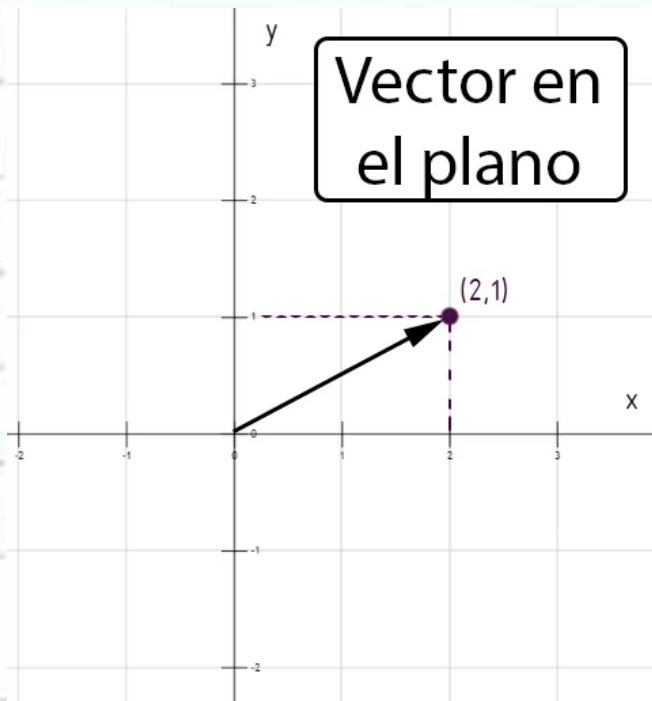
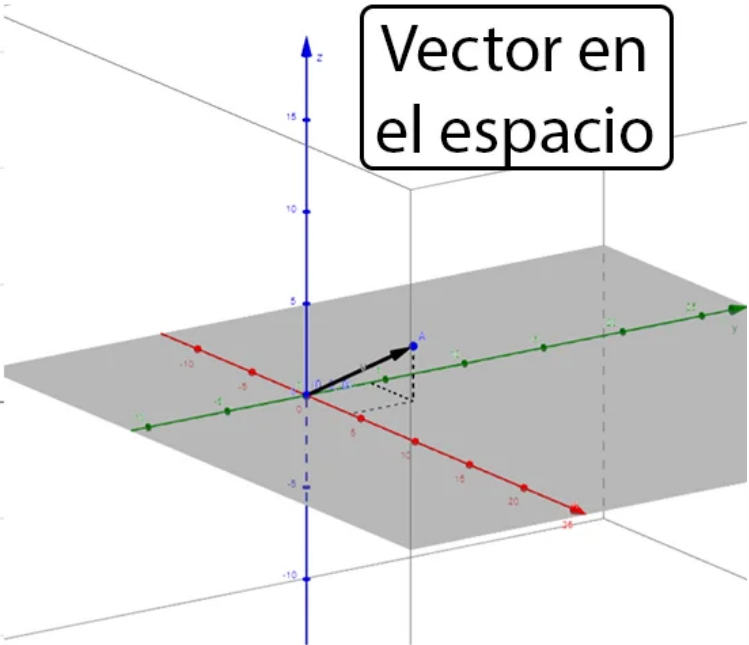


# VECTORES EN EL PLANO

Vector en  
el plano



Vector en  
el espacio



## SISTEMAS DE REFERENCIA

Aquello a lo que nos vamos a referir para determinar la posición de un objeto

### SISTEMA UNIDIMENSIONAL

Constituido por una recta, un origen y un sentido positivo y negativo.



$P(x)$

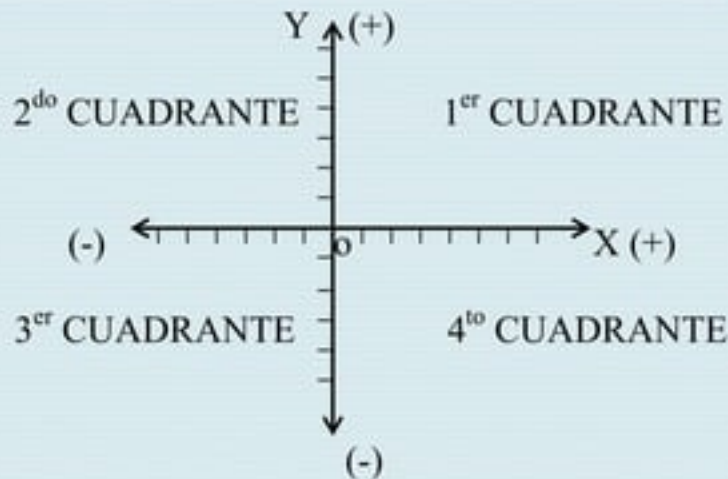
$P(5)$

$Y(-2)$

Relación biunívoca (uno a uno), para cada valor hay uno y solo un punto en la recta y viceversa

# SISTEMA BIDIMENSIONAL

## SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES



La posición de un punto en el plano queda determinado por un par de números ordenados  $(x, y)$ , llamados **coordenadas rectangulares** que corresponden a la intersección de una abscisa  $(x)$  y una ordenada  $(y)$ .

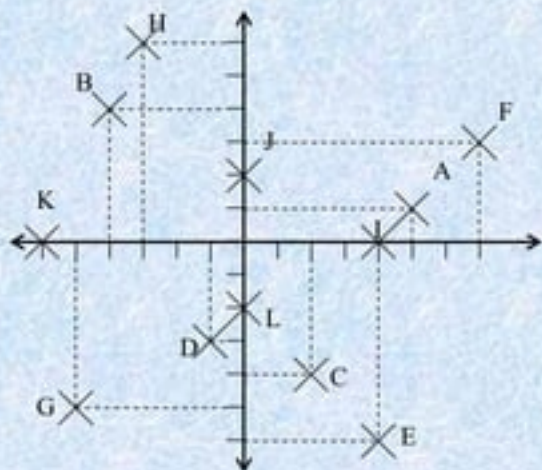
También hay una relación biunívoca entre un par ordenado y un punto en el plano y viceversa

