# 1. MATRICES

*"Entender el significado de los invariantes representa un esfuerzo para reconocer lo que, por su forma, o color, o sentido, o lo que sea, es importante o significativo entre aquello que es solamente trivial o efímero. Un simple ejemplo de su falta de comprensión lo proporciona el examinando de Cambridge que aprendió perfectamente a convertir en factores $a^2 - b^2$ pero fracasó cuando el examinador le preguntó desconsideradamente por los factores $p^2 - q^2$."*

H. W. Turnbull.

## INTRODUCCIÓN

Un fenómeno frecuente en la historia de la matemática es sin duda, el que las herramientas matemáticas necesarias para las aplicaciones científicas, han sido inventadas muchos años antes de poder intuir la ciencia en la cual han tenido aplicación.

El álgebra de la matrices ha sido precisamente uno de ellas, y su estudio se considera una de las contribuciones más importantes por parte de Arthur Cayley, matemático inglés del siglo XIX. El tema de las matrices apareció en un escrito publicado por él en 1858, titulado "Memorias sobre la teoría de las matrices". Surgió de la observación sobre el comportamiento de las combinaciones de transformaciones lineales (unidad 6), en la teoría de los invariantes algebraicos.

La definición de la multiplicación entre matrices, por la cual se obtienen resultados diferentes según el orden en que se multiplique, parece no tener importancia práctica o científica. Sin embargo, 60 años después, Heisemberg encontró en el álgebra de matrices, el instrumento preciso para el desarrollo de su obra trascendental en la mecánica cuántica. En la actualidad, el desarrollo tecnológico ha evolucionado rápidamente a tal punto que, la aplicación de programas computacionales es imprescindible en todo proceso de optimización, en particular para el diseño de diferentes estructuras (edificios, puentes, motores, etc. ), lo cual es posible gracias al manejo y aplicación de la teoría de las matrices en los campos vectoriales.

El manejo que se hace de las matrices en esta unidad, es principalmente operacional. Sin embargo, el tratamiento abstracto de las operaciones definidas y sus propiedades, permite reconocer posteriormente la estructura algebraica del conjunto de las matrices como un espacio vectorial (unidad 5).

## OBJETIVO GENERAL

Estudiar las características y operaciones básicas entre matrices, para aplicarlas en diferentes temas de la ingeniería o de otras áreas del conocimiento, como las ciencias económicas y sociales.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar los elementos de una matriz, la caracterización de algunas matrices especiales y las operaciones elementales sobre sus filas o columnas.

- Definir las operaciones básicas entre matrices y sus propiedades, para aplicarlas en el planteamiento y solución de problemas relacionados con actividades de la ingeniería.

- Aplicar la matriz inversa en la solución de ecuaciones matriciales.

## CONTENIDO

1.1. Generalidades de las matrices
1.1.1. Matrices especiales
1.1.2. Operaciones elementales sobre una matriz
1.1.3. Aplicaciones

1.2. Operaciones con matrices
1.2.1. Suma de matrices
1.2.2. Multiplicación escalar
1.2.3. Producto de matrices
1.2.4. Aplicaciones

1.3. Matriz inversa
1.3.1. Algoritmo para hallar la matriz inversa
1.3.2. Aplicaciones

## 1.1. GENERALIDADES DE LAS MATRICES

Las matrices son elementos adecuados para presentar mucha información correlacionada, en una forma organizada y práctica de analizar. Tal es el caso de los inventarios de existencias en algún depósito de materiales de construcción, o el reporte de notas de un estudiante durante los diferentes periodos de estudio.

**Definición:** Se llama MATRIZ REAL a un conjunto de números reales dispuestos en forma rectangular, dentro de un paréntesis redondo o cuadrado.
Los números dispuestos en forma horizontal se llaman FILAS y los dispuestos en forma vertical se llaman COLUMNAS.
El ORDEN de la matriz queda determinado por el número de filas y de columnas respectivamente.

**Notación:** Las matrices se denotan con letras mayúsculas, sus elementos con letras minúsculas y el orden en forma de subíndice.

$$A_{mxn} = (a_{i\,j})_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Fila 3 } (F_3)$$

Columna 2 ( $C_2$ )

El elemento que se encuentra en la intersección de $F_3$ y $C_2$ es precisamente $a_{32}$ .

**Ejemplo:**

$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ es una matriz de orden 2x3 porque tiene 2 filas y 3 columnas.

Las filas de A son: (1 –2 3) y (5 0 –1) que denotamos $F_1$ y $F_2$ respectivamente.

Las columnas de A son: $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ que denotamos $C_1$ , $C_2$ y $C_3$.

El elemento $a_{23}$ = -1 es el elemento que se encuentra en la segunda fila y la tercera columna de la matriz A.

En forma análoga, designamos los otros elementos: $a_{21} = 5$ ; $a_{12} = -2$ ; $a_{22} = 0$ ; $a_{11} = 1$ y $a_{13} = 3$

Para esta matriz, no existe $a_{32}$ porque hay solamente dos filas.

