UNIDAD 2: FUNCIONES Y LOGARITMOS

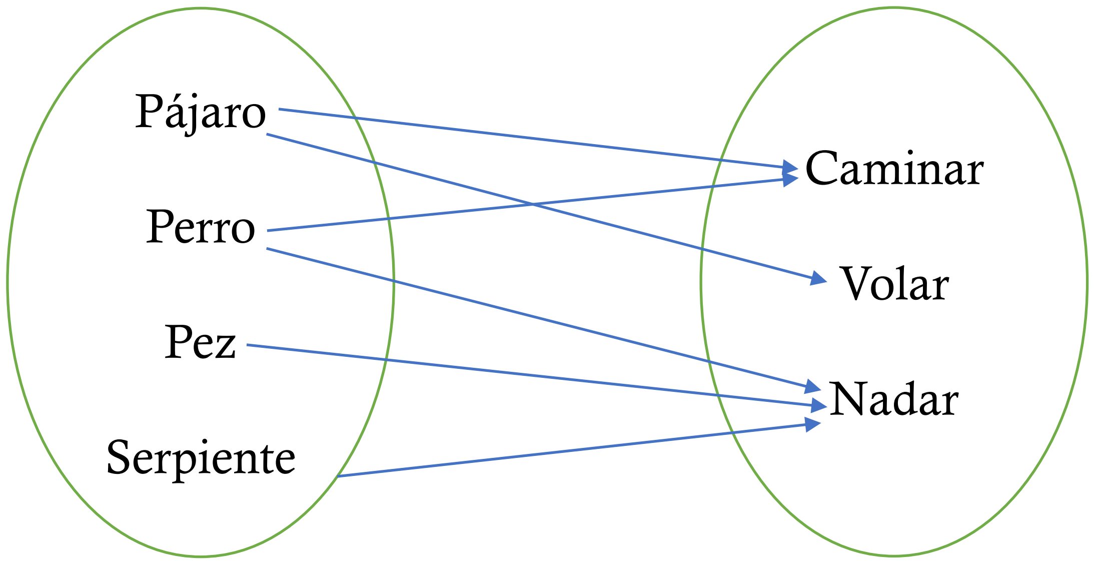
Henry Villa Yánez

INTRODUCCIÓN

- En esta unidad se introduce, como primera parte, al estudio de las funciones. Debido a que las funciones juegan un papel muy importante en la modelación de situaciones de la vida real.
- Todos quienes estudian Matemática, esencialmente estudian las funciones, ya sea, físicos, químicos, turismólogos, biólogos, economistas, psicólogos, entre otras ramas, estudian las relaciones entre los elementos en sus campos y tratan de entender el porqué de ellas.
- Para entender el concepto de función hay que entender lo que significa una relación.

RELACIÓN

- Una relación esta dada por la correspondencia entre los elementos de dos conjuntos que forman parejas ordenadas, la formulación de una expresión que une **al menos un elemento** entre sí establece una relación



FUNCIÓN

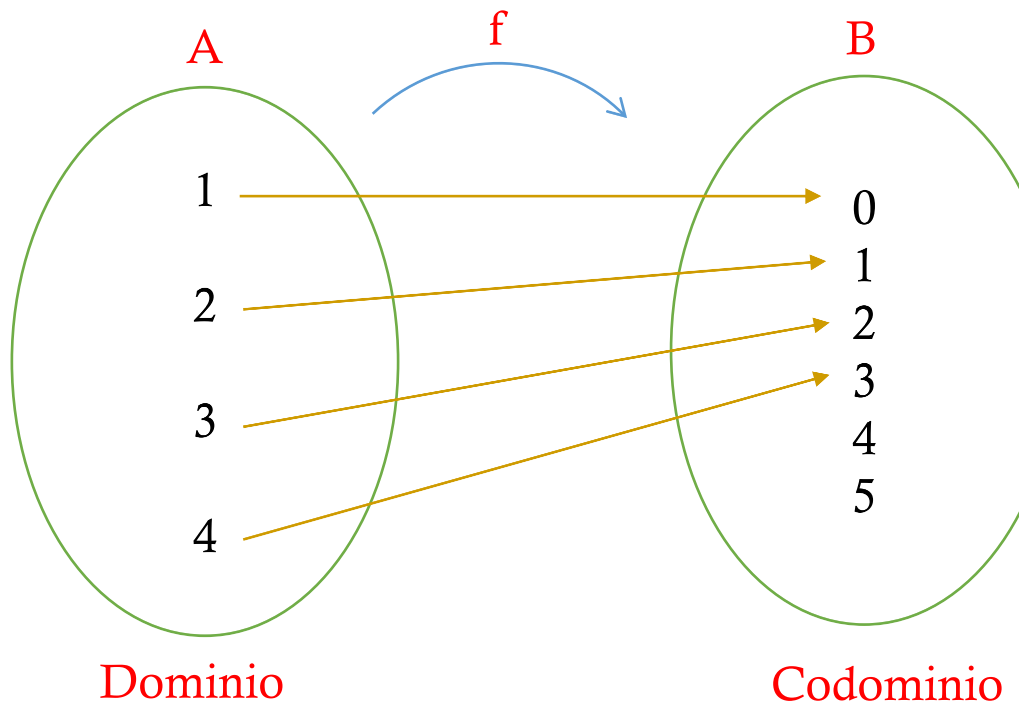
- En aplicaciones prácticas el valor de una magnitud suele depender de los valores que toman otras magnitudes; por ejemplo, el tiempo que una persona invierte en trasladarse desde su casa al trabajo depende de la distancia, el salario de un trabajador depende de sus años de servicio, entre otras.
- **Definición (de función).** Sean A y B 2 conjuntos no vacíos, se llama función definida de A en B cuando a cada elemento de A le corresponde uno y solamente un elemento de B, se denota

$$f: A \rightarrow B$$

- Al conjunto A se lo denomina también DOMINIO que sería la variable independiente y al conjunto B, CODOMINIO que sería la variable dependiente
- A la función generalmente se la denota utilizando las siguientes letras: f, g, h, i, j

FUNCIÓN

- Ejemplo

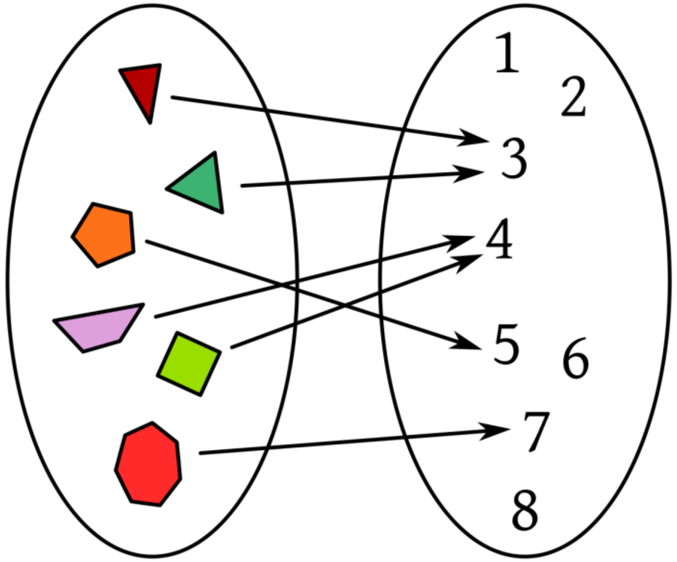


FUNCIÓN - CONCEPTOS

- Dominio - $Dom(f)$: es el conjunto de salida o conjunto de pre imágenes $\{1,2,3,4\}$
- Codominio - $Cod(f)$: es el conjunto de llegada $\{0,1,2,3,4,5\}$
- Recorrido o Rango - $Rec(f)$: es subconjunto del codominio y está formado por las imágenes de los elementos del Dominio $\{0,1,2,3\}$
- Grafo: Es el conjunto de pares ordenados $G(f)$, de los cuales el primer componente pertenece al Dominio y el segundo componente pertenece al Rango $\{(1,0);(2,1);(3,2);(4,3)\}$

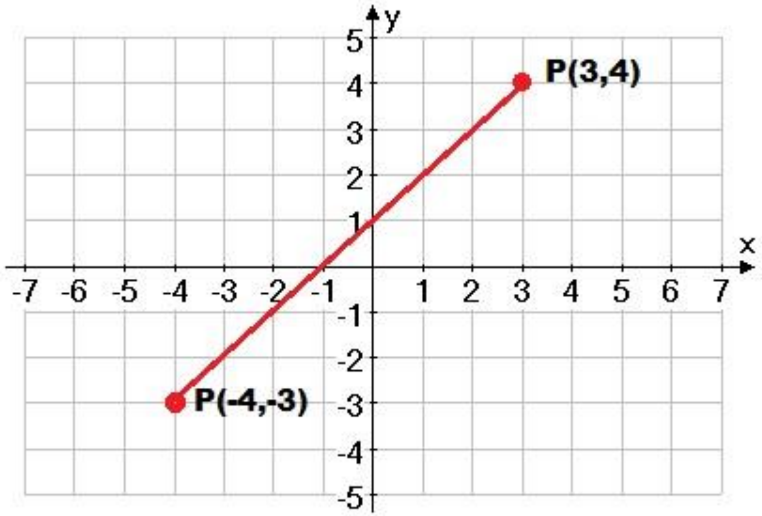
FUNCIÓN – FORMAS DE REPRESENTACIÓN

- Diagrama Sagital: que comúnmente se conoce como Diagramas de Venn



FUNCIÓN – FORMAS DE REPRESENTACIÓN

- Diagrama Cartesiano: consisten en representar el dominio y codominio, al igual que los elementos de los grafos en el plano cartesiano, y a partir de ahí crear gráficas de las funciones
- En el eje X se representa el $Dom(f)$
- En el eje Y se representa el $Cod(f)$:



FUNCIÓN – FORMAS DE REPRESENTACIÓN

- Fórmula: es la expresión algebraica de la función que se representa mediante variables. Por ejemplo:

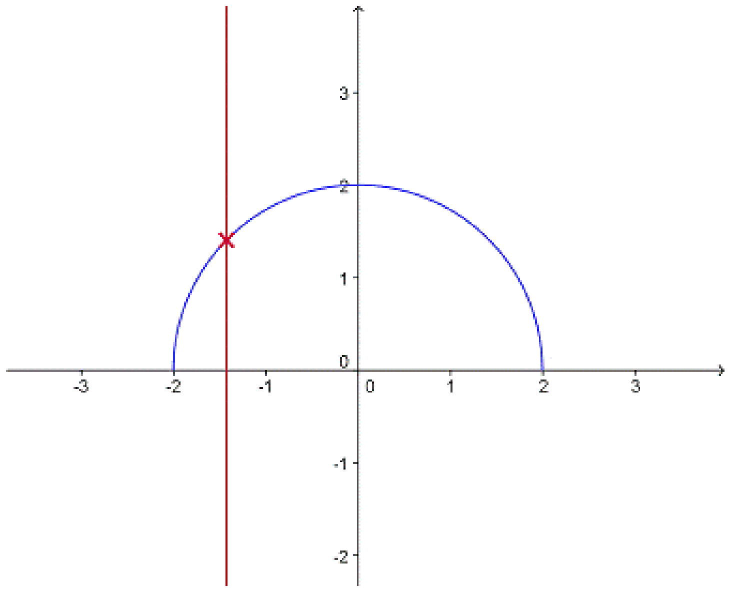
$$y = f(x) = x^2$$

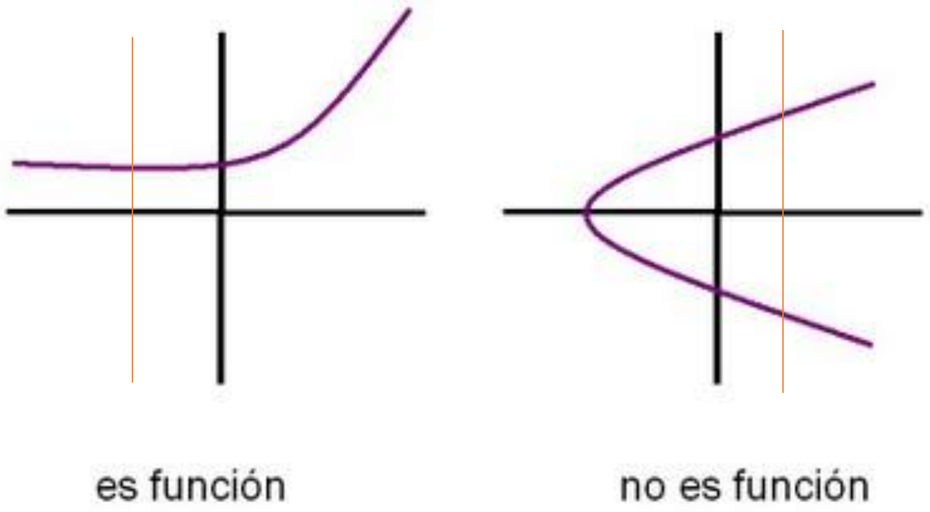
- Tabla de valores: Se forma por 2 filas o columnas, en la primera se ubica la variable independiente (dominio) y en la segunda la variable dependiente (codominio)

