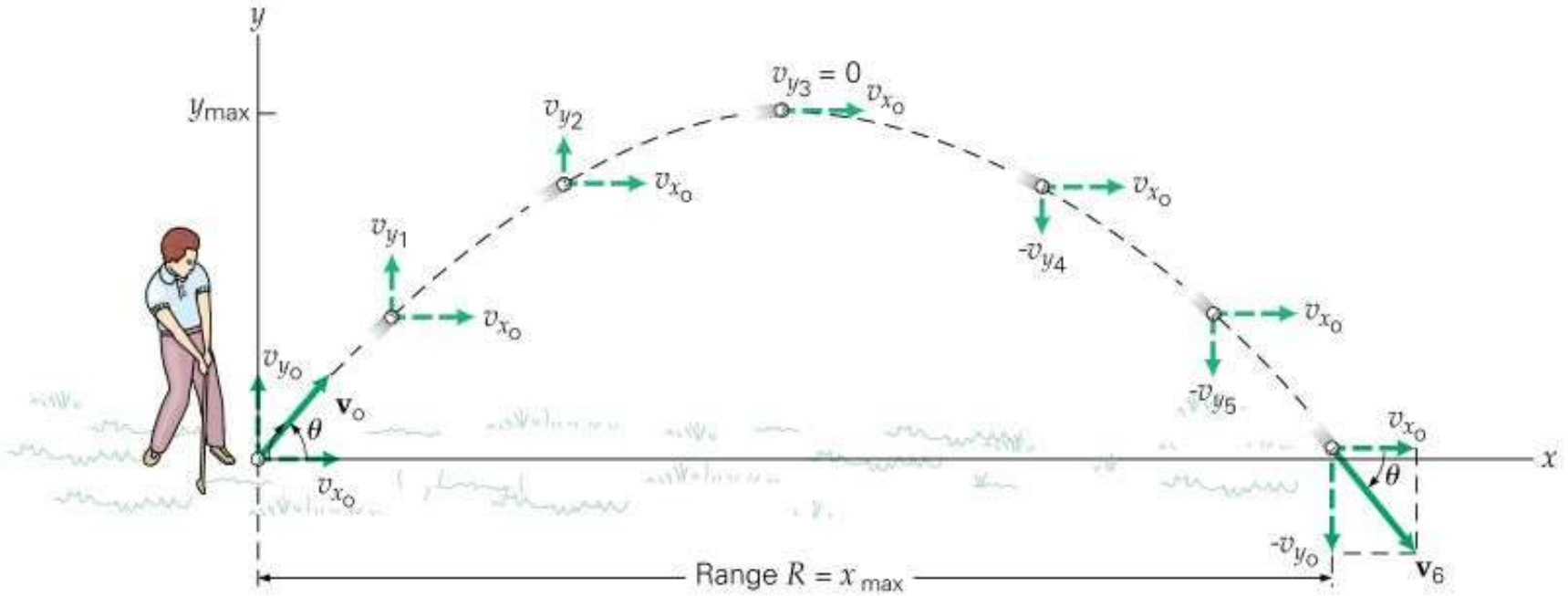


Características del movimiento parabólico

1. Este movimiento se forma cuando un objeto se mueve en una trayectoria definida por una parábola.
2. Las ecuaciones del movimiento, son el resultado de la composición de un movimiento uniforme a lo largo del eje X, y de un movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje Y.
3. Condiciones iniciales: Angulo de tiro entre 0 y 90; (Vo) velocidad inicial es diferente de cero.
4. La velocidad del movimiento tiene componentes vertical y horizontal.
5. La velocidad vertical disminuye mientras sube y aumente cuando baja.
6. La velocidad horizontal es constante.
7. El tiempo de subida es igual al tiempo de bajada.
8. La aceleración del movimiento es la gravedad.
9. El máximo alcance se obtiene al lanzar el cuerpo con un ángulo de 45 grados.
10. Para ángulos complementarios 30 y 60 20 y 70 con la misma rapidez de lanzamiento, los alcances son iguales.



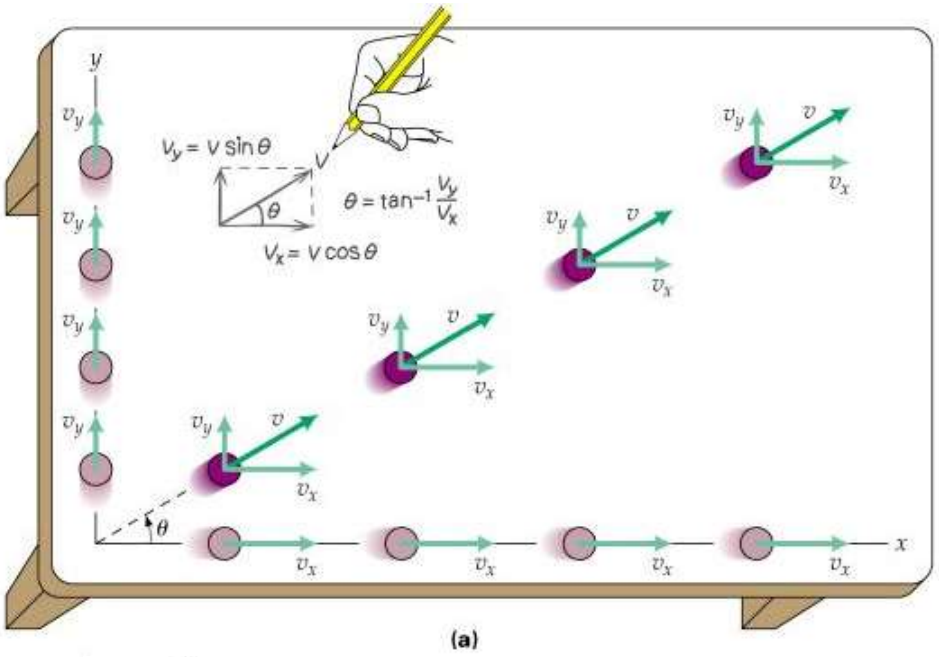
En la figura tenemos un proyectil que se ha disparado con una velocidad inicial v_0, haciendo un ángulo θ con la horizontal, las componentes de la velocidad inicial son:

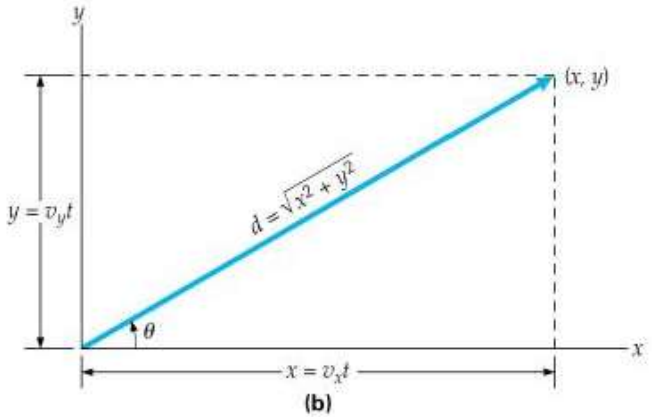


$$v_{x0} = v_0 \cos\theta$$

$$v_{y0} = v_0 \operatorname{sen}\theta$$

Componentes del movimiento





$$v_x = v\cos\theta$$

$$v_y = vsen\theta$$

$$x = x_0 + v_x t$$

$$y = y_0 + v_y t$$

Ecuaciones del movimiento parabólico

1. Las ecuaciones del movimiento, son el resultado de la composición de un movimiento uniforme a lo largo del eje X, y de un movimiento uniformemente acelerado a lo largo del eje Y.
2. La velocidad forma un ángulo α con la horizontal, las componentes *x* e *y* se determinan recurriendo a las relaciones trigonométricas más habituales:

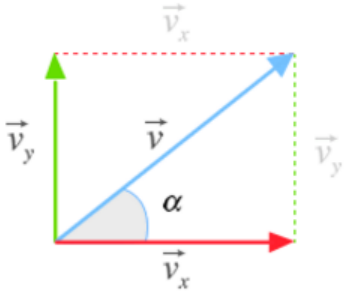
Según las razones trigonométricas

$$v_x = v \cdot \cos\alpha \qquad v_y = v \cdot \sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

Según el teorema de Pitágoras

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$



3. Velocidad y altura

$$a_x = 0 \qquad v_x = v_0 \cdot \cos\theta_0 \qquad x = v_0 \cdot \cos\theta_0 \cdot t$$

$$a_y = -g \qquad v_y = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta_0 - g \cdot t \qquad y = v_0 \cdot \operatorname{sen}\theta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

4. El alcance horizontal de cada uno de los proyectiles se obtiene para *y*=0.

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{g}$$

5. Su valor máximo se obtiene para un ángulo θ =45º, teniendo el mismo valor para θ =45+*a* , que para θ =45-*a*. Por ejemplo, tienen el mismo alcance los proyectiles disparados con ángulos de tiro de 30º y 60º, ya que sen(2·30)=sen(2·60).

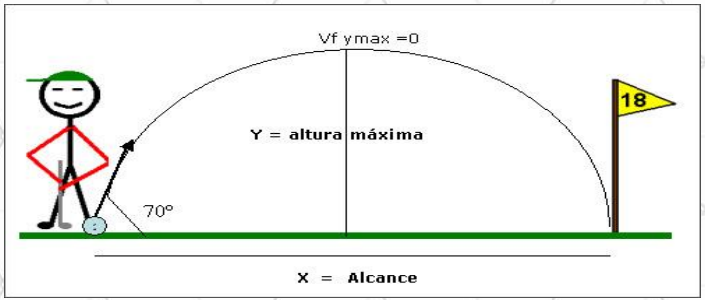
6. La altura máxima que alcanza un proyectil se obtiene con v_y=0.

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

7. Su valor máximo se obtiene para el ángulo de disparo ϑ =90º.

Angulo de tiro

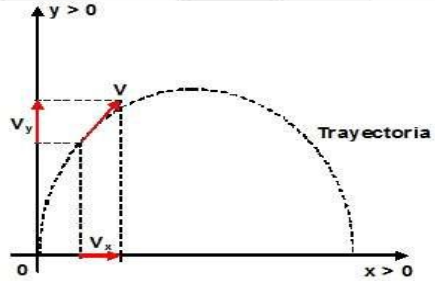
Para todos los proyectiles lanzados con el mismo impulso, la altura máxima, el alcance horizontal y el tiempo están determinados por el ángulo de salida.



