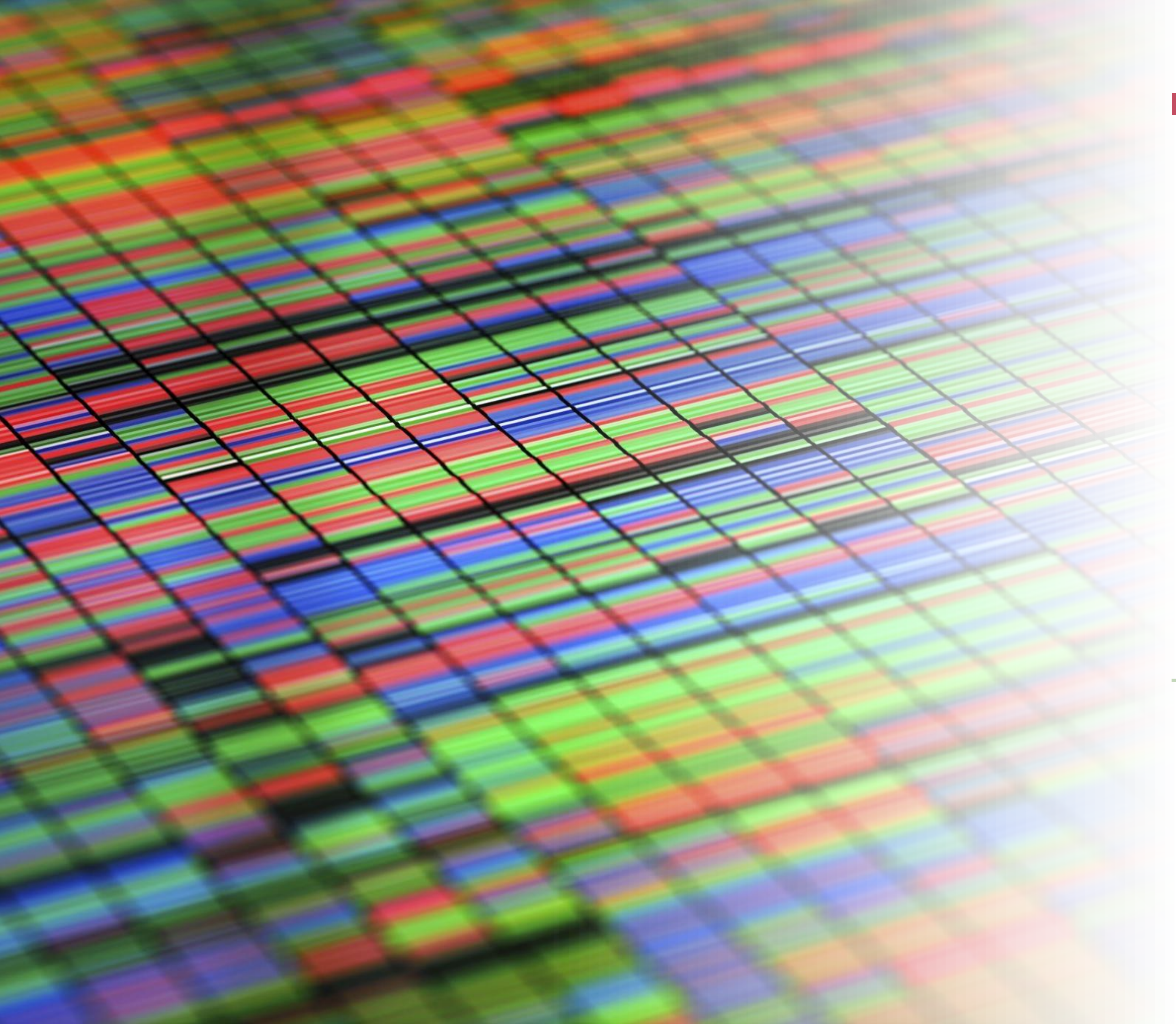


Matemática básica

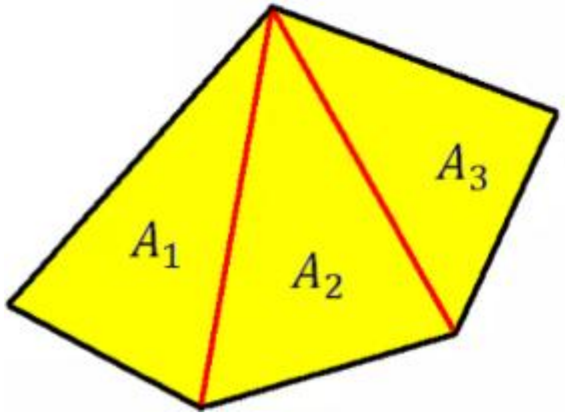
Ing. Henry Villa Yánez, Mg.

UNIDAD III: Cálculo diferencial e integral

Límites y continuidad

Límite - Introducción

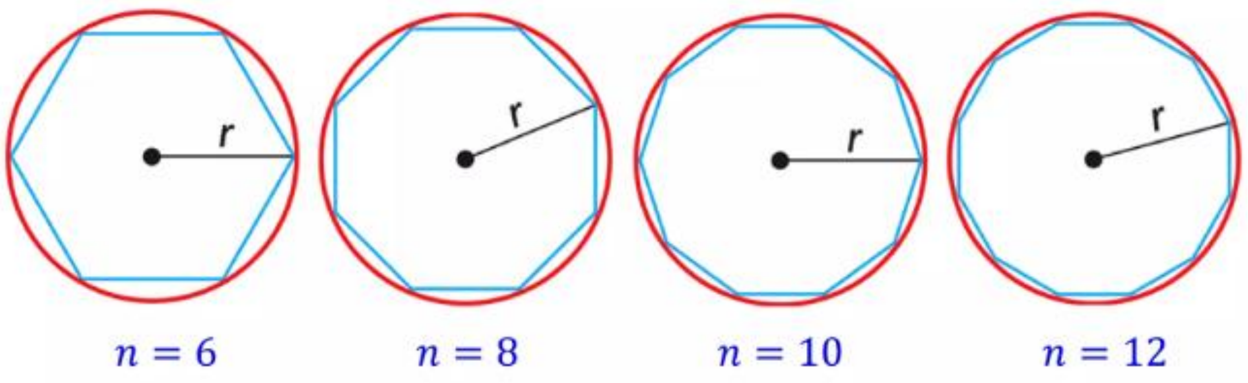
- En el lenguaje ordinario la palabra límite tiene un carácter **estático** y significa término, extremo o frontera.
- En matemáticas, el concepto de límite es un concepto dinámico y tiene que ver con la idea de acercarse lo más posible a un valor (finito o infinito).
- Consideremos el siguiente ejemplo.



- Para hallar el área de una figura poligonal simplemente se divide en triángulos y se suman sus áreas ($A = A_1 + A_2 + A_3$)

Límite - Introducción

- Es mucho más difícil hallar el área de una región con lados curvos como el círculo, una manera debido a Arquímedes es aproximar el área inscribiendo polígonos en la región (Método de exhausción).



- Si A_n es el área del polígono regular inscrito con n lados, entonces, se puede observar que cuando n aumenta A_n se aproxima cada vez más al área del círculo.

$$área_{círculo} = \lim_{n\to\infty} A_n$$

- En caso de hallar un patrón para las áreas A_n, entonces se podría determinar el límite de A de manera exacta.
- Arquímides tuvo esta idea hace más de 2 mil años y es la base del concepto de límite de una función desarrollado por Newton en el siglo XVII

Límite - Punto de vista intuitivo

- Este concepto es fundamental en el análisis matemático y es la base para definir la continuidad y las derivadas.
- Un límite describe el comportamiento de una función a medida que su argumento se aproxima a un valor específico.
- Primero es recomendable analizar el límite desde el punto de vista intuitivo antes de entenderlo desde el punto de vista formal (teoremas, axiomas, demostraciones, entre otros).
- Desde el **punto de vista intuitivo** el concepto sería:
  - Si *f(x)* se aproxima a *L* cuando *x* se aproxima a *a*, se escribe:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

  - Esto quiere decir que para valores de *x* muy cercanos a *a*, *f(x)* está cerca de *L*

Límite

Idea de límite de una función.