X	-2	-1	0	1	2	3	4
Y							

FUNCIÓN – CRITERIOS PARA DETERMINAR SI ES UNA FUNCIÓN

- Forma gráfica: si se traza una recta paralela al eje Y sobre el gráfico, y si se nota que la recta corta al gráfico en 1 sólo punto es una función caso contrario es una relación



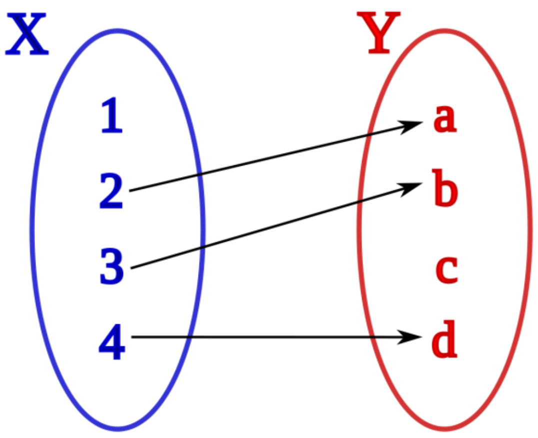


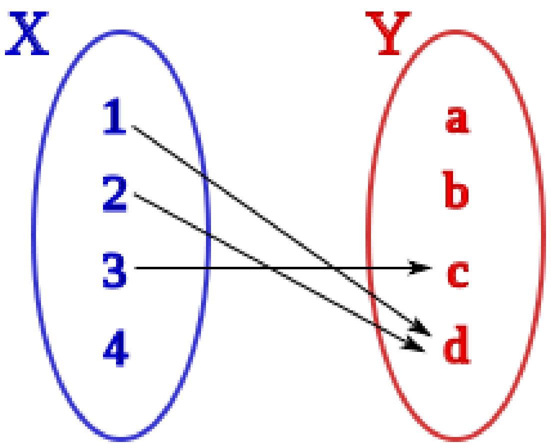
FUNCIÓN – CRITERIOS PARA DETERMINAR SI ES UNA FUNCIÓN

- Conjunto de pares ordenados: En un conjunto de pares ordenados si no se repiten las primeras componentes es una función caso contrario es una relación

$$\{(1,2); (2,3); (3,4)\}$$

- Diagrama sagital: si la correspondencia va de uno a uno o de varios a uno, es una función





FUNCIÓN - EJERCICIOS

- Determinar ejemplos de funciones, determinar su dominio, codominio, rango, grafo

FUNCIÓN – CLASIFICACIÓN

Algebraicas	Por su dominio, recorrido y regla de correspondencia	Funciones trascendentes	Por su comportamiento gráfico
• Polinomiales • Racionales • Radicales o irracionales • Funciones a trozos	• Inyectiva • Sobreyectiva • Biyectiva • Inversa	• Exponenciales • Logarítmicas • Trigonométricas	• Continuas • Discontinuas • Crecientes o Decrecientes

FUNCIÓN – ALGEBRAICAS

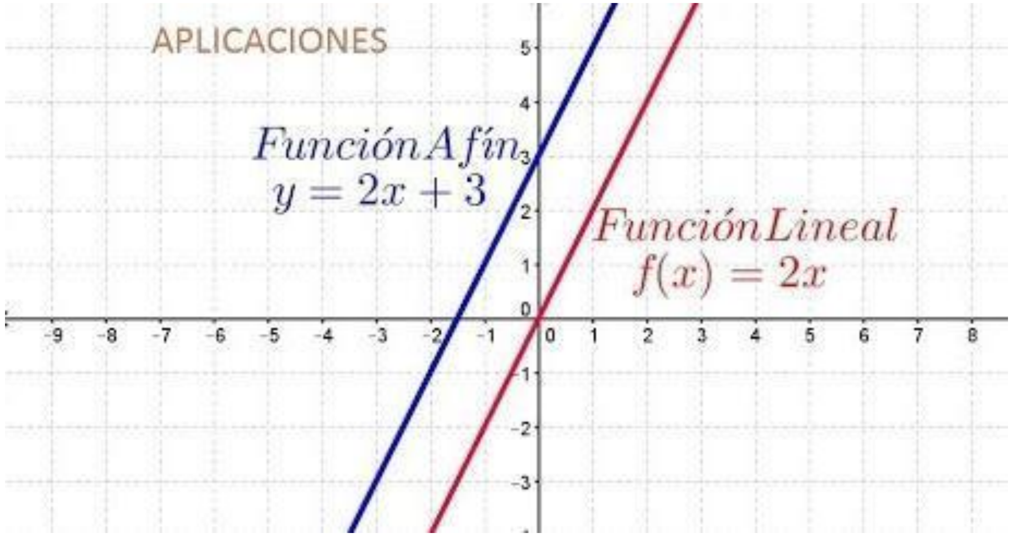
- **Polinomiales:** Consideremos la definición de un polinomio

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_1 x^1 + a_0 x^0 \;\; ; \; Donde: a_n \neq 0; a_1, a_2, .. a_n \in \mathbb{R}$$

- Función de primer grado
- Función cuadrática
- Función cúbica
- Función de grado superior

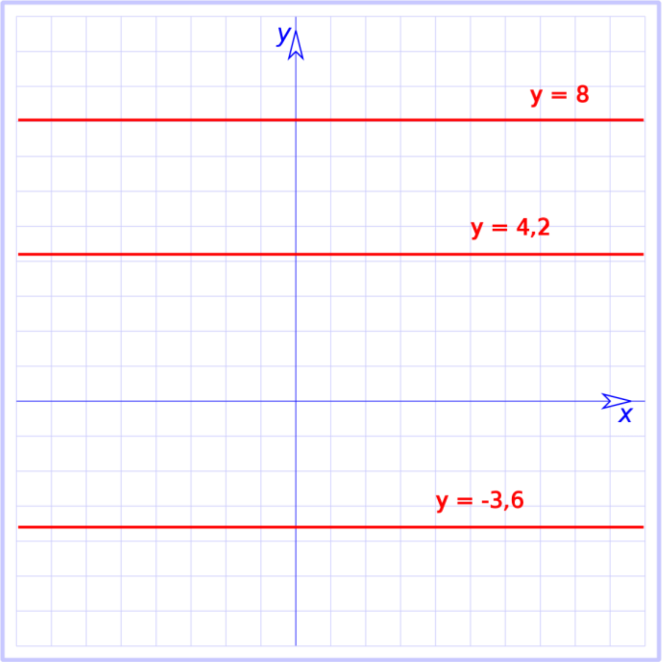
FUNCIÓN – ALGEBRAICAS - POLINOMIALES

- **Función de primer grado o afín:** son las funciones de la forma $f(x) = ax + b$, estás pueden ser:
  - <u>Función Lineal</u>: $f(x) = ax$



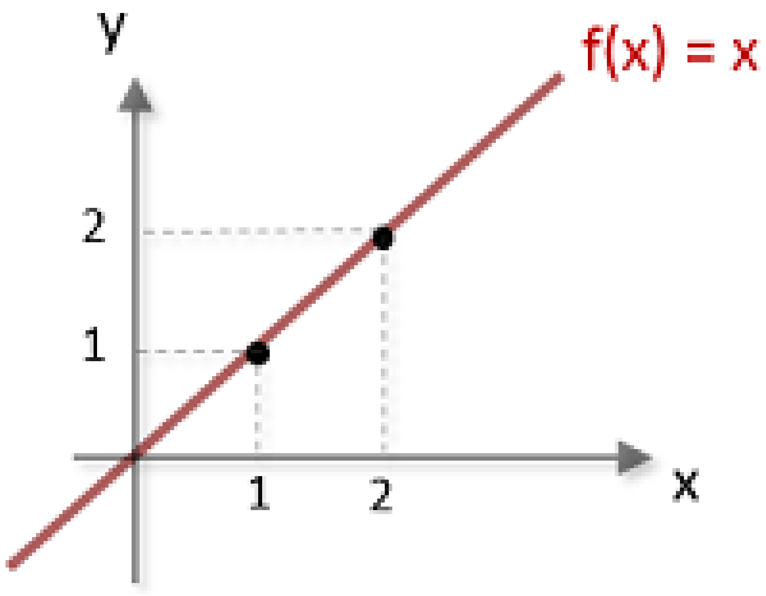
FUNCIÓN – ALGEBRAICAS - POLINOMIALES

- Función Constante: $f(x) = b$



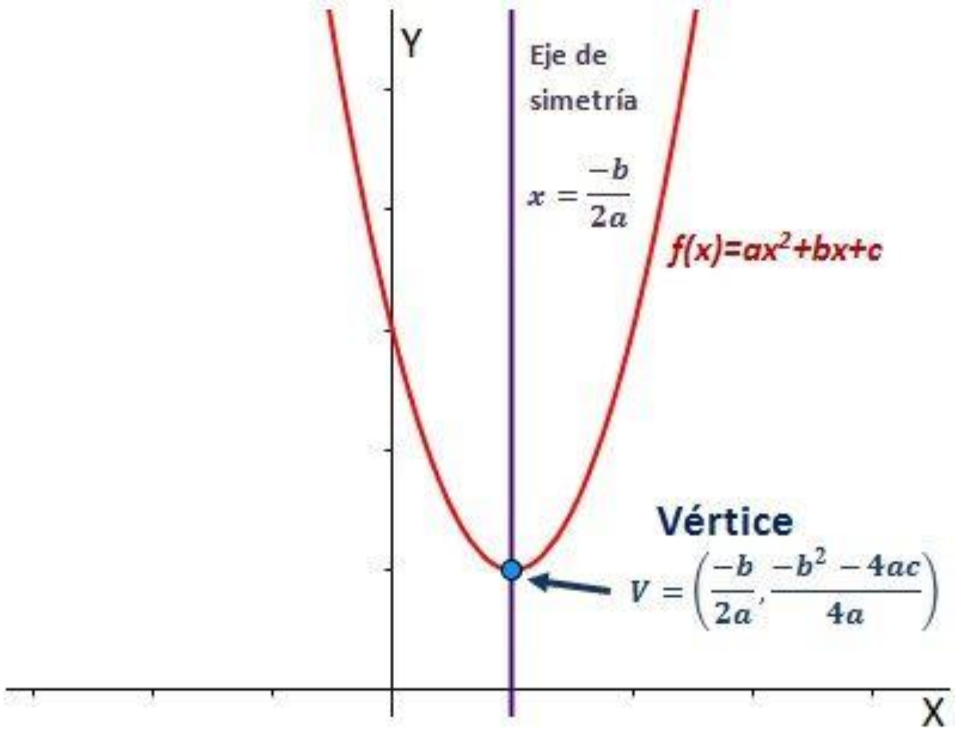
FUNCIÓN – ALGEBRAICAS - POLINOMIALES

- Función Identidad: $f(x) = x$, notamos que es una bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano



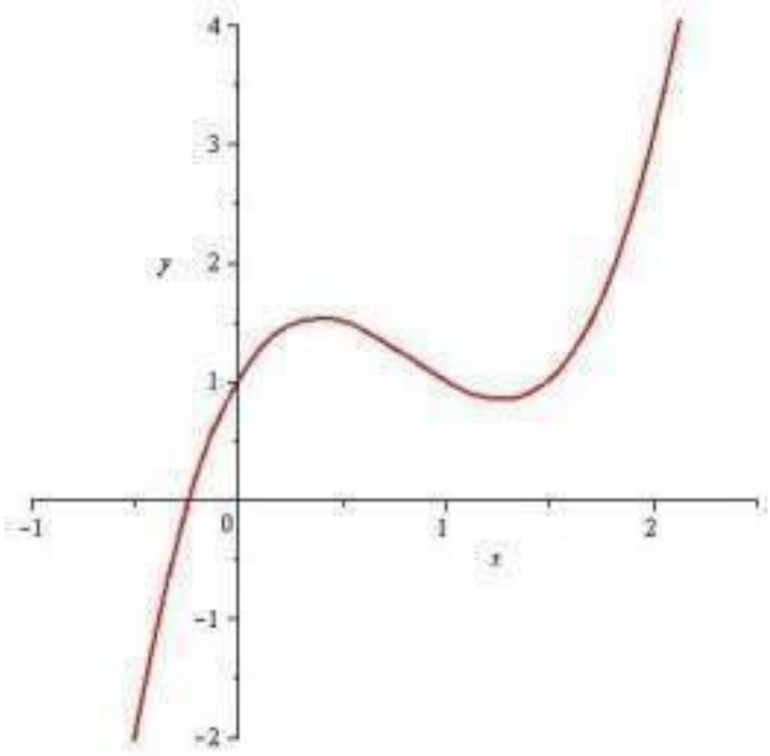
FUNCIÓN – ALGEBRAICAS - POLINOMIALES

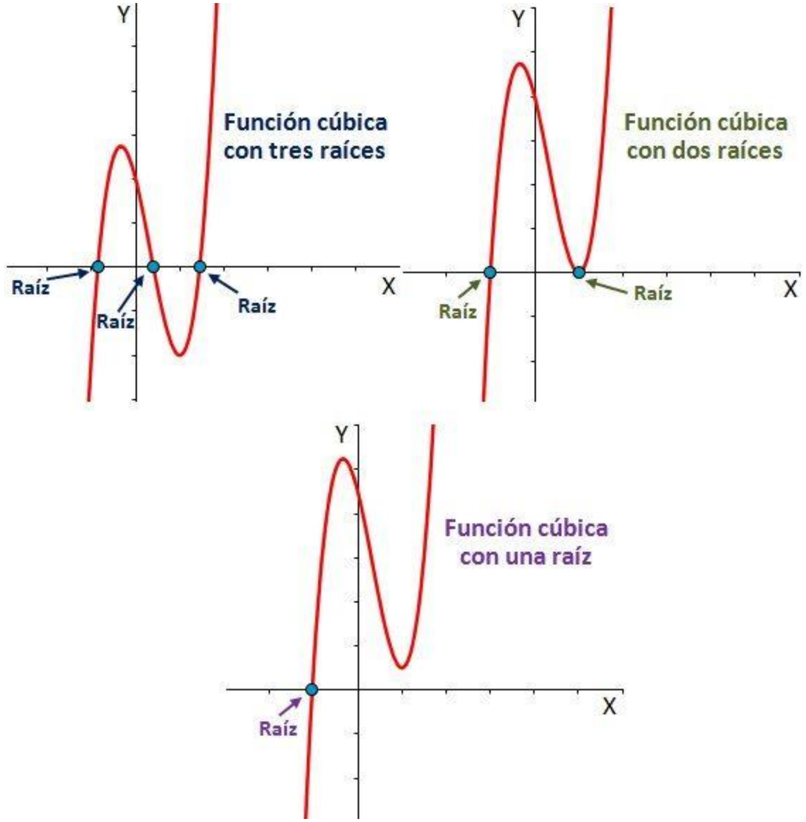
- **Función cuadrática:** son las funciones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, estás pueden ser:



FUNCIÓN – ALGEBRAICAS - POLINOMIALES

- **Función cúbica:** son las funciones de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, estás pueden ser:

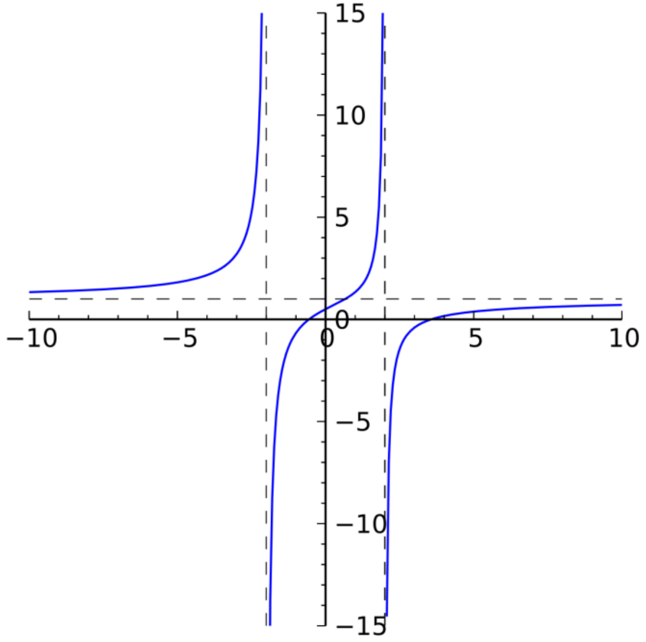


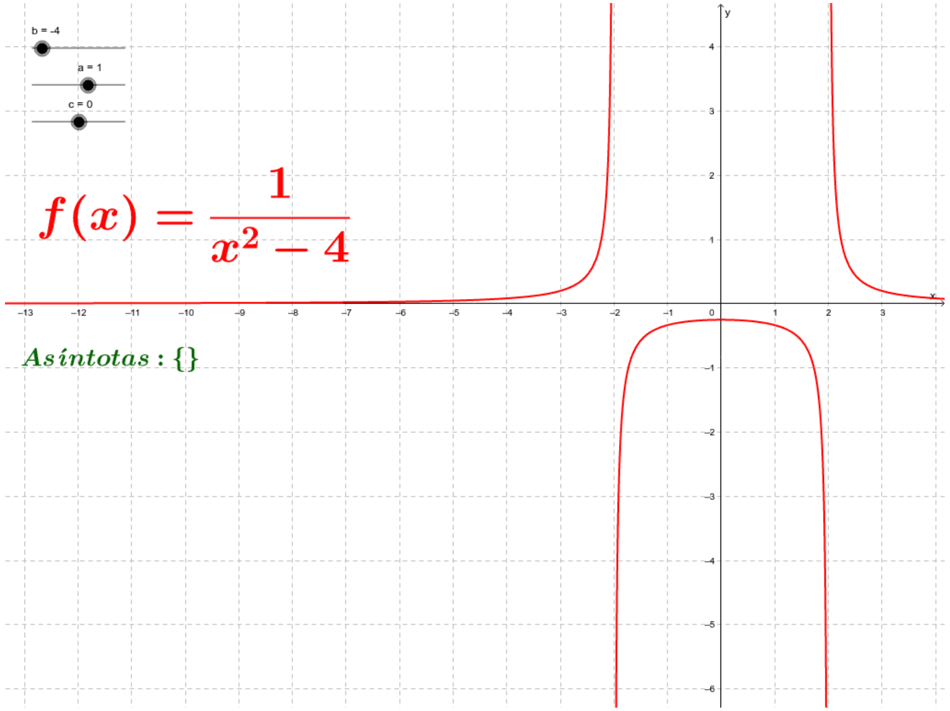


FUNCIÓN – ALGEBRAICAS

- **Racionales:** Consideremos la definición de un polinomio racional

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \;\; ; \; Donde: q(x) \neq 0; p(x), q(x) \; son \; polinomios$$

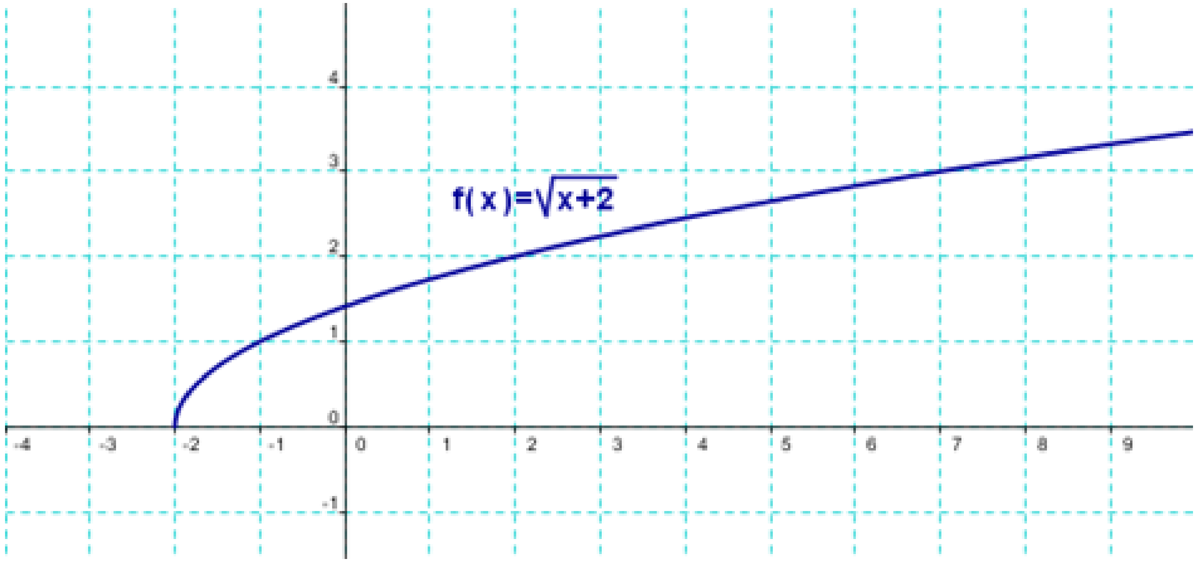


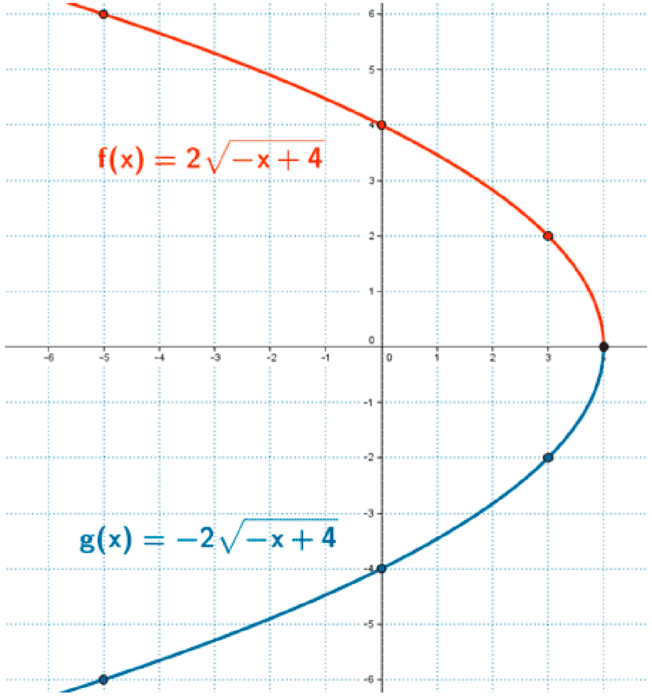


FUNCIÓN – ALGEBRAICAS

- **Radicales o irracional:** Consideremos la definición de un polinomio irracional

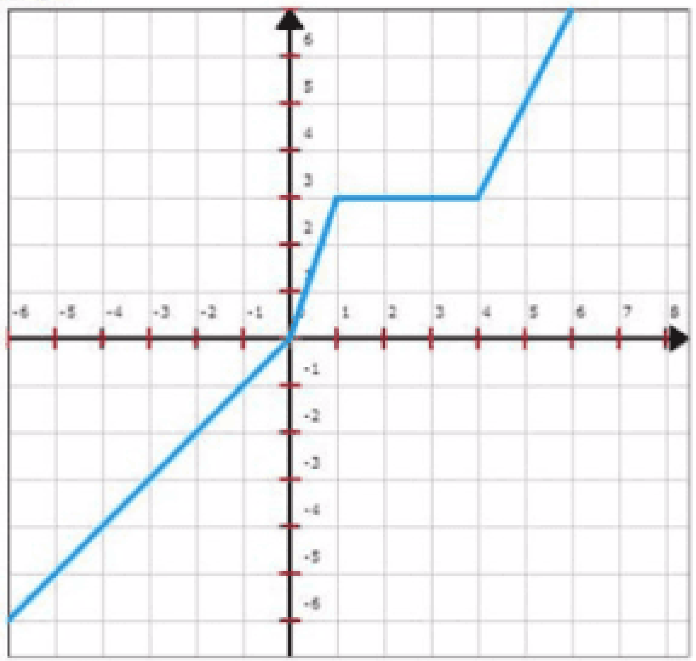
$$f(x) = \sqrt[n]{x};\ Donde: n \in \mathbb{N}; n > 1$$