**Definición:** Dos MATRICES A y B del mismo orden son IGUALES, si y sólo si cada elemento $a_{ij}$ de A, es igual al correspondiente elementos $b_{ij}$ de B.

Si $A = (a_{ij})_{mxn}$ y $B = (b_{ij})_{mxn}$ entonces $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ , $\forall i, j$

**Ejemplos:**

**1.** Dadas $M = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 5 & x \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ z & 3 \end{pmatrix}$, M = N solo si: $a = 0$ , $z = 5$ y $x = 3$ .

**2.** Las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ no son iguales aunque sean del mismo orden y tengan los mismos elementos, porque $a_{21} \neq b_{21}$ .

### 1.1.1. Matrices especiales.

Según el orden y ciertas características de los elementos, se identifican algunas matrices especiales.

**Según el orden** distinguiremos:

- Matriz FILA: es una matriz con una sola fila. $F_{1x5} = (2 \ \ -1 \ \ 0 \ \ 3 \ \ 5)$.

- Matriz COLUMNA: es una matriz con una sola columna. $C_{3x1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Matriz CUADRADA: es una matriz con igual cantidad de filas que de columnas.
  Se denota $A_n$ y se lee “matriz de orden n”.

$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2.

**Según las características de los elementos** distinguiremos:

**- Matriz TRIANGULAR SUPERIOR:** es una matriz cuadrada en la cual los elementos por debajo de la diagonal principal son cero.

En forma análoga, se define matriz TRIANGULAR INFERIOR. La DIAGONAL PRINCIPAL comprende los elementos de la forma $a_{ii.}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ es matriz triangular superior y la diagonal principal está formada por los elementos $b_{11} = 1$ ; $b_{22} = 1$ ; $b_{33} = -2$ .

$G = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ es matriz triangular inferior. Los elementos de la diagonal principal son $g_{11} = -1$ ; $g_{22} = 0$ ; $g_{33} = 4$.

**- Matriz DIAGONAL:** es una matriz triangular inferior y superior al mismo tiempo.

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**- Matriz ESCALAR**: es una matriz diagonal en la cual los elementos de la diagonal principal son iguales.

$E = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar de orden 3 donde la constante en la diagonal principal es 1/2

**- Matriz IDÉNTICA**: es una matriz escalar en la cual la constante es uno.

$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz idéntica de orden 2.

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz idéntica de orden 3.

- **Matriz NULA**: es una matriz de orden mxn en la cual todos los elementos son cero.

$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 2.

$O_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de orden 2x3.

- **Matriz TRANSPUESTA DE A**: es la matriz que se obtiene a partir de A, intercambiando filas por columnas. Se denota $A^T$

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ es matriz de orden 2x3, entonces la matriz transpuesta de A

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ es matriz de orden 3x2.

- **Matriz OPUESTA DE A:** es la matriz que se forma con los opuestos de los elementos de $A_{mxn}$. Se denota $-A_{mxn}$.

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $-A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ es la matriz opuesta de A.

- **Matriz SIMÉTRICA**: es una matriz cuadrada que es igual a su transpuesta.

$S = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica porque $S^T = S$

-**Matriz ANTISIMÉTRICA**: es una matriz cuadrada igual a la opuesta de su transpuesta.

$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica, porque es igual a la opuesta de la matriz transpuesta de K. Así: $K^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $-K^T = K$.

## 1.1.2. Operaciones elementales sobre una matriz.

**Definición:** Se llama OPERACIÓN ELEMENTAL sobre una matriz a cualquiera de las siguientes modificaciones:

- Intercambiar dos filas (o columnas). Se denota: $F_i \leftrightarrow F_j$ (o $C_i \leftrightarrow C_j$).
- Multiplicar todos los elementos de una fila (o columna) por una constante diferente de cero. Se denota: $kF_i$ (o $kC_j$) , $k \neq 0$.
- Sumar término a término a una fila (o columna) otra fila (o columna) multiplicada por una constante se denota: $F_i + kF_j$ (o $C_i + kC_j$).

Las operaciones elementales se aplican convenientemente sobre una matriz de cualquier orden, con el fin de obtener la forma escalonada o reducida de la matriz.

**Definición:** Dos MATRICES A y B son EQUIVALENTES, si una de ellas se obtiene a partir de la otra por medio de una o mas operaciones elementales.

Se denota: $A \approx B$ y se lee: "A es equivalente a B".

**Ejemplo:**

Las siguientes matrices son equivalentes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Porque:

B se obtuvo a partir de A sumándole a la fila 2 la fila 1 multiplicada por –2: $F_2+(-2)F_1$.
C se obtuvo a partir de B multiplicando la fila 2 por (-1): $(-1)F_2$.
D se obtuvo a partir de C intercambiando la fila 2 con la fila 3: $F_2 \leftrightarrow F_3$.