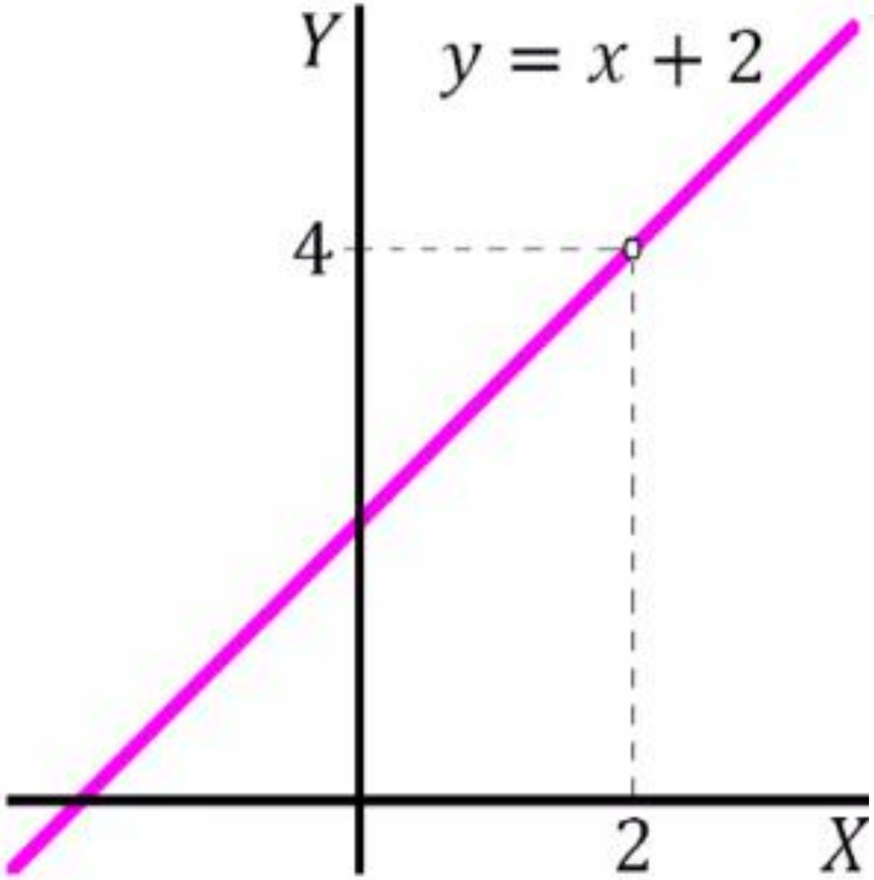
Consideremos la función $f_{(x)} = \frac{x^2-4}{x-2}$.

Veamos cómo se comporta la función f cuando x esta próximo a 2

La función cuyo dominio es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, la podemos expresar como

$$f_{(x)} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$$
$$= x+2$$

$f_{(x)} = x+2; \quad \forall x \neq 2.$

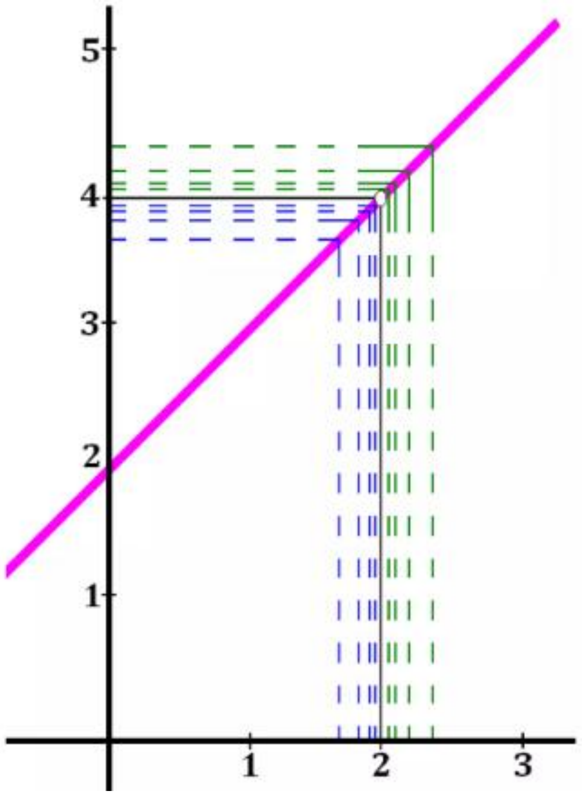


Límite

La siguiente tabla muestra los correspondientes valores de $f_{(x)}$ para varias elecciones de x próximo a 2.

x	...	1,8	1,95	1,99	1,999	**2**	2,001	2,01	2,05	2,1	...
$f_{(x)}$	...	3,8	3,95	3,99	3,999	**4**	4,001	4,01	4,05	4,1	...

Límite



Se observa que, a medida que x es un número cercano a 2, $f_{(x)}$ esta muy próximo al número 4. Decimos entonces que "el límite de $\frac{x^2-4}{x-2}$, cuando x esta próximo a 2, es 4" y escribimos

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

Límite

- *Ejemplo*:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$$

Al reemplazar x por 1

$$f(x) = \frac{1^2 + 1 - 2}{1 - 1}$$

El resultado de esta operación es **indeterminado** en los Reales. Pero se puede tomar valores cercanos a x=1 para determinar a el valor al que se aproxima, por ejemplo:

