Pitágoras y Euclides

Se sabe poco de la vida del mítico Pitágoras, quien vivió en el siglo VI a. C., y menos de sus enseñanzas filosóficas, que prefería mantener en secreto en el círculo de sus discípulos. Se le atribuye el descubrimiento de una armonía existente entre el mundo de los números y el mundo sensible, cuyo paradigma es la relación numérica de las notas musicales producidas por una cuerda vibrante. Pitágoras intuyó que una relación semejante debía existir también entre los planetas: según la leyenda, podía escuchar la música de los cuerpos celestes. Sea lo que fuere, tal parece que a él debemos la profética visión de que la naturaleza se puede describir por medio de las matemáticas, lo cual se comprobaría dos milenios después de su paso por el mundo.

También se le atribuye el famoso teorema que lleva su nombre y que dice explícitamente: "para todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa". Se sabe que este resultado ya era conocido por los babilonios, pues se han encontrado varias tabletas que lo mencionan, pero ellos sólo reportaron algunos casos particulares y no parece que hayan demostrado ese teorema en general. Como veremos más adelante, el teorema de Pitágoras resultó ser de suma importancia en geometría, ya que permite calcular algo tan fundamental como es la distancia entre dos puntos.

Después de estos inicios envueltos en el misterio, el siguiente acontecimiento crucial en las matemáticas fue la aparición de los Elementos de Euclides, quien vivió alrededor del 300 a. C. y es sin duda el matemático más importante de la Antigüedad. Gracias a ese libro, que tanto influyó en la historia humana, la geometría alcanzó el grado de ciencia.

Euclides estableció una forma de razonar que hasta la fecha es un modelo de precisión lógica. El método consiste en definir primero, con toda claridad, algunos conceptos fundamentales basados en ideas que todos tenemos intuitivamente. A continuación se postulan unos pocos axiomas, o postulados, sencillos y evidentes, como verdades que uno acepta sin necesidad de cuestionar. Luego, a partir de esos mismos postulados, se combinan los conceptos de acuerdo con unas reglas simples de lógica, hasta formular y demostrar un teorema. Así, demostrando un teorema tras otro, se construye el gran edificio de las matemáticas con los ladrillos de las definiciones y las reglas básicas para combinarlas entre sí.

Siguiendo con este esquema, los *Elementos* empiezan con varias definiciones: qué es un punto, una línea, una recta, una superficie, un ángulo, un círculo, etc. A continuación, provisto de estas definiciones, Euclides ofrece al lector cinco postulados

básicos, a partir de los cuales irá demostrando los teoremas de la geometría y revelando las propiedades del espacio.

Los cuatro primeros postulados de los *Elementos* son muy claros:

1. Por dos puntos pasa una línea recta.
2. Se puede prolongar una línea recta finita con otra línea recta.
3. Se puede construir un círculo con cualquier centro y radio.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

Luego, prácticamente de la manga, Euclides saca un quinto postulado, bastante embrollado, que tiene que ver con la posibilidad de que dos rectas se crucen en algún punto:

5. Si una recta cruza dos rectas de tal modo que los ángulos interiores en un mismo lado suman menos que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se cruzan en el lado donde los dos ángulos suman menos que dos rectos.

El quinto postulado contrasta con la simplicidad de los cuatro anteriores. El lector no puede evitar la impresión de que Euclides no tuvo más remedio que incluirlo sólo para no caer en contradicciones posteriores. Obviamente, es un añadido del cual habría sido mejor prescindir; tan es así que Euclides logra posponer su uso hasta la proposición 28, donde tiene que recurrir a él por vez primera.

Lo ideal hubiera sido demostrar ese engorroso postulado a partir de los cuatro anteriores, para que así dejara de ser un axioma. Ése es el camino que trataron de seguir los matemáticos de los siguientes siglos, pero ninguno tuvo éxito. Entre los muchos ataques al quinto postulado, vale la pena mencionar el de Proclus, filósofo bizantino del siglo V de nuestra era, quien logró dar un pequeño paso adelante mostrando que es enteramente equivalente a otro postulado, más simple que el originalmente propuesto por Euclides: "Dada una línea recta y un punto que no se encuentra sobre ella, se puede trazar exactamente una recta por ese punto que sea paralela a la línea recta."

