Apéndice A

Cálculo de límites

Versión: 9 de septiembre de 2016

A.1 Álgebra y propiedades de los límites

LÍMITES DE ALGUNAS FUNCIONES ELEMENTALES	
Si $P(x)$ es un polinomio, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} P(x) = \pm\infty$, (el signo depende del coeficiente dominante)	
Si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$	Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$
Si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$	Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$
Si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty$	Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty$
Si $a > 1$, $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a(x) = -\infty$	Si $0 < a < 1$, $\lim\limits_{x\to0^+} \log_a(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \tan(x) = +\infty$ Lo mismo es cierto, por periodicidad, cuando x tiende por la izquierda a cualquier múltiplo impar de $\pi/2$.	$\lim\limits_{x\to(\pi/2)^+} \tan(x) = -\infty$ Lo mismo es cierto, por periodicidad, cuando x tiende por la derecha a cualquier múltiplo impar de $\pi/2$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen}(x)$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos(x)$ no existen.

Normalmente habrá que calcular el límite de funciones construidas a partir de las funciones elementales mediante operaciones aritméticas y/o composición de funciones.

En estos casos son de aplicación las reglas que se resumen en el cuadro siguiente (hay que prestar especial atención a que se cumplan las condiciones que se especifican en cada caso).

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LOS LÍMITES	
Se supone aquí que existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ y no son infinitos.	
$\lim\limits_{x\to a} k = k$ (es límite de una constante es ella misma)	$\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$
$\lim\limits_{x\to a} (f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (siempre que el límite de g no sea 0).
$\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ (siempre que los límites de f y g no sean ambos 0).	

En los casos en que no sean de aplicación las propiedades anteriores, porque no se verifiquen las condiciones expresadas (por ejemplo, porque alguno de los límites sea infinito, o el límite de un denominador sea 0, etc.), se puede recurrir al cuadro siguiente, que hay que entender de forma simbólica, es decir, por ejemplo

$$\frac{0}{\infty} = 0$$

significa que si se tiene que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

En el cuadro siguiente aparecen, además, algunos casos como «Indeterminado». Esto significa que no es posible *a priori* conocer el límite, siendo necesario proceder a un análisis detallado de cada caso concreto.

OPERACIONES CON INFINITO		
$\infty \pm k = \infty$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(+\infty) - (+\infty) =$ Indeterminado
$\infty \cdot k = \infty \quad (\text{si } k \neq 0)$	$\infty \cdot \infty = \infty$	$0 \cdot \infty =$ Indeterminado
$\frac{0}{k} = 0$	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{0}{0} =$ Indeterminado
$\frac{k}{0} = \infty$	$\frac{k}{\infty} = 0$	
$\frac{\infty}{k} = \infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$\frac{\infty}{\infty} =$ Indeterminado
$0^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k > 0 \\ \infty & \text{si } k < 0 \end{cases}$	$0^{+\infty} = 0$	$0^0 =$ Indeterminado
$k^0 = 1$	$k^{+\infty} = \begin{cases} \infty & \text{si } k > 1 \\ 0 & \text{si } 0 < k < 1 \end{cases}$	$1^\infty =$ Indeterminado
	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$	$\infty^0 =$ Indeterminado

En muchos casos de límites indeterminados lo que hay que hacer es determinar cuál, entre dos funciones, converge a infinito más rápidamente.

Para ello puede servir de ayuda el cuadro-resumen siguiente:

COMPARACIÓN DE INFINITOS
Algunos de estos resultados se justificarán en el tema siguiente, dedicado a las derivadas y sus aplicaciones.
En este apartado, f y g verifican $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Casos similares con distintos signos resultarán fáciles de deducir.
Se dice que $f(x)$ es un **infinito de orden superior** a $g(x)$ si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. También se dice que f crece más rápidamente que g cuando x tiende a ∞.
Se dice que $f(x)$ es un **infinito de orden inferior** a $g(x)$ si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. También se dice que f crece más lentamente que g cuando x tiende a ∞.
Se dice que $f(x)$ es un **infinito del mismo orden** que $g(x)$ si $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$.
Si $f(x)$ es un infinito de orden mayor que $g(x)$ entonces se tiene $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = +\infty$.
Si $f(x)$ es un infinito de orden inferior a $g(x)$ entonces se tiene $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = -\infty$.
Si $n > m$, x^n es un infinito de orden superior a x^m.
Si $a > 1$, a^x es un infinito de orden superior a x^n para cualquier n. Esto es cierto en particular para e^x.
Si $1 < b < a$, a^x es un infinito de orden superior a b^x.
x^n es un infinito de orden superior a $\log_a(x)$ para cualquier $a > 1$.
Dos polinomios del mismo grado son infinitos del mismo orden.