FUNCIÓN – ALGEBRAICAS

- **A trozos:** una función está definida a trozos o tramos cuando contienen expresiones parciales y en cada una de ellas se especifica el intervalo de validez. La gráfica es discontinua y presenta diferentes comportamientos, dependiendo de las expresiones algebraicas definidas



$$y = f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq -1 \\ 2x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ -x + 4 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

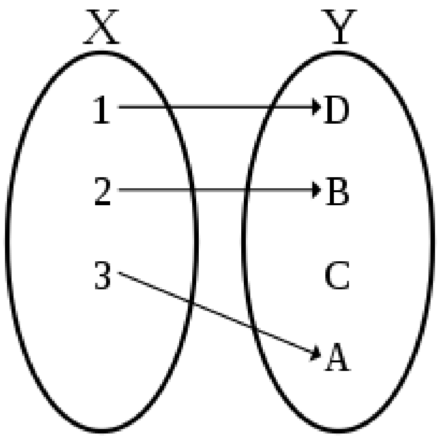
FUNCIÓN – POR SU DOMINIO Y RECORRIDO

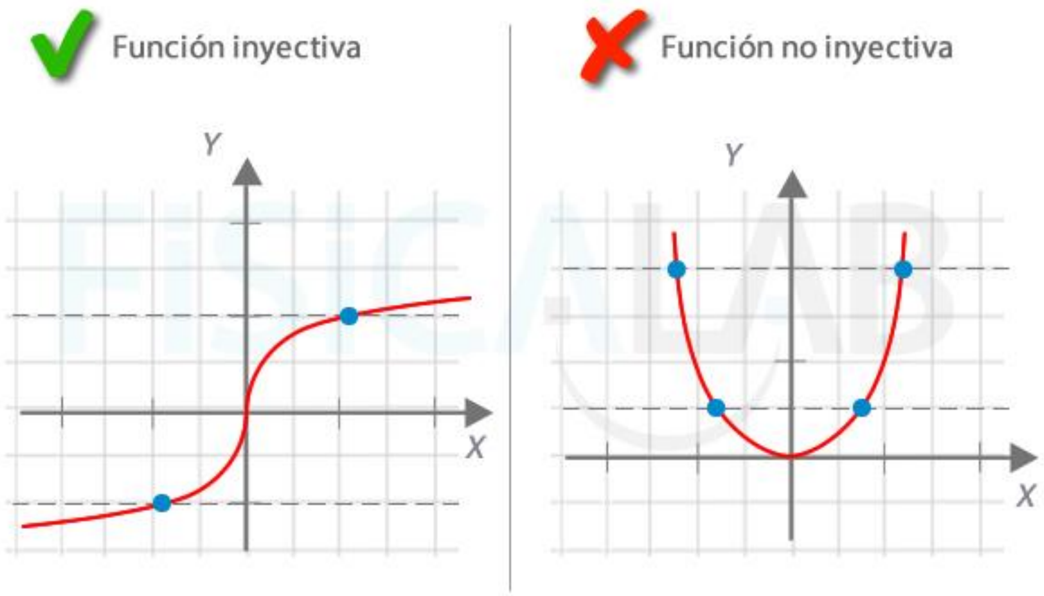
- Se clasifican por las formas de relacionarse los elementos de dominio con los elementos del codominio

Inyectiva	Sobreyectiva
Biyectiva	Inversa

FUNCIÓN – POR SU DOMINIO Y RECORRIDO

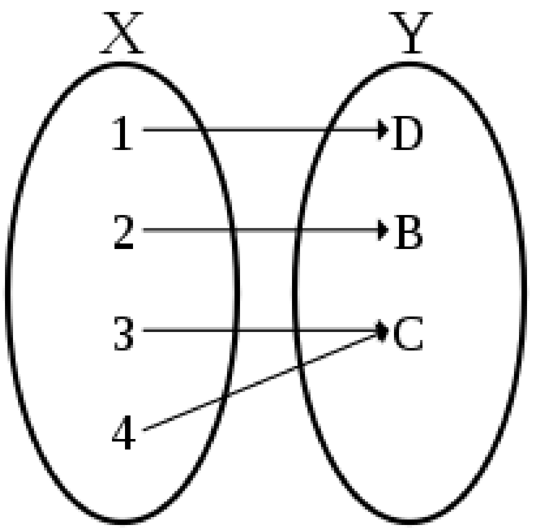
- **Inyectiva:** una función es inyectiva, uno a uno, si a elementos distintos del conjunto X (dominio) les corresponden elementos distintos en el conjunto Y (codominio)

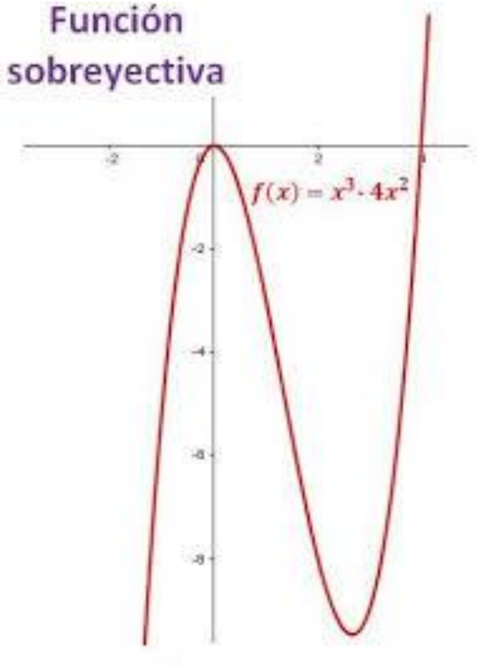


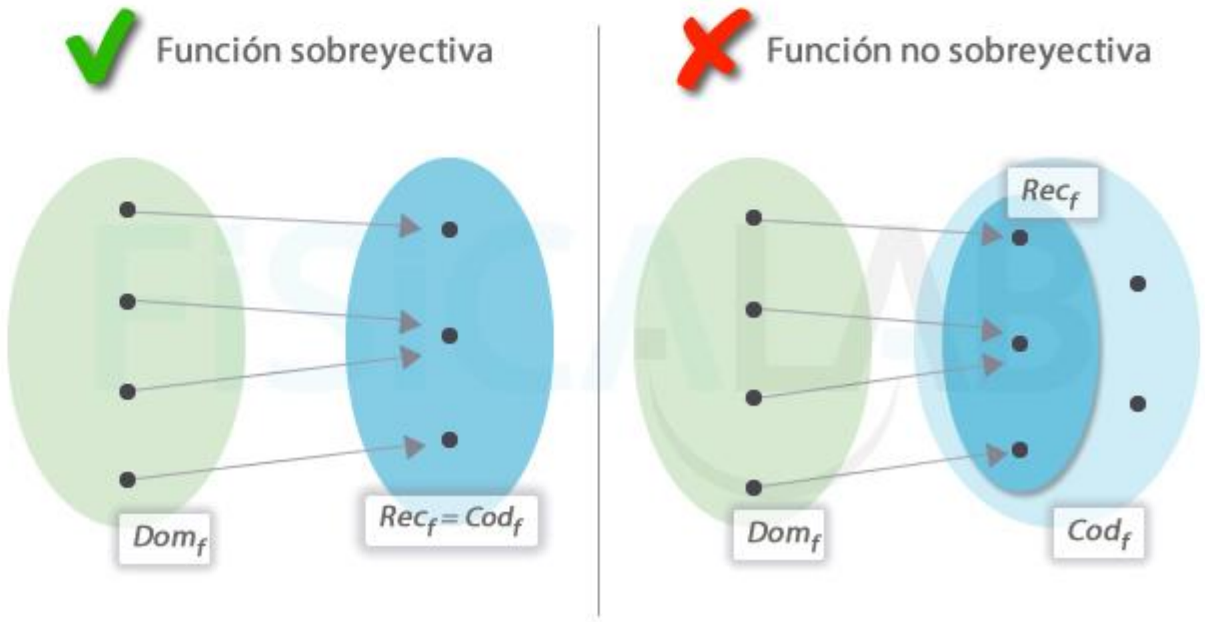


FUNCIÓN – POR SU DOMINIO Y RECORRIDO

- **Sobreyectiva:** una función es sobreyectiva, epiyectiva, suprayectiva, suryectiva, exhaustiva, onto o subyectiva si está aplicada sobre todo el codominio, es decir, cuando cada elemento de Y es la imagen de como mínimo un elemento de X.

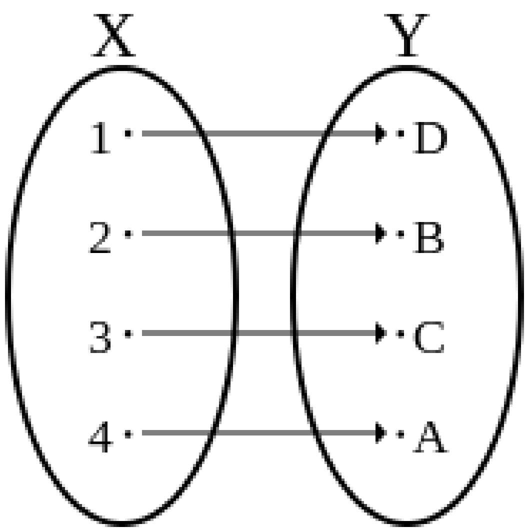


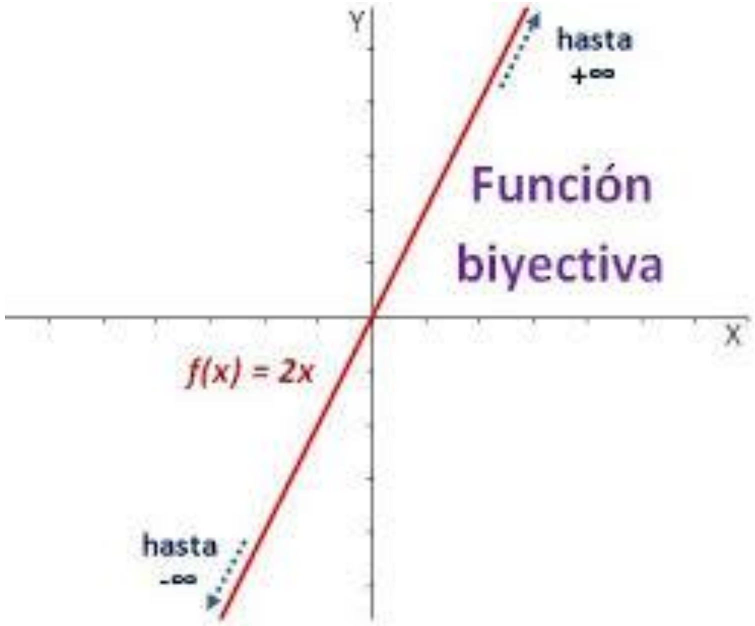


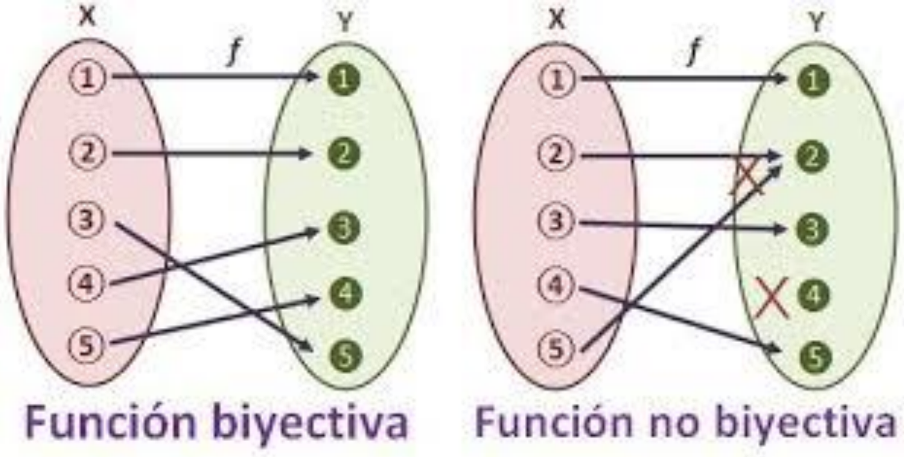


FUNCIÓN – POR SU DOMINIO Y RECORRIDO

- **Biyectiva:** una función es biyectiva si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.