Entonces: $A \approx B \approx C \approx D$ lo cual se denota de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Definición:** Una matriz A de orden mxn se llama ESCALONADA POR FILAS si cumple las siguientes condiciones:

- Si existen filas nulas, aparecen en la parte inferior.
- El primer elemento no nulo de cada fila no nula, llamado **pivote**, es 1.
- En cada columna donde hay un pivote, los elementos por debajo de este son cero.
- Si i es mayor que j, el pivote de la fila-i está a la derecha del pivote de la fila-j.

**Definición:** Una matriz A de orden mxn se llama REDUCIDA POR FILAS si cumple las siguientes condiciones:

- Si existen filas nulas, son las últimas.
- El primer elemento no nulo de cada fila no nula, llamado **pivote**, es 1.
- En cada columna donde hay un pivote, el único elemento no nulo es el pivote.
- Si i es mayor que j, el pivote de la fila-i está a la derecha del pivote de la fila-j.

**NOTA:** En general, el **pivote** puede se cualquier número, pero por comodidad en este caso, se busca 1 en esa posición.

**Teorema:** Para cualquier matriz A de orden mxn:

(a) A es equivalente a una matriz escalonada por filas.
(b) A es equivalente a una matriz reducida por filas.

## 1.1.3. Aplicaciones

**- Recopilación de información:** Las matrices constituyen un instrumento muy útil para recopilar mucha información en una forma organizada y fácil de analizar.

Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 22 & 36 & 54 \\ 20 & 40 & 52 \\ 28 & 45 & 65 \end{pmatrix}$ puede representar el número de metros cúbicos de agua demandados por familia al mes, en los estratos 2, 3 y 4 de tres municipios diferentes. Por la información que contiene, la matriz se puede llamar MATRIZ MUNICIPIO-CONSUMO, y se forma a partir de los datos reportados en la siguiente tabla:

| MUNICIPIO | CONSUMO POR ESTRATOS ($m^3$/mes) | | |
|---|---|---|---|
| | **Estrato 1** | **Estrato 2** | **Estrato 3** |
| **CHÍA** | 22 | 36 | 54 |
| **MADRID** | 20 | 40 | 52 |
| **MELGAR** | 28 | 45 | 65 |

Otro ejemplo interesante, es la llamada MATRIZ ORIGEN-DESTINO de pasajeros en un sistema dado de transportes. Se forma con el número de pasajeros que se dirigen de un lugar a otro.

Por ejemplo la matriz $B = \begin{pmatrix} 1200 & 50 & 20 & 55 \\ 700 & 15 & 100 & 10 \\ 500 & 3 & 250 & 0 \\ 0 & 120 & 50 & 40 \end{pmatrix}$ se obtuvo de la siguiente tabla:

| Destino / Origen | BOGOTÁ | TUNJA | IBAGUÉ | CAJICÁ |
|---|---|---|---|---|
| **CHÍA** | 1200 | 50 | 20 | 55 |
| **MADRID** | 700 | 15 | 100 | 10 |
| **MELGAR** | 500 | 3 | 250 | 0 |
| **BOGOTÁ** | 0 | 120 | 50 | 40 |

Así, el elemento $b_{34} = 0$ de la matriz B, se interpreta como la ausencia de pasajeros que viajen de Melgar a Cajicá; $b_{11} = 1200$ indica que el mayor flujo de pasajeros se presenta de Chía hacia Bogotá.

En la unidad 2 de este módulo, se verá que las matrices son un buen instrumento para el estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

**- Matrices especiales:** Algunas matrices se definen especialmente para describir la información que se quiere recopilar. Tal es el caso de la llamada MATRIZ ESTOCÁSTICA, que se caracteriza por ser una matriz cuadrada cuyos elementos son probabilidades y la suma de sus columnas debe ser igual a 1.

Algunos ejemplos de matrices estocásticas son: $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & 3/8 \\ 1/3 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ porque:

La suma de los elementos en cada columna es 1 y todos los elementos están entre 0 y 1, es decir, son probabilidades.

La siguiente matriz estocástica (verifíquelo) recoge la información recopilada en un estudio de usos del suelo en una ciudad, de 1980 a 1990:

$$U = \begin{pmatrix} 0.47 & 0.03 & 0.03 & 0.19 & 0.33 \\ 0.18 & 0.48 & 0.08 & 0.28 & 0.11 \\ 0.22 & 0.28 & 0.08 & 0.47 & 0.15 \\ 0.05 & 0.13 & 0.79 & 0.06 & 0.35 \\ 0.08 & 0.08 & 0.02 & 0.00 & 0.06 \end{pmatrix}$$

En esta matriz, por filas se lee el uso del suelo en 1980 y por columnas, el uso del suelo en 1990. Los usos considerados en orden de filas y de columnas son:

1. Residencial.
2. Comercial.
3. Industrial.
4. Transporte.
5. Baldío.

Cualquier elemento $u_{ij}$ representa la probabilidad de que el suelo que tuvo uso j en 1980, pasara a un uso i en 1990. Así por ejemplo, el elemento $u_{32}$ = 0.28 nos indica que el suelo con uso industrial en 1980, tenía una probabilidad de 0.28 de convertirse en área comercial en 1990. Los elementos de la diagonal principal dan la probabilidad de que el uso del suelo no cambiara.