Líneas rectas, puntos, paralelas… Todos tenemos una idea de a qué corresponden estos conceptos. Podemos imaginarnos perfectamente dos rectas paralelas que ni se acercan ni se alejan: ésa es su definición. Pero, ¿cómo podemos saber que existen paralelas? Para el profano de las matemáticas, la respuesta es simple: las paralelas existen porque las podemos trazar sobre una hoja de papel. Sin embargo, nada nos

garantiza que al prolongar cada una de las rectas sobre una hoja de extensión tan grande como el Universo, éstas no empiecen a acercarse o a alejarse en algún lugar. Es cierto que nada nos impide concebir un espacio en el que las paralelas permanezcan siempre paralelas; ese imaginado espacio será el espacio de Euclides. La duda que queda, empero, es si el Universo en que vivimos es realmente un espacio euclidiano. Afirmar eso no era posible mientras quedara el escollo del quinto postulado. Si se lograba demostrarlo, se demostraría también que todo espacio es necesariamente euclidiano y que no hay lugar, ni en el mundo material ni en el mundo de las ideas matemáticas, para otro tipo de espacios. Pero no resultó ser así.

* * *

Después de Euclides y otros grandes matemáticos de la Grecia antigua, transcurrieron muchos siglos en la Europa cristiana sin que ocurriera nada notable en las ciencias. Por fortuna, el mundo árabe conoció un importante desarrollo científico, principalmente a partir del siglo VIII; en matemáticas, los árabes se adelantaron en muchos aspectos a su resurgimiento en la Europa del Renacimiento. A ellos se debe la creación del álgebra, otra importante rama de las matemáticas, así como los primeros intentos de unirla con la geometría.

La conjunción de las dos grandes ramas conocidas en aquellos tiempos, el álgebra y la geometría, tomó su forma definitiva con la geometría analítica cuyos inicios se atribuyen a René Descartes. La gran ventaja de esta técnica es que a cada curva se le asocia una ecuación algebraica, por lo que las propiedades de las figuras se pueden estudiar tanto con la geometría clásica, como lo hacían Euclides y sus seguidores, como por medio del álgebra.

En la geometría analítica, cada punto en un plano está representado por sus coordenadas, que son dos números que permiten localizarlo con respecto a un sistema de ejes predeterminados. Si se trata de un punto en el espacio tridimensional, entonces se utilizan tres números como coordenadas. Lo esencial es que la distancia entre dos puntos se determina por medio del teorema de Pitágoras, a partir de las coordenadas de ambos. La relación tan fundamental entre álgebra y geometría sería imposible sin ese teorema que asocia distancias con coordenadas numéricas.

La geometría analítica fue extremadamente fructífera y condujo, en la generación posterior a Descartes, al siguiente gran avance en matemáticas: el cálculo diferencial e integral, desarrollado por Newton y Leibniz en forma simultánea e independiente.[2]

En cuanto a la esencia misma del espacio, el mismo Descartes tomó una posición

cercana a la de Aristóteles. Negó la existencia del vacío, lo cual lo llevó a identificar el espacio con la extensión material. El espacio todo estaría lleno de aire burdo, como el que respiramos en la Tierra, y un "aire sutil", el Éter, que rellenaría todo el Universo. Esta identificación de espacio con materia, sea ésta etérea, fue duramente criticada por Newton, como veremos en capítulo III.

* * *

Después de tantos avances notables, parecía que había llegado el momento de saldar viejas cuentas con el molesto quinto postulado de Euclides. Empero, el problema siguió trayendo de cabeza a los mejores matemáticos. Para el siglo XVIII, ya se había vuelto un "escándalo de la geometría elemental", en palabras del matemático francés D'Alembert. Su colega y compatriota Legendre le dedicó al asunto una buena parte de su vida profesional, sin éxito, pero al menos encontró una nueva forma equivalente del quinto postulado: "La suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos (180 grados)". Cosa que los escolares aprenden en la escuela.

Finalmente, a principios del siglo XIX, algunos matemáticos visionarios se propusieron ver el problema desde una nueva perspectiva. Ante tantos fracasos anteriores, quedaba aún una vía por explorar: ¿por qué no olvidarse del quinto postulado y ver hasta dónde se puede llegar sin él? Si en algún momento surge un resultado contradictorio, entonces todo lo que restaría por hacer sería regresar camino y, a partir de la contradicción, demostrar la necesidad del quinto postulado. Ése es un método usado con frecuencia en matemáticas y se llama "reducción al absurdo".

