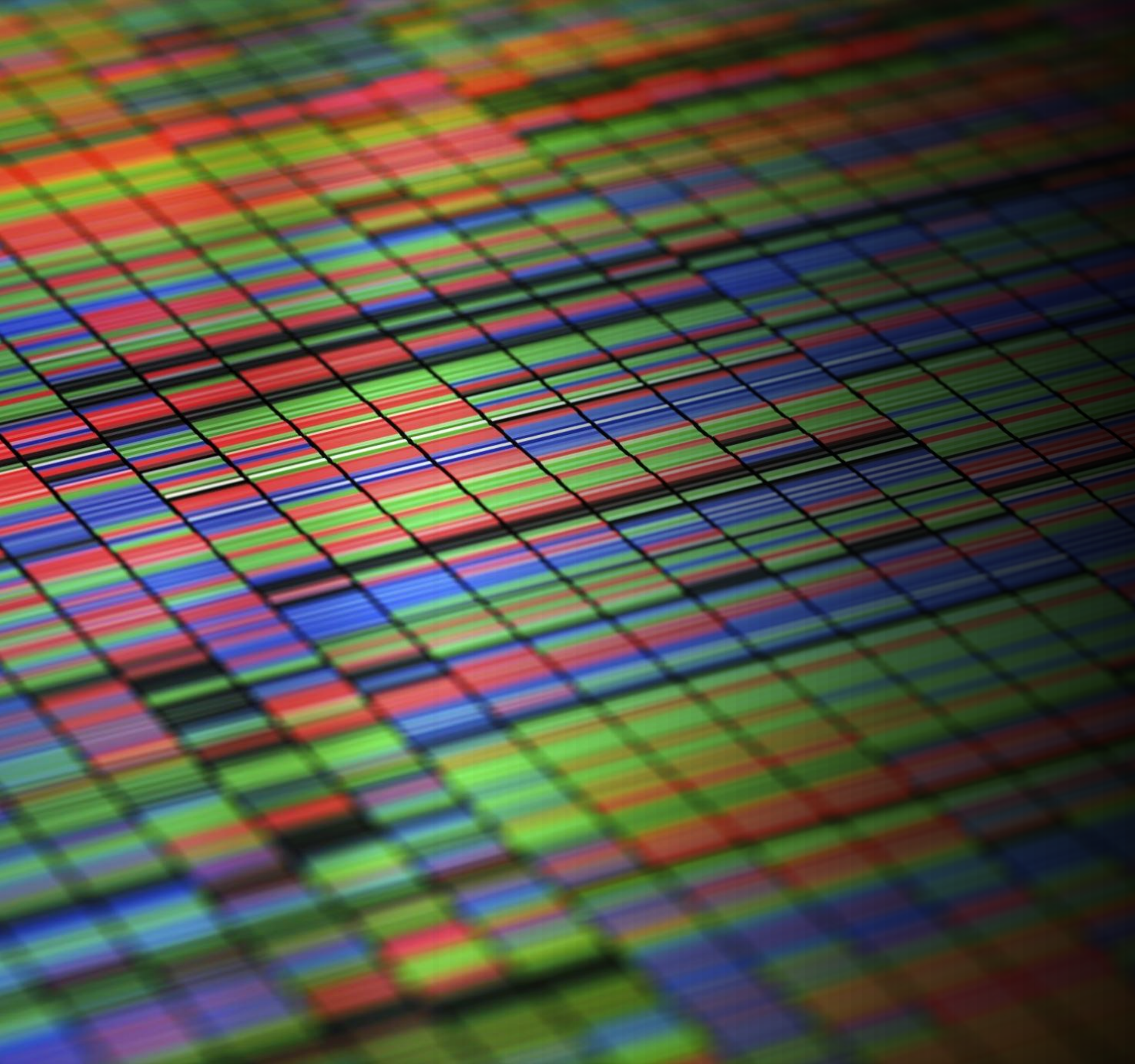


Matemática básica

Ing. Henry Villa Yánez, Mg.

UNIDAD II: Álgebra matricial

Matrices

MATRICES - INTRODUCCIÓN

- Las matrices son uno de los conceptos más poderosos y versátiles en matemáticas
- Permiten una representación **compacta** y **eficiente** de **conjuntos de ecuaciones lineales** y operaciones sobre estos, de tal manera que se **facilita los cálculos complejos,** el **análisis de sistemas** y **transformaciones lineales.**
- Dentro de la ciencia de datos e IA son fundamentales, ya que, permiten representar y manipular datos de manera eficiente
- Son esenciales para implementar algoritmos y modelos matemáticos que están detrás de varias técnicas avanzadas, por ejemplo:
  - Entrenamiento de redes neuronales (Operaciones matriciales)
  - Reducción de ruido y compresión en imágenes (Técnicas de reducción de dimensionalidad en datos)
  - Representación de datos de manera más fácil, (Cada fila puede representar una observación o instancia y cada columna puede representar una característica o variable)
  - Análisis de redes sociales (Matrices de adyacencia para representar nodos en una red)

MATRICES - DEFINICIÓN

- Se llama matriz a un **arreglo rectangular** de números o valores en $\mathbb{R}$ (generalmente) dispuestos en filas y columnas, encerrados entre corchetes y/o paréntesis y se denota con letras mayúsculas A, B, C… etc.
- **Orden de una matriz.** Se determina por el número de filas por el número de columnas.

  - Matriz de orden m*n

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad m\ (filas) * n\ (columnas)$$

  - A esta matriz se la simboliza $\left(a_{ij}\right)_{mn}$ o simplemente $A = (a_{ij})$ en donde $i = Filas$ y $j = Columnas.$

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13} \quad \ldots \quad a_{1n})\ Vector\ Fila\ 1$$

$$(a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3} \quad \ldots \quad a_{in})\ Vector\ Fila\ i$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \\ a_{m1} \end{pmatrix} Vector\ Columna\ 1 \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ a_{4j} \\ a_{mj} \end{pmatrix} Vector\ Columna\ j$$

MATRICES - DEFINICIÓN

- Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 4 \times 2$$

MATRICES - TIPOS

- **Matriz Fila:** Es aquella matriz que tiene una sola fila.

$$A = [a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots a_m]$$

- **Matriz Columna:** Es aquella matriz que tiene una sola columna.