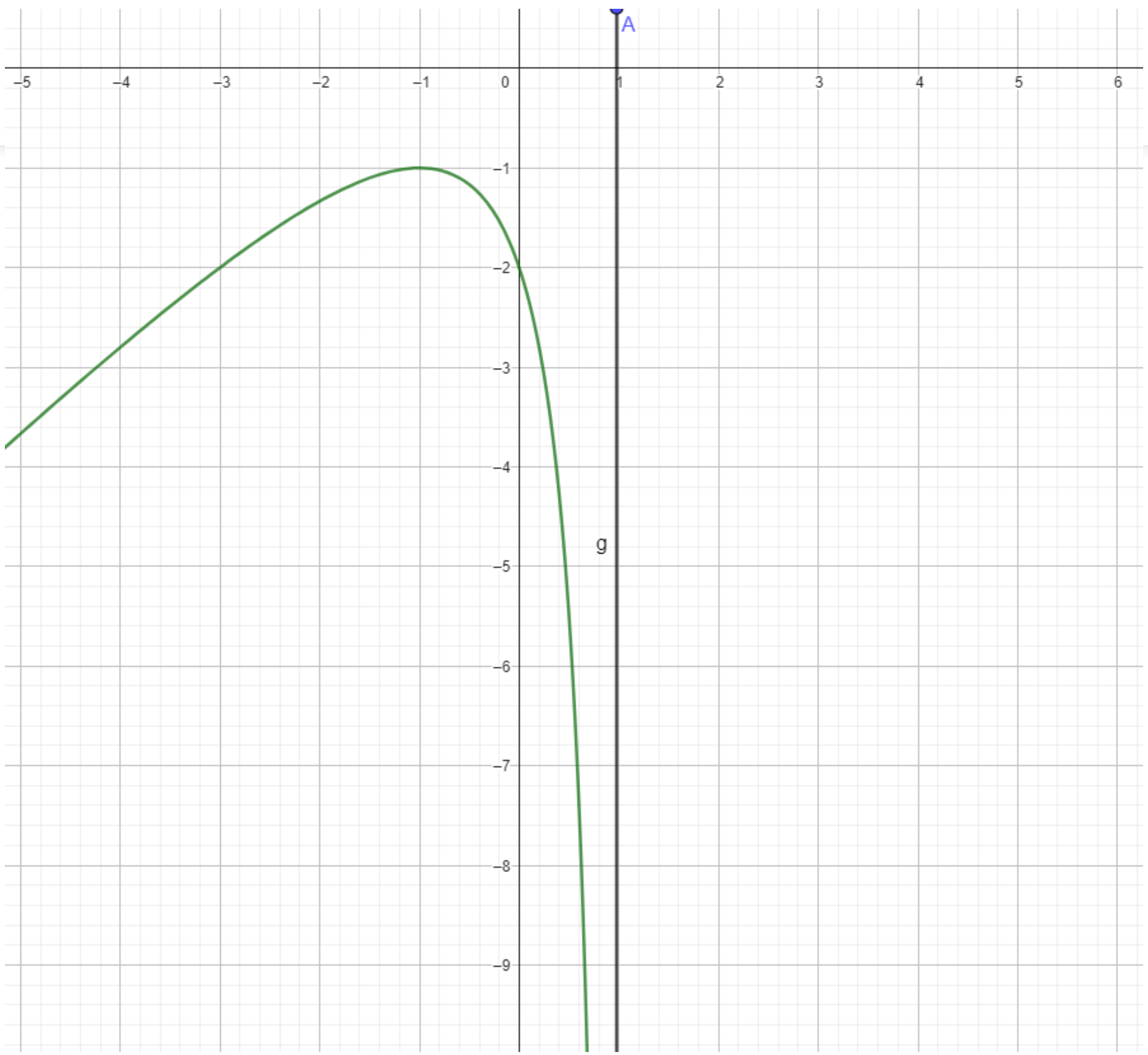
$\boldsymbol{x}$	0,5	0,9	0,99	0,999	0,9999
$\boldsymbol{\frac{x^2 + x - 2}{x - 1}}$	2,5	2,9	2,99	2,999	2,9999

Cuando *x* tiende a *1* el valor de *y* tiende a *3*

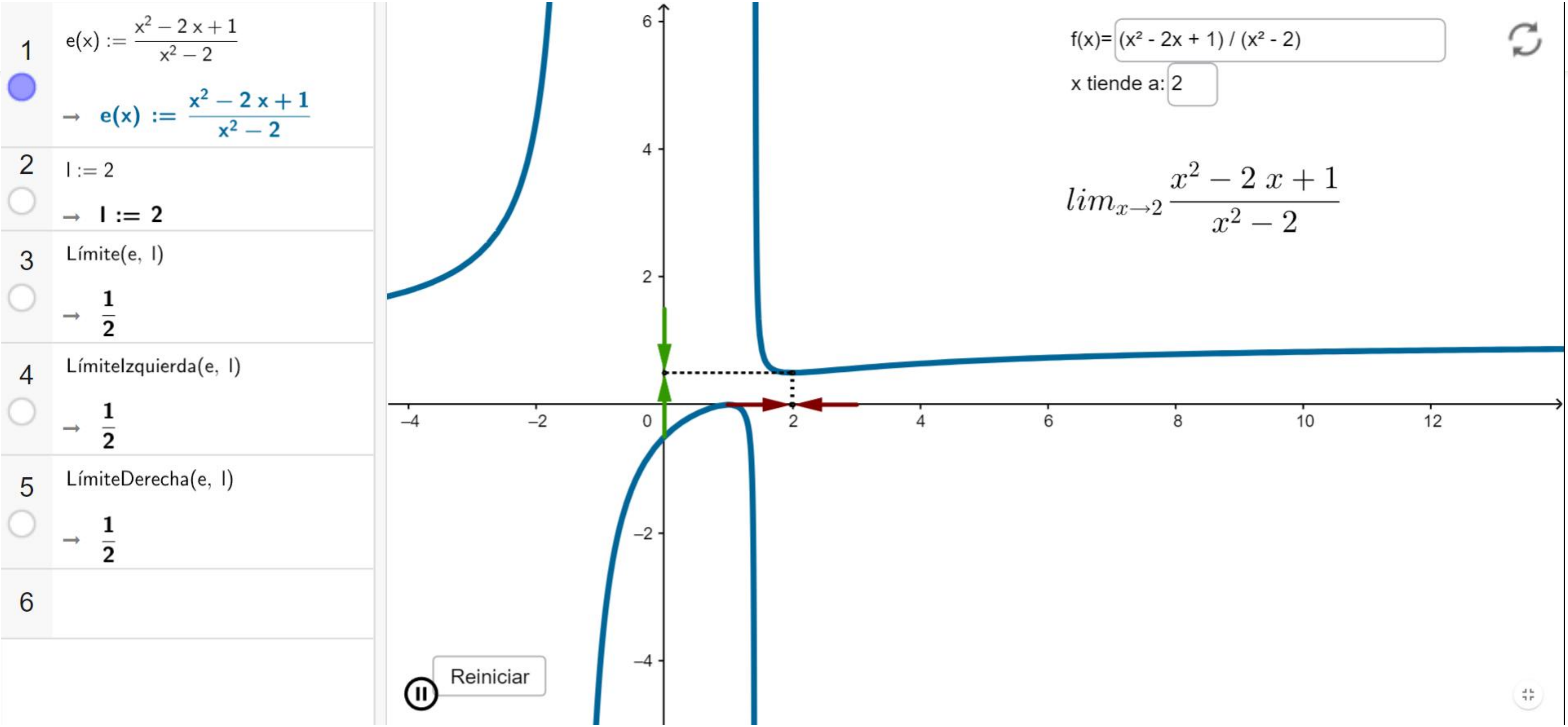
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 3$$

Esta es la idea del límite matemático

Límite



Límite



https://www.geogebra.org/m/Dv6rjPVp

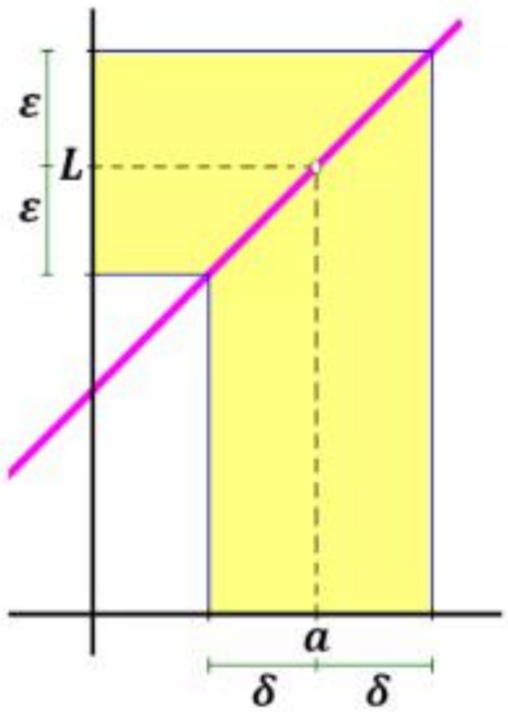
Límite - Definición formal

Formalmente, utilizando términos lógico-matemáticos. Sea $f\colon \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en cada número de algún intervalo abierto que contenga a a, excepto posiblemente en el número a mismo. Diremos que

$$\boxed{\lim_{x \to a} f_{(x)} = L \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in \mathrm{D}_f \wedge 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow \left| f_{(x)} - L \right| < \varepsilon}$$

Esta definición se denomina frecuentemente épsilon-delta de límite[1].