**Ejemplo 1:** Representar la posición de los siguientes puntos en el plano

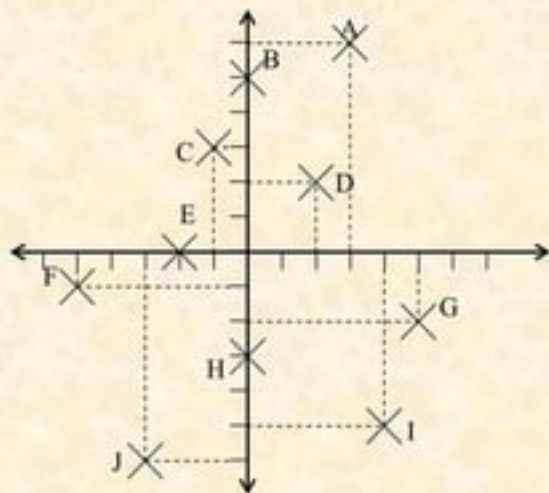
A(5,1)   B(-4,4)   C(2,-4)   D(-1,-3)   E(4,-6)   F(7,3)

G(-5,-5)   H(-3,6)   I(4,0)   J(0,2)   K(-6,0)   L(0,-2)

La representación en el sistema de coordenadas rectangulares es:

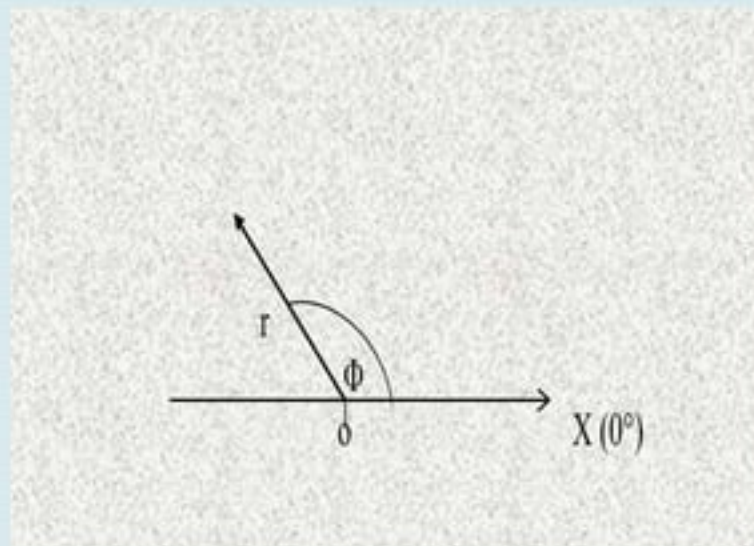


Determine que coordenadas rectangulares representan los siguientes puntos:



## SISTEMA DE COORDENADAS POLARES

Eje numérico de referencia X denominado eje polar



La posición de un punto queda determinada por un par ordenado  $(r, \Phi)$ , donde:

$r$  es el **radio vector** y representa la distancia positiva del origen al punto y,

$\Phi$  es el **ángulo polar** y representa la medida del ángulo desde el eje polar hasta el radio vector, medido en sentido antihorario.

También hay una relación biunívoca entre un par ordenado y un punto en el plano y viceversa

**Ejemplo:** Determinar que coordenadas polares representan los siguientes puntos:

**Ejemplo 1:** Representar la posición de los siguientes puntos en el plano

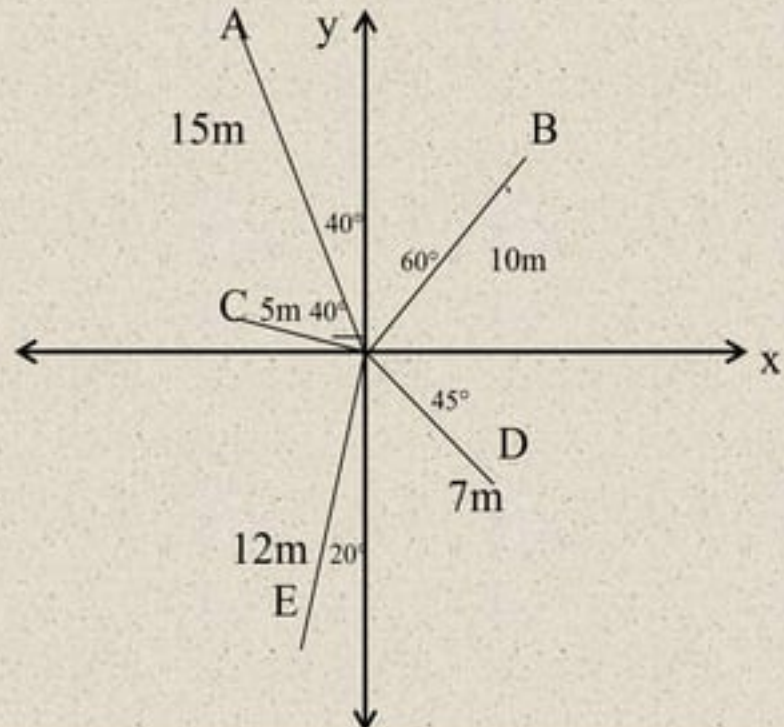
A(50 km,  $120^\circ$ )

B(20 km,  $330^\circ$ )

C(40 km,  $45^\circ$ )

D(30 km,  $220^\circ$ )

E(10 km,  $180^\circ$ )



# SISTEMA DE COORDENADAS GEOGRAFICAS

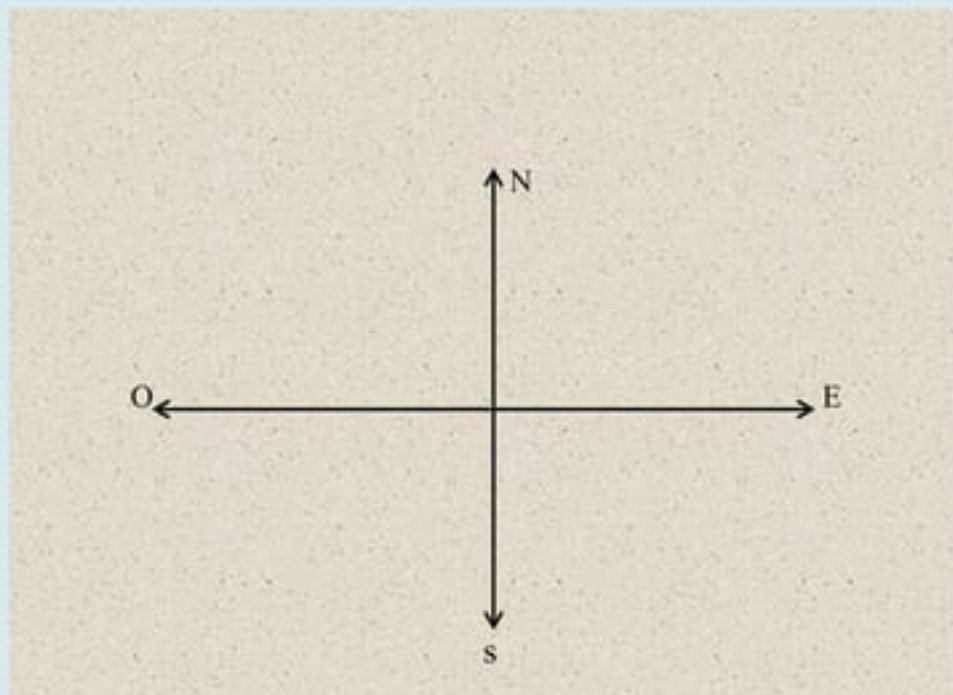
Dos ejes perpendiculares entre sí, éstos dividen al plano en los cuatro puntos cardinales.