Otro tipo de modelo especial son las matrices de COMUNICACIÓN, donde cada elemento $c_{ij}$ es 1 si i se comunica con j y 0 si no se comunican, lo que hace que estas matrices sean siempre simétricas (igual a su transpuesta). Algunos ejemplos de estas matrices son:

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ que se pueden representar por medio de grafos como se ilustra en las figuras 1(a) y 1(b) respectivamente

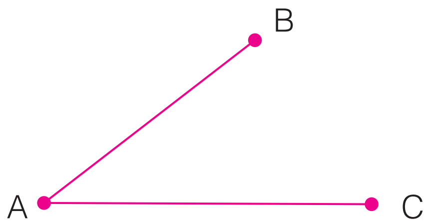



Fig. 1(a)

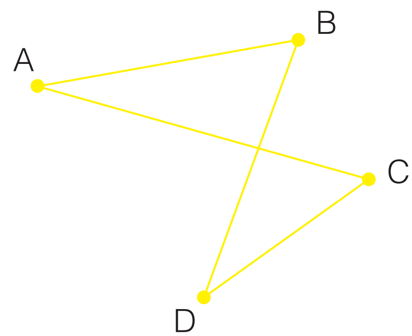



Fig. 1(b)

En cada **grafo** (conjunto de puntos y líneas), los puntos representan ciudades y las líneas carreteras entre ellos. La figura 1(a) indica que la ciudad A se comunica con B y con C, pero B y C no están comunicadas. ¿Cómo interpreta la figura 1(b) ?

**- Matrices escalonadas y reducidas:** Una matriz de cualquier orden mxn, se puede llevar a la forma escalonada o reducida por medio de operaciones elementales sobre las filas.

La secuencia más conveniente para llevar una **matriz** a la forma **escalonada** por filas, se describe mediante el siguiente **algoritmo**: (es sólo una sugerencia).

- Buscar el pivote de la primera fila con cualquiera de las 3 operaciones elementales.
- Volver cero los elementos por debajo del pivote de la fila 1 con la operación de la forma $F_i + kF_j$ .
- Buscar el pivote de la segunda fila, teniendo cuidado de que quede a la derecha del pivote de la primera fila.
- Volver cero los elementos por debajo del pivote de la fila 2.
- Continuar el proceso hasta terminar con todas las filas de la matriz.

**Ejemplo:**

Llevar la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ a la forma escalonada por filas.

**Solución:** Aplicando el algoritmo se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4+2F_1]{F_3-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -1 \\ 0 & -5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_4+5F_2]{F_3-6F_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -21 & -7 \\ 0 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\left(-\frac{1}{7}\right)F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 18 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{6}F_4} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_4-F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}F_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

La matriz B es la forma escalonada de la matriz A, ya que como se puede observar, se cumplen las condiciones de la definición: los pivotes son 1, por debajo de cada uno de ellos aparecen ceros solamente y los pivotes se desplazan a la derecha, y la fila de cero está en la parte inferior. Además $A \approx B$.

La secuencia más conveniente para llevar una **matriz** a la forma **reducida** por filas se describe mediante el siguiente **algoritmo**:

- Buscar el pivote de la primera fila.
- Volver cero los demás elementos de la columna donde está el pivote de la fila 1 con la operación de la forma $F_i + kF_j$ .
- Buscar el pivote de la segunda fila, teniendo cuidado de que quede a la derecha del pivote de la primera fila.
- Volver cero los elementos de la columna donde está el pivote de la fila 2.
- Continuar el proceso hasta terminar con todas las filas de la matriz.

**Ejemplo:**

Llevar la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ a la forma reducida por filas

Solución: Siguiendo la secuencia indicada en el algoritmo tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_1]{\substack{F_2+2F_1 \\ F_3-4F_1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 14 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -14 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 14 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 14/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 14/3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

La matriz B es la forma reducida de la matriz A, pues cumple las condiciones de la definición: las filas nulas aparecen abajo, en cada columna donde hay un pivote, éste es el único elemento no nulo, y el pivote de la fila 2 está a la derecha del pivote de la fila 1.

**Ejercicios propuestos:**

**1.** En un experimento de laboratorio se tomó el tiempo en que dos grupos de bloques de concreto de diferente tamaño, con 4 mezclas diferentes se compactaban. Los bloques de menor tamaño lo hicieron en 8, 6, 5 y 7 horas. Los bloques de mayor tamaño lo hicieron en 22, 14, 18 y 12 horas. Escriba esta información en una matriz.