Límite - Definición formal



Hay tres posibilidades del resultado: $\lim_{x \to a} f_{(x)} = L$

- Un número real: $L \in \mathbb{R}$
- Un valor infinito: $L = \pm\infty$
- El límite no existe: $\nexists L$

Límite

Unicidad del límite

El límite de una función, si existe, es único. Es decir, si

$$\boxed{\lim_{x \to a} f_{(x)} = L \text{ y } \lim_{x \to a} f_{(x)} = M \Rightarrow L = M}$$

Teorema. Sean a y k dos números reales. Entonces,

$$\boxed{\lim_{x \to a} k = k \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} x = a}$$

Ejemplos. Halle el valor de los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to 2} (5) = 5$ **b.** $\lim_{x \to -1} (2) = 2$

c. $\lim_{x \to 2} x = 2$ **d.** $\lim_{x \to -1} x = -1$

Límite

- Como se pudo notar, a veces no se puede calcular directamente el valor de una expresión, pero se puede aproximar cada vez más y más, a esto se le conoce como el límite de una función.
- Por tal motivo, los límites de una función se pueden encontrar mediante:
  - Algebraico
  - Tabla de valores
  - Gráfica
  - Levantando la indeterminada

Límite - Algebraico

Se usan métodos algebraicos para hallar límites de manera exacta.

Leyes de límites

Se usan las siguientes propiedades de límites para calcular los límites.

Supongamos que c es una constante y que los siguientes límites existen.

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} = L \text{ y } \lim_{x \to a} g_{(x)} = M$$

Propiedades de los límites

- **Límite de una constante**. Si c es una constante, entonces el límite de c cuando x tiende a a es simplemente c
$$\lim_{x \to a} c = c$$
- **Límite de la identidad.** El límite de x cuando x tiende a a es a:
$$\lim_{x \to a} x = a$$
- **Límite de la suma.** El límite de la suma de dos funciones es igual a la suma de los límites de las funciones:
$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$
- **Límite de una diferencia.** El límite de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de los límites de las funciones:
$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x)$$
- **Límite de un producto.** El límite del producto de dos funciones es igual al producto de los límites de las funciones:
$$\lim_{x \to a} [f(x) * g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x)$$
- **Límite de un cociente.** El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de los límites de las funciones, siempre que el límite del denominador no sea cero:
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

Propiedades de los límites

- **Límite de una función elevada a una potencia**. El límite de una función elevada a una potencia es igual a la potencia del límite de la función:

$$\lim_{x \to a} f(x)^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$$

- **Límite de una raíz**. El límite de una raíz de una función es igual a la raíz del límite de la función, siempre que la raíz sea válida (es decir, si nn es par, el límite debe ser no negativo):

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$$

- **Límite de una Función Constante Multiplicada**. El límite de una constante multiplicada por una función es igual a la constante multiplicada por el límite de la función:

$$\lim_{x \to a} [c * f(x)] = c * \lim_{x \to a} f(x)$$

Propiedades de los límites

Ejemplos de Aplicación

1. **Suma de Límites:**

   $\lim_{x\to2}(3x+4)+\lim_{x\to2}(x^2-1)=\lim_{x\to2}(3x+4+x^2-1)=3(2)+4+2^2-1=6+4+4-1=13$

2. **Producto de Límites:**

   $\lim_{x\to1} x\cdot\lim_{x\to1}(x^2+2)=1\cdot(1^2+2)=1\cdot3=3$

3. **Cociente de Límites:**

   $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x-3}=\frac{\lim_{x\to3}(x^2-9)}{\lim_{x\to3}(x-3)}=\frac{3^2-9}{3-3}=\frac{0}{0}$

   En este caso, se requiere una mayor simplificación, posiblemente factorizando $x^2-9=(x-3)(x+3)$:

   $\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x+3)=3+3=6$

Propiedades de los límites

1. $\lim_{x\to a}[f_{(x)} + g_{(x)}] = \lim_{x\to a} f_{(x)} + \lim_{x\to a} g_{(x)} = L + M$

   Límite de una suma

2. $\lim_{x\to a}[f_{(x)} - g_{(x)}] = \lim_{x\to a} f_{(x)} - \lim_{x\to a} g_{(x)} = L - M$

   Límite de una diferencia

3. $\lim_{x\to a}[c.f_{(x)}] = c.\lim_{x\to a} f_{(x)} = c.L$

   Límite de un múltiplo constante

4. $\lim_{x\to a}[f_{(x)}.g_{(x)}] = \lim_{x\to a} f_{(x)} . \lim_{x\to a} g_{(x)} = L.M$

   Límite de un producto

5. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f_{(x)}}{\lim_{x\to a} g_{(x)}} = \frac{L}{M}$ si $M \neq 0$

   Límite de un cociente

6. $\lim_{x\to a}[f_{(x)}]^n = \left[\lim_{x\to a} f_{(x)}\right]^n = L^n$

   Límite de la potencia

7. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f_{(x)}} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f_{(x)}} = \sqrt[n]{L}$ (Si n es par, $L \geq 0$)

   Límite de la raíz

Propiedades de los límites

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x-2}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+3x-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x-2}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 0}(x^3+x-2)}{\lim_{x\to 0}(x+1)}=\frac{\left(\lim_{x\to 0}x\right)^3+\lim_{x\to 0}x-\lim_{x\to 0}(2)}{\lim_{x\to 0}x+\lim_{x\to 0}(1)}$$

$$=\frac{0^3+0-2}{0+1}=-\frac{2}{1}=-2$$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{x^2+3x-1}=\sqrt{\lim_{x\to 2}(x^2+3x-1)}$$

$$=\sqrt{\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2+3\lim_{x\to 2}x-\lim_{x\to 2}(1)}$$

$$=\sqrt{2^2+3(2)-1}=\sqrt{9}=3$$

Tipos de límites

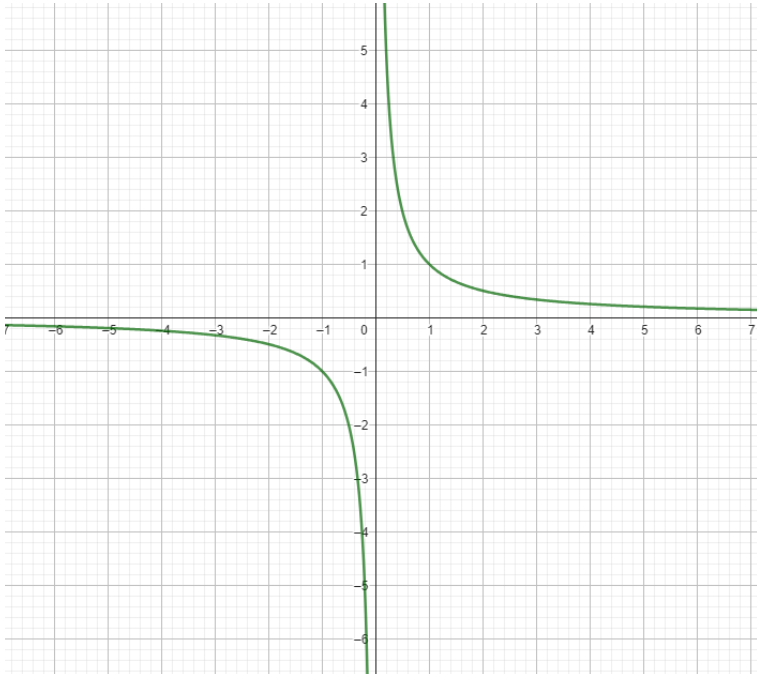
Límite finito	Límite infinito	Límite en el infinito	Límites laterales
$\lim_{x \to a} f(x) = L$	$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$	<u>Por izquierda</u> $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ <u>Por derecha</u> $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Tipos de límites

- Ejemplo: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$
- Al evaluar la expresión se tiene que $\frac{1}{0}$ no está definida, por lo tanto, se realiza la tabla de valores y se toma valores próximos a cero por derecha e izquierda

x	-0,1	-0,01	-0,0001			0,0001	0,001	0,01	0,1
y	-10	-100	-10000	$-\infty$	$+\infty$	10000	1000	100	10

- Cuando se tiene límites que por derecha e izquierda son diferentes se concluye que no existe límite



Cálculo de límites

Límites por sustitución directa

Si f es una función y a esta en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f_{(x)} = f_{(a)}$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman ***continuas*** en a.