A.2 Ejercicios de cálculo de límites

A continuación siguen algunos ejercicios de cálculo de límites. Los primeros que se incluyen están escritos con más detalles. Una vez que se exponen las técnicas, se van omitiendo dichos detalles y simplificando la escritura.

Indeterminaciones del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ que son cociente de polinomios y/o de raíces de polinomios.

Para resolver estas indeterminaciones es preciso averiguar en cuál de los casos siguientes nos encontramos:

1. El numerador tiende a ∞ más rápidamente que el denominador, en cuyo caso el cociente tenderá a ∞. Además habrá que determinar el signo del límite, es decir, si tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

2. El denominador tiende a ∞ más rápidamente que el numerador, en cuyo caso el cociente tenderá a 0.

3. Numerador y denominador quedan «en tablas» (los dos son infinitos del mismo orden), en cuyo caso el límite será un número finito distinto de 0.

Una idea que se puede aplicar en estos casos es dividir numerador y denominador por el término que converge a infinito más rápidamente. Para ello se debe recordar que, cuando $x \to \infty$, x^n tiende a ∞ más rápidamente cuanto mayor es n.

Ejemplo A.1
Calcular $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+1}{2x^3+x}$

Comenzamos por aplicar las reglas del cálculo de límites:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 4x^3+1}{\lim_{x\to+\infty} 2x^3+x} = \frac{\infty}{\infty}$$

Vemos, pues, que se trata de un límite indeterminado de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Para aclarar la indeterminación, dividimos numerador y denominador por el término que tiende más rápidamente a infinito. En este caso, entre todas las potencias de x que aparecen la mayor es x^3. Dividiendo numerador y denominador por x^3, se obtiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{2\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4+\dfrac{1}{x^3}}{2+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 4+\dfrac{1}{x^3}}{\lim_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x^2}}$$

Ahora bien, los términos $\dfrac{1}{x^2}$ y $\dfrac{1}{x^3}$ son del tipo $\dfrac{k}{\infty}$, luego convergen a cero cuando $x\to+\infty$. Es decir,

$$\lim_{x\to+\infty} 4+\frac{1}{x^3} = 4 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} 2+\frac{1}{x^2} = 2$$

Luego finalmente se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3+1}{2x^3+x} = \frac{\lim_{x\to+\infty} 4+\dfrac{1}{x^3}}{\lim_{x\to+\infty} 2+\dfrac{1}{x^2}} = \frac{4}{2} = 2$$

Ejemplo A.2
Calcular $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-1}{x^3+1}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^3+1} = \frac{\lim_{x\to+\infty} x^2-1}{\lim_{x\to+\infty} x^3+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{(indeterminado)}$$

Para aclarar la indeterminación, dividimos numerador y denominador por el término que tiende más rápidamente a infinito, que en este caso es x^3:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^3+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x^2}{x^3}-\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x^3}} = \frac{\dfrac{1}{\infty}-\dfrac{1}{\infty}}{1+2\dfrac{1}{\infty}+\dfrac{1}{\infty}} = \frac{0-0}{1+0+0} = 0$$

Como ya se percibe en estos ejemplos, en realidad, en este tipo de límites (límites en $+\infty$ o en $-\infty$ de cocientes de polinomios y/o de raíces de polinomios), los únicos términos que juegan algún papel son los términos dominantes (los de mayor grado) del numerador y del denominador. De hecho, la regla siguiente simplifica mucho su cálculo.

