Ejercicios

Calcule el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

1.5. Determinantes

1.5.1. Definiciones generales

Determinante de 2×2

Si es una matriz de orden 2×2 se define el determinante de la matriz A y se expresa como $det(A)$ o bien $|A|$:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Observación: Es importante no confundir la notación de barras verticales. Cuando A es una matriz cuadrada, $|A|$ denota $\det(A)$. Sin embargo, cuando x es un número real, $|x|$ denota el valor absoluto de x.

Ejemplo

Halle el determinate de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Solución

$|A| = 3 \times 5 - 2 \times 1 = 13.$

Determinante de 3×3

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

el determinante de A es

$$\det(A) = |A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$

Solución

$$|A| = 4\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-51) - 7(35) - 2(-22) = -405$$

Regla de Sarrus

La **regla de Sarrus** nos sirve para resolver de manera sencilla el determinante de una matriz de orden 3×3.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array}$$

Ejemplo

Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A)$ utilizando la regla de Sarrus.

Solución

$$|A| = (4)(-5)(9) + (7)(1)(-8) + (3)(6)(-2) - (-2)(-5)(-8) - (7)(3)(9) - (1)(6)(4)$$

$$|A| = -272 - 133 = -405$$

1.5.2. Propiedades de los determinantes

Propiedades

Si A es una matriz cuadrada de orden n, entonces:

- det es invariante mediante operaciones elementales fila y/o columna.
- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & k\cdot a_{12} & k\cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- $\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a' & a & a'' \\ b' & b & b'' \\ c' & c & c'' \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & 0 \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} a & a' & a+a' \\ b & b' & b+b' \\ c & c' & c+c' \end{vmatrix} = 0$
- $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$
- Si A es invertible, entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$