FUNCIÓN – TRASCENDENTES

- Cuando la variable independiente forma parte del exponente o de la base del logaritmo

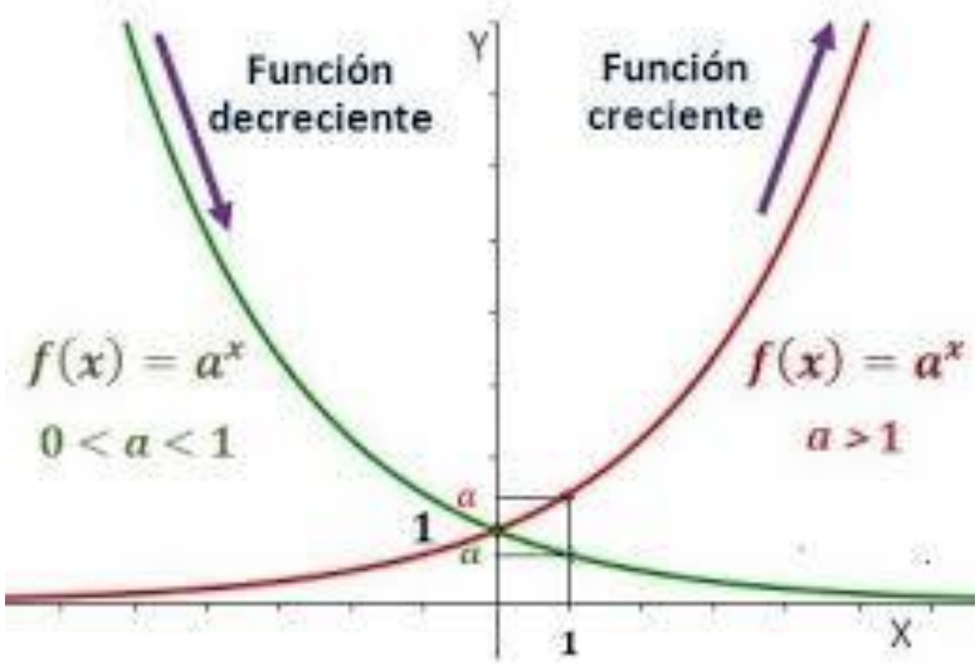
Exponenciales

Logarítmicas

Trigonométricas

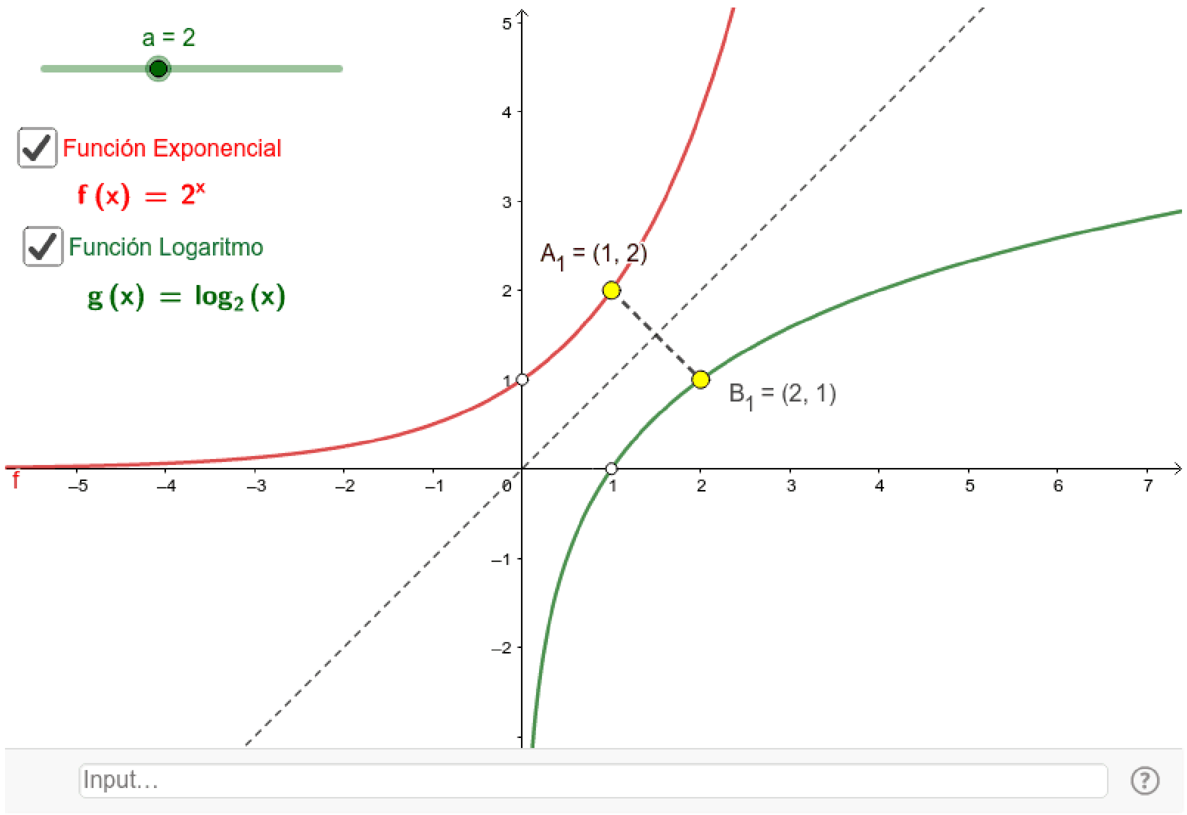
FUNCIÓN – TRASCENDENTES - EXPONENCIALES

- Son aquellas de la forma
- $f(x) = a^x\ ; a > 0; a \in \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x$



FUNCIÓN – TRASCENDENTES - LOGARÍTMICAS

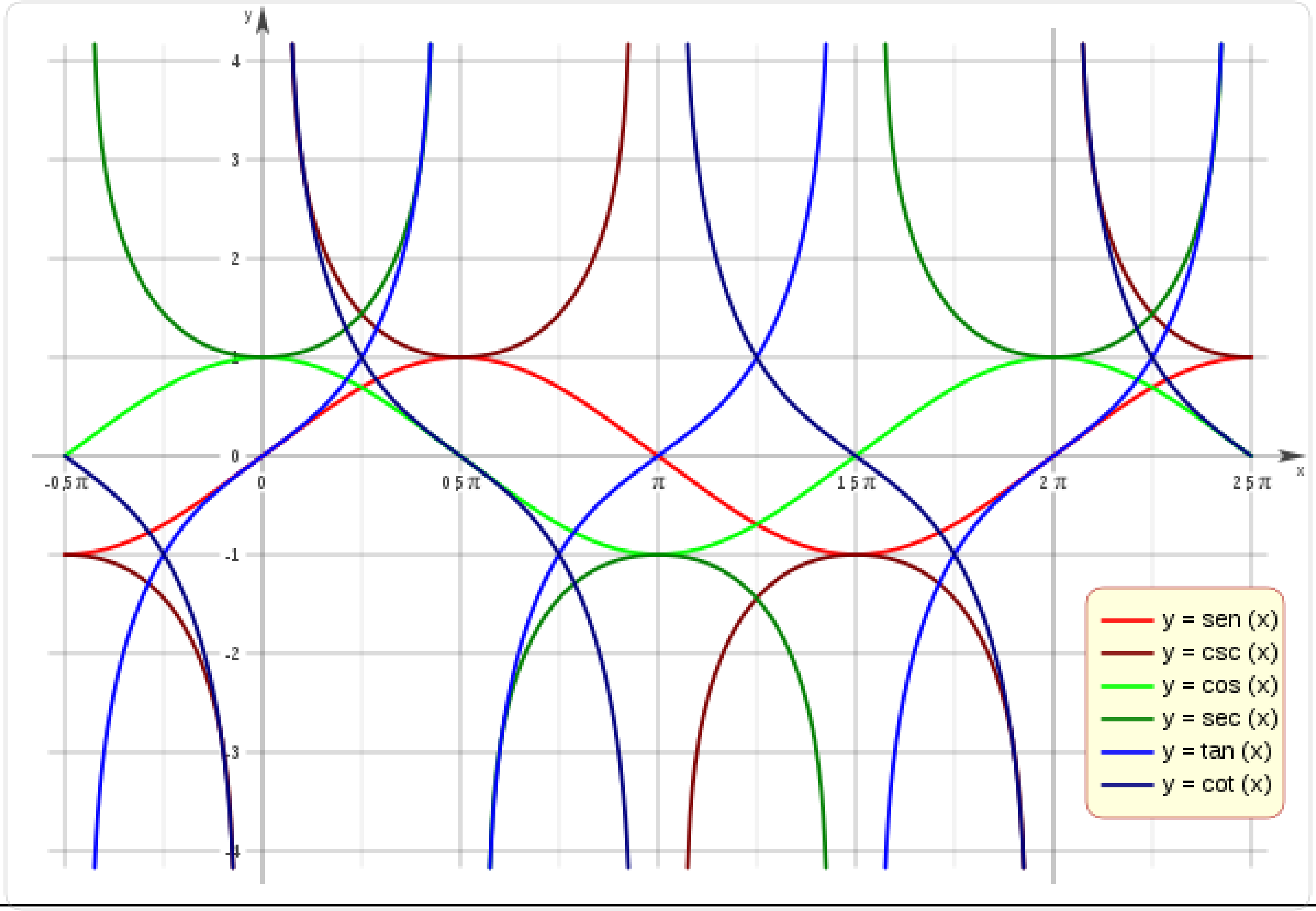
- Son aquellas de la forma
- $f(x) = log_a(x)$
- $f(x) = log(x)$



FUNCIÓN – TRASCENDENTES - TRIGONOMÉTRICAS

- Son aquellas de la forma
- $f(x) = \sin(x)$; $f(x) = cos(x)$; $f(x) = tg(x)$
- $f(x) = sec(x)$; $f(x) = csc(x)$; $f(x) = ctg(x)$