La posición de un punto queda determinada por un par ordenado ( $r$ , rumbo), donde:

$r$  representa la distancia positiva del origen al punto y,

**rumbo** representa la dirección medida a partir del Norte o Sur.

**También hay una relación biunívoca entre un par ordenado y un punto en el plano y viceversa**



**Ejemplo 2:** Determinar que coordenadas geográficas representan los siguientes puntos:

**Ejemplo 1:** Representar la posición de los siguientes puntos en el plano:

A(10kgf, S40°O)

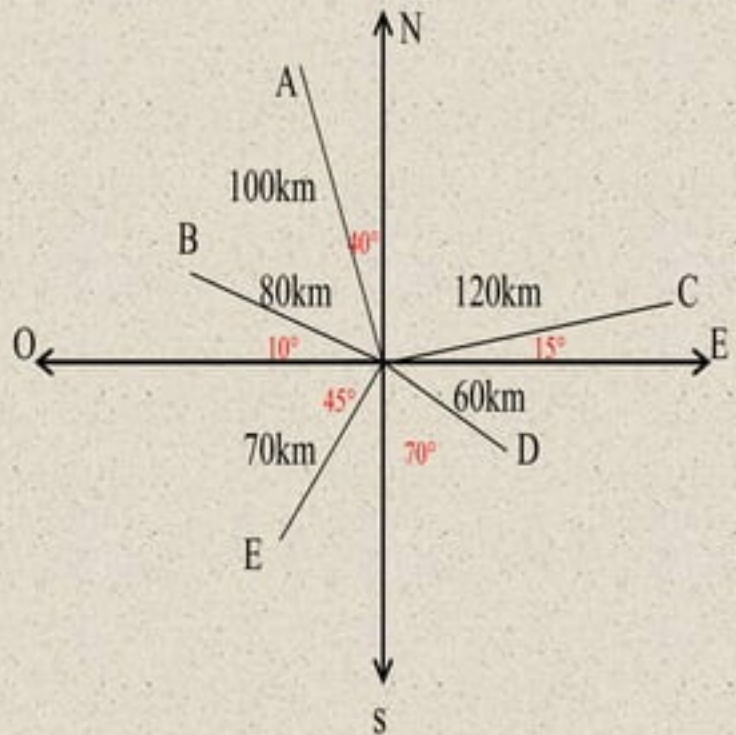
B(4kgf, N30°E)

C(8kgf, S20°E)

D(6kgf, N60°O)

E(12kgf, SE)

F(5kgf, O)

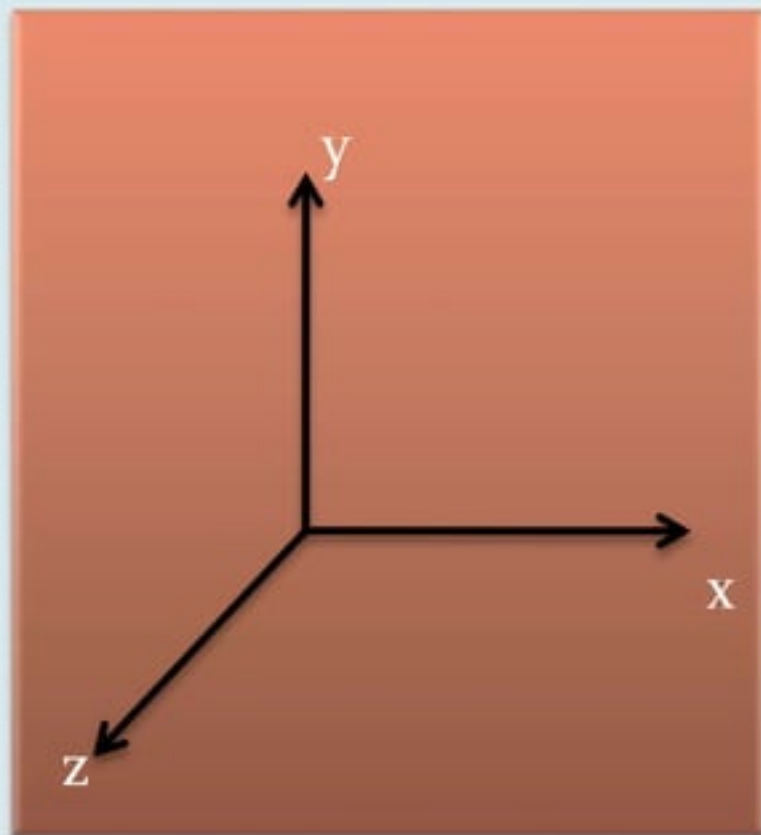


## SISTEMA TRIDIMENSIONAL

Esta es constituido por tres ejes perpendiculares que se cortan entre sí, un origen. El espacio se ha dividido en 8 partes (octeto). Este sistema sirve para ubicar puntos en el espacio.

Para ubicar un punto se necesita tres valores (terna ordenada):

**P (x, y, z)**



# FUNCIONES Y GRAFICAS

## FUNCION.-

Al estudiar los fenómenos que se producen en la naturaleza, se comprueban que en ellos, generalmente hay dos (o más) magnitudes relacionadas entre sí. Esto significa que al variar una de las magnitudes, la otra también cambia.

### ☑ EJEMPLOS

- 1. La longitud de un tramo de riel de acero aumenta cuando se eleva su temperatura.
- 2. La fuerza que un imán ejerce sobre un clavo disminuye cuando aumentamos la distancia entre ambos, etc.