Observa los videos y el link para aprender más del lanzamiento vertical

EJEMPLO 1. Se dispara un proyectil con un cañón que forma un ángulo de 60° con respecto a la horizontal, si la velocidad del proyectil al momento de dejar la boca del cañón es de 400 m/s.
¿Cuál es la altura máxima que alcanza el proyectil? ($g = 10\ m/s^2$)
Datos: $\alpha = 60°$ $v = 400\ m/s$ $g = 10\ m/s^2$

ECUACION $v_f^2 = v_0^2 + 2.g.y$
Primero calculamos la componente vertical de la velocidad (v_y):
$\text{sen}\ \alpha = v_y/v$
$v_y = v.\text{sen}\ \alpha$ $v_y = (400\ m/s).\text{sen}\ 60°$
$v_y = (400\ m/s).0{,}866$ $v_y = 346{,}41\ m/s$



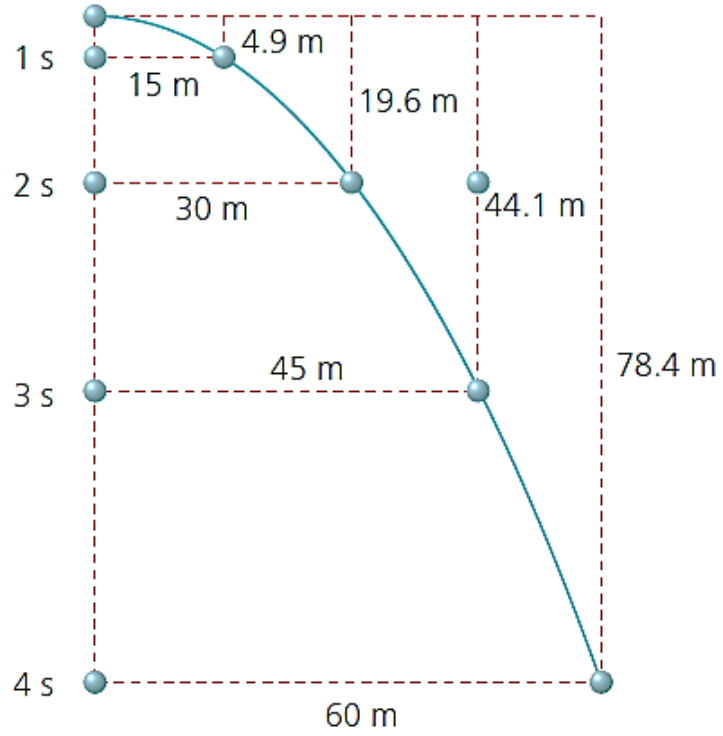
En el tiro parabólico, el movimiento sobre el eje "y" es igual que en el "Tiro vertical", y valen todas sus ecuaciones. Para calcular la altura máxima, debemos considerar que ocurre cuando la velocidad en "y" se hace "cero", es decir que la velocidad final será cero:
$v_f = 0\ m/s$
La velocidad inicial es la calculada anteriormente ($v_y = 346{,}41\ m/s$).
Podemos aplicar la fórmula (para el eje "y"):
$v_f^2 = v_0^2 + 2.g.y$ $0^2 = v_0^2 + 2.g.y$ $-v_0^2 = 2.g.y$
$y = -v_0^2/2.g$
$y = -(346{,}41\ m/s)^2/[2.(-10\ m/s^2)]$
$y = 6000\ m$

Tiro horizontal

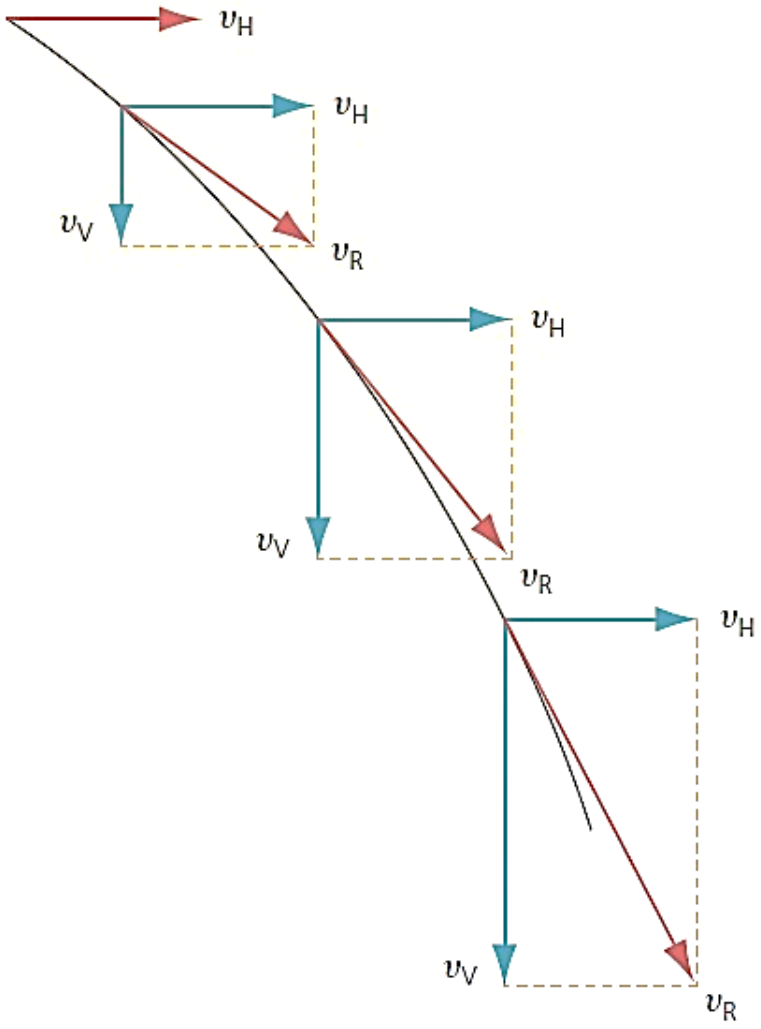
El tiro horizontal se da al lanzar horizontalmente un objeto al vacío.

La componente horizontal sigue un MRU mientras que la vertical una caída libre. La trayectoria es media parábola.

Aunque ambos movimientos son independientes, cada punto representa un instante del tiempo.



Tiro horizontal



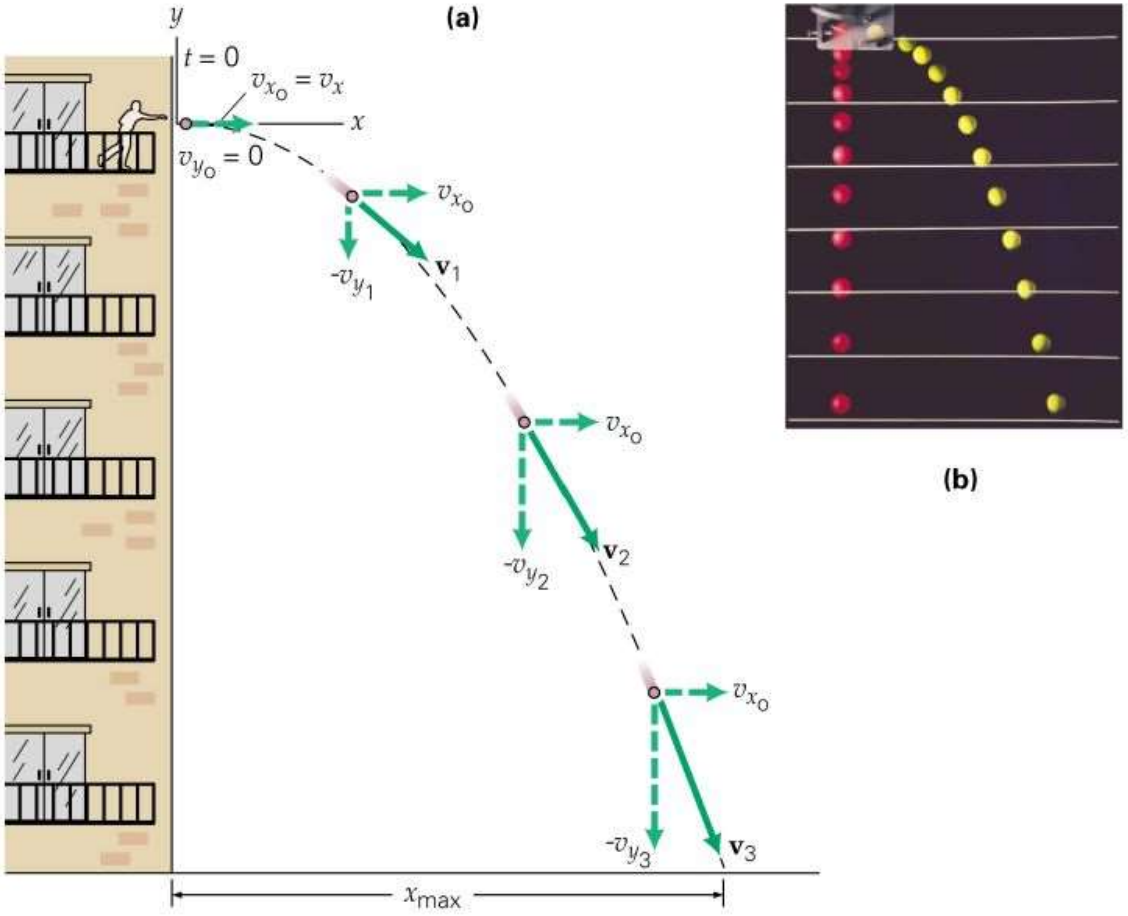
La velocidad resultante v_R es igual a la suma de las velocidades por componentes:

i. La velocidad horizontal v_H que permanece constante en todo momento

ii. La velocidad vertical v_V que incrementa su magnitud mientras el tiempo transcurre