El gran matemático Karl Friedrich Gauss, alrededor de 1817, retomó el viejo problema desde esa nueva perspectiva. Pronto se convenció de que el quinto postulado es independiente de los cuatro anteriores y que, por lo tanto, no había razón para aferrarse a él. Si uno se olvida de él, no llega a nada contradictorio, sino a una nueva geometría en la que se puede definir las paralelas de otra forma. Pero, curiosamente, Gauss nunca publicó su trabajo; quizás no quería contradecir la geometría euclidiana, tan incuestionable en su época.

Corresponde a János Bolyai y Nikolai Lobachevski, quienes trabajaron independientemente y sin nunca conocerse, el honor de haber publicado los primeros estudios sobre geometrías que no cumplen con el quinto postulado. Ellos también se preguntaron qué pasaría si se descartara el molesto postulado, y el resultado fue sorprendente. Lejos de caer en contradicciones, apareció una nueva e insospechada geometría, perfectamente consistente y coherente; una geometría no euclidiana de una

gran riqueza y complejidad. “He descubierto cosas tan sorprendentes que quedé impresionado… de la nada creé un extraño mundo nuevo”, escribió Bolyai a su padre, también matemático. Pero cuando Bolyai comunicó su descubrimiento a Gauss, la respuesta que obtuvo le resultó decepcionante: el gran matemático alabó su trabajo, pero le informó que él ya había obtenido esos mismos resultados años atrás, aunque nunca los había publicado.

El nuevo mundo de la geometría no euclidiana también fue descubierto, en la misma época, por Lobachevski. Pero su trabajo, que data de 1829, pasó desapercibido durante varios años por estar escrito en su lengua natal y publicado en una oscura revista de la Universidad de Kazan, en Rusia. Incluso fue despreciado en los círculos académicos de su patria y tuvo que esperar una década hasta que apareciera una traducción al francés; sólo entonces el medio científico tomó conocimiento de su obra.

Lobachevski, en ese trabajo clásico, desarrolló lo que llamó “geometría imaginaria”, una geometría en la que no se recurre al quinto postulado. Por el contrario, propuso una nueva definición de paralela: “Todas las rectas trazadas por un mismo punto en un plano pueden distribuirse, con respecto a una recta dada en ese plano, en dos conjuntos: rectas que cortan la recta dada y rectas que no la cortan. La recta que corresponde al límite común entre esos dos conjuntos es la *paralela* a la recta dada”. De acuerdo con esta definición, resulta que existen dos paralelas a una recta dada, una de cada lado del punto dado (figura I.1).

Figura I.1

Es notable que Lobachevski no quería permanecer en el marco de las construcciones mentales, ya que propuso comprobar astronómicamente la verdadera geometría del Universo midiendo los ángulos de grandes triángulos formados por dos puntos de la órbita terrestre y una estrella. Para la estrella Keida en la constelación de Erídano, comprobó, con los datos astronómicos a su disposición, que la suma de los ángulos del triángulo así construido no difería de 180° más que por un minuto de arco, lo cual no podría distinguirse de posibles errores de medición. Aunque no podía sacar ninguna conclusión con los recursos técnicos de la astronomía de su época, Lobachevski manifestó, en forma profética, su confianza en que se pudiese comprobar la verdadera geometría del Universo en el futuro, midiendo distancias mucho mayores y con mejor precisión.

* * *

Los *Elementos* de Euclides estudian la geometría sobre una superficie plana de dos dimensiones, y las generalizaciones a una tercera dimensión aparecen sólo en el

capítulo once. Asimismo, curvar una hoja sobre la cual se realizan demostraciones geométricas no parecía presentar una dificultad específica.

Las geometrías no euclidianas describen esencialmente espacios con una curvatura intrínseca. En dos dimensiones, la existencia de un espacio curvo es algo bien conocido y no tiene ningún misterio; el ejemplo más simple es el de la superficie de la Tierra. Pero no olvidemos que los humanos tardaron muchos siglos en darse cuenta de que la Tierra es redonda y no plana; así también los geómetras creían que el espacio es plano.