Cuando esto sucede, es decir, cuando las magnitudes están relacionadas, decimos que una es función de la otra.

Así la longitud del riel es **función** de su temperatura, y la fuerza que el imán ejerce sobre el clavo es también **función** de su distancia

Se dice que una magnitud  $y$  (llamada **variable dependiente**) es una función de otra magnitud  $x$  (llamada **variable independiente**), cuando su valor es determinado por el valor de la  $x$ .

Una función se escribirá simbólicamente:  $y = f(x)$

$$Y = 3X \qquad Y = 2X^3 + 5 \qquad Y = X^2$$

Toda ecuación es función pero no toda función es ecuación.

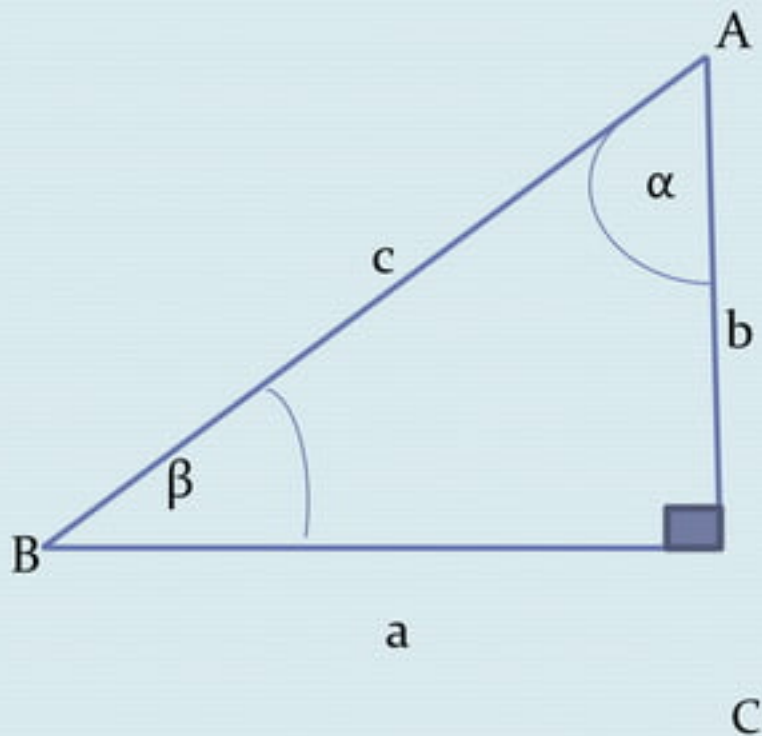
## GRAFICOS

Es la representación lineal de una función en un sistema de coordenadas rectangulares.

Tiene una relación de indicativo.

## RESOLUCIÓN DE TRIANGULOS RECTÁNGULOS

- Seis elementos: 3 lados, dos ángulos agudos y un ángulo recto



*Para resolver un triángulo rectángulo se aplica:*

- a) **TEOREMA DE PITAGORAS:**

El cuadrado de la medida de la hipotenusa, es igual a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

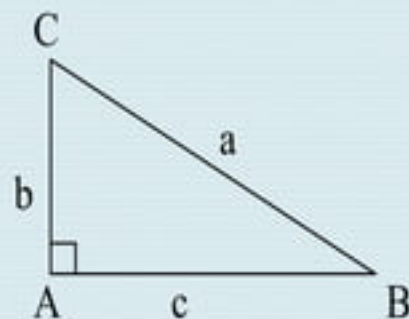
## b) FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE UN ANGULO AGUDO

| FUNCION  | SIMBOLO              | DEFINICION                                              | FORMULA       |
|----------|----------------------|---------------------------------------------------------|---------------|
| Seno     | $\text{sen } \alpha$ | $\frac{\text{cateto-opuesto}}{\text{hipotenusa}}$       | $\frac{a}{c}$ |
| Coseno   | $\text{cos } \alpha$ | $\frac{\text{cateto-adyacente}}{\text{hipotenusa}}$     | $\frac{b}{c}$ |
| Tangente | $\text{tan } \alpha$ | $\frac{\text{cateto-opuesto}}{\text{cateto-adyacente}}$ | $\frac{a}{b}$ |

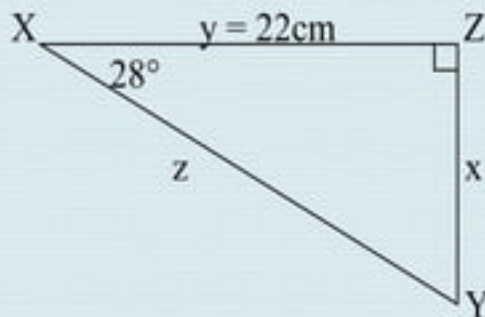
# EJEMPLOS

1. En el triángulo ABC, determinar:

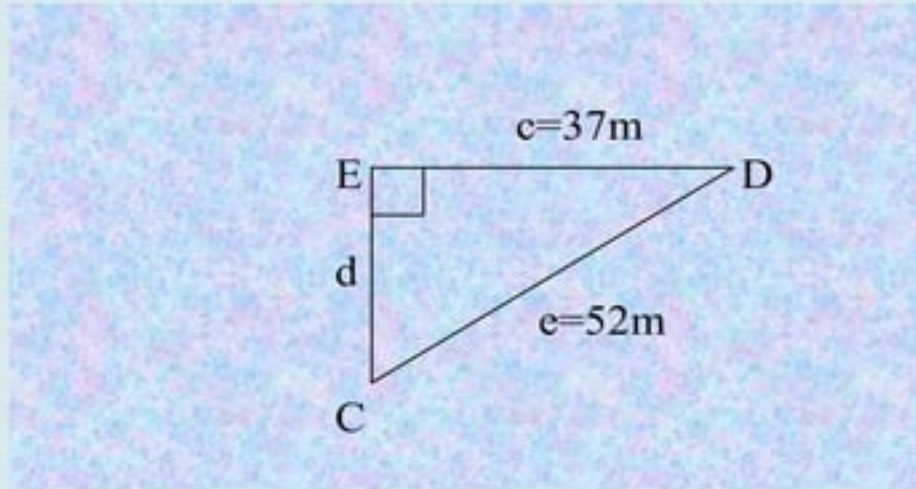
- a) B en términos de a, b
- b) b en términos de a, c
- c) a en términos de c, C
- d) C en términos de b, c
- e) b en términos de c, B
- f) c en términos de a, C



2. Resolver el triángulo rectángulo:



3. Resolver el triángulo rectángulo:



# MAGNITUDES ESCALARES Y VECTORIALES

## • MAGNITUD ESCALAR

Es la magnitud física representada por un número real positivo o negativo acompañado del nombre de la unidad

### • EJEMPLOS:

Longitud: 10m

Tiempo: 15s

Masa: 10Kg

Temperatura:  $23^{\circ}\text{K} = -250^{\circ}\text{C}$

Energía: 10J

Carga eléctrica: 2C

## • MAGNITUD VECTORIAL

Es la magnitud física que para su representación requiere se indique tamaño (módulo o magnitud), dirección y sentido; acompañado del nombre de la unidad.