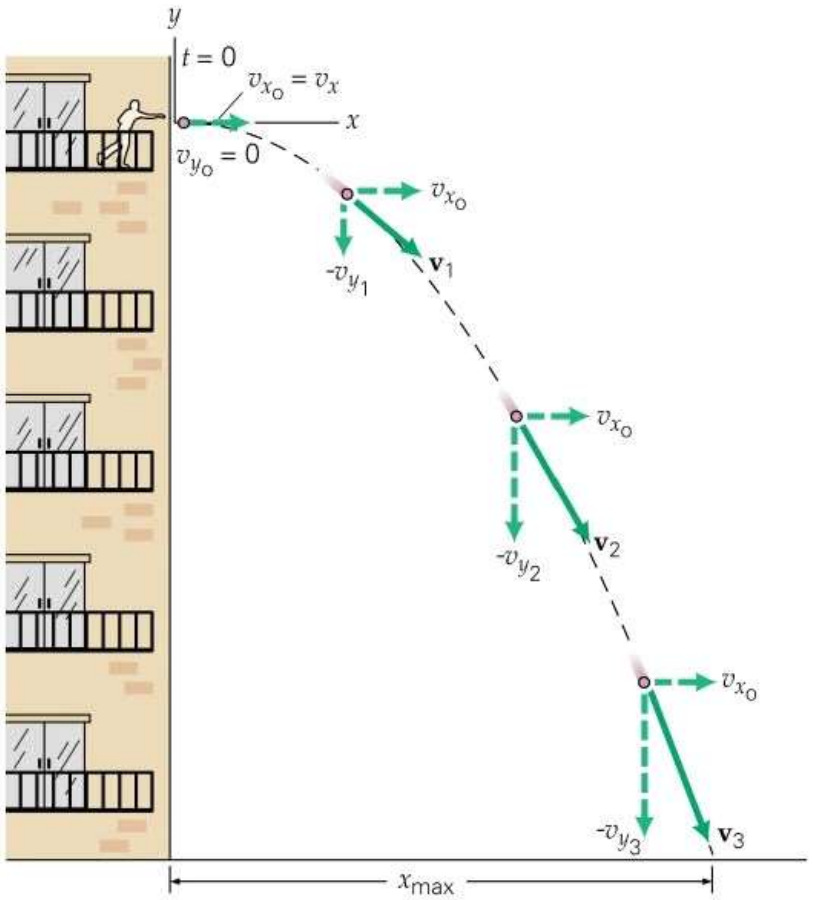
PROYECCIONES HORIZONTALES

Es un caso especial del movimiento parabólico, donde el proyectil es lanzado desde el punto de altura máxima.



En este caso, la velocidad inicial sólo tiene componente a lo largo del eje X, es decir $v_{x0} = v_0$ y $v_{y0} = 0$.

Suponga que la pelota de la figura se proyecta desde una altura de 25.0 m sobre el suelo y se le imprime una velocidad horizontal de 8.25 m/s. (a) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en llegar al suelo? (b) ¿A qué distancia del edificio toca el suelo la pelota?



$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$-25 = 0 + \frac{1}{2}(-9.8)t^2$$

$$t = 2.26 \text{ s}$$

$$x = v_{x0}t$$

$$x = 18.6 \text{ m}$$

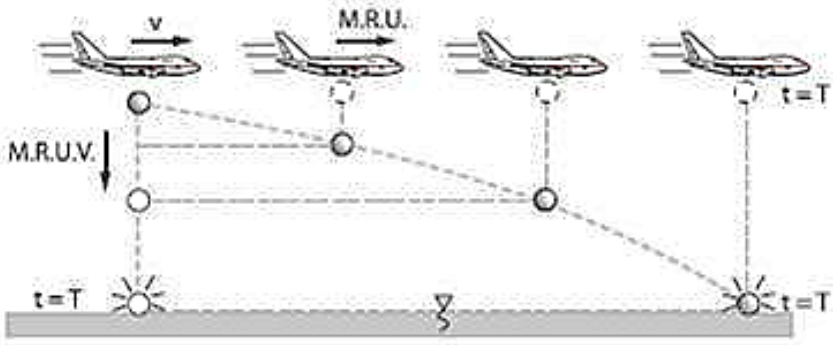
Ejemplos

1. Un avión que viaja hacia el Este a $40\ m/s$ deja caer un paquete, desde una altura de $10^2\ m$ sobre la superficie de la tierra. Determina:

a) El tiempo que tarda el paquete en llegar al suelo.

b) La distancia horizontal que recorre el paquete, a partir del punto donde se soltó.

c) Las componentes horizontal y vertical de la velocidad del paquete justo en el momento del impacto.



a) $t = 4.52\ s$

b) $\Delta x = 180.8\ m$

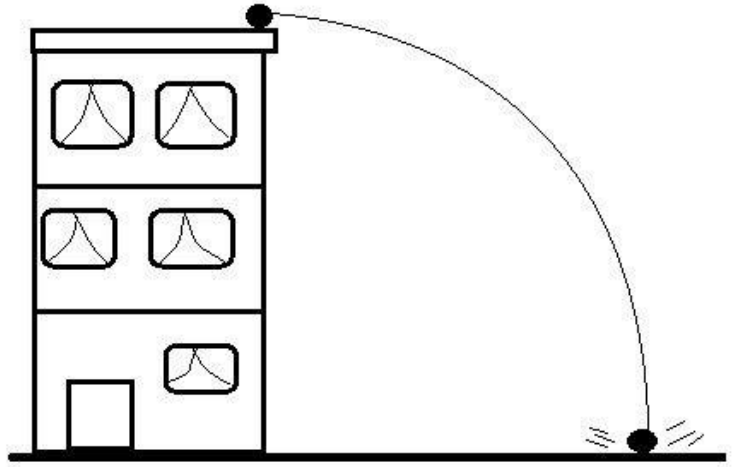
c) $v_{xf} = 40\ m/s$, $v_{yf} = -44.3\ m/s$

Ejemplos

2. Una pelota es lanzada horizontalmente desde la azotea de un edificio con una rapidez inicial de $10\ m/s$ y cae al suelo después de $5\ s$. Calcula:

a) La altura a la que se encuentra la azotea.

b) La distancia a la que cae la pelota, medida desde la base del edificio.



a) $y_0 = 122.5\ m$

b) $\Delta x = 50\ m$

Ejercicios

1. Un barman desliza un tarro con cerveza a $1.5\ m/s$ hacia un cliente en el extremo de la barra, a una altura de $1.2\ m$. El cliente no atrapa el vaso y éste sale disparado. a) ¿A qué distancia de la barra el tarro golpea el piso? b) ¿Cuáles son las componentes de la velocidad y aceleración del tarro al llegar al suelo?

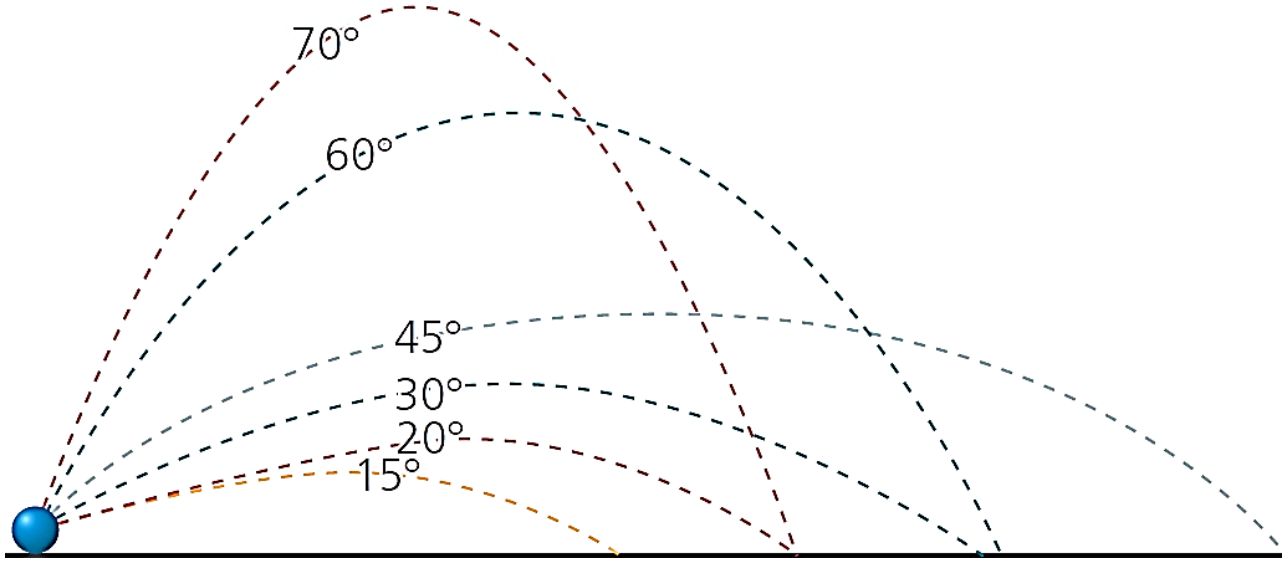
2. Un avión vuela horizontalmente con una velocidad de $800\ km/h$ y deja caer un proyectil, el cual tarda $10.5\ s$ en alcanzar la superficie de la tierra. a) ¿A qué altura va volando el avión al momento de soltar el proyectil? b) ¿Qué distancia horizontal recorre el proyectil después de iniciar su caída? c) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la velocidad al momento del impacto contra el suelo?

Tiro parabólico

Al lanzar un objeto cuyo vector velocidad apunta en una dirección con componentes $x - y$ distintas de cero, se obtiene un movimiento parabólico.

El componente horizontal sigue un MRU mientras que el vertical se compara con el movimiento de un objeto lanzado verticalmente hacia arriba. La trayectoria es una parábola.