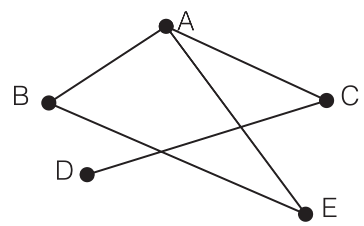
**2.** Una compañía tiene sus reportes de ventas mensuales dados por medio de matrices cuyas filas, en orden representan el número de modelos regular, de lujo y extra vendidos, mientras que las columnas dan el número de unidades rojas, blancas, azules y verdes vendidas. Las matrices para enero (E) y febrero (F) son:

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

a) ¿En enero, cuántas unidades blancas del modelo extra se vendieron?
b) ¿En febrero, cuántos modelos de lujo azules se vendieron?
c) ¿En qué mes se vendieron mas modelos regulares verdes?
d) ¿De qué modelo y color se vendió el mismo número de unidades en los 2 meses?
e) ¿En qué mes se vendieron mas modelos de lujo?
f) ¿En qué mes se vendieron mas artículos rojos?
g) ¿Cuántos artículos se vendieron en enero?

**3.** a) Construya el grafo asociado a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) Escriba la matriz asociada al siguiente grafo:




**4.** Encuentre valores de $x$, $y$ y $z$ para que $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ x & 7 \\ 3y & 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 7 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

**5.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & -3 \end{pmatrix};\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix};\ E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 15 & -12 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ R = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) ¿Cuáles son diagonales?
b) ¿Cuáles son triangulares (superior o inferior)?
c) ¿Cuáles son escalares?
d) ¿Cuáles son simétricas?
e) ¿Cuáles son antisimétricas?

**6.** Escribir las siguientes matrices, de acuerdo a las definiciones dadas:

a) $A_{4x5} = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad i < j \\ -1 & si \quad i = j \\ i & si \quad i > j \end{cases}$

b) $B_{5x4} = (b_{ij})$ tal que $b_{ij} = \begin{cases} 5 & si \quad i \neq j \\ 7 + j & si \quad i = j \end{cases}$

**7.** Lleve las siguientes matrices a la forma reducida por filas:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 15 & -12 & 21 \end{pmatrix}$

**8.** Justifique por qué en una matriz antisimétrica, los elementos de la diagonal principal siempre son cero.

## 1.2. OPERACIONES CON MATRICES

Se definen tres operaciones básicas entre matrices: la suma, la multiplicación escalar (o multiplicación por un escalar) y el producto, cada una de ellas con características y propiedades diferentes.

La suma se efectúa entre dos matrices del mismo orden y el resultado es una matriz del mismo orden.

La multiplicación escalar se efectúa entre una matriz y un real, y el resultado es una matriz del mismo orden.

El producto se define entre dos matrices que deben ser cuadradas del mismo orden, y el resultado es otra matriz del mismo orden; ó, entre matrices de diferente orden con cierto condicionamiento para el orden de cada una de ellas y el resultado es una matriz de orden diferente al de los factores.

### 1.2.1. Suma de matrices

**Definición:** Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de orden mxn, se define la SUMA de A y B como otra matriz $C = (c_{ij})$ de orden mxn donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$$C_{mxn} = A_{mxn} + B_{mxn} = (a_{ij} + b_{ij}) = (c_{ij})$$

**Ejemplo:**

Si $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ y $B_{2x3} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 \\ -3 & 10 & 8 \end{pmatrix}$ entonces:

$$C_{2x3} = \begin{pmatrix} 2+8 & 8-1 & 3+0 \\ 1-3 & 0+10 & -3+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 3 \\ -2 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

**Propiedades:**

**1. Clausurativa:** $A_{mxn} + B_{mxn} = C_{mxn}$

Esto quiere decir que 2 matrices del mismo orden siempre se pueden sumar y el resultado es una matriz del mismo orden.

**2. Conmutativa:** $A + B = B + A$

Significa que el orden en que se suman las matrices no afecta el resultado.
Demostración: Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces:

$$\begin{aligned} A + B &= (a_{ij} + b_{ij}) && \text{definición de suma de matrices.} \\ &= (b_{ij} + a_{ij}) && + \text{ es conmutativa en } \Re. \\ &= B + A && \text{definición de suma de matrices.} \end{aligned}$$

**3. Asociativa:** $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$

Quiere decir que se pueden sumar más de 2 matrices, sin que la forma de agruparlas afecte el resultado, por lo que se puede prescindir de los paréntesis.