### • EJEMPLOS:

Desplazamiento: 10m al norte

Velocidad: 30Km/h;  $S70^{\circ}\text{O}$

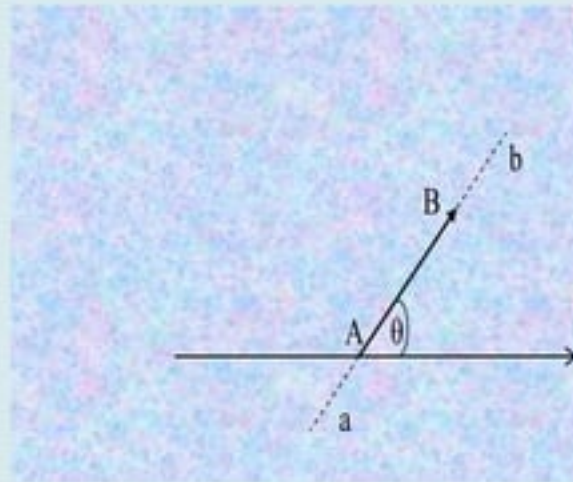
Fuerza: 5Kgf,  $125^{\circ}$

Aceleración:  $(20\vec{i} + 30\vec{j}) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

## REPRESENTACION GRAFICA DE UNA MAGNITUD VECTORIAL

Las cantidades vectoriales son representadas gráficamente por flechas llamadas vectores.

Los vectores son  
segmentos  
orientados

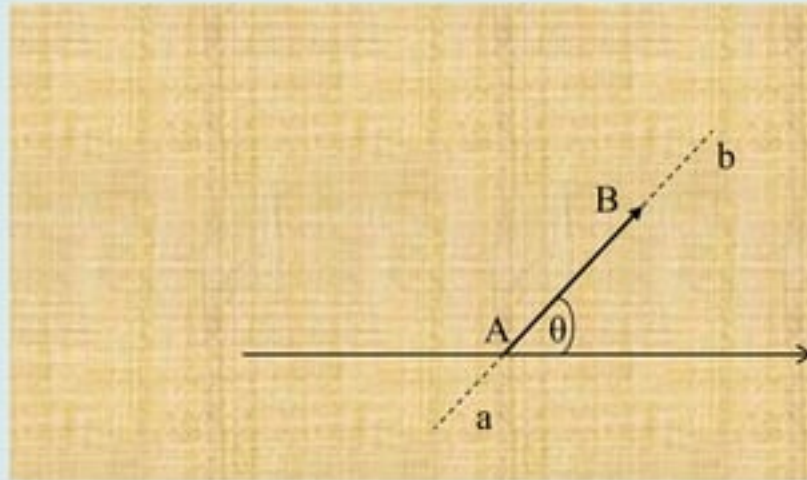


Todo vector queda  
determinado por:

- **Tamaño;** representa en una escala seleccionada su valor numérico (módulo o magnitud)
- **Dirección;** ángulo ( $\theta$ ) que forma el vector con el eje +x en sentido antihorario
- **Sentido;** es la saeta (punta de flecha)

## NOTAS:

- En un vector se distinguen también su origen (punto A) y su extremo (punto B)



- Línea de acción del vector, es la recta a lo largo de la cual está dirigido el vector (recta ab)
- Los vectores se representan con letras mayúsculas y una flecha en la parte superior
- El módulo del vector se representa con la misma letra pero sin flecha

## EJERCICIOS

### 1. Representar gráficamente los siguientes vectores

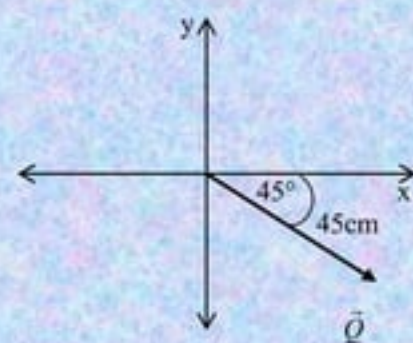
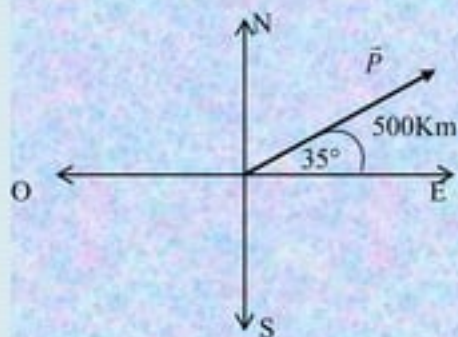
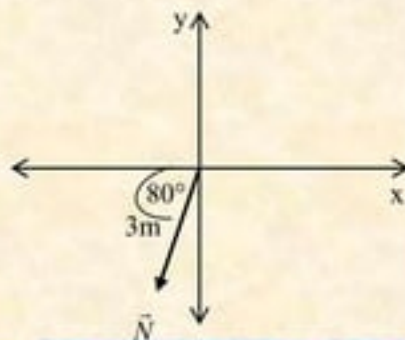
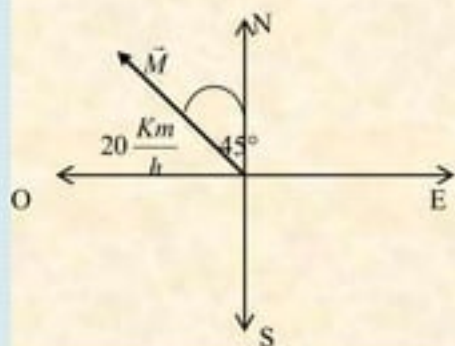
$$\vec{A} = (15m; S)$$

$$\vec{B} = (50Kgf; 140^\circ)$$

$$\vec{D} = (28cm; 225^\circ)$$

$$\vec{C} = (40 \frac{Km}{h}; S70^\circ E)$$

## 2. Determinar el módulo y dirección de los siguientes vectores



## CLASES DE VECTORES

**VECTOR LIBRE.**- Cuando el punto de aplicación (origen) se traslada a cualquier punto sin alterar el efecto de su acción