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ . \\ . \\ . \\ a_m \end{bmatrix}$$

- **Matriz Nula o Cero.** Es matriz nula cuando todos sus elementos son ceros.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRICES - TIPOS

- **Matriz Cuadrada:** Es la matriz en la que el número de columnas es igual al número de filas. Se tienen diagonales

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Traza: Es la suma de los elementos de la diagonal principal

- **Matriz Triangular Superior:** Se trata de una matriz en la cual los elementos situados bajo la diagonal principal son igual a cero.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Triangular Inferior:** Es una matriz donde los elementos ubicados por encima de la diagonal principal son igual a cero.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 3/4 & 0 \\ 0{,}1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICES - TIPOS

- **Matriz Diagonal:** Es una matriz en la cual todos los elementos situados fuera de la diagonal principal son cero.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Identidad**: Es una matriz donde los elementos en la diagonal principal son unos y todos los demás elementos son ceros.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Escalar:** Es aquella matriz en la que los elementos de la diagonal principal tienen el mismo valor y el resto de los elementos son ceros.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Matriz Traspuesta**: Dada la matriz B se denomina la transpuesta de B (B^t) a la matriz que intercambian los valores de sus filas a sus columnas ordenadamente.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

MATRICES - TIPOS

- **Matriz Traspuesta**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad 2x3$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad 3x2$$

$$si\ A = (a_{ij})\ se\ llama\ traspuesta\ de\ A\ y\ se\ denota\ A^t = (a_{ji})$$

- **Matriz Opuesta.** Se llama matriz opuesta de A a la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$-A = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & \cdots & -a_{3n} \\ -a_{m1} & -a_{m2} & -a_{m3} & \cdots & -a_{mn} \end{bmatrix}$$

MATRICES - TIPOS

- **Matriz Simétrica.** Una matriz es simétrica si $A = A^t$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \qquad A = A^t$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = B^t$$

- **Matriz Antisimétrica.** Una matriz es antisimétrica si $A = -A^t$ o $A^t = -A$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^t = -A$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ -3 & -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^t = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-B = B^t$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -5 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

MATRICES - OPERACIONES

- **Adición o suma de matrices:** Para que dos matrices puedan sumarse deben tener el mismo orden y se suman término a término.
- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

A+C= No es posible

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 3 & -2 & -1 \\ -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

- Ejercicio en clase:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

E+D= ?

$$= \begin{bmatrix} 2+5 & 3+0 & 6+6 \\ -1+0 & 4+8 & 0+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 3 & 12 \\ -1 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICES - OPERACIONES

- **Sustracción o resta de matrices:** Para que dos matrices puedan restarse deben tener el mismo orden y se restar término a término.
- Por tanto, la sustracción puede definirse así: $A - B = A + (-B)$
- Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -5 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

A-C= No es posible

$$A - B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Ejercicio en clase:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \; D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}$$

E-D= ? ; D-E=?

MATRICES - OPERACIONES

- **PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR.** Sea $A \in M_{m*n}(k)$ y $\propto$ un escalar, entonces la matriz $\propto A$ está dado por:

$$\propto \boldsymbol{A} = \propto (a_{ij}) = \begin{bmatrix} \propto a_{11} & \propto a_{12} & \propto a_{13} & \cdots & \propto a_{1n} \\ \propto a_{21} & \propto a_{22} & \propto a_{23} & \cdots & \propto a_{2n} \\ \propto a_{31} & \propto a_{32} & \propto a_{33} & \cdots & \propto a_{3n} \\ \propto a_{m1} & \propto a_{m2} & \propto a_{m3} & \cdots & \propto a_{mn} \end{bmatrix}$$

Entonces el producto de $\propto A = \propto (a_{ij})$ es la matriz que se obtiene al multiplicar cada uno de los componentes de A por $\propto$

- **MULTIPLICACIÓN DE MATRICES.** Dos matrices se pueden multiplicar solo si el número de columnas de la primera matriz es igual al número de filas de la segunda matriz, caso contrario (no es igual el número de columnas de la primera matriz al número de filas de la segunda matriz) la operación no está definida.

- Para multiplicar dos matrices A y B, se multiplican los elementos de la primera fila de A por los elementos respectivos de la primera columna de B y se suman estos productos, y este constituye el primer elemento de AB, luego se multiplican los elementos de la primera fila de A por los elementos de la segunda columna de B y este constituye el segundo elemento de AB y así sucesivamente.

- Para la segunda fila de AB se multiplica los elementos de la segunda fila de A por los elementos de las columnas de B igual que en el caso anterior.

MATRICES - OPERACIONES

- **MULTIPLICACIÓN DE MATRICES**

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

3*3 3*2

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_{10} = \sum_{i=1}^{10} x_i$

$$\boldsymbol{A} * \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{1i}b_{i2} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{2i}b_{i2} \\ \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{3} a_{3i}b_{i2} \end{bmatrix}$$

MATRICES - OPERACIONES

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

3×2 $\quad$ 2×3 $\quad$ 3×3

$2 = 2$

Si se pueden multiplicar

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

3×3 $\quad$ 2×3

$3 \neq 2$

No se pueden multiplicar

MATRICES - OPERACIONES

$$2\cdot\begin{pmatrix}3 & 0\\ 2 & -1\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 3 & 2\cdot 0\\ 2\cdot 2 & 2\cdot(-1)\\ 2\cdot 4 & 2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 4 & -2\\ 8 & 6\end{pmatrix}$$

$$-4\cdot\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 4 & -8\\ 0 & -16 & 20\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1 & 9\\ 2 & 0 & 6\\ 6 & 5 & -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{3} & 3\\ \frac{2}{3} & 0 & 2\\ 2 & \frac{5}{3} & -4\end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix}\boxed{5 \quad 2 \quad 1}\\ 2 \quad 1 \quad 2\\ 4 \quad 1 \quad 3\end{pmatrix} \qquad I := \begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\boxed{5(1)+2(0)+1(2)} & 5(4)+2(3)+1(1) & 5(2)+2(0)+1(3)\\ 2(1)+1(0)+2(2) & 2(4)+1(3)+2(1) & 2(2)+1(0)+2(3)\\ 4(1)+1(0)+3(2) & 4(4)+1(3)+3(1) & 4(2)+1(0)+3(3)\end{bmatrix}$$

$$\boxed{B\cdot I=\begin{pmatrix}7 & 27 & 13\\ 6 & 13 & 10\\ 10 & 22 & 17\end{pmatrix}}$$

DETERMINANTES

- Los determinantes son una herramienta matemática crucial utilizada en el álgebra lineal, especialmente cuando se trabaja con matrices.
- El determinante de una matriz proporciona información importante sobre la matriz y tiene aplicaciones en diversas áreas, como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, encontrar la inversa de matrices, y determinar propiedades de vectores y espacios vectoriales, la geometría, y la teoría de transformaciones lineales.
- La noción de determinante se utiliza para matrices cuadradas.
- Un determinante asigna un único número real o complejo a cada matriz cuadrada, el cual proporciona información importante sobre la matriz, como si es invertible o no (una matriz es invertible si su determinante es distinto de cero).
- General o usualmente se representa a la función determinante por ***det***. Su dominio es el conjunto de las matrices cuadradas y su imagen es $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales.