Ejemplos. Halle el valor de los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 3x - 1}$

Solución. Como 2 esta en el dominio de la función $\sqrt{x^2 + 3x - 1}$, entonces,

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{x^2 + 3x - 1} = \sqrt{2^2 + 3(2) - 1} = \sqrt{9} = 3$$

Cálculo de límites

b. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x - 1} \right)$

Solución. La función $\frac{x^3-3x^2+x-2}{x^3-x^2-x-1}$ es una función racional y $x = 2$ esta en su dominio, entonces,

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{x^3 - 3x^2 + x - 2}{x^3 - x^2 - x - 1} \right) = \frac{2^3 - 3.2^2 + 2 - 2}{2^3 - 2^2 - 2 - 1} = \frac{-4}{1} = -4$$

Cálculo de límites

c. $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - \tan x}{\cos^2 x}$

Solución. Como 0 esta en el dominio de la función $\frac{e^x - \tan x}{\cos^2 x}$, entonces,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \tan x}{\cos^2 x} = \frac{e^0 - \tan 0}{(\cos 0)^2} = \frac{1 - 0}{1^2} = 1$$

Cálculo de límites

Problema 1. Calcule el valor del siguiente límite.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2+\operatorname{sen} x}\right)$$

Cálculo de límites

Problema 1. Calcule el valor del siguiente límite.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2 + \operatorname{sen} x} \right)$$

Resolución. Como $\frac{\pi}{2}$ está en el dominio de $f_{(x)}$, entonces, por sustitución directa se obtiene que

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2 + \operatorname{sen} x} \right) = \frac{1}{2 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

Cálculo de límites - Indeterminaciones

Hay límites que evaluándolos directamente, se obtiene alguna de las siguientes expresiones:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\times\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}$$

A estas expresiones se les denomina *indeterminaciones*[2], ya que, a simple vista, no está claro cuál puede ser el límite.

Por ejemplo $\frac{0}{0}$ es una indeterminación, pues puede terminar dando cualquier cosa; como lo muestra los siguientes límites.

$$\vdash\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\frac{0}{0}\ \xrightarrow[\text{Simplificado}]{}\ \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\vdash\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=\frac{0}{0}\ \xrightarrow[\text{Simplificado}]{}\ \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\vdash\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\frac{0}{0}\ \xrightarrow[\text{Simplificado}]{}\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x} = \infty$$

Cálculo de límites – No son indeterminaciones

$$\begin{cases} 0^{+\infty} & = 0 \\ 0^{-\infty} & = +\infty \\ \infty^{+\infty} & = +\infty \\ \infty^{-\infty} & = 0 \end{cases}$$

Se demuestra a partir de $a^b = e^{b.\ln a}$

Cálculo de límites – Por medio de álgebra y propiedades

- Mediante la cancelación de un factor común.

Para calcular el límite de una función racional que tiene una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, se factoriza numerador y denominador, y se simplifica el factor común.

Ejemplo. Halle el valor de los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

Solución. El límite $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, factorizamos numerador y denominador para levantar la indeterminación.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Cálculo de límites – Por medio de álgebra y propiedades

b. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 7x + 6}{x - 2}$

Solución. El límite $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-7x+6}{x-2}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, factorizamos numerador y denominador para levantar la indeterminación.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x-3)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 3)$$

$$= 2^2 + 2.2 - 3 = 5$$

Cálculo de límites – Por medio de álgebra y propiedades

- Mediante el cambio de variable.

Ejemplo. Halle el valor de los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

Solución. El límite $\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Hacemos el cambio: $x = t^3$, entonces $\sqrt[3]{x} = t$.

Además, si $x \longrightarrow 8$, entonces $t \longrightarrow 2$. Luego,

$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{t^3-8} = \lim_{t\to 2} \frac{t-2}{(t-2)(t^2+2t+4)}$$

$$= \lim_{t\to 2} \frac{1}{t^2+2t+4}$$

$$= \frac{1}{2^2+2.2+4} = \frac{1}{12}$$

Cálculo de límites – Por medio de álgebra y propiedades

b. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$

Solución. El límite $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Hacemos el cambio: $x = t^6$, entonces $\sqrt[3]{x} = t^2$ y $\sqrt{x} = t^3$. Además, si $x \longrightarrow 1$, entonces $t \longrightarrow 1$. Luego,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-\sqrt{x}}\right) = \lim_{t\to 1}\frac{1-t^2}{1-t^3} = \lim_{t\to 1}\frac{(1-t)(1+t)}{(1-t)(1+t+t^2)}$$

$$= \lim_{t\to 1}\frac{(1+t)}{(1+t+t^2)}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Cálculo de límites – Por medio de álgebra y propiedades

- Mediante simplificación.

a. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

Solución. El límite $\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, entonces,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2-9}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{6h+h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (6+h) = 6
\end{aligned}$$

Cálculo de límites – Por medio de álgebra y propiedades

b. $\lim_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^3-27}{x}$

Solución. El límite $\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-27}{x}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(3+x)^3-27}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{3^3+27x+9x^2+x^3-27}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{27x+9x^2+x^3}{x}\\ &= \lim_{x\to 0}(27+9x+x^2)=27\end{aligned}$$

Cálculo de límites – Por medio de álgebra y propiedades

- Mediante racionalización.

Consiste en multiplicar y dividir por el conjugado de la expresión a racionalizar.

Ejemplo. Halle el valor de los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

Solución. El límite $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, entonces racionalizamos

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2+9-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{0^2+9}+3} = \frac{1}{6}$$

Cálculo de límites – Por medio de álgebra y propiedades

b. $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2}\right)$

Solución. El límite $\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2}\right)$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, entonces racionalizamos

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2}\right)=\lim_{x\to 4}\left(\frac{2x-8}{\sqrt{x}-2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim_{x\to 4}2(\sqrt{x}+2)=8$$

c. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}\right)$

Solución. El límite $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}\right)$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, entonces racionalizamos

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{4x-7}}{1+\sqrt{4x-7}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(1+\sqrt{4x-7}\right)}{1-(4x-7)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)\left(1+\sqrt{4x-7}\right)}{-4(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3\left(1+\sqrt{4x-7}\right)}{-4}=\frac{3(2)}{-4}=-\frac{3}{2}$$

Los límites y el infinito

Veremos situaciones como

$$\text{i)}\ \lim_{x\to\infty} f_{(x)} = L \qquad \text{ii)}\ \lim_{x\to a} f_{(x)} = \infty \qquad \text{iii)}\ \lim_{x\to\infty} f_{(x)} = \infty$$

El símbolo ∞ llamado infinito[3] no es un número real, es decir no es algebraico ni aritmético, pero si tiene un carácter posicional.
Podemos formar un nuevo sistema de números al cual lo llamaríamos *sistema ampliado de los números reales* y se denota por $\overline{\mathbb{R}}$ $\left(\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}\right)$, debiendo cumplir las siguientes propiedades (o reglas).

