

ESTRUCTURAS I

Ing. Alejandro Velastegui Cáceres MsC.

VIGAS HIPERESTATICAS

VIGAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

Se conocen con el nombre de vigas estáticamente indeterminadas, aquellas barras en las cuales las reacciones: (fuerzas o momentos) que se presentan como incógnitas son mayores a las ecuaciones del equilibrio estático. En estos casos se hace necesario plantear ecuaciones adicionales que provengan de la deformación elástica.

DEFORMACION ELASTICA: Se denomina así a la deformada que sufre la viga al ser sometida a fuerzas y pares, desapareciendo la llamada deformación al cesar la acción de las fuerzas y pares, siempre y cuando no se haya rebasado el límite elástico del material que está hecha la barra.

HIPOTESIS Y LIMITACIONES: En el estudio que se desarrollará, se considerarán únicamente cargas verticales perpendiculares al eje de la viga, eliminándose toda reacción horizontal que pudiera aparecer en los llamados apoyos de articulación o de empotramiento perfecto.

En el supuesto caso que las vigas se encontraran apoyadas en tal circunstancia, que ninguno de los vínculos permitiera un desplazamiento horizontal, se produ-

ciría entonces la presencia de una FUEZA AXIAL o FUERZA PARALELA AL EJE LONGITUDINAL DE LA BARRA.

En nuestra hipótesis partiremos de la idea de prescindir de cualquier fuerza axial que pudiera aparecer a lo largo de este eje longitudinal.

Para la resolución de los problemas de vigas estáticamente indeterminadas, se hace necesario el análisis de la deformación en vigas, la misma que puede ser estudiada por métodos como:

- a) Trabajos Virtuales
- b) Area de Momentos
- c) Doble Integración
- d) Energéticos

El desplazamiento vertical (Δ) que aparece en el instante que se deforma la viga cuando actúan las fuerzas perpendiculares al eje longitudinal de la barra, se conoce con el nombre de FLECHA.

METODO AREA DE MOMENTOS

Este método hace referencia a dos teoremas, los cuales no demostraremos por considerar de mayor importancia la aplicación práctica de éstos a diversos

problemas que se plantearán, así como la prioridad que debe darse a los conceptos, puesto que dichas demostraciones se les puede encontrar en varios libros de resistencia de materiales.

Consideremos la elástica A - B de la viga



ENUNCIADO DEL PRIMER TEOREMA AREA DE MOMENTOS

El ángulo Θ , formado por las tangentes trazadas por los puntos A y B de la deformada elástica de la barra, es igual al área del diagrama de momentos flectores entre esos puntos, divididos para EI.

$$\Theta = \int_A^B \frac{M dx}{EI}$$

ENUNCIADO DEL SEGUNDO TEOREMA AREA DE MOMENTOS

El desplazamiento vertical Δ entre el punto "B" de la elástica y la tangente trazada a la curva por "A", es igual al momento respecto a la vertical por "B" del área del diagrama de momentos flectores entre A y B, divididos para EI.

$$\Delta = \int_A^B \frac{Mx \cdot dx}{EI}$$

E = Módulo de elasticidad de la viga

I = Momento de inercia de la sección de la barra respecto al eje neutro que pasa por su centro de gravedad

M = Momento Flector

DIAGRAMAS DE MOMENTOS FLECTORES POR PARTES

Estos diagramas, al igual que en gráficos de momentos flectores integrados, debe representárselos por el efecto que producen las fuerzas con relación al eje neutro o eje longitudinal de la barra, con la diferencia que para los diagramas de momentos flectores por partes se analiza cada una de las fuerzas en forma independiente.

Si el efecto de las fuerzas analizadas individualmente traccionan las fibras superiores de la viga el diagrama será negativo (-) y si el efecto produce tracción en las fibras inferiores el diagrama será positivo (+), representándose los diagramas hacia donde se produzcan las tracciones.

NOTA: Los ejercicios de aplicación están encaminados al análisis y obtención exclusivamente de reacciones, momentos positivos y negativos, representaciones gráficas del esfuerzo cortante y momento flector.

EJERCICIO DE APLICACION # 13

VIGA ESTATICAMENTE INDETERMINADA

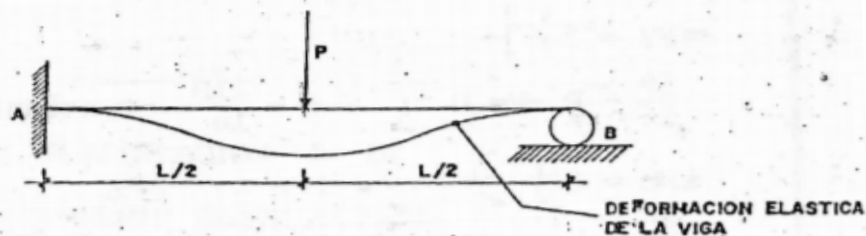
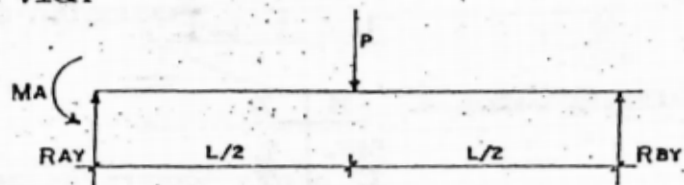