Regla para el caso de límites, en $+\infty$ o en $-\infty$, de cocientes de polinomios
Si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios tales que el término de mayor grado de $p(x)$ es ax^m y el término de mayor grado de $q(x)$ es bx^n, entonces se tiene:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ax^m}{bx^n} \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{ax^m}{bx^n}$$

Ejemplo A.3
Calcular $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^5 - 3x^3 + x^2 - x + 4}{x^4 + x^3 - 5}$

Vemos que es un límite, cuando $x \to -\infty$, de un cociente de dos polinomios. En consecuencia aplicamos la regla anterior:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + x^2 - x + 4}{x^4 + x^3 - 5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^5}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty.$$

Ejemplo A.4
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1} + x^2}{\sqrt[3]{x+1} + 2x}$

De nuevo vemos que se trata de un límite de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Observamos los términos que aparecen:
- en el numerador aparecen $\sqrt{x^4+1}$, cuyo comportamiento cuando $x \to +\infty$ es como $\sqrt{x^4} = x^{4/2} = x^2$, y x^2.
- en el denominador aparecen $\sqrt[3]{x+1}$, cuyo comportamiento es como $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$, y $2x$.

Por tanto lo que tiende a infinito más rápidamente es x^2 (es la mayor potencia de x que aparece). Se puede, pues, aplicar la técnica de dividir numerador y denominador por x^2.

Sin embargo, es más fácil tener en cuenta sólo los términos dominantes, como antes:
- cuando $x \to +\infty$ el numerador se comporta como $x^2 + x^2 = 2x^2$.
- cuando $x \to +\infty$ el denominador se comporta como $2x$.

En consecuencia se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+1} + x^2}{\sqrt[3]{x+1} + 2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{2x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

Ejemplo A.5
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^2+1} + 1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}$

Es de tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ así que razonamos como antes.

El numerador, en el límite, se comporta como $\sqrt[4]{x^2} = x^{2/4} = x^{1/2}$, mientras que el denominador se comporta como $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2x^{1/2}$.

En consecuencia, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2+1} + 1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1/2}}{2x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Indeterminaciones de tipo $\infty - \infty$ con raíces cuadradas
La idea en los casos en que se tiene una diferencia de raíces es multiplicar y dividir por la suma de las raíces (lo que se suele llamar el conjugado). De este modo la indeterminación se transformará en una del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Ejemplo A.6
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x+2}-\sqrt{x^3+1}\right)$

Como vemos se trata de una indeterminación de tipo $+\infty-(+\infty)$. A fin del eliminar las raíces cuadradas, lo que hacemos es multiplicar y dividir por la suma de raíces, es decir por $x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}$. Se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x+2}-\sqrt{x^3+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x\sqrt{x+2}-\sqrt{x^3+1}\right)\left(x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}\right)}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\dots$$

Ahora usamos que suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados ($(a+b)(a-b)=a^2-b^2$) con lo que desaparece la diferencia de raíces:

$$\dots=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left((x\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x^3+1})^2\right)}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(x+2)-(x^3+1)}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}$$

De esta forma hemos llegado a un límite del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ que puede ser resuelto como anterioremente.
Analizamos los términos dominantes: cuando $x\to+\infty$,
- el numerador se comporta como $2x^2$
- el denominador se comporta como $x\sqrt{x}+\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}+x\sqrt{x}=2x\sqrt{x}$.

En consecuencia se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x\sqrt{x+2}+\sqrt{x^3+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{2x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$$

Ejemplo A.7
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-\sqrt{x^4+1}}{x+2}$

En el numerador aparece una indeterminación de tipo $\infty-\infty$. Razonando como antes para eliminar la diferencia de raíces cuadradas, multiplicamos numerador y denominador por $x^2+\sqrt{x^4+1}$. Usando que suma por diferencia es diferencia de cuadrados, se obtiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\sqrt{x^4+1}}{x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-\sqrt{x^4+1}\right)\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}{(x+2)\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-(x^4+1)}{(x+2)\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{(x+2)\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)}=\frac{-1}{\infty}=0$$

Indeterminaciones de tipo $\dfrac{0}{0}$ que son cociente de polinomios
Lo que sucede en estos casos es que ambos polinomios tienen una raíz común. Lo que hay que hacer es factorizar el numerador y el denominador y simplificar.