Los límites y el infinito

1. $\forall a \in \mathbb{R}$: $a + (+\infty) = +\infty, \quad a + (-\infty) = -\infty, \quad \frac{a}{\pm\infty} = 0.$
2. $\forall a \in \mathbb{R}^+$: $a \times (+\infty) = +\infty, \quad a \times (-\infty) = -\infty.$
3. $\forall a \in \mathbb{R}^-$: $a \times (+\infty) = -\infty, \quad a \times (-\infty) = +\infty.$
4. $(+\infty) \times (+\infty) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty, \quad (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$

Para el caso de los límites que contienen infinitos trabajaremos en el sistema definido ($\overline{\mathbb{R}}$).

Observación. Carecen de significado las siguientes operaciones.

$$(+\infty) + (-\infty), \qquad 0 \times (\pm\infty), \qquad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

Límites infinitos

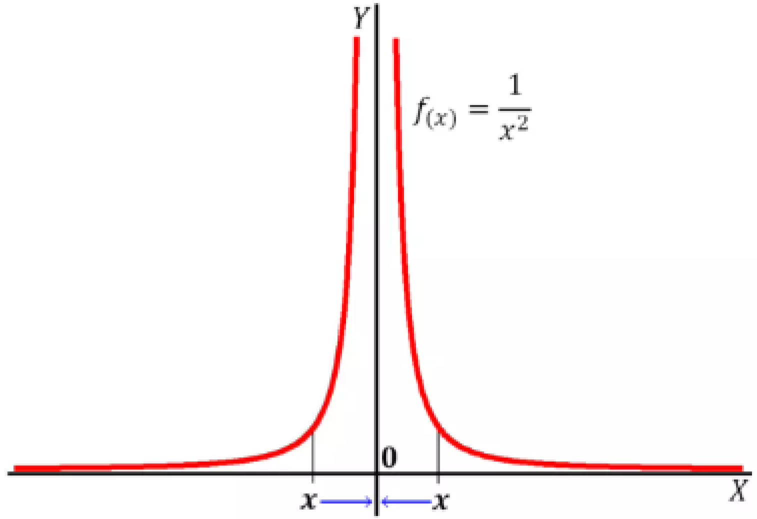
Consideremos la función $f_{(x)} = \frac{1}{x^2}$ $\forall x \neq 0$ y observemos su comportamiento alrededor de 0 mediante un cuadro de valores.

x	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0,2	0,1	0,01	0,001	...	$\longrightarrow$ **0**
$f_{(x)}$	1	4	9	16	25	100	10000	1000000	...	$\longrightarrow +\infty$
x	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$-0{,}2$	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	...	$\longrightarrow$ **0**

Este hecho lo podemos simbolizar de la siguiente manera.

$$f_{(x)} \longrightarrow +\infty \text{ cuando } x \longrightarrow 0$$

La gráfica de esta función (par) se muestra a continuación.



Podemos denotar este caso de no existencia de límite como

$$\lim_{x \to 0} f_{(x)} = +\infty$$

Teoremas

1. Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces, $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

2. Si $n \in \mathbb{Z}$, entonces, $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ es par} \\ -\infty & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Límites en el infinito

Estudiaremos una clase especial de límite conocida como ***límite en el infinito***. Se examina el límite de una función $f_{(x)}$ cuando aumenta el valor de x indefinidamente (es decir, $x \longrightarrow +\infty$).

Consideremos la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_{(x)} = \frac{2x^2}{x^2+1}$.

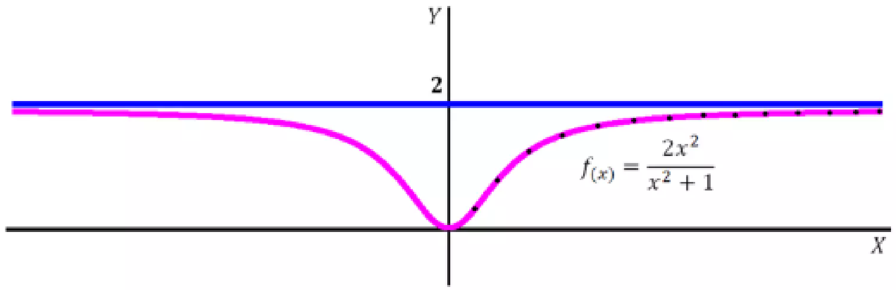
La función lo podemos expresar como

$$f_{(x)} = \frac{2x^2}{x^2+1} = 2 - \frac{2}{x^2+1}$$

Veamos algunos valores de la función en la siguiente tabla.

x	0	1	2	3	4	5	10	100	1000	...	$\longrightarrow +\infty$
$f_{(x)}$	0	1	$\frac{8}{5}$	$\frac{18}{10}$	$\frac{32}{17}$	$\frac{50}{26}$	$\frac{200}{101}$	$\frac{20000}{10001}$	$\frac{2000000}{1000001}$	...	$\longrightarrow$ **2**

La gráfica de esta función (par) se muestra a continuación.



Observamos que cuando x crece a través de valores positivos, los valores de la función $f_{(x)}$ se acercan cada vez más a 2. Es decir, podemos acercar el valor de $f_{(x)}$ a 2 tanto como queramos, tomando x suficientemente grande; y esto lo denotamos por

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2$$

Límites en el infinito

Definición (Límite en el infinito). Sea f una función definida en $\langle a; +\infty\rangle$. Entonces

$$\lim_{x \to +\infty} f_{(x)} = L$$

indica que los valores de $f_{(x)}$ se pueden hacer arbitrariamente cercanos a L si x toma valores suficientemente grandes.

Teoremas. Si n es cualquier número entero positivo, entonces se cumplen

$$\textbf{i)}\ \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0 \qquad \textbf{ii)}\ \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$$

Límites en el infinito

Límites de funciones racionales $\left(\text{con indeterminación } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

Se factoriza la mayor potencia de x en el numerador y denominador para luego hacer uso del teorema anterior.

Ejemplos. Halle el valor de los siguientes límites (si es que existen).

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-3}{1-2x}$

Solución. El límite $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-3}{1-2x}$ tiene la forma indeterminada $\frac{+\infty}{-\infty}$, luego

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5x-3}{1-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(5-\frac{3}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x}-2\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5-\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}-2} = \frac{5-0}{0-2} = -\frac{5}{2}$$

Límites en el infinito

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4 - 2x^2 + 1}{2x^5 - 4x^3 - 1}$

Solución. El límite $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-2x^2+1}{2x^5-4x^3-1}$ tiene la forma indeterminada $\frac{+\infty}{+\infty}$, entonces,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4 - 2x^2 + 1}{2x^5 - 4x^3 - 1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^5\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(2 - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^5}}{2 - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^5}} = \frac{0 - 0 + 0}{2 - 0 - 0} = \frac{0}{2} = 0$$