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE EN LA VIGA



$$\sum F_Y = 0 \quad \uparrow + \quad \downarrow -$$

$$RAY + RBY - P = 0 \quad ; \quad RAY + RBY = P$$

$$\sum MA = 0 \quad (+) \quad (-)$$

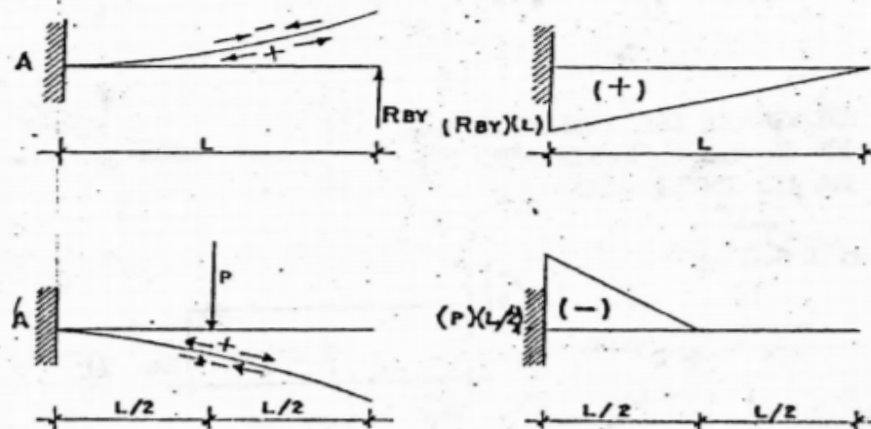
$$MA - (P) \left(\frac{L}{2} \right) + (RBY) (L) = 0 \quad ; \quad MA + (RBY) (L) = \frac{PL}{2}$$

Si trazamos una tangente a la curva de la deformación elástica de la viga en el punto "A" (empotrado), ésta coincide con la posición original de la viga sin deformar, el desplazamiento vertical del punto

"B" con respecto a "A", es CERO.

$$(\Delta_{B-A} = 0)$$

DIAGRAMA DE MOMENTOS POR PARTES



Aplicando el segundo Teorema del Area de Momentos tenemos:

$$(RBY) (L) (L) \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{2}{3} L \right] - (P) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{L}{2} + \frac{2}{3} \frac{L}{2} \right] =$$

$$(\Delta_{B-A}) EI = 0$$

$$(RBY) \frac{L^3}{3} = \frac{PL^2}{8} \left[\frac{5L}{6} \right] ; \quad (RBY) \frac{L^3}{3} = \frac{5PL^3}{48}$$

$$RBY = \frac{5P}{16}$$

Reemplazando en: $RAY + RBY = P$

$$RAY + \frac{5P}{16} = P ; RAY = \frac{11P}{16}$$

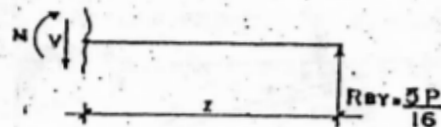
$$\text{Reemplazando en: } MA + (RAY)(L) = \frac{PL}{2}$$

$$MA + \left(\frac{5P}{16}\right)(L) = \frac{PL}{2}$$

$$MA = \frac{3PL}{16}$$

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE
EN EL SECCIONAMIENTO PA-
RA EL INTERVALO

$$0 < z < \frac{L}{2}$$



$$\sum F_Y = 0 \uparrow + \downarrow -$$

$$\frac{5P}{16} - V = 0 ; V = \frac{5P}{16} \text{ -constante-}$$

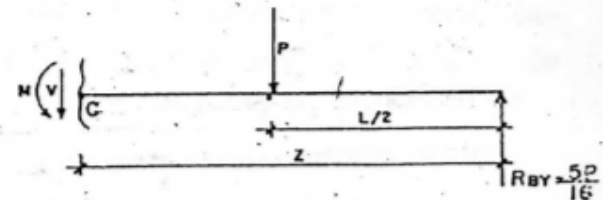
$$\sum M_C = 0 \left(+ \quad - \right)$$

$$\left(\frac{5P}{16}\right)(z) - M = 0 ; M = \left(\frac{5P}{16}\right)(z) \text{ -ecuación de la recta-}$$