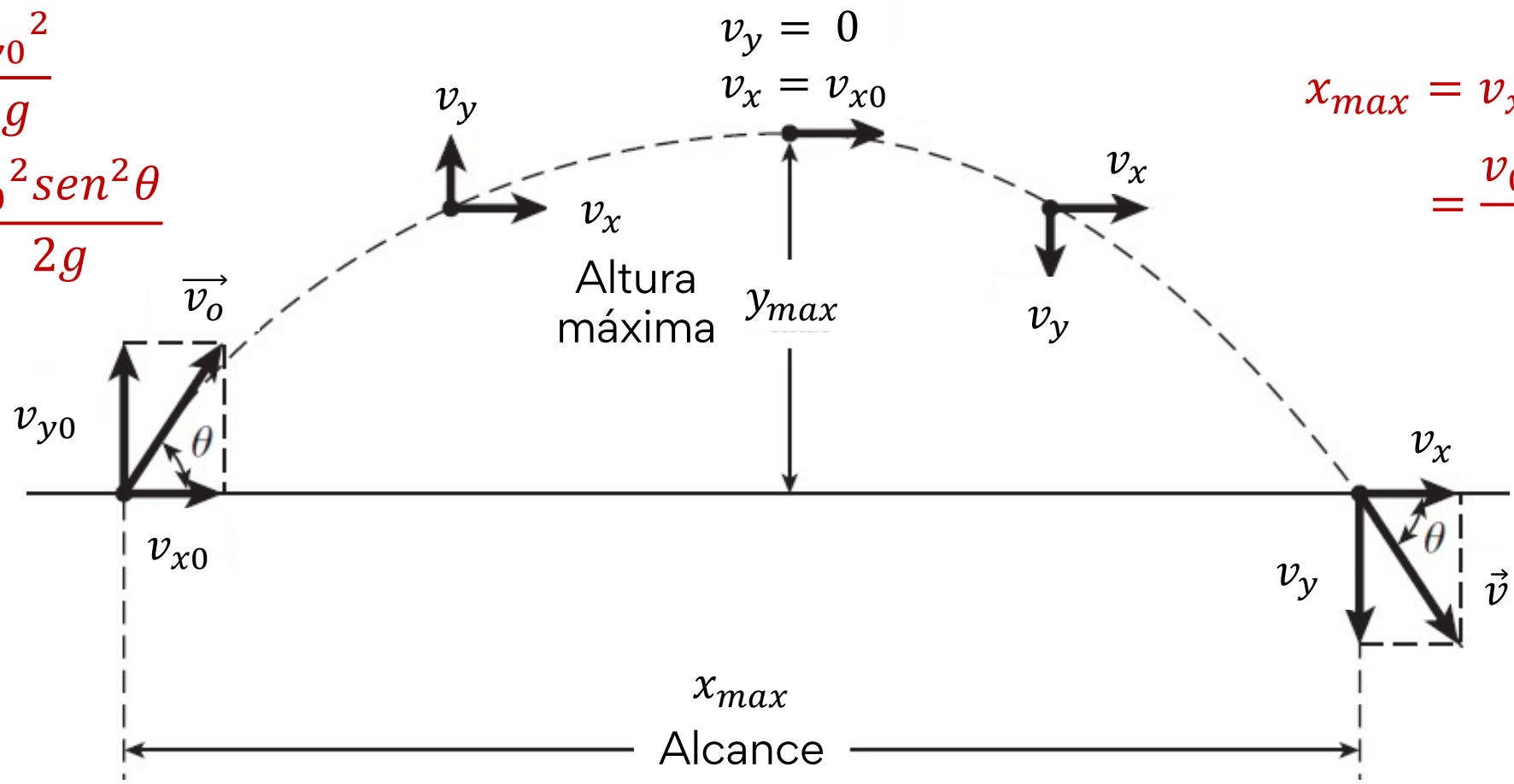
El alcance horizontal máximo se da con un ángulo de $45°$.



Tiro parabólico

$$y_{max} = \frac{{v_{y0}}^2}{2g} = \frac{{v_0}^2 sen^2\theta}{2g}$$

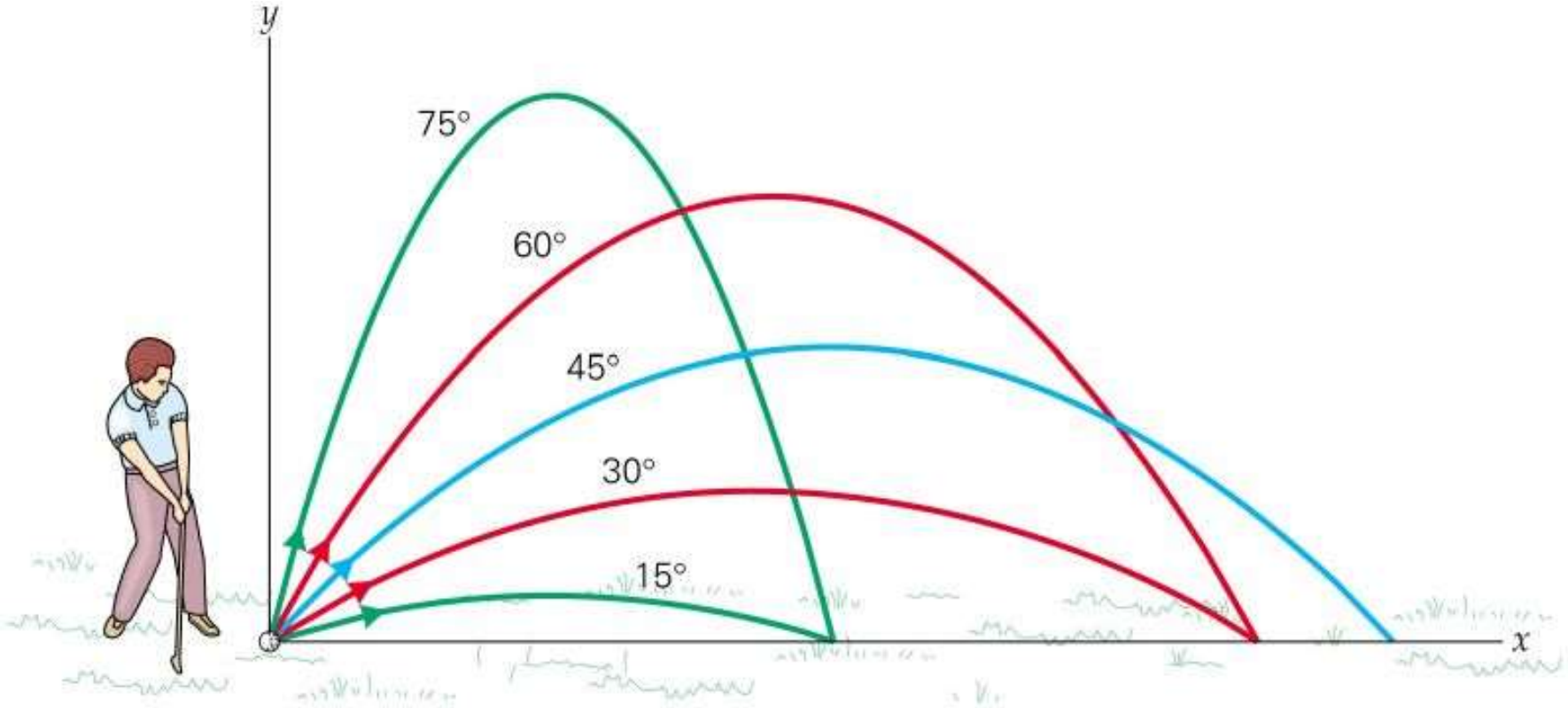
$$x_{max} = v_{x0}\, t_{aire} = \frac{{v_0}^2 sen\, 2\theta}{g}$$



$$t_{subir} = \frac{v_{y0}}{g}$$

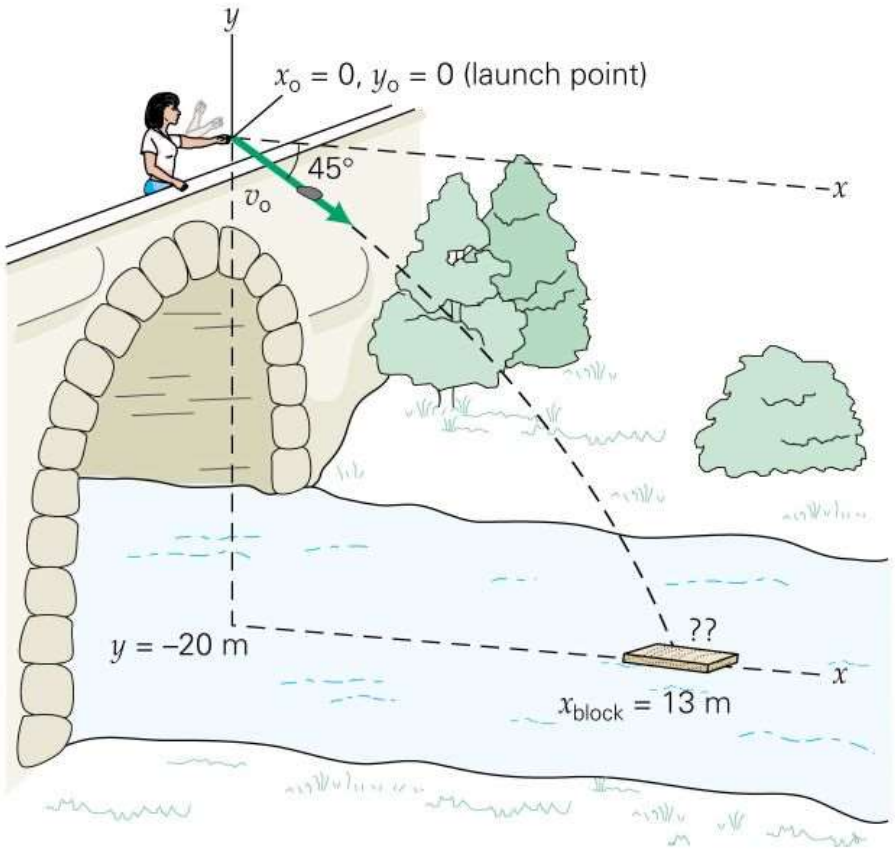
$$t_{aire} = 2t_{subir}$$

Para cierta v_0, el alcance es máximo cuando el ángulo de lanzamiento es de 45º. Con un ángulo mayor o menor, si la velocidad inicial es la misma, el alcance será menor.