Demostración: Si $A = (a_{ij})$ ; $B = (b_{ij})$ y $C = (c_{ij})$ entonces:

$$\begin{aligned} (A + B) + C &= (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) && \text{definición de suma de matrices.} \\ &= ([a_{ij} + b_{ij}] + c_{ij}) && \text{definición de suma de matrices.} \\ &= (a_{ij} + [b_{ij} + c_{ij}]) && + \text{ es asociativa en } \Re. \\ &= (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) && \text{definición de suma de matrices.} \\ &= A + (B + C) && \text{definición de suma de matrices.} \end{aligned}$$

**4. Modulativa:** $\forall A_{mxn}$ , $A + O_{mxn} = O_{mxn} + A = A$

Significa que $O_{mxn}$ es el MÓDULO de la suma de matrices porque, cualquier matriz sumada con la matriz nula del mismo orden no cambia.

Demostración:

$$\begin{aligned} A + O &= (a_{ij} + 0_{ij}) && \text{definición de suma de matrices.} \\ &= (a_{ij}) && 0 \text{ es el módulo de la suma de reales.} \\ &= A && \text{definición de la matriz A.} \end{aligned}$$

**5. Invertiva:** $\forall A_{mxn}$ , $\exists (-A)_{mxn}$ tal que $A + (-A) = O_{mxn} = (-A) + A$

Toda matriz sumada con su opuesta, da como resultado la matriz nula del mismo orden.

Demostración:

$$\begin{aligned} A + (-A) &= (a_{ij} + (-a_{ij})) && \text{definición de suma de matrices.} \\ &= (0_{ij}) && a - a = 0 \text{ para todo } a \in \Re. \\ &= O_{mxn} && \text{definición de la matriz nula.} \end{aligned}$$

### 1.2.2. Multiplicación escalar

**Definición:** Dada una matriz $A_{mxn} = (a_{ij})$ de orden mxn y una constante $r \in \Re$ , se define la MULTIPLICACIÓN ESCALAR de A por $r$ como $r\,A_{mxn} = (r\,a_{ij}) = B_{mxn}$

Se dice que B es MÚLTIPLO ESCALAR de A.

**Ejemplo:**

Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$2A = \begin{pmatrix} 2\cdot 2 & -1\cdot 2 & 3\cdot 2 & 5\cdot 2 \\ 3\cdot 2 & 0\cdot 2 & -2\cdot 2 & 4\cdot 2 \\ 4\cdot 2 & 5\cdot 2 & 6\cdot 2 & 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 & 10 \\ 6 & 0 & -4 & 8 \\ 8 & 10 & 12 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{2}A = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1/2 & -3/2 & -5/2 \\ -3/2 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & -5/2 & -3 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{2}{3}A = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 2 & 10/3 \\ 2 & 0 & -4/3 & 8/3 \\ 8/3 & 10/3 & 4 & 2/3 \end{pmatrix}$$

**Propiedades:**

1. Para toda matriz $A_{mxn}$ , $1A = A$ ; $(-1)A = -A$ ; $0A = O_{mxn}$ .
2. Si $r, s \in \Re$ y $A_{mxn}$ : $(r\,.\,s)\,A = r\,(sA)$.
3. Si $r, s \in \Re$ y $A_{mxn}$ : $(r + s)\,A = r\,A + sA$.
4. Si $r \in \Re$ y $A_{mxn}$ , $B_{mxn}$ : $r(\,A + B\,) = r\,A + rB$.

**Nota:** En la propiedad **1**, 1 es el módulo para la multiplicación escalar.
$0 \in \Re$ y O es la matriz nula de orden mxn.

En la propiedad **2**, al lado izquierdo, la multiplicación entre paréntesis es de reales y la de afuera es escalar. Sin Embargo, en el lado derecho, las dos multiplicaciones son escalares.

En la propiedad **3**, la suma de la derecha es de matrices, pero la suma de la izquierda es de reales.

En la propiedad **4**, las dos sumas son de matrices.

**Teorema:** Si A y B son matrices de orden mxn entonces

(1) $(A^T)^T = A$

(2) $(rA)^T = rA^T$

(3) $(A + B)^T = A^T + B^T$

Demostración: (3): Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ entonces:

$$\begin{aligned}
(A + B)^T &= (a_{ij} + b_{ij})^T && \text{definición de suma de matrices.}\\
&= (a_{ji} + b_{ji}) && \text{definición de matriz transpuesta.}\\
&= (a_{ji}) + (b_{ji}) && \text{definición de suma de matrices.}\\
&= A^T + B^T && \text{definición de } A^T \text{ y } B^{T.}
\end{aligned}$$

## Ejemplos:

**1.** Si $D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ encuentre una matriz X de orden 2 tal que:

$$3D - E^T + 2X = O_2$$

Solución:

En la ecuación matricial dada, se puede "despejar" X aplicando convenientemente las propiedades de la suma de matrices y de la multiplicación escalar:

$$3D - E^T + 2X = O \Rightarrow 2X = E^T - 3D \Rightarrow X = \quad (E^T - 3D) \Rightarrow X = \frac{1}{2}E^T - \frac{3}{2}D$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 0 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 15/2 \\ 6 & 3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 9/2 & -15/2 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

**2.** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ verificar que $\left( \frac{1}{4} A \right)^T = \frac{1}{4} A^T$ .