Ejemplo A.8
Calcular $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$

Comenzamos, de nuevo, por aplicar las reglas de cálculo de límites, sustituyendo x por 2 en el cociente de polinomios:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \frac{2^3 - 2^2 - 4\cdot 2 + 4}{2^2 - 2 - 2} = \frac{8 - 4 - 8 + 4}{4 - 2 - 2} = \frac{0}{0}$$

Vemos por tanto que se trata de una indeterminación (2 es raíz tanto del numerador como del denominador). Para resolverla lo que hacemos es dividir el numerador y el denominador por $x - 2$ (2 porque es el número que anula el numerador y el denominador). Vamos a hacer estas divisiones por la regla de Ruffini.
La división del numerador da

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & |\ 0 \end{array}$$

lo que implica (usando la fórmula de la división, dividendo igual a cociente por divisor más el resto)

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 2)(x^2 + x - 2) + 0 = (x - 2)(x^2 + x - 2).$$

Análogamente, se tiene para el divisor

$$\begin{array}{c|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & |\ 0 \end{array}$$

que como antes prueba

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1).$$

Sustituyendo, se tiene por tanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + x - 2)}{(x - 2)(x + 1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} = \frac{2^2 + 2 - 2}{2 + 1} = \frac{4}{3}.$$

Ejemplo A.9
Calcular $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$

De nuevo es un cociente de polinomios que produce una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$. Razonamos como antes. Dividiendo el numerador por $x+1 = x-(-1)$ se tiene

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & & -1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & -1 & |\ 0 \end{array}$$

Tenemos por tanto

$$x^3+x^2-x-1 = (x+1)(x^2-1).$$

Dividiendo el denominador por $x+1$ se tiene

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ -1 & & -1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & |\ 0 \end{array}$$

lo que da

$$x^3-3x-2 = (x+1)(x^2-x-2).$$

Se tiene por tanto

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2-1)}{(x+1)(x^2-x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \frac{(-1)^2-1}{(-1)^2-(-1)-2} = \frac{0}{0}.$$

Por tanto sigue siendo indeterminado. Volvemos a aplicar el método anterior.
Para descomponer el numerador podemos dividir por Ruffini por $x+1$ como anteriormente o simplemente usar que diferencia de cuadrados es suma por diferencia lo que da

$$x^2-1 = x^2-1^2 = (x+1)(x-1).$$

Para el denominador, dividiendo por Ruffini por $x+1$ se tiene

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -1 & -2 \\ -1 & & -1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & |\ 0 \end{array}$$

lo que prueba

$$x^2-x-2 = (x+1)(x-2).$$

Se tiene por tanto

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x-2} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

A.3 Regla de L'Hôpital para el cálculo de límites

La Regla de L'Hôpital es una poderosa herramienta para calcular límites indeterminados. La idea que está detrás es que, cuando el cociente de dos funciones tiene un límite indeterminado, puede ser útil estudiar el límite del cociente de sus pendientes, es decir, de sus derivadas, que, en ocasiones, determina más claramente cuál de las dos es la que crece (o decrece) más rápidamente.

Regla de L'Hôpital
Sea a un número real y sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables en un algún intervalo que contenga al punto a y tales que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (esto es, que $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es una indeterminación).
Entonces se tiene,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que exista el límite del segundo miembro.