La superficie terrestre es un espacio curvo de dos dimensiones contenido en el espacio común de tres dimensiones. La curvatura es cuestión de escalas: en regiones pequeñas de la Tierra, su superficie puede tomarse como plana para todo fin práctico: los mapas de las ciudades dan una idea muy correcta de las distancias. En cambio, la curvatura se manifiesta al describir superficies muy grandes; como es bien sabido, en los mapas planos resulta imposible "aplanar" un continente entero sin deformar las distancias; las regiones polares se ven magnificadas y una isla relativamente pequeña como Groenlandia parece ser más grande que Europa.

La superficie de una esfera es fácil de visualizar y podemos tomarla como ejemplo para ilustrar algunas propiedades básicas de un espacio curvo. Cualquier punto sobre la superficie terrestre se determina con dos coordenadas, que suelen ser la longitud y la latitud. Para medir la distancia entre dos puntos, se puede recurrir al teorema de Pitágoras; si bien éste se aplica sólo a superficies planas, también es válido en una región de la superficie terrestre lo suficientemente pequeña para que parezca plana. Para fijar las ideas, notemos que la fórmula para medir la hipotenusa dl de un triángulo rectángulo cuyos catetos valen dx y dy está dada por la fórmula:[3]

$$dl^2 = dx^2 + dy^2.$$

Su generalización a un triángulo pequeño sobre la superficie terrestre toma la forma:

$$dl^2 = R^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta\, d\Phi^2),$$

donde R es el radio de la Tierra, y θ y Φ son la longitud y latitud respectivamente (figura I.2).

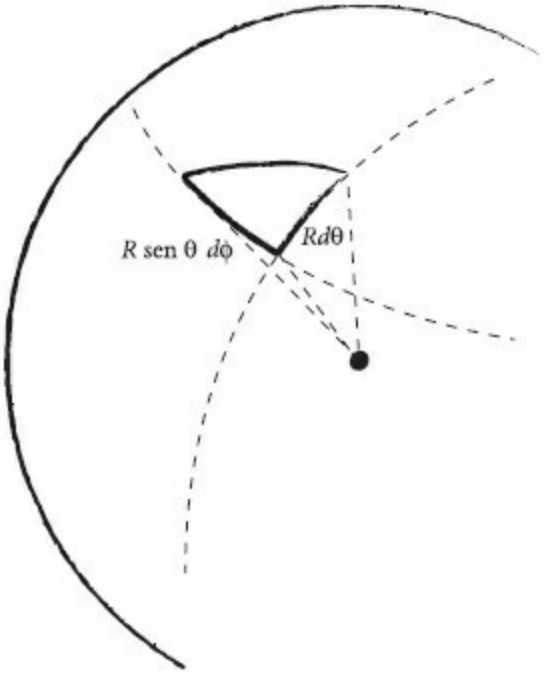

Figura I.2

Ahora bien, siempre se pueden unir dos puntos dados, no necesariamente muy cercanos, por una curva. ¿Cómo medir la longitud de una curva? La idea es medir segmentos de la curva que sean lo suficientemente pequeños para que parezcan rectas, y luego, en un siguiente paso, sumar todos los segmentos para obtener la longitud total de una curva. Lo importante en este proceso es que la longitud se puede definir sin ambigüedad como el límite obtenido al hacer cada segmento cada vez más pequeño y su número total cada vez más grande. Este proceso se puede aplicar con toda exactitud y rigor matemático utilizando las poderosas técnicas del cálculo diferencial e integral desarrolladas por Newton y Leibniz en el siglo XVII.

Lo importante es que se puede definir rigurosamente la longitud de una curva que une dos puntos sobre una superficie curva. El siguiente paso consiste en generalizar el concepto de recta, para lo cual recordaremos lo que todos hemos aprendido en la escuela: la recta es la curva de menor longitud entre dos puntos. Esta definición involucra sólo un concepto: longitud, por lo que la noción de recta puede generalizarse en una forma bastante obvia: como una "curva de mínima longitud" o, en lenguaje matemático, "geodésica". Lo esencial es que esta definición se aplica a cualquier tipo de superficie curva; si disponemos de una fórmula que generaliza el teorema de Pitágoras y nos permite medir distancias sobre la superficie, siempre podemos encontrar las geodésicas correspondientes. Por ejemplo, para la superficie de una esfera, es evidente que la curva de mínima longitud que une dos puntos dados es el arco máximo que pasa

por esos dos puntos (véase la figura I.3).