FUNCIÓN – TRASCENDENTES - TRIGONOMÉTRICAS



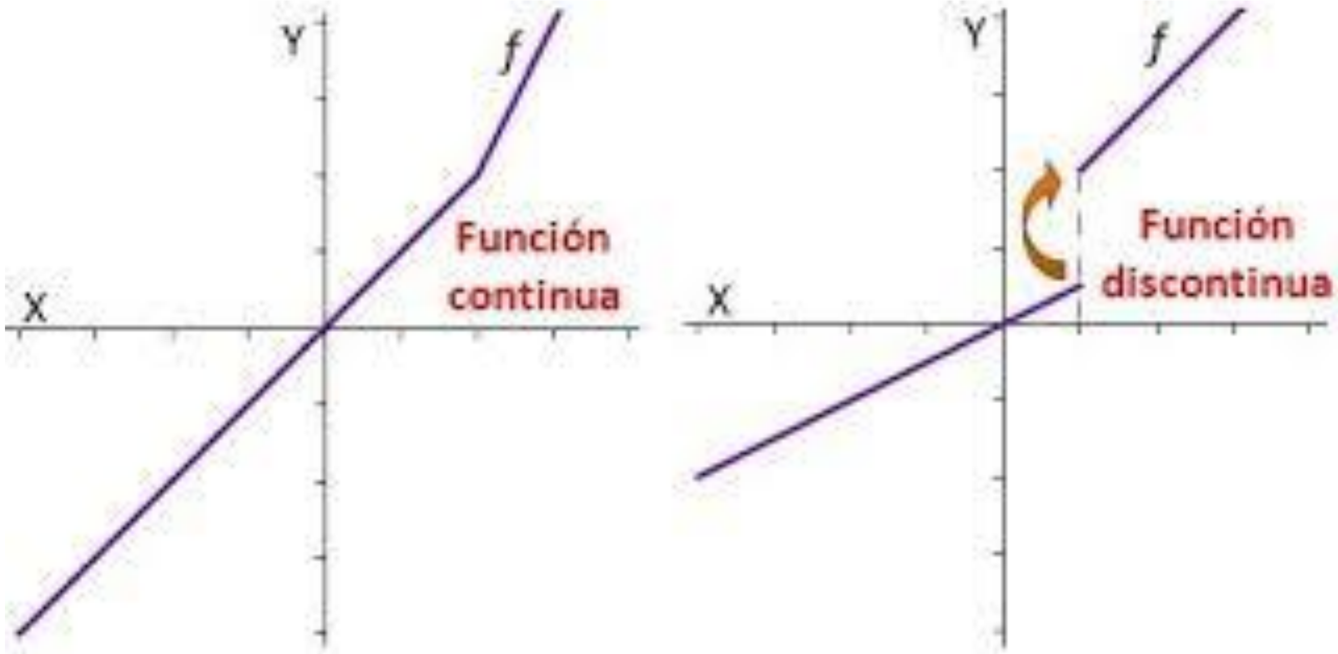
FUNCIÓN – POR SU COMPORTAMIENTO

Continuas

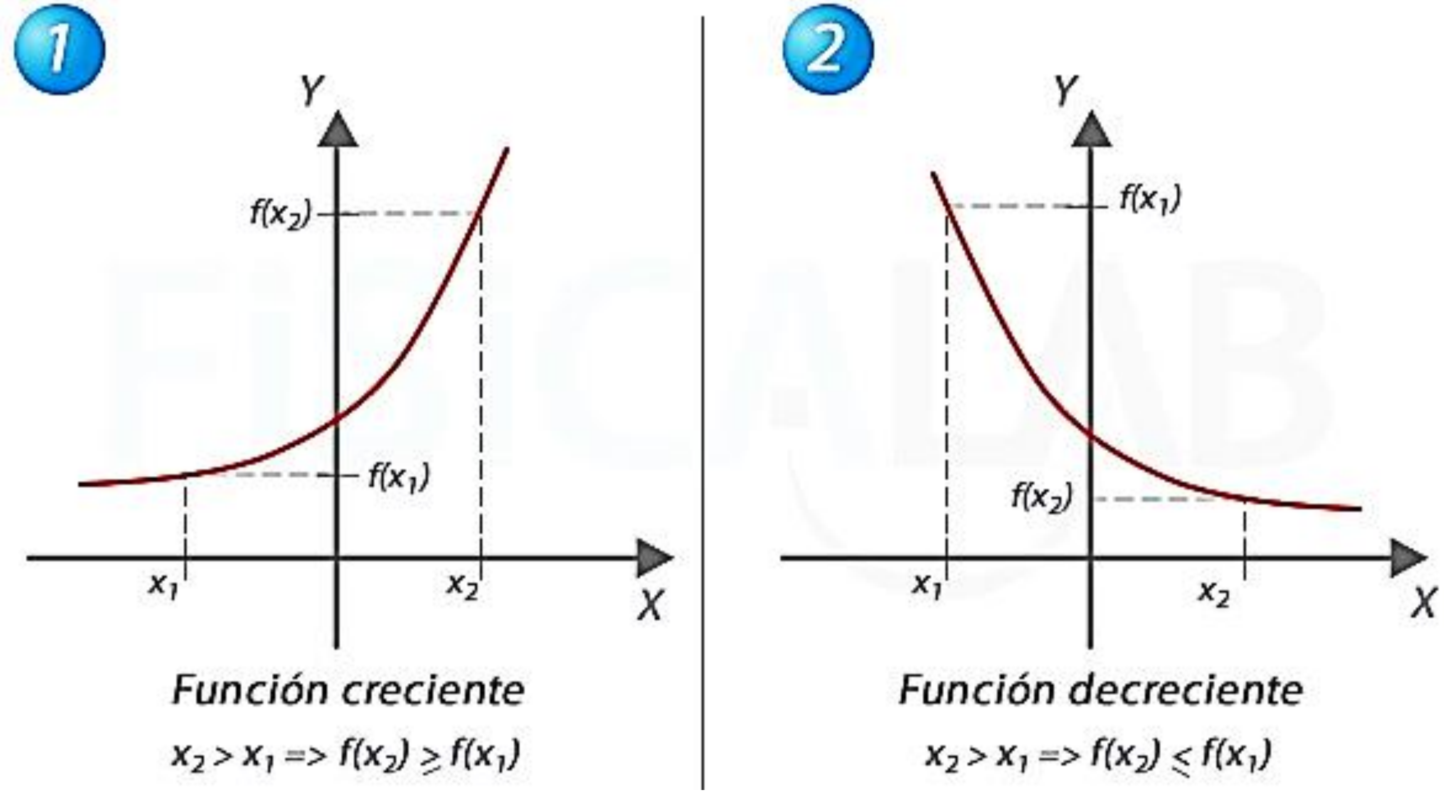
Discontinuas

Crecientes / Decrecientes

FUNCIÓN – POR SU COMPORTAMIENTO –CONTINUAS-DISCONTINUAS



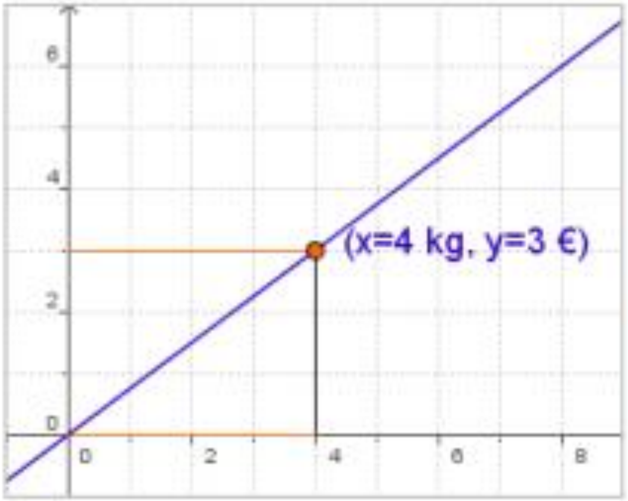
FUNCIÓN – POR SU COMPORTAMIENTO –CRECIENTES- DECRECIENTES



APLICACIONES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO $f(x) = ax + b$

1) Funciones de proporcionalidad directa

Las funciones polinómicas de primer grado con término independiente cero, representan la relación entre dos variables directamente proporcionales.



y=constante·x

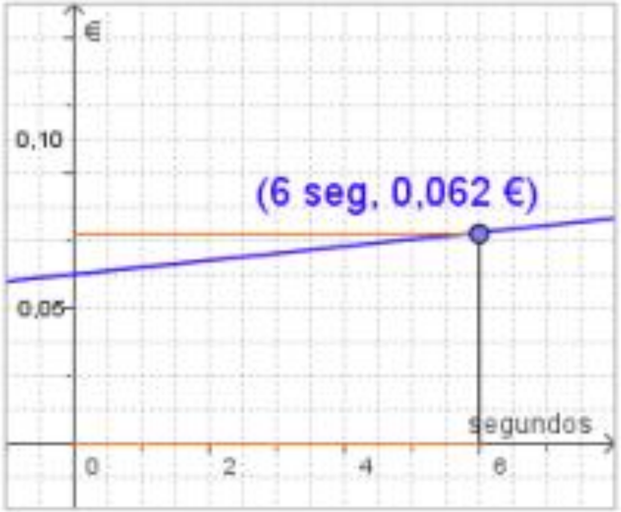
La gráfica de la función de proporcionalidad directa es una recta que pasa por el origen, y su pendiente es la constante de proporcionalidad

APLICACIONES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO $f(x) = ax + b$

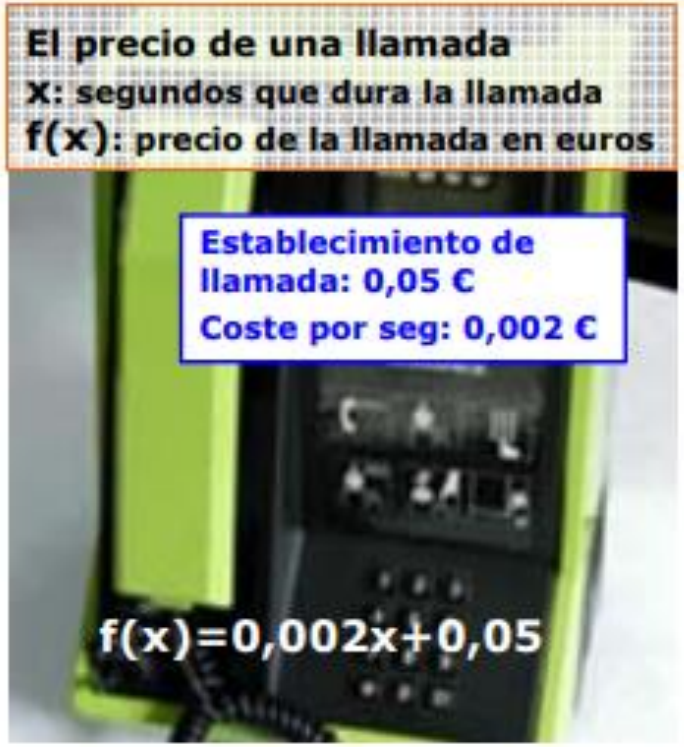
2) Tarificación telefónica por segundos

Para calcular el precio de una llamada telefónica se utilizan funciones polinómicas de primer grado.

y=precio por segundo·x+establecimiento de llamada



x seg	**f(x)** €
0	0,05
1	0.052
10	0,07
60	0,17

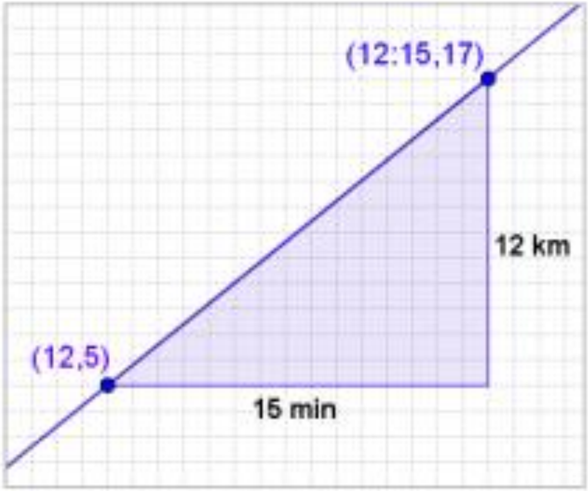


APLICACIONES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS POLINÓMICAS DE PRIMER GRADO $f(x) = ax + b$

3) Recorrido con velocidad constante

Si a las 12 estoy en el km 5 de una carretera y manteniendo una velocidad constante a las 12:15 estoy en el km 15, ¿qué velocidad llevo?.

Punto kilométrico=velocidad·t+pto. kilométrico inicial



La velocidad es la **pendiente** de la recta que pasa por los puntos (12,5) y (12:15,17)

$$vel = \frac{17-5}{15} = \frac{12}{15}\frac{km}{min} = \frac{12 \cdot 60}{15}\frac{km}{h} = 48\frac{km}{h}$$

EJERCICIOS

- Funciones algebraicas polinomiales

En cada caso haz una tabla de valores y comprueba que los puntos obtenidos son de la gráfica.