DETERMINANTES

Así $\det = \{\frac{(A,y)}{y} = \det(A)\,, A\ es\ una\ matriz\ cuadrada, y \in \mathbb{R}\}$

Ejemplo:

De pares ordenados de la función determinante:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}, 11\right)$$

$$((-8), -8)$$

$\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, 22\right)$ otra Notación para $\det(A)$ es $|A|$:

$$det\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 22$$

DETERMINANTES

- La definición del **determinante** varía según el tamaño de la **matriz**:
- Para una **matriz** 1x1 A=[a], el **determinante** es simplemente el elemento a.
- Para una **matriz** 2x2 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, el **determinante** es ad-bc.
- Para matrices de mayor tamaño, el **determinante** se calcula mediante la expansión por cofactores o la regla de Sarrus (esta última solo aplica a matrices 3x3).
- Es decir:
  - Una matriz de $n * n$ se llama matriz de orden n y su determinante de orden n. En base a esto podríamos definir:

Si $n = 1$

El determinante de una matriz de $1 * 1 \Longrightarrow A = (a)$

$A = (a_{11}) \Longrightarrow |A| = |a_{11}| = a_{11}$

Si $n = 2$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \Longrightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Si $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \Longrightarrow |A| = ?$$

DETERMINANTES

Determinante de una matriz 2×2

$$A = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{vmatrix}$$

$$det\ (A) = 54 - (-3)(1)$$
$$det\ (A) = 54 + 3$$
$$det\ (A) = 57$$

$$det\ (B) = 6 + \frac{1}{2}$$
$$det\ (B) = \frac{13}{2}$$

Determinante de una matriz 3×3

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$A = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 4 & 4 \end{array}\right.$$

$$det\ (A) = (1)(1)(2) + (3)(2)(4) + (1)(2)(4)$$
$$-[(4)(1)(1) + (4)(2)(1) + (2)(2)(3)]$$
$$det\ (A) = 2 + 24 + 8 - [4 + 8 + 12]$$
$$det\ (A) = 34 - 24$$
$$det\ (A) = 10$$

Determinantes – Regla de Sarrus

- Esta regla no se aplica cuando $n > 3$. La regla de Sarrus consiste en repetir las dos primeras filas debajo de la tercera, o también repetir las dos primeras columnas a continuación de la tercera, luego se traza las diagonales principales y secundarias.

- Repetir las filas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

- Repetir las columnas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Determinantes – Método directo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

DETERMINANTES – Por menores

$$\begin{array}{ccc} + & - & + \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\ (a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\ a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

DETERMINANTES

Determinante de una matriz 4×4

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 - \frac{1}{2}F_1 \\ F_3 - \frac{1}{2}F_1 \\ F_4 - F_1 \end{matrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 5/2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_3 - \frac{1}{3}F_2 \\ F_4 - \frac{2}{3}F_2 \end{matrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & 2 \\ 0 & 0 & 7/3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & 8/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = -\left((2)\left(\frac{3}{2}\right)(2)(1)\right)$$

A=-6

Determinantes – Propiedades

Los determinantes tienen muchas propiedades que facilitan los cálculos.

1. Si dos filas o dos columnas de una matriz son iguales, su determinante es cero

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad = -10 + 12 + 18 + 10 - 18 + 12 = 0$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad = 15 + 12 + 24 - 15 - 12 - 24 = 0$$

2. Si una fila o columna es múltiplo de otra (por el mismo número toda la fila o columna) el determinante es igual a cero.

$$|P| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} * 2 \qquad |P| = 8 - 6 + 60 - 60 + 6 - 8 = 0$$

$$|L| = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix} \qquad |L| = -60 + 24 + 32 - 24 - 32 + 60 = 0$$

Determinantes – Propiedades

3. Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz son ceros, el valor del determinante es cero.

$$|B| = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \qquad |B| = 0$$

$$|G| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix} \qquad |G| = 0$$

4. El determinante de la matriz identidad es igual a uno

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |R| = 1$$

5. El determinante de la matriz A y de su traspuesta son iguales.

$$|A| = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad = -10 + 8 - 18 - 10 - 12 - 12 = -54$$

$$|A|^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad = -10 - 18 + 8 - 10 - 12 - 12 = -54$$

Determinantes – Propiedades

6. Si intercambiamos dos columnas o dos filas de una matriz, su determinante cambia de signo.

$$|L| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad = 8 + 72 + 10 - 80 - 6 - 12 = -8$$

$$|K| = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad = 80 + 6 + 12 - 8 - 72 - 10 = 8$$

$$|R| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad = 6 + 80 + 12 - 72 - 8 - 10 = 8$$

7. Si los elementos de una fila o columna de un determinante se multiplican por un escalar $(k \neq 0)$ el determinante queda multiplicado por k.

$$|C| = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad 2 * |C| = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -12 + 40 + 9 - 90 - 4 + 12 \\ &= -45 \\ &= -45 * 2 \\ &= -90 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -24 + 80 + 18 - 180 - 8 + 24 \\ &= -90 \end{aligned}$$

Determinantes – Propiedades

8. Si una fila o columna de una matriz A está formado por sumandos; su determinante es igual a la suma de dos determinantes de la matriz. sumado el primer determinante los primeros sumandos y en el segundo los segundos sumandos de dicha columna o fila. Es decir, el determinante se puede escribir como la suma de dos o más determinantes.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2+4 & 1 & 3 \\ 2-3 & 4 & 2 \\ 2-1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 32 - 3 + 2 - 12 - 4 + 4$$
$$= 19$$

$$= -32 + 6 + 4 - 24 + 4 - 8$$
$$= -50$$
$$= 64 - 9 - 2 + 12 - 8 + 12$$
$$= 69$$
$$= -50 + 69$$
$$= 19$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2+3 & 2+1 & 4+1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 20 + 30 + 15 - 20 - 50 - 9$$
$$= -14$$

$$= 8 + 24 + 10 - 16 - 20 - 6$$
$$= 0$$
$$= 12 + 6 + 5 - 4 - 30 - 3$$
$$= -14$$
$$= 0 - 14$$
$$= -14$$

Determinantes – Propiedades

9. El determinante del producto de 2 matrices es igual al producto de sus determinantes.

$$|A.B| = |A| * |B|$$

10. Si A es invertible $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$ en este caso el determinante de la inversa es igual al inverso del determinante esto es:

$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$

Determinantes – Propiedades

1. **Invarianza bajo operaciones elementales:** El determinante de una matriz no cambia si se le aplica una combinación lineal de sus filas (o columnas) a otra fila (o columna), excepto cuando se multiplica una fila (o columna) por un escalar, en cuyo caso el determinante se multiplica por ese escalar.