Límites en el infinito

c. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2+x-1}{2009x-1}$

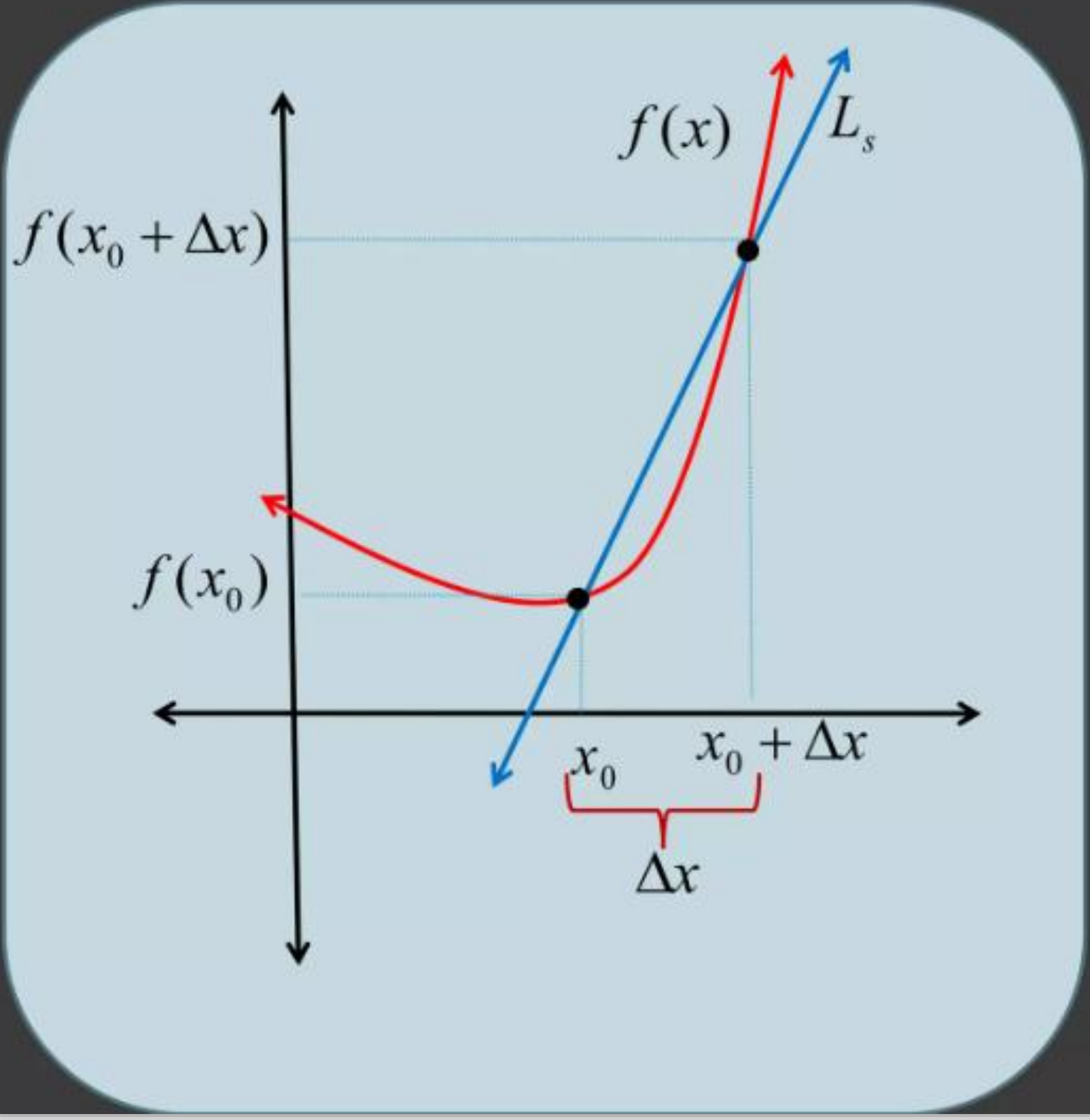
Solución. El límite $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+x-1}{2009x-1}$ tiene la forma indeterminada $\frac{+\infty}{+\infty}$, luego

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+x-1}{2009x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(\frac{2009}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2009}{x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{3+0-0}{0-0} = \frac{3}{0} = \infty$$

Derivadas – Interpretación geométrica



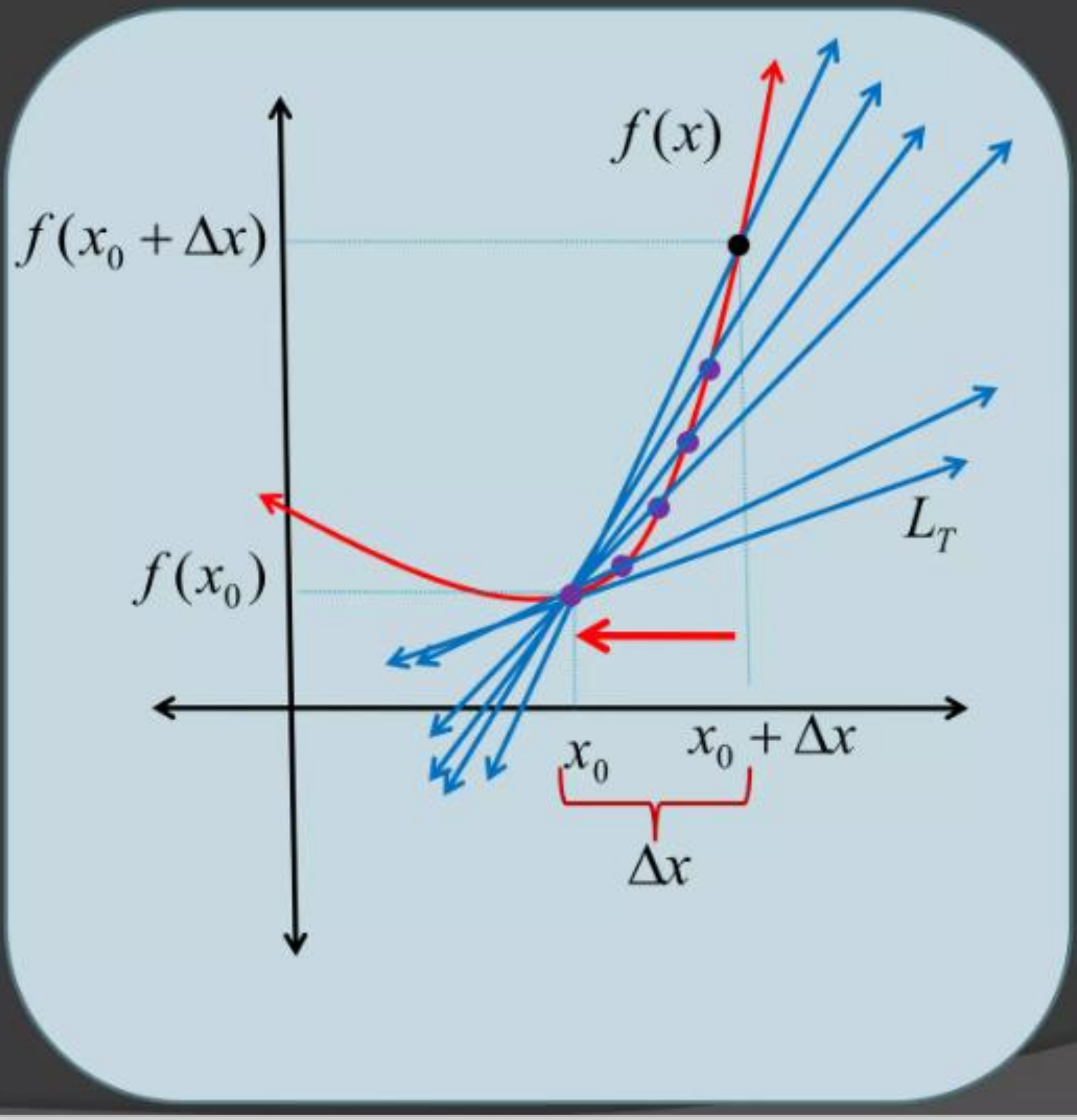
Definición

Pendiente de la recta secante

A partir de la gráfica, la recta secante tiene como pendiente:

$$m_{L_s} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Derivadas – Interpretación geométrica



Definición

Pendiente de la recta tangente

A partir de la gráfica, la recta tangente tiene como pendiente:

$$\tan\theta = m_{L_T}$$

$$m_{L_T} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Derivadas – Definición

La derivada de una función f en el punto $P_0(x_0, y_0)$ es $f'(x_0)$

y representa la pendiente de la recta tangente en el punto

Es decir:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Si cambiamos x_0 por x y Δx por h tenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