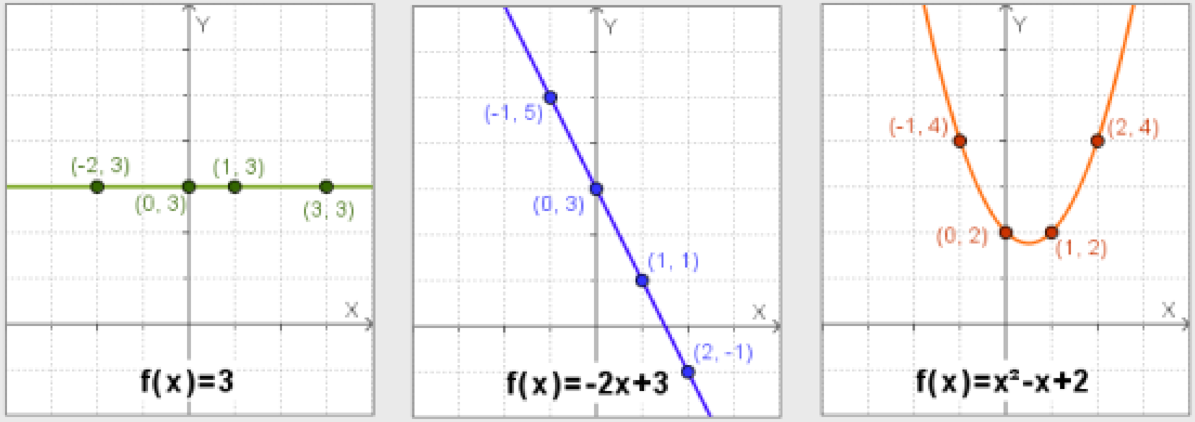
a) $f(x)=3$ b) $f(x)=-2x+3$ c) $f(x)=x^2-x+2$

Solución

x	f(x)
0	3
1	3
2	3
-2	3

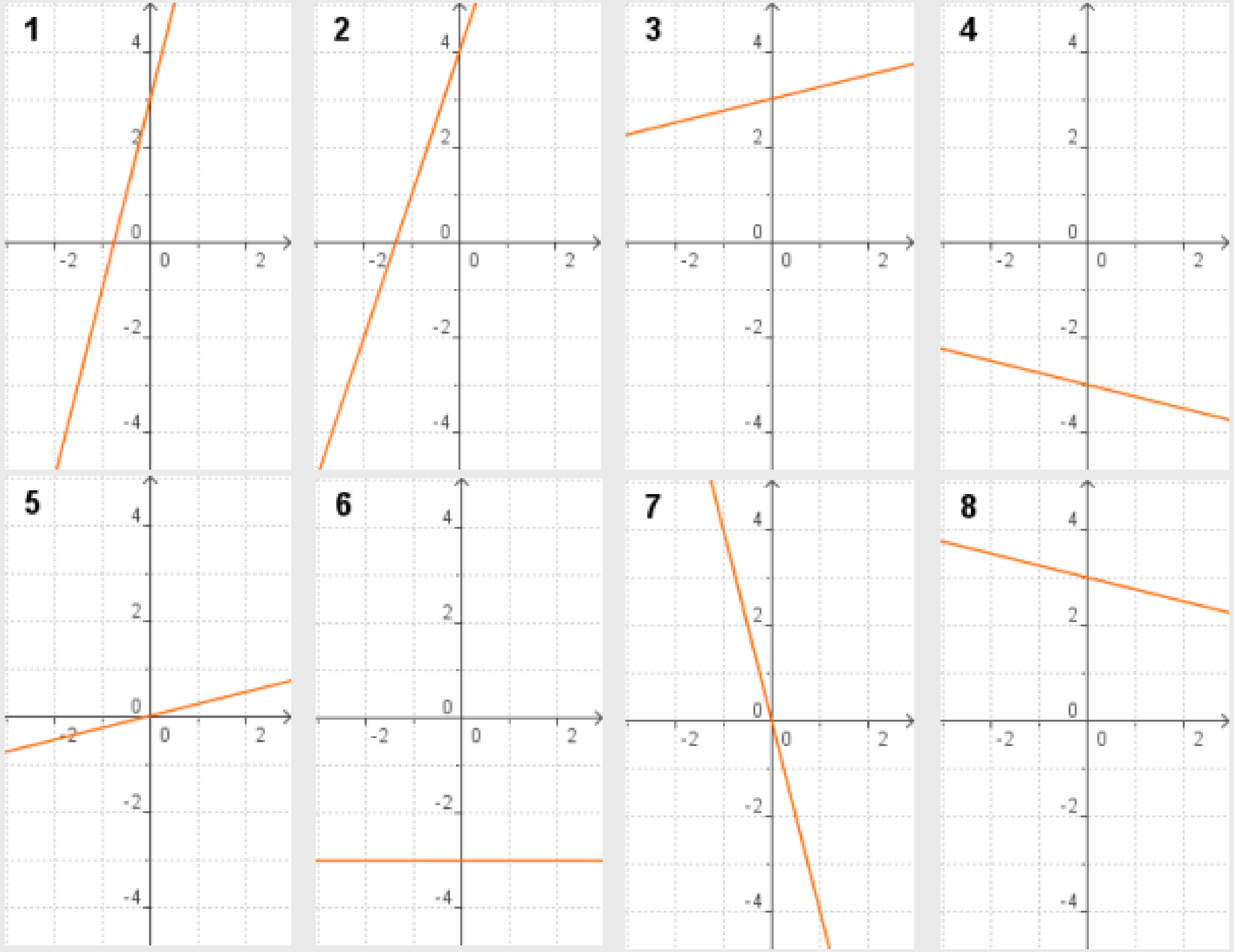
x	f(x)
0	3
1	1
2	-1
-1	5

x	f(x)
0	2
1	2
2	4
-1	4



EJERCICIOS

¿Qué gráfica corresponde a cada ecuación?



a) $y=x/4 +3$

b) $y=4x+3$

c) $y=-x/4-3$

d) $y=-x/4 +3$

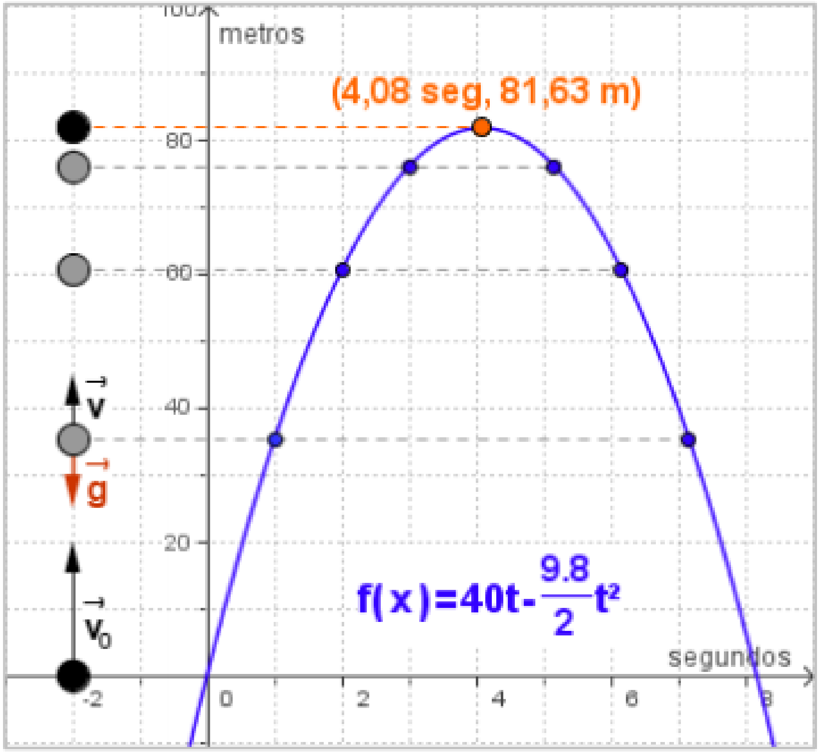
e) $y=-3$

f) $y=3x+4$

g) $y=x/4$

h) $y=-4x$

APLICACIONES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO $f(x) = ax^2 + bx + c$



1) Movimiento uniformemente acelerado

Un ejemplo de movimiento uniformemente acelerado o de aceleración constante, es el de **caída libre** en el que interviene la aceleración de la gravedad.
Las ecuaciones de este movimiento son:

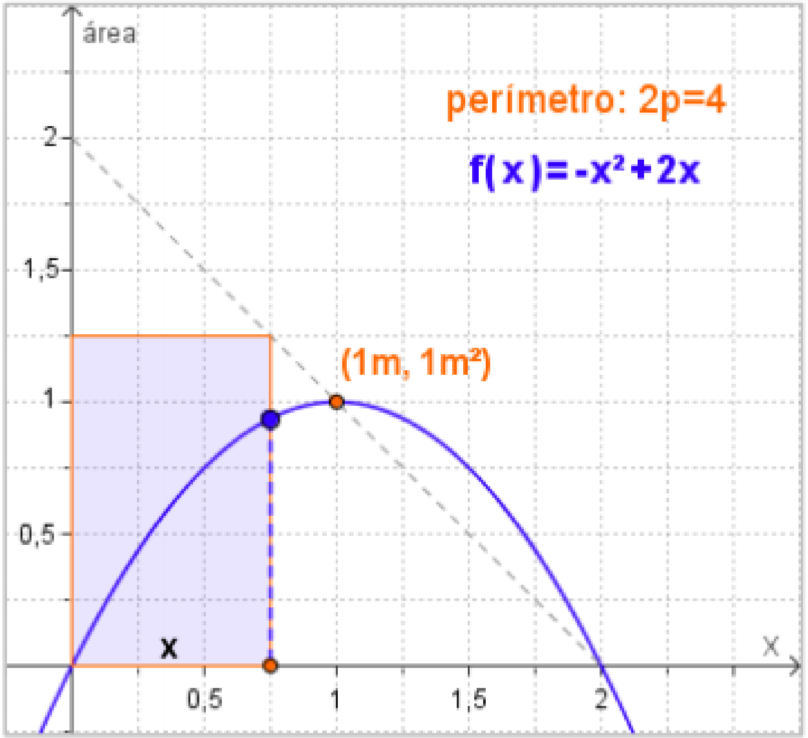
$v=v_0+gt$ $\quad$ $e=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$ $\quad$ $\mathbf{v_0}$: vel. inicial $\quad$ $\mathbf{g}\cong 9.8$ m/seg^2

- ***Se lanza desde el suelo hacia arriba un objeto con velocidad inicial 40 m/seg, ¿qué altura alcanza?.***

  $\mathbf{f(x)=v_0x-4,9x^2}$ $\quad$ **x**:tiempo $\quad$ $\mathbf{g}\cong -9.8$ m/seg^2

  Es una parábola de vértice (v_0/g, $\mathbf{f(v_0/g)}$), luego la altura máxima que alcanza es f(v_0/g) m.

APLICACIONES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO $f(x) = ax^2 + bx + c$



2) Rectángulo de área máxima

Con un mismo perímetro se pueden construir distintos rectángulos, entre todos ellos deseamos encontrar el de área máxima.

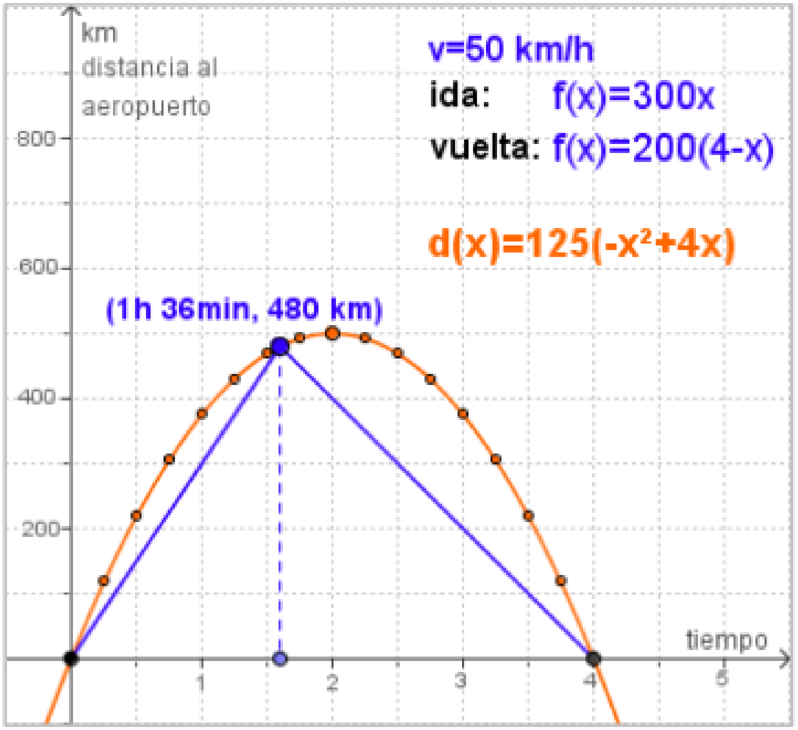
- ***Entre todos los rectángulos cuyo perímetro es 2p m., ¿qué dimensiones tiene el de área máxima?.***

  Perímetro=2p   base=x   altura=2-x

  Área=base·altura $f(x)=x\cdot(p-x)$ $\mathbf{f(x)=-x^2+px}$

  Es una parábola de vértice (**p/2**, $(p/2)^2$), luego se trata de un cuadrado de lado p/2 m.