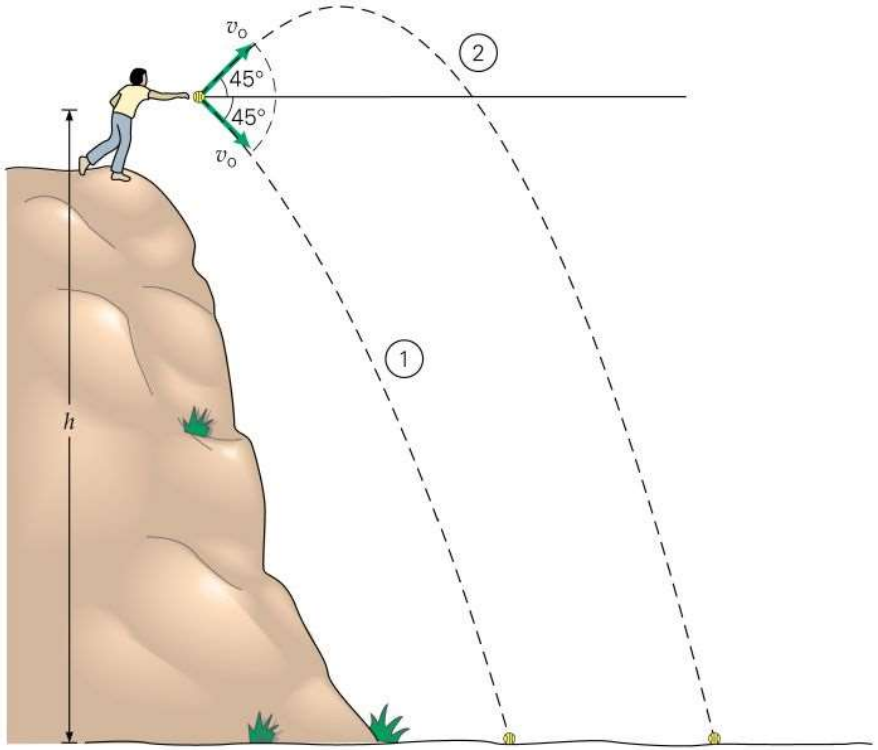


ALCANCE

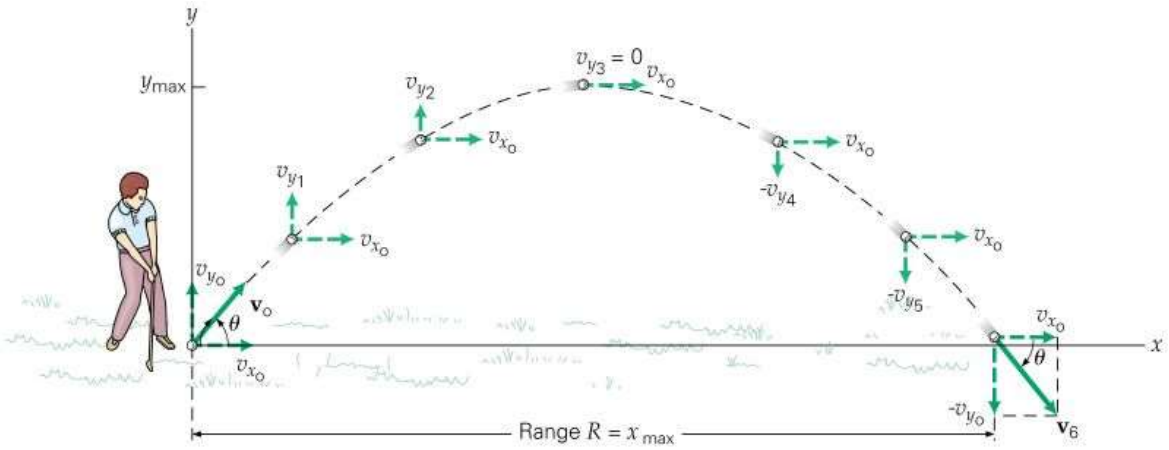
Una joven parada en un puente lanza una piedra con una velocidad inicial de 12 m/s en un ángulo de 45º bajo la horizontal, en un intento por golpear una tabla que flota en el río. Si la piedra se lanza desde una altura de 20 m sobre el río y llega al mismo cuando la tabla está a 13 m del puente, ¿golpeará la tabla?



Consideremos dos pelotas, ambas lanzadas con la misma rapidez inicial v_0, pero una con un ángulo de 45º arriba de la horizontal y la otra con un ángulo de 45º debajo de la horizontal. Al llegar al suelo, ¿cuál llega con mayor rapidez?

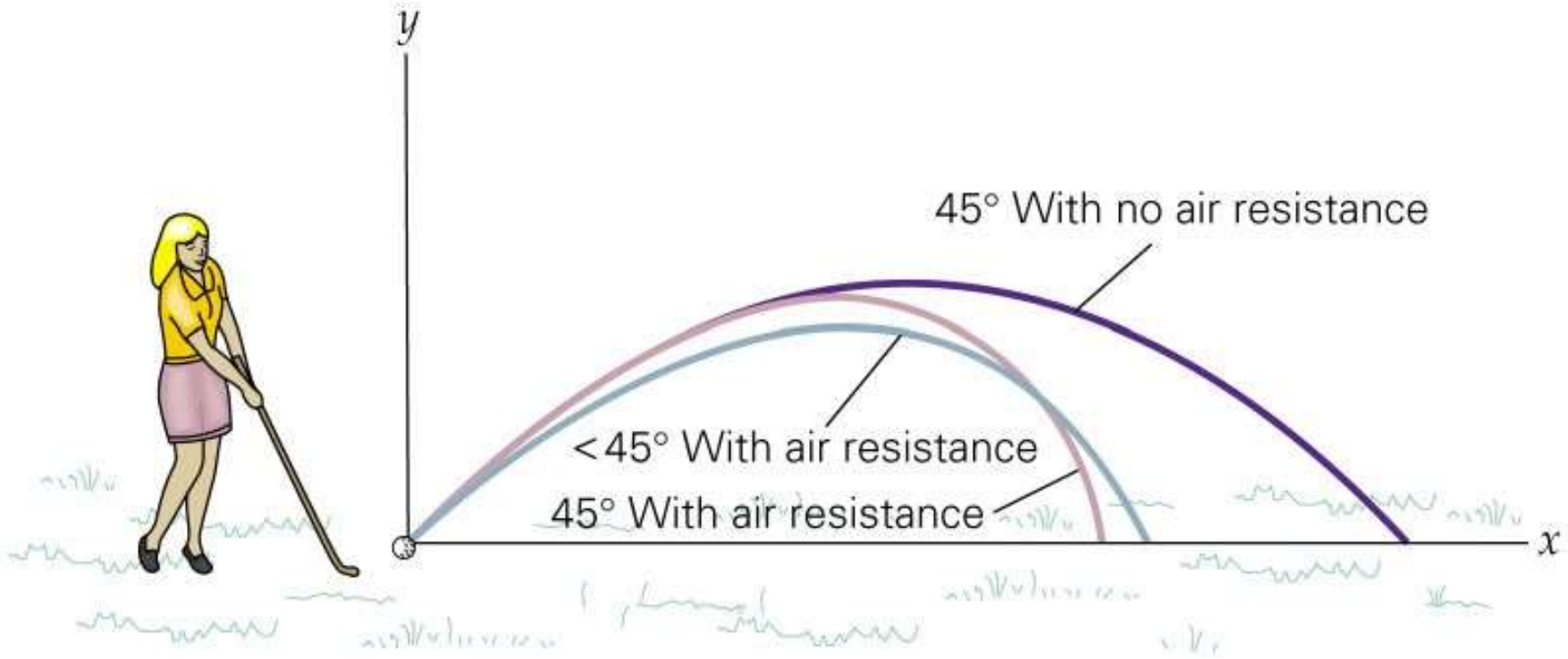


Suponga que un golfista golpea una pelota en el “tee” impartiéndole una velocidad inicial de 30.0 m/s con un ángulo de 35º respecto a la horizontal, como se muestra en la figura. (a) ¿Qué altura máxima alcanza la pelota? (b) ¿Qué alcance tiene?

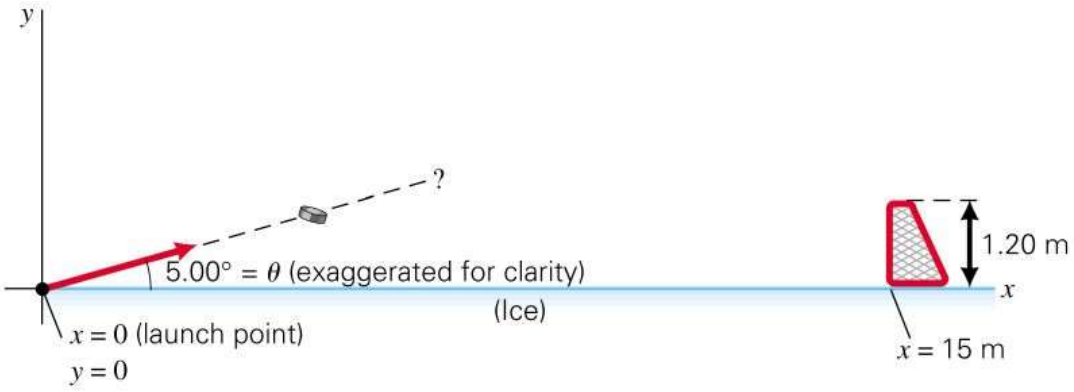


¿Cómo cambiarían los valores de altura máxima y alcance si la pelota se hubiera golpeado igual en la superficie de la Luna?

Lo anterior es válido si se desprecia la resistencia del aire. En situaciones reales, como cuando se lanza o golpea fuertemente una pelota u otro objeto, ese factor podría tener un efecto importante. La resistencia del aire reduce la rapidez del proyectil, y por tanto el alcance.



Un jugador de hockey lanza un tiro en una práctica cuando está 15.0 m directamente frente a la red. La red tiene 1.20 m de altura y el disco se golpea inicialmente con un ángulo de 5.00º sobre el hielo, con una rapidez de 35.0 m/s. Determine si el disco entra en la red o no. Si lo hace, determine si el disco está en ascenso o en descenso cuando cruza el plano frontal de la red.



¿A qué distancia de la red comenzó a descender el disco?