**VECTOR DESLIZANTE.**- Es aquel en que el punto de aplicación se traslada a lo largo de su línea de acción

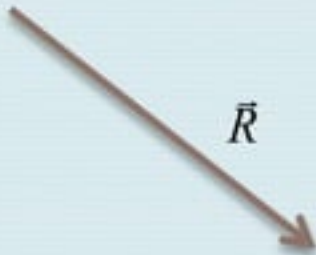


## CLASES DE VECTORES

VECTOR FIJO.- Cuando no se puede mover el punto de aplicación



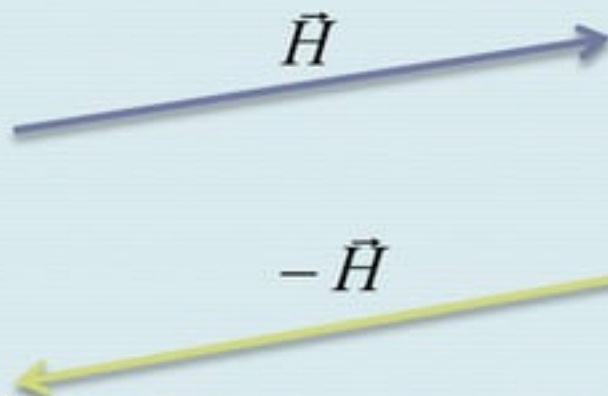
VECTORES IGUALES.- Cuando tienen la misma magnitud, dirección y sentido



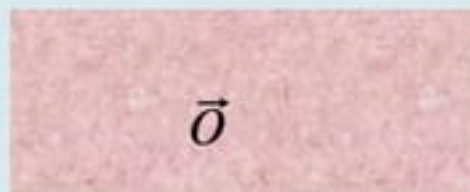
$$\vec{R} = \vec{T}$$

## CLASES DE VECTORES

**VECTOR NEGATIVO.-** (Opuesto de otro dado).- Si tienen la misma magnitud, la misma dirección pero sentido opuesto



**VECTOR NULO.-** Es aquel en el cual el origen y el extremo coinciden, En este caso su módulo es igual a cero, carece de dirección y sentido



## CLASES DE VECTORES

VECTOR UNITARIO.- Es aquel cuyo módulo es 1

Para obtener un vector unitario se divide el vector para su módulo

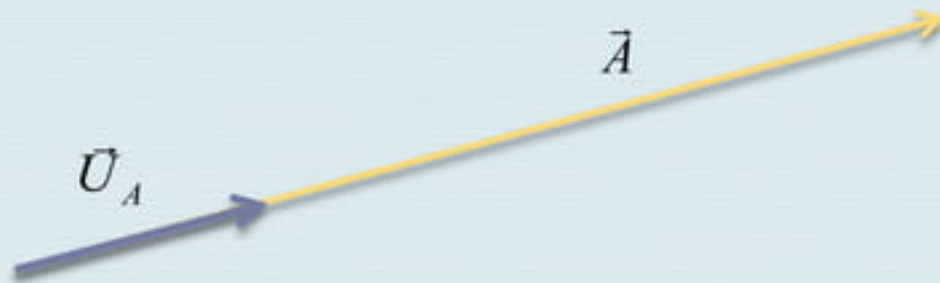
$$\vec{U}_A = \frac{\vec{A}}{A}$$

Por tanto

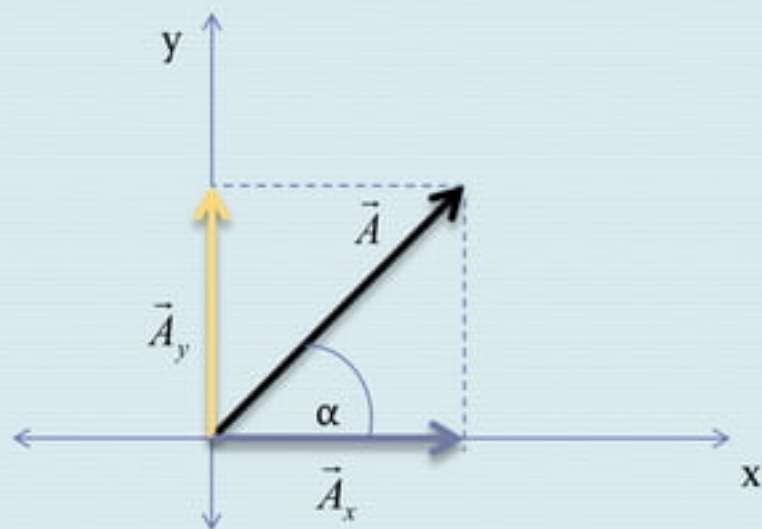
$$\vec{A} = A\vec{U}_A$$

El  $\vec{U}_A$  tiene la misma dirección y sentido que el  $\vec{A}$  y

no tiene unidades



## DESCOMPOSICION DE UN VECTOR EN EL PLANO



$$\vec{A} = [A_x, A_y]$$

$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A} \Rightarrow A_x = A \cos \alpha$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{A_y}{A} \Rightarrow A_y = A \text{sen } \alpha$$

Módulo de un vector

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Dirección en función de sus componentes

$$\tan \alpha = \frac{A_y}{A_x}$$

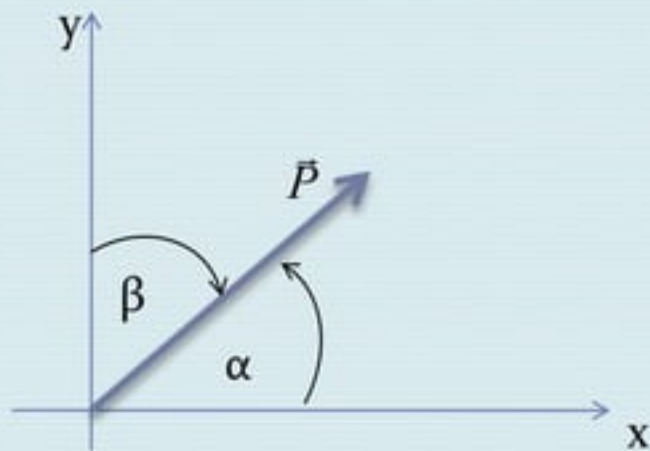
## ANGULOS DIRECTORES

Son aquellos que forman el vector con los ejes positivos x e y de un sistema de coordenadas rectangulares, *varían entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$* , *no existe convención para el giro*