2. **Determinante de una matriz y su transpuesta:** El determinante de una matriz A coincide con el determinante de su matriz transpuesta, det(A) = det(AT).

3. **Multiplicativo:** El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de sus determinantes, det(AB)=det(A).det(B).

4. **Matriz Invertible:** Una matriz es invertible si y solo si su determinante es distinto de cero.

5. **Determinante de una matriz triangular:** El determinante de una matriz triangular (superior o inferior) es igual al producto de los elementos de su diagonal principal.

Estas propiedades hacen que los determinantes sean extremadamente útiles en diversas áreas de las matemáticas y sus aplicaciones, se incluye la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, el análisis de sistemas dinámicos, y la teoría de grafos, entre otros.

Determinantes – INVERSAS

- Una **matriz** cuadrada A es invertible (o no singular) si existe otra **matriz**, denominada **inversa** de A y representada como A^{-1}, tal que cuando A se multiplica por A^{-1} (en cualquier orden), el resultado es la **matriz** identidad I. Es decir,

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

- El **determinante** de una **matriz** A, denotado como det(A) o |A|, es crucial para determinar si A es invertible. La regla es simple:
  - Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible.
  - Si $\det(A) = 0$, entonces A no es invertible.

Sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas.

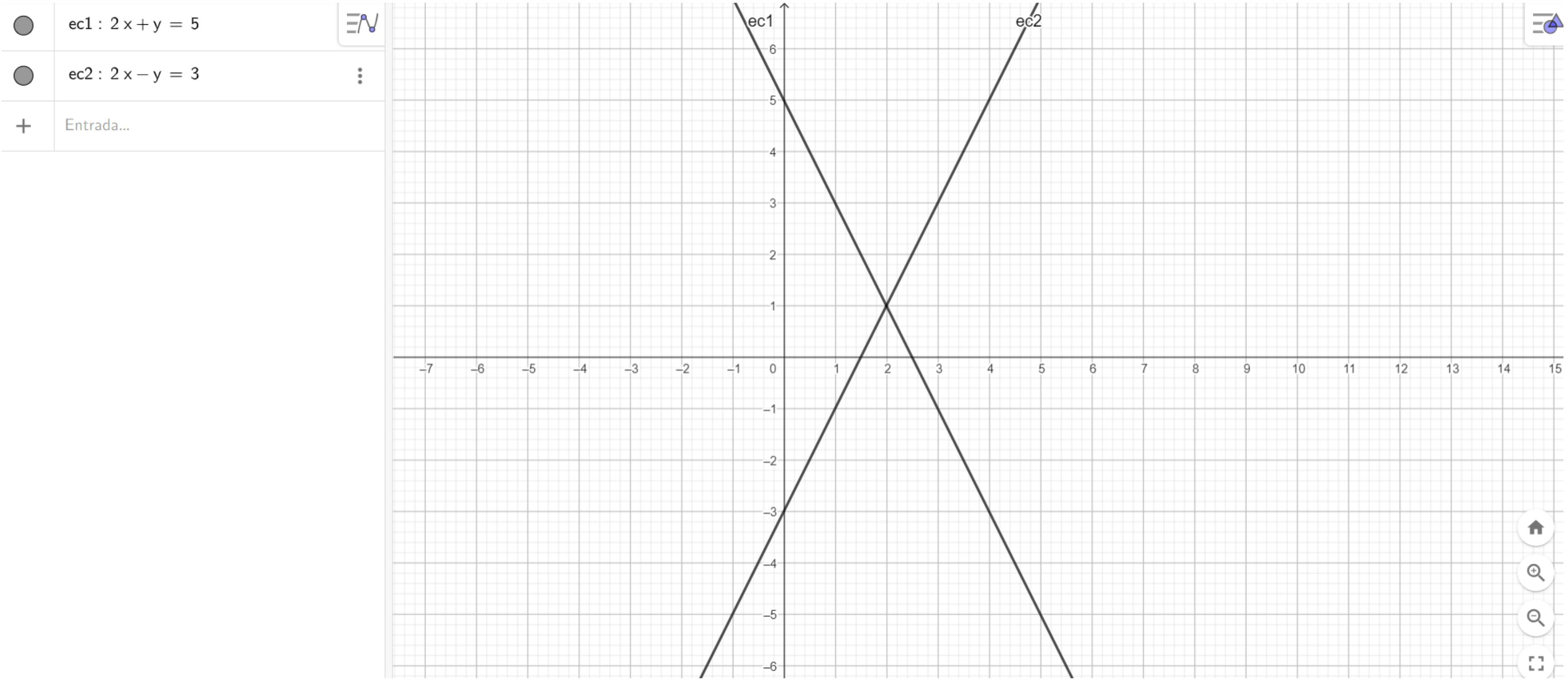
- Los sistemas de ecuaciones lineales con varias variables son una parte fundamental del álgebra lineal y tienen múltiples aplicaciones en ciencias, ingeniería, economía, y otras áreas.
- Un sistema de ecuaciones lineales con varias variables consiste en dos o más ecuaciones lineales que tienen dos o más variables.
- La solución a dicho sistema es el conjunto de valores que satisfacen todas las ecuaciones del sistema simultáneamente.
- Por ejemplo, un sistema de ecuaciones lineales con dos variables, x y y.

$$3x + 3y = 5$$
$$4x - y = 3$$

Sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas.

- **Solución única**
  - Significa que hay un solo par (o conjunto, en el caso de más de dos variables) de valores que satisfacen todas las ecuaciones.
  - Ejemplo:

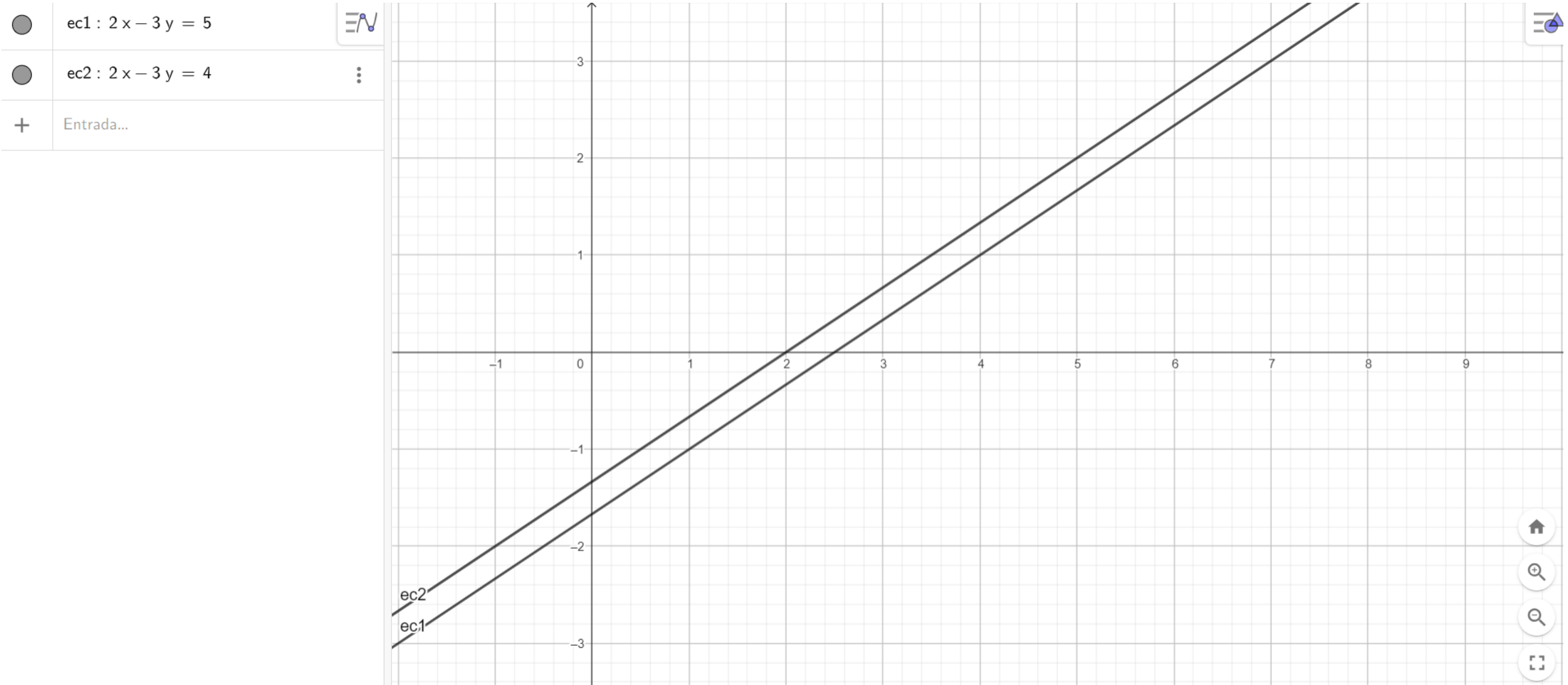
$$2x + y = 5$$
$$2x - y = 3$$



Sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas.

- **No tiene solución (sistema inconsistente)**
  - Ocurre cuando las líneas (o planos, en sistemas de tres variables) representadas por las ecuaciones no se intersecan.
  - Ejemplo:

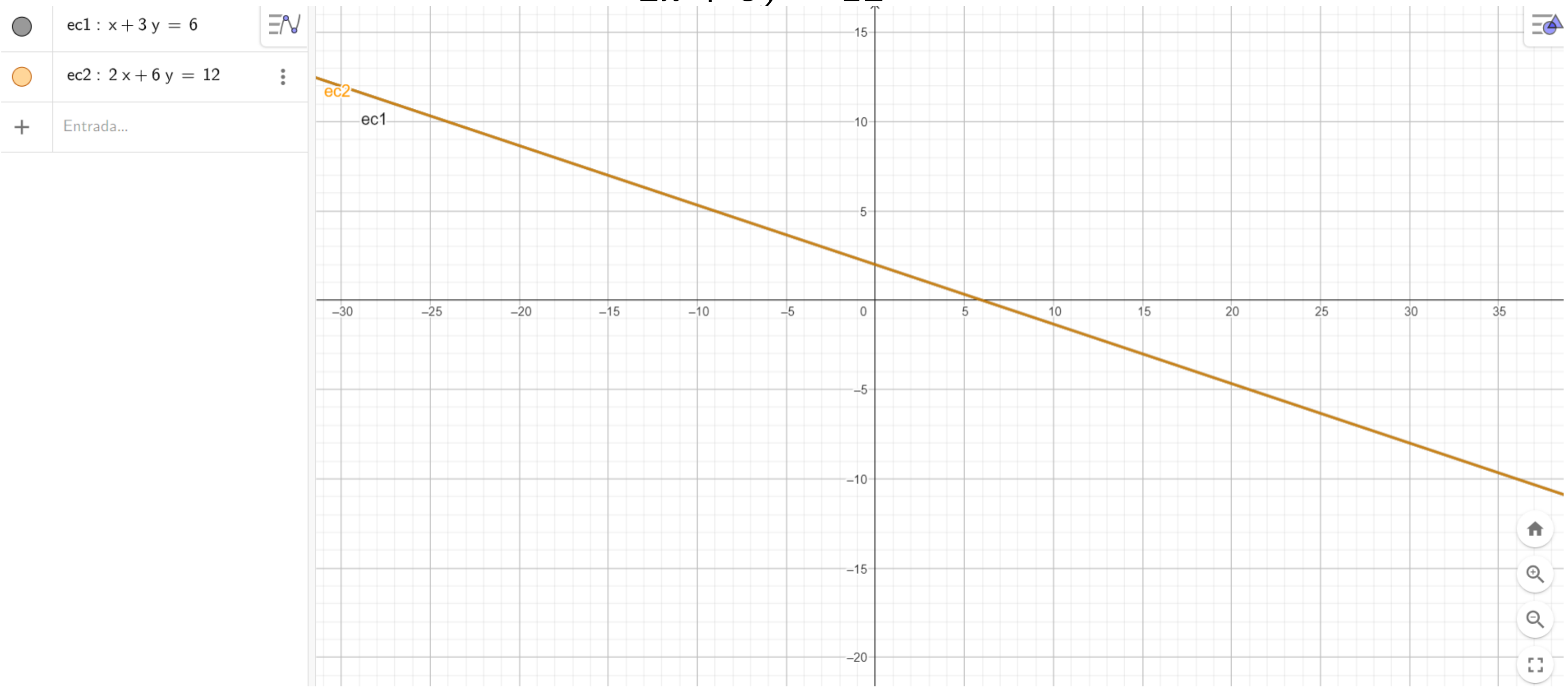
$$2x - 3y = 5$$
$$2x - 3y = 4$$



Sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas.