Ejemplos

1. Un saltador de longitud brinca en un ángulo de $20°$ con la horizontal y una rapidez inicial de $11\ m/s$.

a) ¿Cuánto tiempo le toma alcanzar su altura máxima?

b) ¿Cuál es su altura máxima?

a) $t_{subir} = 0.38\ s$

b) $y_{max} = 0.72\ m$

Ejemplos

1. Un saltador de longitud brinca en un ángulo de $20°$ con la horizontal y una rapidez inicial de $11\ m/s$.

c) ¿Qué distancia saltó? c) $x_{max} = 7.9\ m$

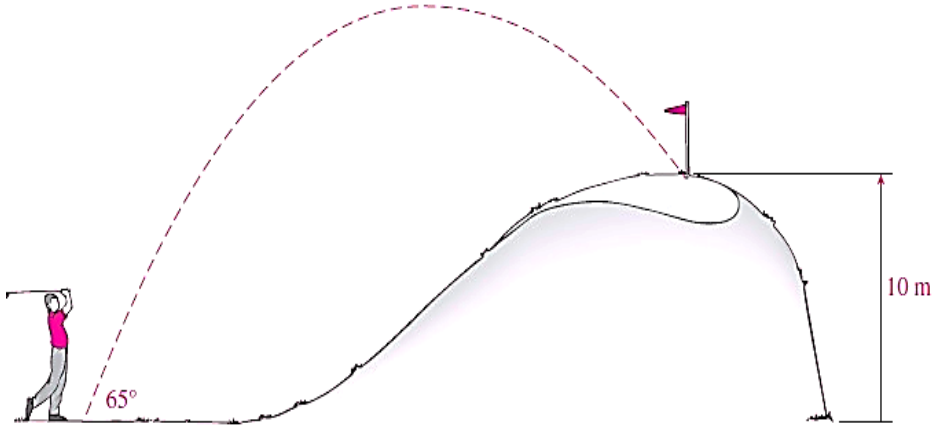
d) ¿Cuáles son los componentes de la velocidad al llegar al suelo? d) $v_x = 10.3\frac{m}{s}, v_y = -3.7\frac{m}{s}$

Ejemplos

2. Una pelota de golf es golpeada con una velocidad de $40\ m/s$ a $65°$. Si cae en el sitio exacto, ubicado $10\ m$ arriba del punto de partida:

a) ¿Cuánto tiempo permaneció en el aire? a) $t = 7.1\ s$

b) ¿Qué distancia horizontal recorrió? b) $\Delta x = 120\ m$



Ejercicios

1. Un saltamontes salta una distancia horizontal de $1\,m$ a partir del reposo, con una rapidez inicial v_0 en un ángulo de $45°$ con respecto a la horizontal. Determine: a) la rapidez inicial del saltamontes y b) la altura máxima que alcanza.

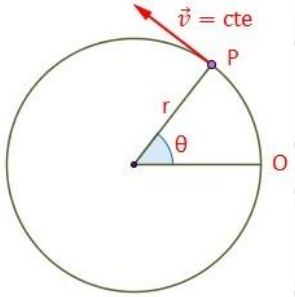
2. Una pelota de beisbol sale golpeada por el bat con una rapidez de $30\,m/s$ a un ángulo de $30°$. ¿Cuáles son los componentes horizontal y vertical de su velocidad y posición después de $3\,s$? ¿Cuánto tiempo tardó en llegar a su altura máxima y en llegar al suelo? ¿Cuál fue su altura máxima y su alcance horizontal? ¿Cuáles son los componentes de la velocidad al llegar al suelo?

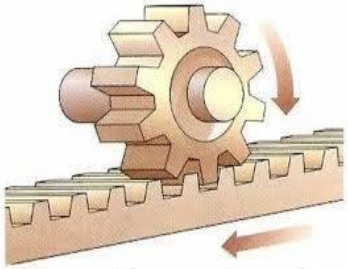
Movimiento circular

Un cuerpo realiza un **movimiento circular uniforme (m.c.u.)** cuando su trayectoria es una circunferencia y su velocidad angular es constante.

Estamos rodeados por objetos que describen movimientos circulares: un disco compacto durante su reproducción en el equipo de música, las manecillas de un reloj o las ruedas de una motocicleta son ejemplos de movimientos circulares; es decir, de cuerpos que se mueven describiendo una circunferencia.

La experiencia nos dice que todo aquello que da vueltas tiene movimiento circular. Si lo que gira da siempre el mismo número de vueltas por segundo, decimos que posee movimiento circular uniforme (MCU.



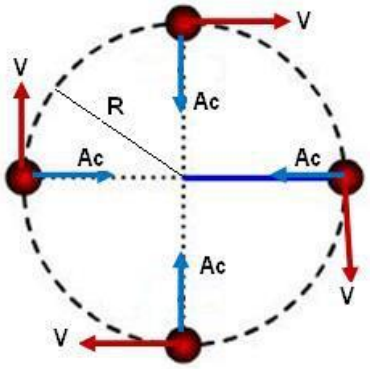


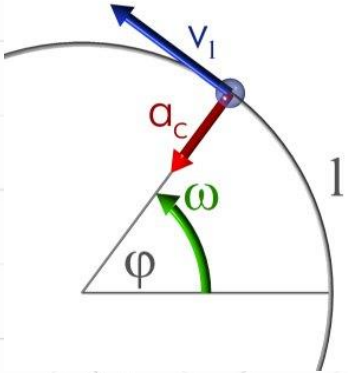
Ejemplos de cosas que se mueven con movimiento circular uniforme hay muchos:

La tierra es uno de ellos. Siempre da una vuelta sobre su eje cada 24 horas. También gira alrededor del sol y da una vuelta cada 365 días. Un ventilador, un lavarropas o los viejos tocadiscos, la rueda de un auto que viaja con velocidad constante, son otros tantos ejemplos.
Pero no debemos olvidar que también hay objetos que giran con **movimiento circular variado**, ya sea acelerado o decelerado.

Característica m.c.u:

- Trayectoria circular.
- Recorre arcos iguales en tiempos iguales.
- La aceleración es centrípeta (que tiende acercarse al eje alrededor del cual gira).
- La velocidad es tangencial (toca en un único punto la circunferencia). La velocidad tangencial es variable en dirección pero constante en magnitud.
- La velocidad angular es constante. (rapidez con la que varia el ángulo en el tiempo y se mide en radianes).
- El vector velocidad y el vector aceleración son perpendiculares.
- Posee características especiales:
- Periodo T = tiempo que gasta el cuerpo para realizar una vuelta.
- Frecuencia F = numero de vueltas en un tiempo determinado
- Velocidad angular (W) desplazamiento angular en la unidad de tiempo.
- Velocidad lineal y tangencial: V desplazamiento en la unidad de tiempo.
- Aceleración Centrípeta Ac.





MOVIMIENTO CIRCULAR

Movimiento circular uniforme

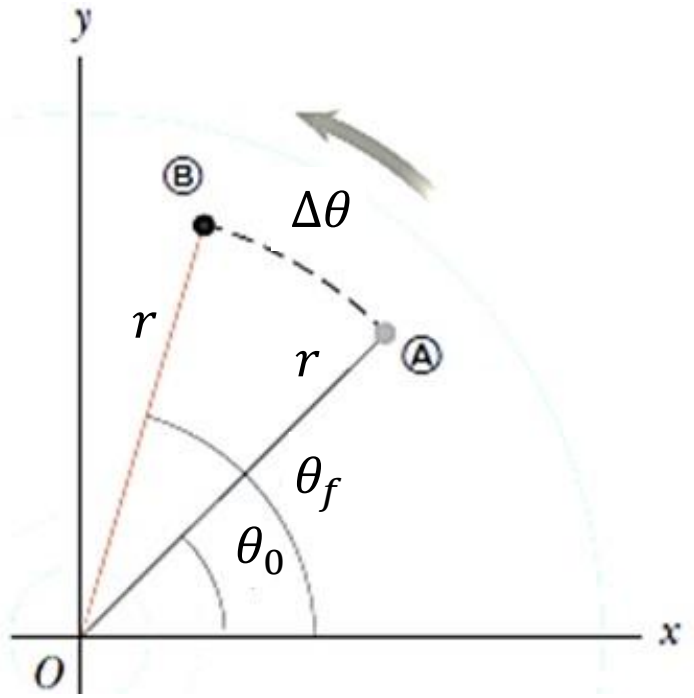
Un objeto en cuya trayectoria cambia su posición, manteniendo siempre la misma distancia respecto a un punto fijo llamado centro, describe un movimiento circular.

Definimos el desplazamiento angular $\Delta\theta$ como un cambio en la dirección de un vector, manteniendo su magnitud r constante

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_0$$

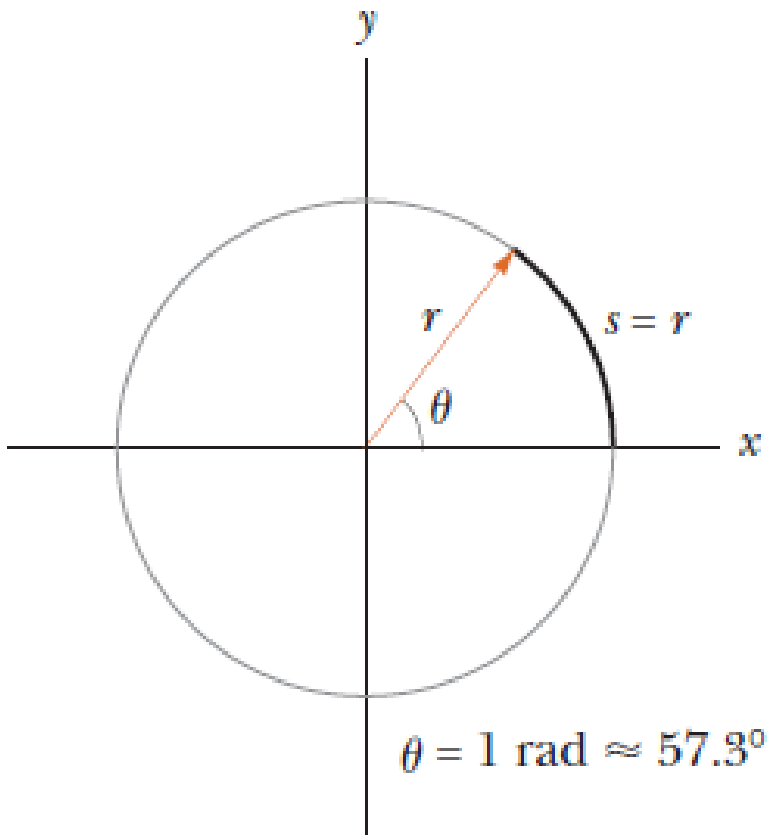
Su unidad en el SI es el rad (radián)

$$\pi\, rad = 180°$$



Movimiento circular uniforme

Un radián es el ángulo que resulta cuando el desplazamiento angular produce un desplazamiento lineal (en unidades de longitud) igual al radio.