M	z
0	0
$\frac{5PL}{32}$	L/2

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE
EN EL SECCIONAMIENTO PA-
RA EL INTERVALO

$$\frac{L}{2} < z < L$$



$$\sum F_Y = 0 \uparrow + \downarrow -$$

$$\frac{5P}{16} - P - V = 0 ; V = -\frac{11P}{16} \text{ -constante-}$$

$$\sum M_C = 0 \left(+ \quad - \right)$$

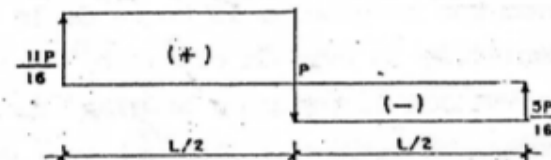
$$\left(\frac{5P}{16}\right)(z) - (P)\left(z - \frac{L}{2}\right) - M = 0 ; M = \left(\frac{5P}{16}\right)(z) - (P)\left(z - \frac{L}{2}\right)$$

-ecuación de la recta-

Dando valores:

M	z
$\frac{5PL}{32}$	L/2
$-\frac{3PL}{16}$	L

DIAGRAMA DEL ESFUERZO CORTANTE



EJERCICIO DE APLICACION # 13

VIGA ESTATICAMENTE INDETERMINADA

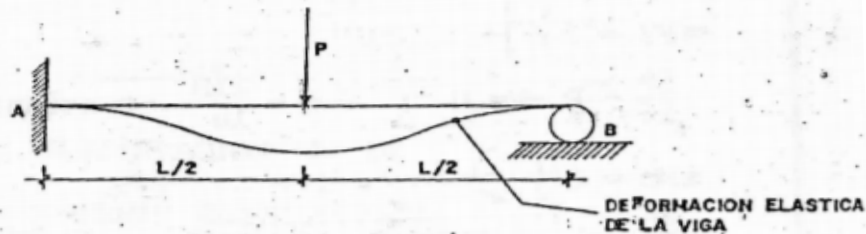
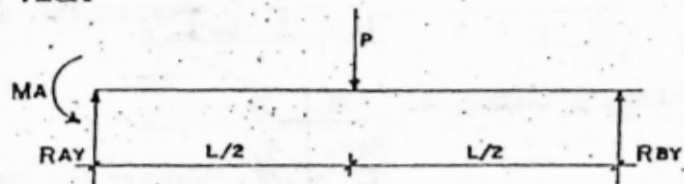


DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE EN LA VIGA



$$\sum F_Y = 0 \quad \uparrow + \quad \downarrow -$$

$$RAY + RBY - P = 0 \quad ; \quad RAY + RBY = P$$

$$\sum MA = 0 \quad (+) \quad (-)$$

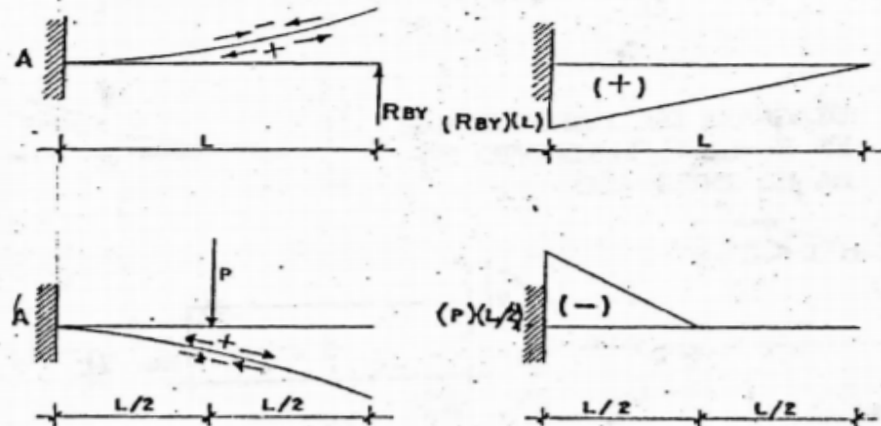
$$MA - (P) \left(\frac{L}{2} \right) + (RBY) (L) = 0 \quad ; \quad MA + (RBY) (L) = \frac{PL}{2}$$

Si trazamos una tangente a la curva de la deformación elástica de la viga en el punto "A" (empotrado), ésta coincide con la posición original de la viga sin deformar, el desplazamiento vertical del punto

"B" con respecto a "A", es CERO.

$$(\Delta_{B-A} = 0)$$

DIAGRAMA DE MOMENTOS POR PARTES



Aplicando el segundo Teorema del Area de Momentos tenemos:

$$(RBY) (L) (L) \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{2}{3} L \right] - (P) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) \left[\frac{L}{2} + \frac{2}{3} \frac{L}{2} \right] =$$

$$(\Delta_{B-A}) EI = 0$$

$$(RBY) \frac{L^3}{3} = \frac{PL^2}{8} \left[\frac{5L}{6} \right] ; \quad (RBY) \frac{L^3}{3} = \frac{5PL^3}{48}$$

$$RBY = \frac{5P}{16}$$

Reemplazando en: $RAY + RBY = P$

DIAGRAMA DEL MOMENTO FLECTOR