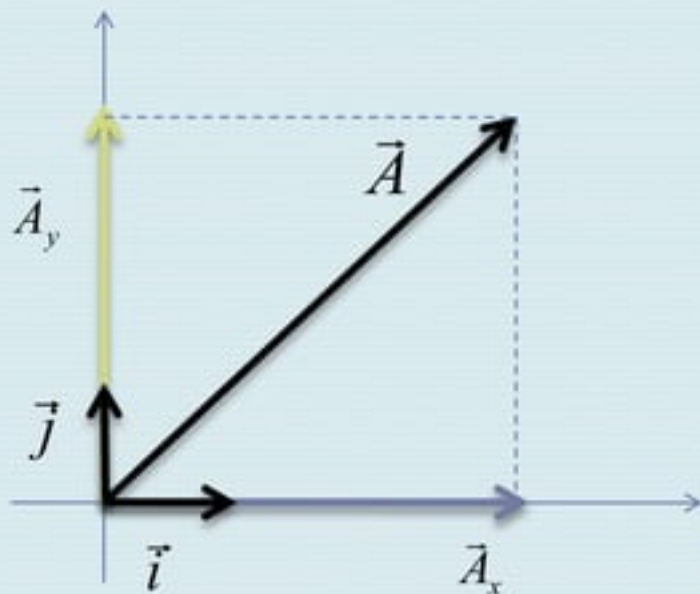
Los ángulos directores en el plano son:

$\alpha$  es el que forma el vector con el eje positivo de las x

$\beta$  es el que forma el vector con el eje positivo de las y



## VECTORES BASE O UNITARIOS NORMALIZADOS



$$\vec{U}_{A_x} = \frac{\vec{A}_x}{A_x} = \vec{i}$$

$$\vec{U}_{A_y} = \frac{\vec{A}_y}{A_y} = \vec{j}$$

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$$

$$\vec{U}_A = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j}$$

# FORMAS DE EXPRESION DE UN VECTOR Y SUS TRANSFORMACIONES

## 1. EN FUNCIÓN DE SU MODULO Y ÁNGULO

$$\vec{F} = (F; \theta)$$

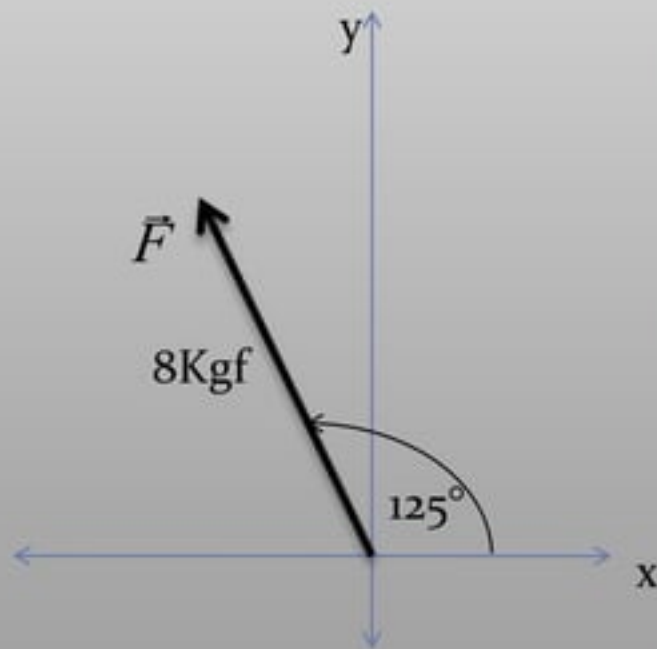
Coordenadas polares

**F** es el módulo del vector

$\theta$  ángulo medido desde el eje +X hasta el vector en sentido antihorario

### EJEMPLO

$$\vec{F} = (8\text{Kgf}; 125^\circ)$$



# FORMAS DE EXPRESION DE UN VECTOR Y SUS TRANSFORMACIONES

## 2. EN FUNCIÓN DE SUS COORDENADAS RECTANGULARES

$$\vec{G} = (G_x; G_y)$$

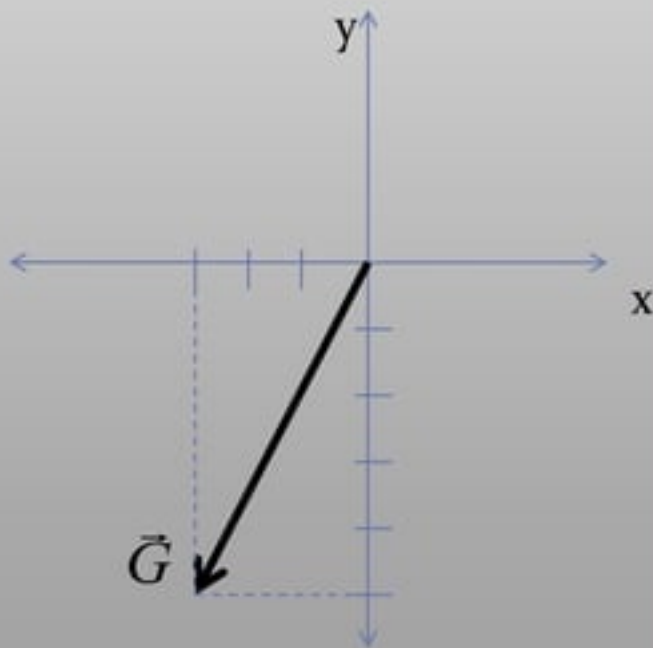
Donde:

$$G_x \longleftrightarrow_{\text{así-como}} G_y$$

Coordenadas del punto extremo

EJEMPLO

$$\vec{G} = (-3; -5)m$$



## FORMAS DE EXPRESION DE UN VECTOR Y SUS TRANSFORMACIONES

### 3. EN FUNCIÓN DE LOS VECTORES BASE

$$\vec{C} = (C_x \vec{i} + C_y \vec{j})$$

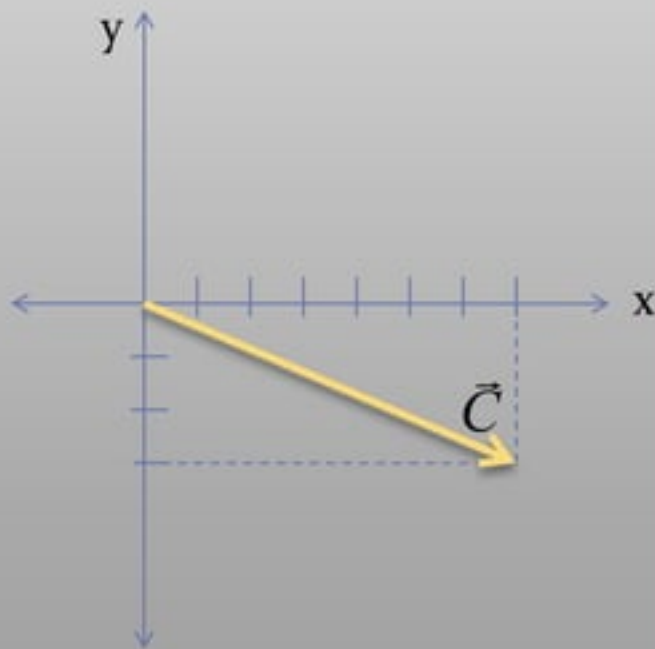
Donde:

$$C_x \longleftrightarrow \text{así como} \rightarrow C_y$$

Componentes rectangulares del vector

EJEMPLO

$$\vec{C} = (7\vec{i} - 3\vec{j}) \text{ Km}$$



## FORMAS DE EXPRESION DE UN VECTOR Y SUS TRANSFORMACIONES

### 4. EN FUNCIÓN DE SUS COORDENADAS GEOGRAFICAS

$$\vec{D} = (D; rumbo)$$

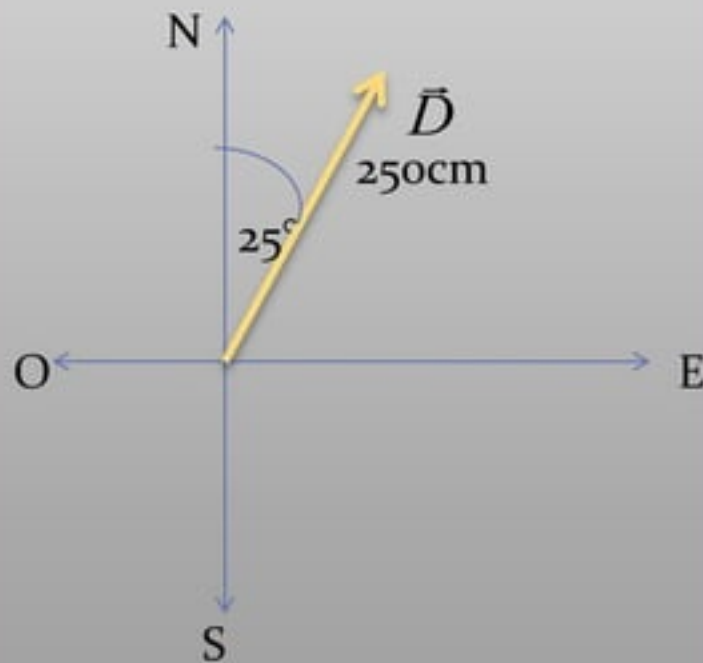
Donde:

D es el módulo del vector

Rumbo es la dirección

### EJEMPLO

$$\vec{D} = (250cm; N25^\circ E)$$



# FORMAS DE EXPRESION DE UN VECTOR Y SUS TRANSFORMACIONES

## 5. EN FUNCIÓN DE SU MODULO Y SU UNITARIO

$$\vec{E} = E\vec{U}_E$$

Donde:

E es el módulo del vector

$\vec{U}_E$  Es el vector unitario del

$\vec{E}$

EJEMPLO

$$\vec{E} = 27Kgf(-0,538\vec{i} + 0,843\vec{j})$$



## EJERCICIOS

1.- La magnitud de un vector  $\vec{P}$  es 18cm, y forma un ángulo de 75 con el sentido positivo del eje x. Determinar:

- a) Las componentes del vector
- b) Las coordenadas del vector
- c) Los ángulos directores
- d) El vector en función de los vectores base
- e) El vector unitario

2. Dado el vector  $\vec{F} = (-35\vec{i} + 67\vec{j})N$ , determinar:

- a) Las componentes rectangulares del vector
- b) Las coordenadas del punto extremo del vector
- c) El módulo del vector
- d) La dirección
- e) Los ángulos directores
- f) El vector unitario

## EJERCICIOS

3. El módulo de un vector  $\vec{K}$  es 125Km y su vector unitario  $\vec{U}_K = 0,54\vec{i} - m\vec{j}$  Determinar:

- a) El valor de m
- b) Los ángulos directores
- c) El vector en función de sus vectores base
- d) Las componentes rectangulares del vector
- e) Las coordenadas del punto extremo del vector
- f) La dirección

4. El módulo de un vector  $\vec{G}$  es 68m y tiene como ángulos directores  $\alpha = 135^\circ$  y  $\beta = 45^\circ$ . Determinar:

- a) El vector unitario
- b) El vector en función de los vectores base
- c) Las componentes rectangulares del vector
- d) Las coordenadas del punto extremo del vector
- e) La dirección

## EJERCICIOS

5. El módulo del vector  $\vec{M}$  es 87cm, y forma un ángulo de 315° con el eje positivo de las x. Determinar:
- a) Los ángulos directores
  - b) Las componentes rectangulares del vector
  - c) Las coordenadas del punto extremo del vector
  - d) El rumbo
  - e) El vector en función de los vectores base
  - f) El vector unitario

6. Las coordenadas de los puntos inicial y final del vector  $\vec{Q}$  son  $(13,22)\text{m}$  y  $(-15,-22)\text{m}$  respectivamente. Determinar:

- a) Las componentes del vector
- b) El módulo
- c) La dirección (rumbo)
- d) Los ángulos directores
- e) El vector en función de los vectores base
- f) El vector unitario