Ejemplo A.10
Calcular $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2-7x+2}{x^2+5x-14}$

Es posible aplicar la Regla de L'Hôpital, ya que tanto el numerador como el denominador se anulan en $x = 2$, y se tiene:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-7x+2}{x^2+5x-14} = \lim_{x\to 2} \frac{6x-7}{2x+5} = \frac{5}{9}$$

Ejemplo A.11
Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

Puesto que tanto el numerador como el denominador valen 0 en $x = 0$, se puede aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Ejemplo A.12
Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 6x}{e^{2x}-1}$

Se tiene que $\operatorname{tg} 0 = 0$ y que $e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, luego se puede aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 6x}{e^{2x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{6\dfrac{1}{\cos^2 6x}}{2\,e^{2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{e^{2x}\,\cos^2 6x} = 3$$

Ejemplo A.13
Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

En este ejemplo se aplica la Regla de L'Hôpital de forma reiterada, ya que, tras la primera vez, se obtiene un nuevo caso de indeterminación.
En primer lugar se tiene que $1 - \cos 0 = 1 - 1 = 0$ y que $0^2 = 0$; aplicando L'Hôpital se tiene:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x}$$

Pero aparece un nuevo caso de indeterminación $\dfrac{0}{0}$, que permite volver a aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

La Regla de L'Hôpital es válida también para límites cuando $x \to \pm\infty$, para límites indeterminados del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$

y para límites laterales de los mismos tipos.

Ejemplo A.14
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x}$

Se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Aplicando L'Hôpital reiteradamente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Ejemplo A.15
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^p}{e^x}$ **con** p **entero** >0 **cualquiera**

Un proceso similar al anterior, reiterando este proceso p veces, conduce a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^p}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p\,x^{p-1}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p(p-1)\,x^{p-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to+\infty} \frac{p(p-1)\ldots 3\cdot 2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{p\,!}{e^x} = 0 \quad \forall p>0$$

El ejemplo anterior prueba la afirmación siguiente:

Crecimiento exponencial

Cuando x tiende a $+\infty$, la función e^x crece más rápidamente que cualquier potencia positiva de x.

Ejemplo A.16
Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^p}$ **con** $p>0$ **cualquiera**

De nuevo se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Aplicando L'Hôpital se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{p\,x^{p-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{px^p} = 0 \quad \forall p>0$$

lo que conduce a la afirmación siguiente:
Cuando $x\to+\infty$, $\ln x$ crece más lentamente que cualquier potencia positiva de x.

Otros tipos de indeterminaciones pueden con frecuencia reducirse a alguna de las anteriores.

Ejemplo A.17
Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,\ln x$

Se trata de una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$. Sin embargo, sin más que pasar la x al denominador dividiendo, se tiene

$$x\,\ln x = \frac{\ln x}{1/x}$$

y, escrito en esta forma, se tiene un límite del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ al que se puede aplicar la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0^+} x\,\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Ejemplo A.18
Calcular $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right)$

Se trata de una indeterminación del tipo $\infty - \infty$. Sin embargo se puede escribir:

$$\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

y, en esta forma, se trata de una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ que permite el uso de la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg} x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x}=0$$

Ejemplo A.19
Calcular $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

Para calcular este tipo de límites se hace uso de la identidad $a^b=e^{b\ln a}$ $\forall a,b,\ a>0$, de donde se tiene

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)} \quad \text{de donde} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)}=e^{\lim_{x\to 0^+}(g(x)\ln f(x))}$$

Se calcula, pues,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0 \text{ (ver ejemplo A.17)} \quad \text{luego} \quad \lim_{x\to 0^+} x^x=e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x}=e^0=1$$

Ejemplo A.20
Calcular $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{1/x}$

Utilizando, como antes, que $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim(g(x)\ln f(x))}$, se tiene

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}\ln x=0 \text{ (ver ejemplo A.16)} \quad \text{luego} \quad \lim_{x\to +\infty} x^{1/x}=e^0=1$$

Ejemplo A.21
Calcular $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{1/x}$

Utilizando que $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim(g(x)\ln f(x))}$ se tiene

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+5x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{1+5x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{5}{1+5x}=5$$

luego $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{1/x}=e^5$.