Verificación:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4} A = \begin{pmatrix} 2/4 & 3/4 \\ 4/4 & -1/4 \\ 8/4 & 0/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1 & -1/4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left( \frac{1}{4} A \right)^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 3/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4} A^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 3/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Como se observa en los dos resultados anteriores: $\left( \frac{1}{4} A \right)^T = \frac{1}{4} A^T$ .

**3.** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ verificar que $( A + B )^T = A^T + B^T$ .

Verificación:

$$\left[ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Se comprueba entonces que los dos resultados son iguales.

### 1.2.3. Producto de matrices

La condición necesaria para poder multiplicar dos matrices, es que sean cuadradas del mismo orden, o que el número de columnas en la primera matriz sea igual al número de filas en la segunda.

**Definición:** Dadas dos matrices A = ($a_{ij}$) de orden mxn y B = ($b_{ij}$) de orden nxp, se define el PRODUCTO de A y B como una matriz C = ($c_{ij}$) de orden mxp, donde cada $c_{ij}$ es el producto de la i-ésima fila de A con la j-ésima columna de B.

$$A.B = C = (c_{ij}) \quad \text{donde} \quad c_{ij} = F_{iA} \cdot C_{jB} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$C_{ij}$ se obtiene multiplicando término a término la i-ésima fila de A y la j-ésima columna de B y sumando los resultados.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} \text{ entonces:}$$

$$c_{ij} = F_{iA} \cdot C_{jB} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{3j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj.}$$

Nota: Si las dos matrices A y B son cuadradas de orden n, la matriz producto es una matriz cuadrada de orden n.

Si A es una matriz de orden mxn, B "debe" ser una matriz de orden nxp (el número de filas en B tiene que ser igual al de columnas en A), y la matriz producto es una matriz de orden mxp (con tantas filas como la matriz A y tantas columnas como la matriz B).

## Ejemplos:

**1.** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $AB = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Donde $c_{11} = F_{1A}.C_{1B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2.1 + 1.(-1) = 2 - 1 = 1.$

$c_{12} = F_{1A}.C_{2B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.(-2) + 1.2 = -4 + 2 = -2.$

$c_{21} = F_{2A}.C_{1B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3.1 + 4.(-1) = 3 - 4 = -1.$

$c_{22} = F_{2A}.C_{2B} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3.(-2) + 4.2 = -6 + 8 = 2.$

**2.** Si $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B_{3x4} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ entonces:

$AB = C_{2x4} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 1 & 17 \\ 3 & -5 & -13 & 12 \end{pmatrix}$ donde:

$c_{11} = F_{1A}.C_{1B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.0 + 3.3 + 0.0 = 0 + 9 + 0 = 9.$

$c_{12} = F_{1A}.C_{2B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2.(-2) + 3.1 + 0.2 = -4 + 3 + 0 = -1.$

$c_{13} = F_{1A}.C_{3B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.8 + 3.(-5) + 0.0 = 16 - 15 + 0 = 1.$

$c_{14} = F_{1A}.C_{4B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 2.1 + 3.5 + 0.(-2) = 2 + 15 + 0 = 17.$

$$c_{21} = F_{2A}.C_{1B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1).0 + 1.3 + (-4).0 = 0 + 3 + 0 = 3\ .$$

$$c_{22} = F_{2A}.C_{2B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (-1).(-2) + 1.1 + (-4).2 = 2 + 1 - 8 = -5\ .$$

$$c_{23} = F_{2A}.C_{3B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1).8 + 1.(-5) + (-4).0 = -8 - 5 + 0 = -13\ .$$

$$c_{24} = F_{2A}.C_{4B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = (-1).1 + 1.5 + (-4).(-2) = -1 + 5 + 8 = 12\ .$$

Como la condición para poder multiplicar dos matrices es que el número de columnas en la primera matriz sea igual al número de filas en la segunda, el **producto de matrices no es conmutativo.** ¿Parece extraño? Siempre había funcionado aquello de que "el orden de los factores no altera el producto", pero en el caso de las matrices, esa afirmación no es válida.

**3.** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ pero $BA = \begin{pmatrix} -4 & -7 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$
y por tanto $AB \neq BA$.

**4.** Si $A_{2x3} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $B_{3x4} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ entonces AB existe pero

BA no existe porque no se cumple la condición para efectuar el producto.

**5.** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ tanto AB como BA existen pero son de diferente

orden, es decir $AB \neq BA$ : $AB = \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ pero $BA = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 14 \\ 5 & 1 & 9 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$.

Sin embargo, hay caso en que la conmutatividad si se cumple:

**6.** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ entonces $AB = \begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 13 & 11 \end{pmatrix} = BA$.

**7.** Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ entonces $A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

**Notación:** $A_n.A_n = A_n^{\,2}$

En general, $A_n.A_n. \ldots A_n = A_n^{\,k}$ , si $A_n$ se tomó k veces como factor.