El perímetro de un círculo es

$$P = \pi D = 2\pi r$$

El desplazamiento angular al completar una vuelta, que equivale a $360°$, es

$$\Delta\theta = 2\pi\, rad = 360°$$

El desplazamiento lineal Δs (en m) de un desplazamiento angular $\Delta\theta$ (en rad) en un círculo de radio r es

$$\Delta s = r\Delta\theta$$

Grados	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	0

Elementos del movimiento circular

Frecuencia. Es el tiempo que tarda un cuerpo en realizar una oscilación. Se mide en Hertz y su abreviatura Hz.
Periodo. Es el número de oscilaciones que realiza un cuerpo en la unidad del tiempo.
Velocidad tangencial. Es la rapidez tangente a la trayectoria con la que se mueve un cuerpo circularmente.
Velocidad angular. Es la rapidez con la que barre un ángulo un cuerpo que se mueve circularmente.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

siendo φ el ángulo descrito en un tiempo determinado t

Ecuaciones del m.c.u.

Frecuencia (f): Es el número de vueltas que da el cuerpo en la unidad de tiempo:

$$f = \frac{\text{Nº de vueltas}}{\text{tiempo}}$$

Período (T): Es el tiempo que emplea el móvil en dar una vuelta.

$$T = \frac{\text{tiempo}}{\text{Nº de vueltas}}$$

La velocidad angular se puede calcular a partir del período o la frecuencia, ya que el período y la frecuencia son constantes.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

siendo T el período y f la frecuencia

Las unidades en las que se mide la velocidad angular ω es en radianes/seg, o simplemente en s-1.

Movimiento circular uniforme

El periodo T es el tiempo que tarda un objeto en completar una revolución (vuelta o ciclo). Su unidad es s (segundo).

La frecuencia f es el número de revoluciones que efectúa un móvil en un segundo. Su unidad es rev/s (revoluciones o ciclos por segundo).

La frecuencia y el periodo son cantidades recíprocas entre sí

$$T = \frac{1}{f}, \qquad f = \frac{1}{T}$$

Movimiento circular uniforme

La velocidad angular ω representa el desplazamiento angular realizado en un intervalo de tiempo

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_f - \theta_0}{t_f - t_0}$$

Si de antemano se conoce el tiempo requerido para completar una revolución, esto es, el periodo, entonces

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Un móvil con velocidad angular constante describe un movimiento circular uniforme.

Las unidades de ω son rad/s en el SI.

La velocidad tangencial es igual a la velocidad angular por el radio.

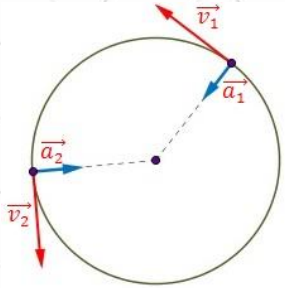
$$v = \omega \cdot r = \frac{2\pi}{T} \cdot r = 2\pi \cdot f \cdot r$$

siendo r el radio, T el período y f la frecuencia

La velocidad tangencial, al igual que la velocidad angular, en el MCU es constante.

Un móvil con movimiento circular uniforme no tiene aceleración tangencial (que mide la variación del módulo del vector velocidad), pero sí tiene **aceleración normal o centrípeta** (que mide lo que varía la dirección del vector velocidad).

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega \cdot r)^2}{r} \rightarrow a_n = \omega^2 \cdot r$$



Ejemplo

Una rueda gira a una velocidad constante de 120 revoluciones por minuto (r.p.m.). Hallar:

La frecuencia en ciclos/segundo.

La velocidad angular en radianes/segundo.

La velocidad tangencial en un punto de la rueda situado a 15 cm. del eje.

Las aceleraciones tangenciales y centrípetas en el punto citado.

$$f = \frac{r.p.m.}{60} = \frac{120}{60} = 2\ ciclos/segundo \qquad \omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 2 = 12,57\ rad/s$$

$$v = \omega \cdot r = 12,57 \cdot 15 = 188,55\ cm/s \qquad a_t = 0$$

$$a_{cen} = v \cdot \omega = 188,55 \cdot 12,57 = 2370,07\ cm/s^2$$

Ejemplos

1. Resuelva los siguientes problemas.

a) Un asiento en el perímetro de una rueda de la fortuna en la feria experimenta un desplazamiento angular de $37°$. Si el radio de la rueda es $20\ m$, ¿qué longitud de arco describe el asiento? a) $s = 12.9\ m$

b) Determina el valor de la frecuencia y la velocidad angular de una piedra atada a un hilo si gira con un periodo de $0.5\ s$ b) $f = 2\ rev/s$, $\omega = 4\pi\ rad/s \approx 12.6\ rad/s$

Ejemplos

2. El rotor de un helicóptero gira a una velocidad angular de $3.2 \times 10^2\ rpm$ (revoluciones por minuto).

   a) Exprese esta velocidad angular en radianes por segundo. a) $\omega = 33.5\ rad/s$

   b) Si el rotor tiene un radio de $2\ m$, ¿cuáles son los desplazamientos angular y lineal del extremo del aspa en $3 \times 10^2\ s$? b) $\Delta\theta = 1.005 \times 10^4\ rad, \Delta s = 2.01 \times 10^4\ m$

Ejercicios

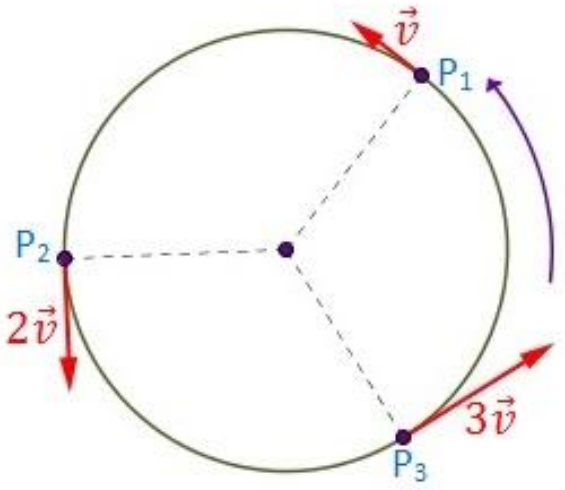
1. Un corredor da media vuelta en una pista circular de $200\,m$ de diámetro. ¿Cuál fue su desplazamiento angular y su desplazamiento lineal?

2. ¿Cuál es el valor de la velocidad angular de una rueda que gira desplazándose $15\,rad$ en $0.2\,s$?

3. Determine el valor de la velocidad angular de un disco de $45\,rpm$, así como el valor de su desplazamiento angular y lineal si su movimiento duró $3\,min$ y tiene un radio de $10\,cm$.

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO

El movimiento circular uniformemente acelerado (MCUA) se presenta cuando una partícula o cuerpo sólido describe una trayectoria circular aumentando o disminuyendo la velocidad de forma constante en cada unidad de tiempo. Es decir, la partícula se mueve con aceleración constante.



Movimiento circular acelerado

La aceleración angular α indica el cambio de la velocidad angular en un intervalo de tiempo

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_f - \omega_0}{t_f - t_0}$$

Un objeto con aceleración angular constante describe un movimiento circular uniformemente acelerado.

Las unidades de α son rad/s^2 en el SI.

Movimiento circular acelerado

Las ecuaciones del movimiento acelerado en el caso circular son idénticas al caso rectilíneo:

$$\alpha = constante$$

$$\Delta\theta = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}, \qquad \theta_f = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$\Delta\omega = \alpha t, \qquad \omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$\omega_f{}^2 = \omega_0{}^2 + 2\alpha\Delta\theta$$

ACELERACION ANGULAR

La aceleración angular en el movimiento circular uniformemente acelerado es constante. Se representa como el incremento de velocidad angular ω desde el instante inicial hasta el final partido por el tiempo.

$$\alpha = \frac{\triangle \omega}{\triangle t} = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1 - t_0}$$

siendo ω_0 la velocidad angular en el instante inicial t_0 y ω_1 la velocidad angular en el instante final t_1

ACELERACION TANGENCIAL

La aceleración tangencial en el movimiento circular uniformemente acelerado MCUA se calcula como el incremento de velocidad angular ω desde el instante inicial hasta el final partido por el tiempo y multiplicado por el radio.

$$a_t = \frac{\triangle \omega}{\triangle t} \cdot r = \frac{\omega_1 - \omega_0}{t_1 - t_0} \cdot r$$

siendo ω_0 la velocidad angular en el instante inicial t_0, ω_1 la velocidad angular en el instante final t_1 y r el radio del círculo

ACELERACION CENTRÍPETA

La **aceleración centrípeta** (o **aceleración normal**) está dirigida hacia el centro del círculo (eje) y es perpendicular a la velocidad de la partícula que gira.