La importancia de verificar las hipótesis
Antes de utilizar la Regla de L'Hôpital para calcular un límite hay que cerciorarse de que se cumplen las hipótesis en que la misma es válida. Si no fuera así se pueden obtener resultados falsos, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo A.22
Utilización incorrecta de la Regla de l'Hôpital

La utilización de la misma para el cálculo de

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-2}{e^x-1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

es correcta, ya que se trata de un límite indeterminado del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$.
Sin embargo, su utilización en el cálculo de

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-2}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

es **incorrecta y conduce a un resultado falso**, ya que en realidad no se trata de un límite indeterminado y el resultado correcto es:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-2}{e^x-1} = \frac{0-2}{0-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

s

A.4 Ejercicios

Calcular los siguientes límites:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-5}{x^2+7x+1}$ $+\infty$
2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-5}{x^3+x}$ 0
3. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2-5}{x+1}$ $-\infty$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-5x+2}{2x^4-2x}$ $1/2$
5. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+1}{2x^2+2}$ $1/2$
6. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ $\dfrac{5}{4}$
7. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}$ 0
8. $\displaystyle\lim_{x\to2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-4x^2+5x-2}$ -1
9. $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-1}$ $-1/2$
10. $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{x^3-4x}{x^2+x}$ -4
11. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x}{x-1}$ $+\infty$
12. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{x^3-4x^2+5x-2}$ $-\infty$
13. $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x}{1-x^2}$ $-\infty$
14. $\displaystyle\lim_{x\to4} \frac{2x^2-8}{x^2-16}$ $\displaystyle\lim_{x\to4^-} = -\infty;$ $\displaystyle\lim_{x\to4^+} = +\infty$
15. $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{x^3}{2x^2-8}$ $\displaystyle\lim_{x\to-2^-} = -\infty;$ $\displaystyle\lim_{x\to-2^+} = +\infty$
16. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2-1}}{x-3}$ $= \sqrt{2}$
17. $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^2+x}}{\sqrt{2x+7}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
18. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$ 0
19. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-\sqrt{x^2+3}}$ $-\infty$
20. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{2x^2+1}}{x+1}$ $1-\sqrt{2}$
21. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2e^x+4}$ $1/2$
22. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}-1}$ 1
23. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{4x+2}-e^{3x}}{e^{2x+3}+e^x+1}$ $+\infty$
24. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{\ln(x-1)+1}$ 1
25. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x+1)}{\ln x+3}$ 1

Usando la Regla de L'Hôpital, calcular los siguientes límites:

26. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ $2/3$

27. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ 4

28. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$ 2

29. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-x-2}$ $4/3$

30. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$ $1/5$

31. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ 1

32. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\operatorname{sen} x}$ 1

33. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2+x}$ 0

34. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x^2}$ $1/4$

35. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ 1

36. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$ 0

37. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x-3^x}{x}$ $\ln(2/3)$

38. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ 1

39. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\ln(1+x)}{x^2}$ $1/2$

40. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$ $1/6$

41. $\lim\limits_{x\to 5^+} \dfrac{\sqrt{x^2-25}}{x-5}$ $+\infty$

42. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln\sqrt{x}$ 0

43. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x$ 0

44. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x-1}{\sqrt{x}}$ 0

45. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$ 0

46. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2^x}{x^2}$ $+\infty$

47. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-1}{x^3}$ $+\infty$

48. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}$ 0

49. $\lim\limits_{x\to -\infty} x\,e^x$ 0

50. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$ 0

Soluciones de los ejercicios

1. $+\infty$
2. 0
3. $-\infty$
4. $1/2$
5. $1/2$
6. $\dfrac{5}{4}$
7. 0
8. -1
9. $-1/2$
10. -4
11. $+\infty$
12. $-\infty$
13. $-\infty$
14. $\lim\limits_{x\to 4^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 4^+} = +\infty$
15. $\lim\limits_{x\to -2^-} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} = +\infty$
16. $= \sqrt{2}$
17. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
18. 0
19. $-\infty$
20. $1-\sqrt{2}$
21. $1/2$
22. 1
23. $+\infty$
24. 1
25. 1
26. $2/3$
27. 4
28. 2
29. $4/3$
30. $1/5$
31. 1
32. 1
33. 0
34. $1/4$
35. 1
36. 0
37. $\ln(2/3)$
38. 1
39. $1/2$
40. $1/6$
41. $+\infty$
42. 0
43. 0
44. 0
45. 0
46. $+\infty$
47. $+\infty$
48. 0
49. 0
50. 0