**Propiedades:**

**1. Asociativa** ( A.B ).C =A.( B.C ) = A.B.C .

Verificación: Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ entonces:

$$[\,AB\,]C = \left[\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ -2 & 12 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & -40 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}$$

$$A[\,BC\,] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 16 \\ 22 & -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & -40 \\ -5 & 28 \end{pmatrix}$$

Se concluye por tanto que: [ AB ]C = A [ BC ].

**2. Distributiva** A.(B + C) = A.B + A.C

Verificación: Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ entonces:

$$A[\,B + C\,] = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 27 & 17 \\ -1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 27 & 13 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 27 & 17 \\ -1 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

Observando los resultados anteriores se concluye que $A\,[B + C] = AB + AC$.

**Nota:** Al efectuar el producto en la propiedad distributiva, se debe respetar el orden en que están escritos los factores, dado que el producto de matrices no es conmutativo.

**3. Modulativa** $A_{mxn}.I_n = A_{mxn} = I_m.A_{mxn}$ ; $D_n.I_n = D_n = I_n.D_n$

Verificación: Si $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ entonces:

$$I_2.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A.I_2$$

$$I_2.B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.I_{3.}$$

**Nota:** Observe que la matriz idéntica es el módulo para el producto de matrices, pero si la matriz no es cuadrada, el orden de la matriz idéntica, no es el mismo si se multiplica a la derecha, que si se multiplica a la izquierda.

### 1.2.4. Aplicaciones

**De la suma:** Un laboratorio farmacéutico produce cierto medicamento. Los costos relativos a la compra y transporte de cantidades específicas de las sustancias necesarias para su elaboración, adquiridas en dos localidades (suministradoras) distintas, están dados en las siguientes matrices:

A = $\begin{pmatrix} 5 & 17 & 3 \\ 12 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix} 7 & 15 & 2 \\ 13 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ , donde las filas contienen la información acerca de los costos de compra (fila 1) y transporte (fila 2), respecto a cada una de las tres sustancias a, b y c (columnas), respectivamente.

La matriz que representa los costos totales de compra y transporte de cada una de las sustancias está dada por A + B = $\begin{pmatrix} 12 & 32 & 5 \\ 25 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ en la cual, la primera fila se refiere a los costos globales de compra y la segunda, a los de transporte de las sustancias para el medicamento.

**De la multiplicación escalar:** Un distribuidor de materiales para construcción normalmente despacha pedidos de 4 tipos de recebo en 3 depósitos.

El mes pasado recibió los siguientes pedidos V = $\begin{pmatrix} 20 & 48 & 60 & 24 \\ 36 & 64 & 24 & 40 \\ 44 & 72 & 48 & 60 \end{pmatrix}$

y para el próximo mes espera aumentar 4 veces el volumen de ventas.

La matriz que representa las ventas del mes entrante es 4V = $\begin{pmatrix} 80 & 192 & 240 & 96 \\ 144 & 256 & 96 & 160 \\ 176 & 288 & 192 & 240 \end{pmatrix}$.

**Del producto:** Un contratista ha aceptado construir 5 casas estilo rústico, 7 estilo moderno y 12 estilo colonial. Entonces, su contrato se puede representar por la matriz fila P = (5 7 12).

Los materiales que utilizará en cada tipo de construcción son acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra. El número de unidades de cada material que se usará en cada tipo de casa están dadas en la matriz:

M = $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}$ ,donde cada fila indica la cantidad de material necesario para un tipo de casa (rústica, moderna y colonial respectivamente), y cada columna indica la cantidad de un material dado (acero, madera, vidrio, pintura y mano de obra) para cada tipo de casa.

Las cantidades de cada material que el contratista debe pedir para cumplir con su contrato están dadas por la matriz:

PM = $(5\ \ 7\ \ 12)\begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}$ = (146 526 260 158 388), es decir, el contratista debe ordenar 146 unidades de acero, 526 de madera, 260 de vidrio y 158 de pintura.

Además, el contratista quiere calcular los costos que le demandan estos materiales si el acero cuesta $1600 por unidad, la madera $800 por unidad, el vidrio $500 por unidad, la pintura $100 por unidad y la mano de obra $1000.

Si estos datos se representan por una matriz columna C = $\begin{pmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix}$ la matriz MC da el costo para cada tipo de casa: MC = $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 16 & 7 & 17 \\ 7 & 18 & 12 & 9 & 21 \\ 6 & 25 & 8 & 5 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1500 \\ 800 \\ 500 \\ 100 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49200 \\ 52800 \\ 46500 \end{pmatrix}$.

El costo total de materiales para todas las casas está dado por:

P( MC ) = $(5\ \ 7\ \ 12)\begin{pmatrix} 49200 \\ 52800 \\ 46500 \end{pmatrix}$ = 1’173.600.

El costo total para el contratista es de $1’173.600.