En cualquier **movimiento curvilíneo** siempre hay aceleración centrípeta porque varia constantemente la dirección del vector de la velocidad tangencial. Solamente es nula en un movimiento rectilíneo, donde el radio es infinito.

$$a_{cen} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

siendo v la velocidad tangencial, r el radio y ω la velocidad angular

PERIODO

En el MCUA la velocidad angular cambia respecto al tiempo. Por tanto, el **período** cada vez será menor o mayor según si decrece o crece la velocidad angular.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 + \alpha t}$$

siendo ω la velocidad angular, ω_0 la velocidad angular inicial, α la aceleración angular y t el tiempo

FRECUENCIA

La **frecuencia** en el caso del MCUA es mayor o menor porque la velocidad angular cambia. La fórmula de la **frecuencia** será:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0 + \alpha t}{2\pi}$$

siendo ω la velocidad angular, ω_0 la velocidad angular inicial, α la aceleración angular y t el tiempo

FORMULAS

FÓRMULAS PARA M.R.U.V.	FÓRMULAS PARA M.C.U.V.	
	En términos lineales o tangenciales	En términos angulares
$a = \frac{V_f - V_o}{t}$	$a_T = \frac{V_{Tf} - V_{To}}{t}$	$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_o}{t}$
$d = \frac{1}{2}at^2 + V_o t$	$s = \frac{1}{2}a_T t^2 + V_{To} t$	$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_o t$
$V_f{}^2 = V_o{}^2 + 2ad$	$V_{Tf}{}^2 = V_{To}{}^2 + 2a_T s$	$\omega_f{}^2 = \omega_o{}^2 + 2\alpha\theta$
$d = \left(\frac{V_o + V_f}{2}\right)t$	$s = \left(\frac{V_{To} + V_{Tf}}{2}\right)t$	$\theta = \left(\frac{\omega_o + \omega_f}{2}\right)t$

"Todo lo tangencial se obtiene multiplicando lo angular por el radio"		
Desplazamiento	Velocidad	Aceleración
$s = \theta R$	$V_T = \omega R$	$a_T = \alpha R$

UNIDADES

a_T = Aceleración Lineal o Tangencial (m/s^2)

α =Aceleración Angular (rad/s^2)

V_{To} =Velocidad Tangencial inicial (m/s)

V_{Tf} =Velocidad Tangencial final (m/s)

ω_o =Velocidad Angular inicial (rad/s)

ω_f =Velocidad Angular final (rad/s)

t =Tiempo (s)

s =Desplazamiento Lineal o arco recorrido (m)

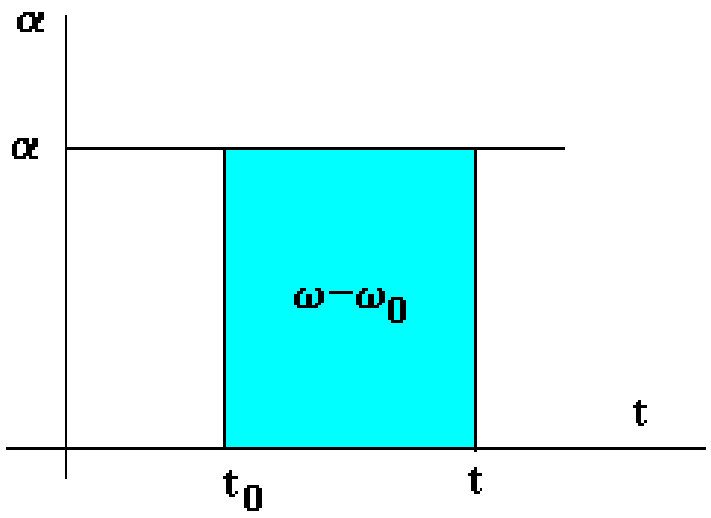
θ =Desplazamiento Angular o ángulo central barrido (rad)

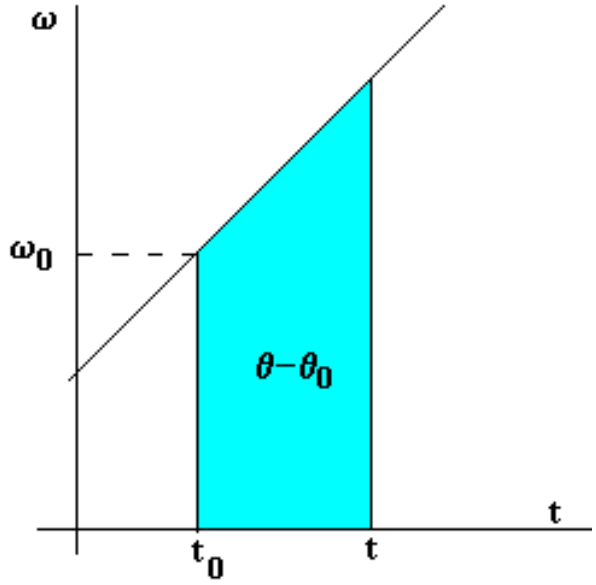
Magnitud de la Aceleración Total (en un instante cualquiera): $a_{total} = \sqrt{(a_T)^2 + (a_c)^2}$

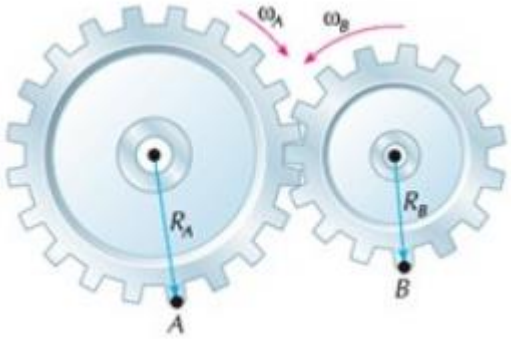
a_T = Aceleración Lineal o Tangencial (m/s^2)

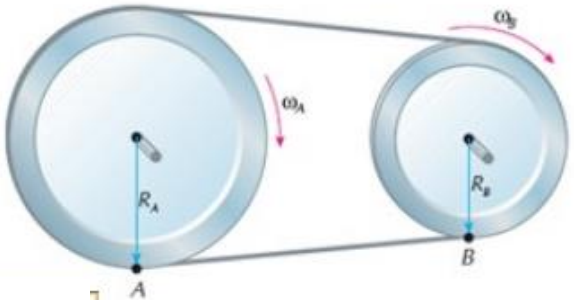
a_C = Aceleración Centrípeta en ese instante (m/s^2)

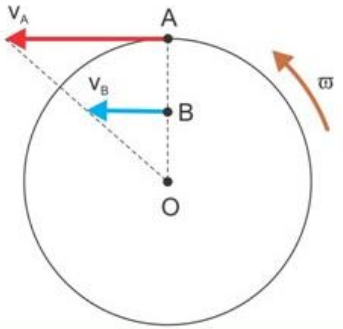
GRAFICAS DEL MCUV

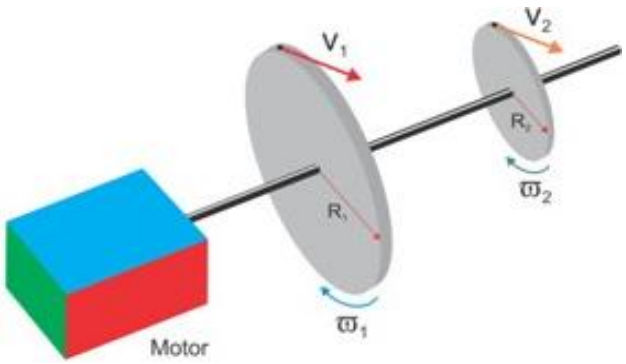


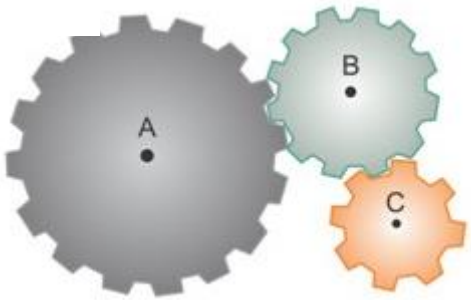



ωA
ωB
RA
RB
A
B


ωB
ωA
RA
RB
A
B


VA
A
VB
B
O
ϖ


V1
V2
R1
R2
ϖ2
ϖ1
Motor


A
B
C

Ejercicio N°1

El eje de un motor que giraba inicialmente a $5\ \mathrm{rad}/s$ es acelerado a $12\ \mathrm{rad}/s^2$, ¿cuál será su desplazamiento angular a los 20 segundos?. Expresar el resultado en revoluciones.

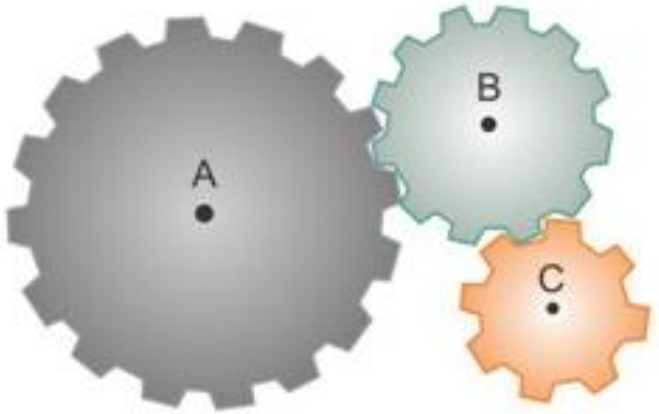
Ejercicio N°2

En la figura se muestran tres ruedas que inician su movimiento desde el reposo, si **C** acelera a razón de 12πrad/s^2, durante dos minutos. Cuántas vueltas dio la rueda **A**?.

R_C = 5cm

R_B = 15cm

R_A = 20cm



Ejemplos

1. Una rueda gira con una aceleración angular constante de $3.5\,rad/s^2$. Si la velocidad angular de la rueda es $2\,rad/s$ en $t = 0$.

   a) ¿Cuál es desplazamiento angular de la rueda entre $t = 0$ y $t = 2$ s? a) $\Delta\theta = 11\,rad$

   b) ¿Cuál es la velocidad angular de la rueda en $t = 2\,s$? b) $\omega = 9\,rad/s$

   c) ¿Cuánto tiempo le toma completar una y dos vueltas? c) $t = 1.4\,s, t = 2.17\,s$

Ejemplos

2. Un mezclador eléctrico incrementó el valor de su velocidad angular de $20\,rad/s$ a $120\,rad/s$ en $0.5\,s$.

   a) ¿Cuál es su aceleración? a) $\alpha = 200\,rad/s^2$

   b) ¿Cuál es su desplazamiento angular en ese tiempo? b) $\Delta\theta = 35\,rad$

Ejercicios

1. Una rueda gira con una aceleración angular constante de $4\,rad/s^2$. Si la velocidad angular de la rueda es $6\,rad/s$ en $t = 2$. Encuentre:

   a) El ángulo de rotación de la rueda entre $t = 2\,s$ y $t = 3\,s$.

   b) La rapidez angular cuando $t = 3\,s$.

2. Una rueda que gira a $4\,rev/s$ aumenta su frecuencia a $20\,rev/s$ en $2\,s$. Determine la aceleración angular.

Ejercicios

3. Una rueda de la fortuna gira inicialmente con un velocidad angular de $2\,rad/s$. Si recibe una aceleración angular de $1.5\,rad/s^2$ durante $5\,s$, calcular:

   a) La velocidad angular a los $5\,s$.

   b) El desplazamiento angular en ese tiempo.

   c) El número de revoluciones que dio al término de los $5\,s$.