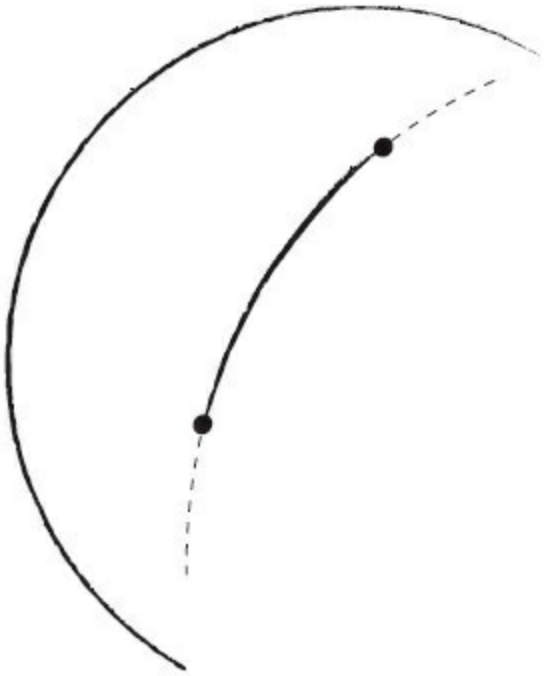

Figura I.3

Ahora se ve por qué no tiene sentido definir paralelas en un espacio curvo como la superficie terrestre. El quinto postulado sólo se aplica en una región pequeña de la Tierra, donde no se nota su curvatura. Dado que un arco máximo siempre cruza otro arco máximo, dos geodésicas "paralelas" se unirán necesariamente en dos puntos, una antípoda de la otra. El concepto de paralela como dos rectas que nunca se encuentran, no tiene sentido sobre la superficie de una esfera.

Otros postulados de la geometría euclidiana tampoco se aplican sobre superficies curvas. Por ejemplo, si definimos un triángulo como una figura geométrica formada por tres geodésicas, resulta que tal triángulo no cumple uno de los teoremas básicos de la geometría euclidiana: que la suma de sus tres ángulos internos sea igual a dos ángulos rectos. Para darse cuenta de ello, basta con visualizar el "triángulo" formado por el ecuador y dos cuartos de meridianos sobre una esfera: la suma de sus ángulos es siempre mayor que 180 grados.

Por supuesto, la superficie de una esfera no es el único ejemplo de una superficie curva. Otros ejemplos son la superficie de un hiperboloide, o la superficie de una silla de montar (figura I.4). Se trata de espacios llamados de curvatura negativa, a diferencia de la superficie de una esfera que es de curvatura positiva. El espacio estudiado originalmente por Lobachevski es de curvatura negativa; en ella dos "rectas" pueden

pasar por un mismo punto y ser paralelas a una “recta” dada; además, al contrario de la esfera, en un espacio de curvatura negativa, la suma de los ángulos de un triángulo es menor que 180 grados. También ocurren otras rarezas que contradicen toda la geometría elemental que nos enseñan en la escuela. Empero, como ya dijimos, es un mundo con su propia coherencia.

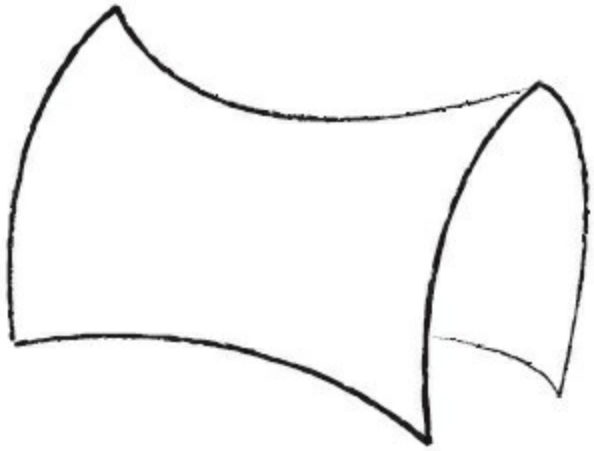

Figura I.4