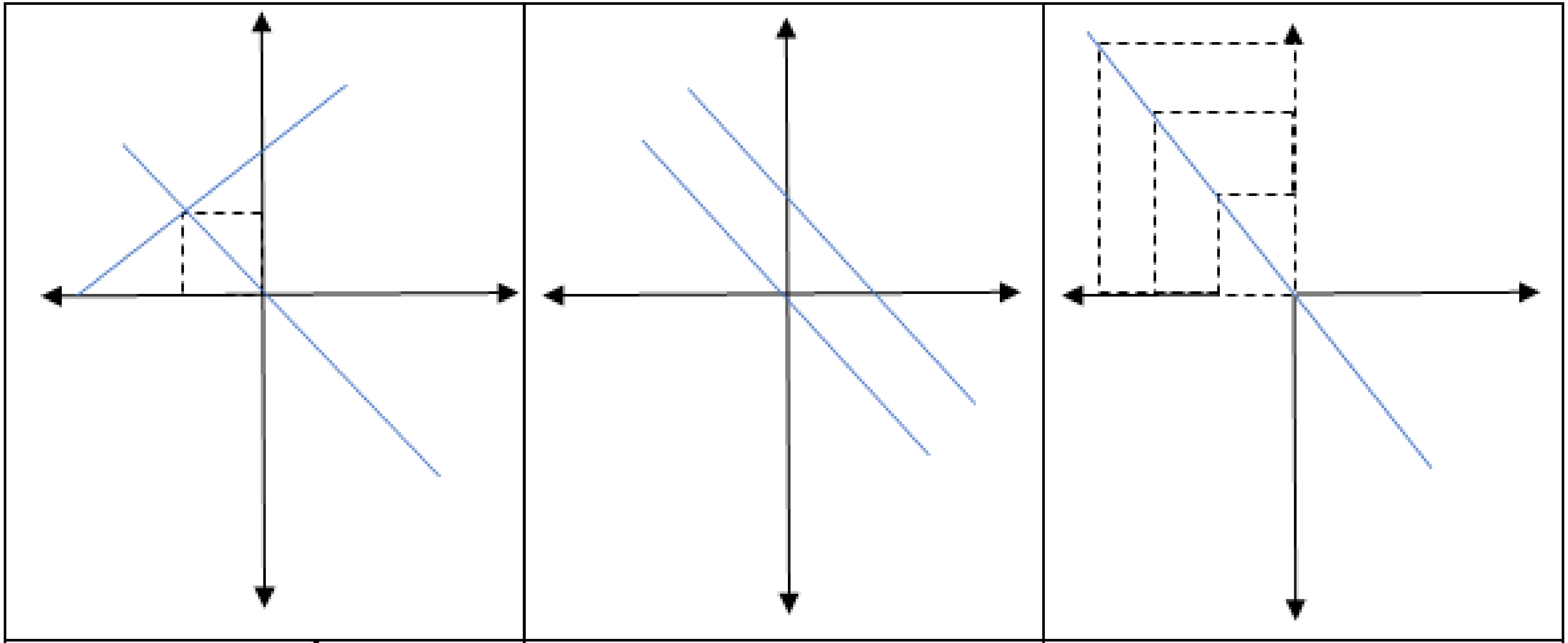
- **Infinitas soluciones**
  - Sucede cuando las líneas (o planos) representadas por las ecuaciones coinciden completamente, indicando que hay una cantidad infinita de puntos de intersección.
  - Ejemplo:

$$x + 3y = 6$$
$$2x + 6y = 12$$



Sistemas de ecuaciones lineales con varias incógnitas.

- **Resumen**



Solución Única	No tiene solución	Infinitas soluciones

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

- Un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas generalmente se presenta en la forma:

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

- Donde x. y son las incógnitas, y a1, b1, c1, a2, b2 y c2 son constantes conocidas.
- Ejemplo:

$$2x + y = 4$$
$$x + 2y = 5$$

Solución: x=1, y=2

Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas.

- Un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas generalmente se presenta en la forma:

$$
\begin{aligned}
a_1x + b_1y + c_1z &= d_1\\
a_2x + b_2y + c_2z &= d_2\\
a_3x + b_3y + c_3z &= d_3
\end{aligned}
$$

- Ejemplo:

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 6\\
2x + y + z &= 7\\
x + 2y - z &= 2
\end{aligned}
$$

Solución: x=1, y=2, z=3

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Método de sustitución	Método de igualación	Método gráfico
Método de eliminación (suma y resta)	Regla de Cramer	Métodos matriciales

Método de sustitución

- Se resuelve una de las ecuaciones para una de las incógnitas.
- Se sustituye esta expresión en la otra ecuación, se resuelve para la otra incógnita.
- Se sustituye el valor encontrado en la ecuación resuelta originalmente para hallar la otra incógnita.
- Ejemplo:

$$3x + 2y = 5$$
$$x - y = 2$$

- Despejando x de la segunda ecuación se tiene x=2+y.
- Si se sustituye en la segunda ecuación: 3(y+2)+2y=5
- Se Tiene y = -1/5
- Sustituir el valor de y en cualquiera de las ecuaciones se tiene que x=9/5

Método de igualación

- Se despejan ambas incógnitas en ambas ecuaciones.
- Se igualan las expresiones obtenidas para cada incógnita y se resuelve la ecuación resultante para encontrar el valor de una incógnita.
- Se sustituye el valor de la incógnita encontrada en una de las ecuaciones originales para hallar la otra incógnita.
- Ejemplo:

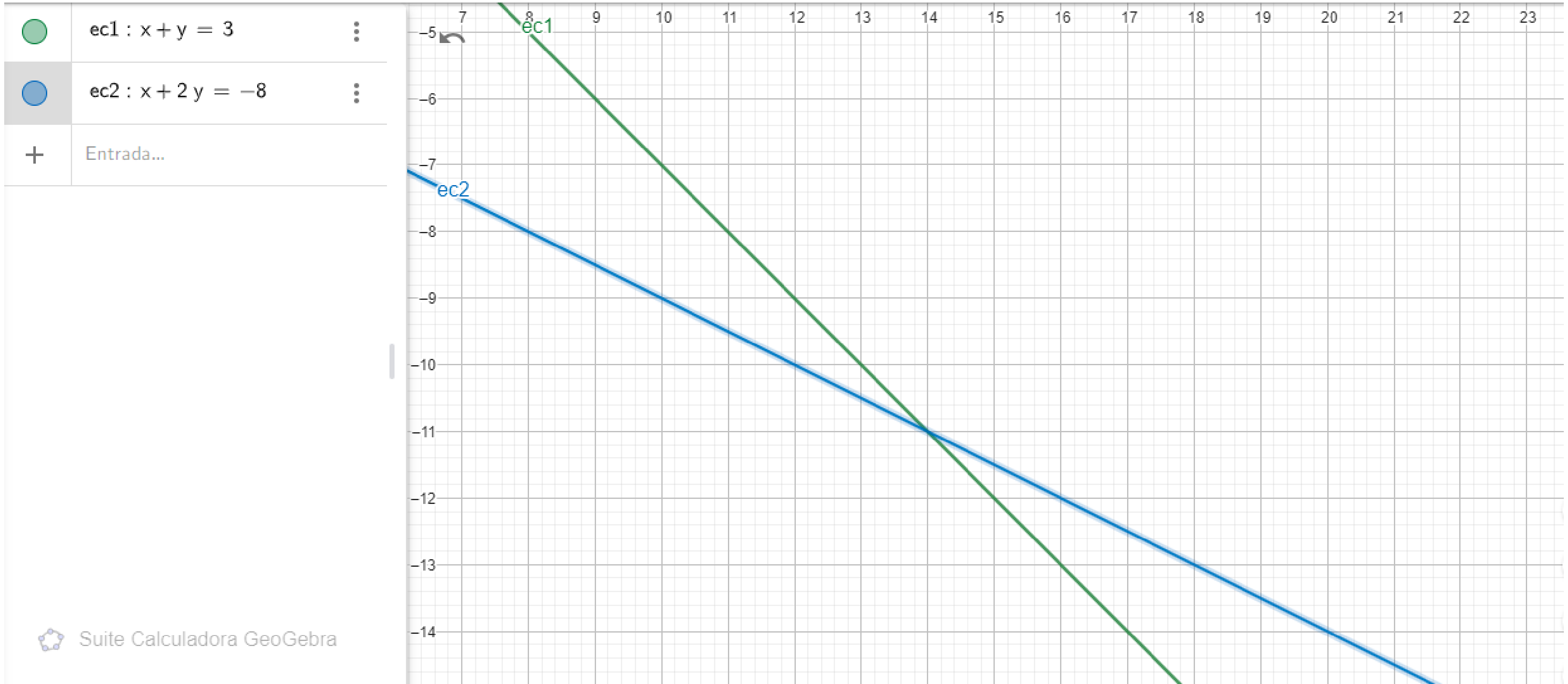
$$2x + 3y = 6$$
$$4x - y = 3$$

- Despejando y de la primera ecuación se tiene y=2-2x/3
- Despejando y de la segunda ecuación se tiene y= 4x-3
- Igualando las dos expresiones se tiene 2-2x/3=4x-3, despejando la variable x se tiene un valor de x=15/14
- Sustituir el valor de x en cualquiera de las ecuaciones se tiene que y=9/7

Método de gráfico

- Se grafican ambas ecuaciones en el mismo sistema de coordenadas.
- El punto de intersección de las dos líneas (si existe) representa la solución al sistema de ecuaciones (x, y).
- Ejemplo: Determinar gráficamente la solución al siguiente sistema:

$$x + y = 3$$
$$x + 2y = -8$$



Método de eliminación

- Se multiplican las ecuaciones por constantes adecuadas (si es necesario) para que los coeficientes de una de las incógnitas sean iguales y opuestos.
- Se suman o restan las ecuaciones para eliminar una de las incógnitas.
- Se resuelve la ecuación resultante para una incógnita.
- Se sustituye el valor encontrado en una de las ecuaciones originales para hallar la otra incógnita.
- Ejemplo:

$$3x + 4y = 10$$
$$2x - 4y = -6$$

- Si se realiza la suma de las dos ecuaciones directamente se tiene: (3x+4y)+(2x-4y)=10-6
- Donde se tiene que 5x=4, x=4/5
- Reemplazando este valor en cualquiera de las ecuaciones se tiene que y=19/10

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

- Método de sustitución
- Método de igualación
- Método de eliminación (suma y resta)
- Regla de Cramer

Método de sustitución

- Se resuelve una de las ecuaciones para una de las incógnitas.
- Se sustituye esta expresión en las otras ecuaciones, reducir el sistema a dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Se aplica cualquiera de los métodos anteriores para resolver el sistema resultante.

Ejemplo:

$$x + y - z = -2$$
$$2x - y + z = 8$$
$$x - 4y + z = 3$$

- Despejando x de la primera ecuación:

$$x = -2 + z - y$$

- Sustituir en la ecuación dos y tres:

$$-y + z = 4$$
$$5y + 2z = 5$$

- Ahora despejando y de la primera ecuación obtenida se tiene:

$$y = z - 4$$

- Reemplazando en la segunda ecuación obtenida se puede encontrar el valor de z=5, si se reemplaza este valor en una de las dos ecuaciones obtenidas se tiene que y=1, y si se reemplaza en cualquiera de las ecuaciones en las que se tiene tres incógnitas se tiene x=2

Método de eliminación

- Se elige una incógnita para eliminar y se multiplican las ecuaciones por constantes adecuadas (si es necesario) para igualar los coeficientes de esa incógnita en al menos dos ecuaciones.
- Se suman o restan las ecuaciones para eliminar esa incógnita, reducir el sistema a dos ecuaciones con dos incógnitas.
- Se aplica el método de eliminación nuevamente o cualquier otro método para resolver el sistema reducido.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 7 \\ 3x + y + z &= 5 \\ 2x + 3y - z &= 3 \end{aligned}$$

Trabajando las ecuaciones 1 y 3:

$$\begin{array}{c} x + 2y + z = 7 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ \hline 3x + 5y + 0 = 10 \end{array}$$

Trabajando las ecuaciones 2 y 3:

$$\begin{array}{c} 3x + y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ \hline 5x + 4y + 0 = 8 \end{array}$$

Trabajando las dos ecuaciones que se han obtenido se encuentra que x=0, y=2.

Reemplazando en cualquiera de las ecuaciones se tiene z=3

Método regla de Cramer

- Este método utiliza determinantes para resolver el sistema.
- Se calcula el determinante de la matriz de coeficientes del sistema (determinante principal).
- Para cada incógnita, se reemplaza la columna de coeficientes correspondiente por la columna de términos independientes en la matriz de coeficientes y se calcula el determinante de esta nueva matriz.
- El valor de cada incógnita es igual al determinante calculado para esa incógnita dividido por el determinante principal.
- Estos métodos son herramientas poderosas para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y la elección de uno sobre otro puede depender de la complejidad del sistema, las preferencias personales o los requisitos específicos de un problema.