APLICACIONES DE FUNCIONES ALGEBRAICAS POLINÓMICAS DE SEGUNDO GRADO $f(x) = ax^2 + bx + c$



3) Punto de no retorno

Un avión tiene combustible para 4 horas, viajando a velocidad constante de 250 km/h sin viento. Al despegar el piloto observa que lleva viento a favor de v km/h, ¿cuál es la máxima distancia a que puede viajar con la seguridad de tener suficiente combustible para volver?.

Velocidad ida: 250+v   Distancia al aeropuerto: f(x)=(250+v)x

Vel. vuelta: 250-v   Distancia al aeropuerto: f(x)=(250-v)(4-x)

El punto en que se cortan las dos rectas es el punto de no retorno, si el piloto va más allá no tendrá combustible suficiente para volver.

Al variar la velocidad del viento los puntos de no retorno obtenidos están sobre la parábola: **d(x)=125x(4-x)**

EJERCICIOS

Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x)= 1,5x^2$ b) $f(x)=-0,5x^2$

Representa gráficamente las parábolas siguientes:

a) $f(x)=2x^2-8x+2$ b) $f(x)=-x^2+4x+3$

LOGARITMOS - DEFINICIÓN

- La palabra logaritmo proviene de las palabras griegas logos: relación y arithmos: número, debido a el matemático Napier estableció una relación entre los términos de las progresiones geométricas y aritméticas.
- La definición de logaritmo es la siguiente:
  - Para todos los número positivos a, donde $a \neq 1$
  - $y = log_a x$, significa que $a^y = x$
- Expresando en palabras, el logaritmo del número x en la base a es el exponente al que debe elevarse la base a para obtener el número x
- Es decir, los logaritmos son otra manera de pensar en los exponentes. Ya que sirven para revertir los exponentes y son muy útiles para resolver ecuaciones exponenciales.

LOGARITMOS - DEFINICIÓN

- Por ejemplo, sabemos que 2 elevado a la cuarta potencia es igual a 16 y esto se expresa mediante $2^4 = 16$
- Ahora supongamos que se pregunta: "¿2 elevado a qué potencia es igual a 16?”. La respuesta sería 4. Esto se puede expresar utilizando logaritmos, de la siguiente manera $log_2(16) = 4$.

$$log_2(16) = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$$

- Ambas ecuaciones describen la misma relación (equivalentes) entre los número 2, 4 y 16, donde 2 es la base y 4 es el exponente
- La diferencia es que la forma exponencial aísla la potencia de 16, y la forma logarítmica aísla el exponente 4

Forma logarítmica		Forma exponencial
$\log_2(8) = 3$	$\Longleftrightarrow$	$2^3 = 8$
$\log_3(81) = 4$	$\Longleftrightarrow$	$3^4 = 81$
$\log_5(25) = 2$	$\Longleftrightarrow$	$5^2 = 25$

LOGARITMOS - DEFINICIÓN

$$\overset{\text{Logaritmo}}{y} = \log_{\underset{\text{Base}}{a}} \overset{\text{Número}}{x} \qquad\qquad \underset{\text{Número}}{x} = \underset{\text{Base}}{a}^{\overset{\text{Exponente}}{y}}$$

- Como consecuencia de la definición de logaritmo, se puede deducir estas identidades

Si $a > 0$ y $a \neq 1$, entonces

1.) $\log_a a^x = x$

2.) $a^{\log_a x} = x \qquad (x > 0)$

LOGARITMOS - DEFINICIÓN

$$\log_6 6^5 = 5$$

$$\log_6 6^x = x$$

$$3^{\log_3 7} = 7$$

$$5^{\log_5 x} = x \qquad (x > 0)$$

LOGARITMOS – RESTRICCIONES EN LAS VARIABLES

$\log_b(a)$ está definido cuando la base b es positiva y diferente de 1, y el argumento o valor de entrada a es positivo. Estas restricciones son resultado de la conexión entre logaritmos y exponentes:

Restricción	Razonamiento
$b > 0$	En una función exponencial la base b debe ser positiva, por definición.
$a > 0$	$\log_b(a) = c$ significa que $b^c = a$. Como un número positivo elevado a cualquier potencia es positivo, o sea $b^c > 0$, tenemos que $a > 0$.
$b \neq 1$	Supongamos por un momento que b *pudiera* ser 1. Consideremos ahora la ecuación $\log_1(3) = x$. La forma exponencial equivalente sería $1^x = 3$. Pero esto nunca puede ser verdadero, pues 1 elevado a cualquier potencia es siempre 1. Así, tenemos que $b \neq 1$.

LOGARITMOS - EJERCICIOS

¿Cuál de las siguientes es equivalente a $2^5 = 32$?

Escoge 1 respuesta:

- $\log_2(32) = 5$
- $\log_5(2) = 32$
- $\log_{32}(5) = 2$

¿Cuál de las siguientes es equivalente a $5^3 = 125$?

Escoge 1 respuesta:

- $\log_3(125) = 5$
- $\log_5(125) = 3$
- $\log_{125}(5) = 3$

Escribe $\log_2(64) = 6$ en forma exponencial.

4) Escribe $\log_4(16) = 2$ en forma exponencial.

LOGARITMO COMÚN

- Los logaritmos de base 10 se conocen como logaritmos comunes o logaritmos de Briggs.
- Éste es el sistema de logaritmos que se utiliza, principalmente, para realizar operaciones aritméticas.
- En este tipo de logaritmos los números como 10, 100, 1000, 0.1, 0.01, 0.001, etc., es decir las potencias de diez, tienen como logaritmos a números enteros, y cualquier otro número tiene como logaritmo a un número entero más una fracción.
- Al escribir estos logaritmos matemáticamente omitimos la base. Se entiende que es 10.
- El logaritmo común de x se denota como $\log x$

$$log_{10}(x) = \log(x)$$

$$\log 100 = 2$$

$$\log 0.0001 = -4$$

$$\log 5 = 0 + 0.698970...$$

$$\log 0.5 = -1 + 0.698970...$$

LOGARITMO NATURAL

- Los logaritmos naturales, o logaritmos neperianos, que tiene como base el número irracional

$$e = 2{,}71828\ldots$$

- El logaritmo natural de x se representa por $\ln(x)$.
- Como es de esperarse, en este tipo de logaritmos los números que tienen logaritmos enteros son las potencias de e.

$$log_e(x) = \ln(x)$$

- Ejemplos

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^5 = 5$$

$$\ln 6 = 1.791759\ldots$$

$$\ln 0.6 = -0.510823\ldots$$

LOGARITMO COMÚN Y NATURAL

Nombre	Base	Notación usual	Notación especial
Logaritmo común	10	$\log_{10}(x)$	$\log(x)$
Logaritmo natural	e	$\log_e(x)$	$\ln(x)$

PROPIEDADES GENERALES DE LOGARITMOS

- Las propiedades generales de cualquier sistema de logaritmos son:

- La base tiene que ser un número positivo diferente de 1
- El cero y los número negativos no tienen logaritmo
- El logaritmo de la base es 1
- El logaritmo de 1 es cero
- Los número mayores que 1 tienen logaritmo positivo
- Los número comprendidos entre cero y 1 tienen logaritmo negativo

PROPIEDADES GENERALES DE LOGARITMOS

- Ejemplos

1.) $\log_{-4} x$ y $\log_{-11} a$ no existen, porque las bases son negativas.

2.) $\ln(-34)$ y $\log_2(-0.75)$ no existen puesto que -34 y -0.75 son números negativos.

3.) $\log_7 7 = 1, \quad \log_{15} 15 = 1, \quad \log_{0.443} 0.443 = 1$

4.) $\log 1 = \ln 1 = \log_3 1 = \log_{5/7} 1 = 0$

5) $\log 67 = 1.826075..., \quad \log 321 = 2.506505, \quad \ln 92.1 = 4.522875...$

6.) $\ln 0.79 = -0.235722..., \quad \log \frac{2}{3} = -0.176091..., \quad \ln 0.443 = -0.814186...$

LEYES DE OPERACIONES CON LOGARITMOS

Ley del producto

En cualquier sistema de logaritmos, para los números positivos x, y se cumple que:

$$log_a(x.y) = log_a x + log_a y$$

Ley del cociente

En cualquier sistema de logaritmos, para los números positivos x, y se cumple que:

$$log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$$

Ley de la potencia

En cualquier sistema de logaritmos, para los números positivos x, y para cualquier número n, se cumple que:

$$log_a(x^n) = n.(log_a x)$$

PROPIEDADES IMPORTANTES DE LOGARITMOS

Cambio de base	$log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$
Propiedad por definición	$b^{log_b(x)} = x$

EJERCICIOS LOGARITMOS

- Cambio de base

1.) Para obtener $\log_7 81$, sabiendo que $\log_3 81 = 4$ y $\log_3 7 = 1.771244...$, se aplica la fórmula indicada:

$$\log_7 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 7} = \frac{4}{1.771244...} = 2.258300...$$

2.) Para obtener log 0.35, sabiendo que ln 0.35 = –0.049822... y ln 10 = 2.302585..., de acuerdo con la fórmula dada se calcula:

$$\log 0.35 = \frac{\ln 0.35}{\ln 10} = \frac{-1.049822...}{2.302585...} = -0.455932...$$

3.) Para obtener ln 5.76, sabiendo que log 5.76 = 0.760422... y log e = 0.434294..., se procede igual que en los casos anteriores:

$$\ln 5.76 = \frac{\log 5.76}{\log e} = \frac{0.760422...}{0.434294...} = 1.750938...$$

EJERCICIOS LOGARITMOS

- Ecuaciones con logaritmos

1.) Para obtener el valor de x en la ecuación

$$\log 4x = 3\log 2 + 4\log 3$$

se aplican las leyes de logaritmos para dejar:

$$\log 4x = \log 2^3 + \log 3^4$$

$$= \log\left(2^3 \bullet 3^4\right) = \log\left(8 \bullet 81\right)$$

$$\log 4x = \log 648$$

$$4x = 648$$

$$x = \frac{648}{4} = 162$$

EJERCICIOS LOGARITMOS

- Ecuaciones con logaritmos

2.) Para obtener el valor de x en la ecuación

$$\log_2 x - 3\log_2 x = 2$$

se aplican las leyes de logaritmos y:

$$\log_2 x - \log_2 x^3 = 2$$

$$\log_2 \frac{x}{x^3} = 2$$

$$\log_2 \frac{1}{x^2} = 2$$

de acuerdo con la definición de logaritmo:

$$\frac{1}{x^2} = 2^2 = 4$$

$$1 = 4x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

A partir de esta última expresión se podrían obtener dos valores para x:

$$x = 1/2 \quad \text{o} \quad x = -1/2$$

pero el valor negativo no se puede aceptar, puesto que en la ecuación original se tiene $\log_2 x$ y, como se indicó anteriormente, los números negativos no tienen logaritmos.

Por lo tanto, la solución es:

$$x = 1/2$$

EJERCICIOS LOGARITMOS

- Ecuaciones con logaritmos

3.) Para obtener el valor de x en la ecuación

$$\frac{\ln\left(2x^2-4\right)}{\ln\left(x-4\right)}=2$$

se reescribe

$$\ln\left(2x^2-4\right)=2\left[\ln\left(x-4\right)\right]$$

se aplica la ley de la potencia

$$\ln\left(2x^2-4\right)=\ln\left(x-4\right)^2$$

y la definición de logaritmo para obtener que:

$$e^{\left(2x^2-4\right)}=e^{\left(x-4\right)^2}$$

entonces

$$\left(2x^2-4\right)=\left(x-4\right)^2$$

$$2x^2-4=x^2-8x+16$$

$$x^2+8x-20=0$$

De esta última se ecuación se obtiene que $x=2$ o $x=-10$, pero ninguno de los dos valores puede aceptarse porque en la ecuación original el divisor $\ln\left(x-4\right)$, quedaría como $\ln\left(-2\right)$ o $\ln\left(-14\right)$. Por tanto, la ecuación no tiene solución (en los números reales).

EJERCICIOS

$$\log x + \log 20 = 3$$

$$\log(x+1) = \log(x-1) + 3$$

$$2\log x - \log(x+6) = 0$$

$$\log(x+1) - \log x = 1$$

$$\log(4x-1) - \log(x-2) = \log 5$$

$$\log_5 x + \log_5 30 = 3$$

$$\log(2x^2+3) = \log(x^2+5x-3)$$