NOTACIONES

- $f'(x)$
- y'
- $\frac{d}{dx} f(x)$
- $\frac{d}{dx} y$
- $D_x f$

Derivadas – Definición

- Es la recta tangente que permite calcular la velocidad de un punto o la pendiente de un punto exacto de una función

Si $f(x)$ es una función, su derivada es:

$$\frac{d}{dx} f(x)$$

$$f'(x)$$

Se simboliza:

Si y es una función, su derivada es:

$$\frac{dy}{dx}$$

$$y'$$

Recordar que $f(x) = y$

Propiedades de Derivadas de una función

1

Si $f(x) = ax^n$ Entonces $f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$

Ejemplos

A) $f(x) = 5x^6$

$f'(x) = 6 \cdot 5x^{6-1}$

$f'(x) = 30x^5$

B) $f(x) = \sqrt[7]{x^5}$

$f(x) = x^{\frac{5}{7}}$

$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{5}{7}x^{\frac{5}{7}-1}$

$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{5}{7}x^{-\frac{2}{7}}$

$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{5}{7\sqrt[7]{x^2}}$

C) $y = \frac{4}{7}x^7$

$y' = 7 \cdot \frac{4}{7}x^{7-1}$

$y' = 4x^6$

D) $y = \frac{8}{x^{10}} = 8x^{-10}$

$y' = -10 \cdot 8x^{-10-1}$

$y' = -80x^{-11}$

$y' = -\frac{80}{x^{11}}$

2 Si $f(x) = ax$ Entonces $f'(x) = a$

Porque $f(x) = ax \rightarrow f'(x) = 1 \cdot ax^{1-1}$

$f'(x) = ax^0$

$f'(x) = a \cdot 1 = a$

Ejemplos

A) $f(x) = 5x$

$f'(x) = 5$

B) $f(x) = \frac{1}{2}x$

$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{2}$

C) $y = -8x$

$y' = -8$

D) $y = \sqrt{6}x$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{6}$

3 Si $f(x) = a$ Entonces $f'(x) = 0$

A) $f(x) = -15$

$f'(x) = 0$

B) $f(x) = \frac{3}{5}$

$\frac{d}{dx}f(x) = 0$

C) $y = \sqrt[3]{-27}$

$y' = 0$

D) $y = 7^9$

$\frac{dy}{dx} = 0$

4 Derivada de la suma o resta $\boldsymbol{Si\ f(x) = g(x) \pm h(x)}$ Entonces $\boldsymbol{f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$

Ejemplos

A)

$$f(x) = \underbrace{3x^2}_{g(x)} + \underbrace{5x}_{h(x)}$$

$$f'(x) = 6x + 5$$

B)

$$y = 5x^4 - 2\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}x^2 - 3$$

$$y' = 20x^3 - \sqrt{x} + x$$

5

Derivada del producto $\boldsymbol{Si\ f(x) = g(x)\cdot h(x)}$ Entonces $\boldsymbol{f(x) = g'(x)\cdot h(x) + h'(x)\cdot g(x)}$

Ejemplos

A) $f(x) = \overset{g(x)}{3x^5}\overset{h(x)}{(-2x^7 + 8x^5 - x)}$

$$f'^{(x)} = \overset{g'(x)}{15x^4}\cdot\overset{h(x)}{(-2x^7 + 8x^5 - x)} + \overset{h'(x)}{(-14x^6 + 40x^4 - 1)}\cdot\overset{g(x)}{3x^5}$$

$$f'^{(x)} = 15x^4(-2x^7 + 8x^5 - x) + 3x^5(-14x^6 + 40x^4 - 1)$$

$$f'^{(x)} = -30x^{11} + 120x^9 - 15x^5 - 42x^{11} + 120x^9 - 3x^5$$

$$f'^{(x)} = -72x^{11} + 240x^9 - 18x^5$$

B) $y = \overset{g(x)}{(x^3 - 5)}\overset{h(x)}{(4x^2 + 2x)}$

$$y' = \overset{g'(x)}{3x^2}\cdot\overset{h(x)}{(4x^2 + 2x)} + \overset{h'(x)}{(8x + 2)}\cdot\overset{g(x)}{(x^3 - 5)}$$

$$y' = 12x^4 + 6x^3 + 8x^4 - 40x + 2x^3 - 10$$

$$y' = 20x^4 + 8x^3 - 40x - 10$$

6

Derivada del cociente $\quad \boldsymbol{Si\ f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}} \quad$ Entonces $\quad \boldsymbol{f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - h'(x) \cdot g(x)}{[h(x)]^2}}$

"Derivada de la primera función por la segunda función sin derivar, menos la derivada de la segunda función por la segunda función sin derivar, y dividido por la segunda función al cuadrado"

Ejemplos

A)

$$y = \frac{\overbrace{5x^4 - 3x^3}^{g(x)}}{\underbrace{x^5}_{h(x)}}$$

B)

$$f(x) = \frac{\overbrace{x^2 - 1}^{g(x)}}{\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{h(x)}}$$

$$y' = \frac{\overbrace{(20x^3 - 9x^2)}^{g'(x)} \cdot \overbrace{x^5}^{h(x)} - \overbrace{5x^4}^{h'(x)} \cdot \overbrace{(5x^4 - 3x^3)}^{g(x)}}{\underbrace{(x^5)^2}_{[h(x)]^2}}$$

$$f'(x) = \frac{\overbrace{2x}^{g'(x)} \cdot \overbrace{(x^2 + 2x + 1)}^{h(x)} - \overbrace{(2x + 2)}^{h'(x)}\overbrace{(x^2 - 1)}^{g(x)}}{\underbrace{(x^2 + 2x + 1)^2}_{[h(x)]^2}}$$

Continúa el resto del desarrollo

Continúa el resto del desarrollo

7

Regla de la cadena: "Se resuelven las derivadas desde afuera hacia adentro"

Ejemplos

A)

$$f(x) = (3x^2 - 5x)^3$$

$$f'(x) = 3(3x^2 - 5x)^2 \cdot (6x - 5)$$

Derivada de la potencia

Derivada de la base

Continúa el resto del desarrollo

B)

$$y = \sqrt{(3x^2 - x)^3} \quad \rightarrow \quad y = (3x^2 - x)^{\frac{3}{2}}$$

Derivada de la raíz

Derivada de la base

$$y' = \frac{3}{2}(3x^2 - x)^{\frac{1}{2}} \cdot (6x - 1)$$

$$y' = \frac{3\sqrt{(3x^2 - x)} \cdot (6x - 1)}{2}$$

Continúa el resto del desarrollo

Te dejo una tabla de distintas derivadas que te van a servir en el futuro

	Tabla de derivadas	
Función		**Función derivada**
1. $f(x) = x^k$ 2. $f(x) = \frac{1}{x}$ 3. $f(x) = \sqrt{x}$ 4. $f(x) = sen\, x$		$f'(x) = k\, x^{k-1}$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $f'(x) = cos\, x$

	Tabla de derivadas	
Función		**Función derivada**
5. $f(x) = cos\,x$		$f'(x) = -sen\,x$
6. $f(x) = e^x$		$f'(x) = e^x$
7. $f(x) = a^x$		$f'(x) = a^x \ln a$
8. $f(x) = tg\,x$		$f'(x) = sec^2 x$
9. $f(x) = ctg\,x$		$f'(x) = -csc^2 x$
10. $f(x) = sec\,x$		$f'(x) = sec\,x\,tg\,x$
11. $f(x) = csc\,x$		$f'(x) = -csc\,x\,ctg\,x$
12. $f(x) = \log_a x$		$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$
13. $f(x) = \ln x$		$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

Integración - Historia

GRACIAS