Método regla de Cramer

$$x - 3y + 2z = -3$$
$$5x + 6y - z = 13$$
$$4x - y + 3z = 8$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\Delta) = 16$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 13 & 6 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\Delta x) = -32$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 13 & -1 \\ 4 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det(\Delta y) = 80$$

$$\Delta z = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 5 & 6 & 13 \\ 4 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\det(\Delta z) = 112$$

$$x = \frac{\det(\Delta x)}{\Delta} = -2$$

$$y = \frac{\det(\Delta y)}{\Delta} = 5$$

$$z = \frac{\det(\Delta z)}{\Delta} = 7$$

Método de Gauss Jordan

Este método consiste en transformar la matriz ampliada C en una matriz en donde todos los elementos de la diagonal principal son igual a uno, mediante las siguientes operaciones:

1. Multiplicación de una fila por un escalar
2. Intercambio de dos filas
3. Sumar a una fila el producto de otra fila por un número real diferente de cero.

Ejemplo

$$\begin{cases} x & -y & -2z & = & 1 \\ 5x & +4y & +3z & = & -3 \\ x & +y & +z & = & -1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \textit{ Se llama Matriz ampliada del sistema.}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow (-5)\left(\begin{array}{ccc|c} -5 & 5 & 10 & -5 \\ 5 & 4 & 3 & -3 \end{array}\right)$$ El -5 * 1° fila y se suma la 2° fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 13 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 13 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow (+)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$ Se suma la 1° y 3° fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 13 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 13 & -8 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Longrightarrow (-2)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{array}\right)$$ El -2 * 3° fila y se suma con la 1°.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 13 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

Método de Gauss Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 13 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \binom{2}{9}\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 18 & 26 & -16 \\ 0 & -18 & -27 & 18 \end{array}\right)$$ El -2 * 2° Fila y el 9 * 3° fila y se suma.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 13 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 13 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow (13)\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & 13 & -8 \\ 0 & 0 & -13 & 26 \end{array}\right)$$ El 13 * 3° fila y se suma la 2° fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\frac{1}{9}\right)(0 \quad 1 \quad 0|2)$$ El $\frac{1}{9}$ se multiplica por la 2° fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right) \Longrightarrow (-1)(0 \quad 0 \quad 1|-2)$$ El -1 se multiplica por la 3° fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow (+)\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$ Se suman la 1° y la 3° fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)(1 \quad 0 \quad 0|-1)$$ El $\frac{1}{2}$ se multiplica por la 1° fila.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{c} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{array}$$

Método de eliminación Gaussiana o método de Gauss

Vamos a resolver un sistema de ecuaciones de 3*3 para ello es necesario que las variables tengan el mismo orden en cada una de las ecuaciones.

- Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x & -y & +3z & = & 5 \\ 2x & +2y & +3z & = & 7 \\ -2x & +3y & +0 & = & -3 \end{cases}$$

1. Para empezar el sistema se lleva a la *forma matricial* es decir se convierte en una *matriz aumentada* (esta contiene 2 matrices que están separadas por una línea vertical, al lado izquierdo es la matriz formada por los coeficientes de las variables (incógnitas) y a la derecha están los términos independientes).

$$\begin{array}{cccc} x & y & z & i \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 3 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

2. En la matriz de los coeficientes se convierte los elementos de la diagonal principal en unos y los elementos que se encuentran bajo la diagonal principal en ceros (se transforman en una matriz triangular superior).

Método de eliminación Gaussiana o método de Gauss

3. Para convertir el primer elemento en 1 hay dos formas:
   a. Multiplico la fila 1 por $\left(\frac{1}{2}\right)$ o divido para dos.
   b. Intercambiando la segunda fila por la primera fila.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

- F1 = - F1

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

- F2 = F2 - 2F1

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 6 & 10 \end{array}\right)$$

El 1 (1°Fila 1°Columna) se convierte en pivote ya que nos va a ayudar a convertir en ceros los elementos que están bajo la Diagonal principal.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 9 & 17 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \end{array}\right) \end{array}$$

- F3 = F3 - 3F1

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 0 & -3 \\ -3 & 6 & 9 & 15 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 6 & 9 & 17 \\ 0 & 4 & 9 & 12 \end{array}\right) \end{array}$$

- F2 = $\frac{1}{6}$F2

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{17}{6} \\ 0 & 4 & 9 & 12 \end{array}\right) \end{array}$$

- F3 = F3 - 4F2

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 9 & 12 \\ 0 & -4 & -6 & -\frac{34}{3} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{17}{6} \\ 0 & 0 & 3 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \end{array}$$

- F3 = $\frac{1}{3}$F3

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & i \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{17}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} \end{array}\right) \end{array}$$

Método de eliminación Gaussiana o método de Gauss

Hemos conseguido el objetivo se vuelve a escribir en forma de ecuación.

Empezamos encontrando el valor de z en la tercera fila.

$$z = \frac{2}{9}$$

Ahora vamos a encontrar el valor de x en la segunda fila

$$y + \frac{3}{2}z = \frac{17}{6}$$

$$y + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{9}\right) = \frac{17}{6}$$

$$y + \frac{1}{3} = \frac{17}{6}$$

$$y = \frac{17}{6} - \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{5}{2}$$

Finalmente encontramos el valor de y en la primera Fila

$$x - 2y - 3z = -5$$

$$x - 2\left(\frac{5}{2}\right) - 3\left(\frac{2}{9}\right) = -5$$

$$x - 5 - \frac{2}{3} = -5$$

$$x = -5 + 5 + \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

Método de eliminación Gaussiana o método de Gauss

Se hace la comprobación reemplazando los valores de las incógnitas en las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ 2x + 2y + 3z = 7 \\ -2x + 3y + 0 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\left(\frac{5}{2}\right) - \left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{9}\right) = 5 \\ 2\left(\frac{5}{2}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{9}\right) = 7 \\ -2\left(\frac{5}{2}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) + 0 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 - \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) = 5 \\ 5 + \left(\frac{4}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right) = 7 \\ -5 + 2 + 0 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5 = 5 \\ 7 = 7 \\ -3 = -3 \end{cases}$$

NOTA: Operaciones Válidas en una matriz

Sumar filas o renglones

Intercambiar filas o columnas

Multiplicar una fila por un escalar diferente de cero.

Método de eliminación Gaussiana o método de Gauss

Ejemplo 2: Eliminación Gaussiana

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 5 \\ -x + 4y + 2z = 11 \\ 2x + 3y + 2z = 12 \end{cases}$$

Ejemplo 3: Eliminación Gaussiana

$$\begin{cases} x + 2y + z = 7 \\ 3x + y + z = 5 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

Problemas que conducen a sistemas de ecuaciones lineales.

- Modelos lineales para predicción y regresión
- Optimización
- Análisis de componentes principales (PCA)
- Sistemas de recomendación
- Filtrado colaborativo
- Procesamiento de señales e imágenes
- Redes neuronales y deep learning
- Análisis de redes

GRACIAS