

## Ejercicios

Calcule el rango de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

## 1.5. Determinantes

## 1.5.1. Definiciones generales

Determinante de  $2 \times 2$ 

Si es una matriz de orden  $2 \times 2$  se define el determinante de la matriz  $A$  y se expresa como  $\det(A)$  o bien  $|A|$ :

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

**Observación:** Es importante no confundir la notación de barras verticales. Cuando  $A$  es una matriz cuadrada,  $|A|$  denota  $\det(A)$ . Sin embargo, cuando  $x$  es un número real,  $|x|$  denota el valor absoluto de  $x$ .

## Ejemplo

Halle el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

## Solución

$$|A| = 3 \times 5 - 2 \times 1 = 13.$$

Determinante de  $3 \times 3$ 

Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

el determinante de  $A$  es

$$\det(A) = |A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Sea  $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ . Calcule  $\det(A)$

Solución

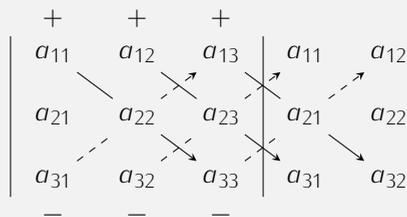
$$\begin{aligned} |A| &= 4 \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -8 & 9 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -8 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 4(-51) - 7(35) - 2(-22) = -405 \end{aligned}$$

Regla de Sarrus

La **regla de Sarrus** nos sirve para resolver de manera sencilla el determinante de una matriz de orden  $3 \times 3$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$



Ejemplo

Sea  $A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & -2 \\ 3 & -5 & 1 \\ -8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ . Calcule  $\det(A)$  utilizando la regla de Sarrus.

## Solución

$$|A| = (4)(-5)(9) + (7)(1)(-8) + (3)(6)(-2) - (-2)(-5)(-8) - (7)(3)(9) - (1)(6)(4)$$

$$|A| = -272 - 133 = -405$$

## 1.5.2. Propiedades de los determinantes

## Propiedades

Si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ , entonces:

- $\det$  es invariante mediante operaciones elementales fila y/o columna.

- $\det(A) = \det(A^T)$

- $$\begin{vmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- $\det(AB) = \det(A) \det(B)$

- $$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a' & a & a'' \\ b' & b & b'' \\ c' & c & c'' \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} a & a' & 0 \\ b & b' & 0 \\ c & c' & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- $$\begin{vmatrix} a & a' & a + a' \\ b & b' & b + b' \\ c & c' & c + c' \end{vmatrix} = 0$$

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

- Si  $A$  es invertible, entonces  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$