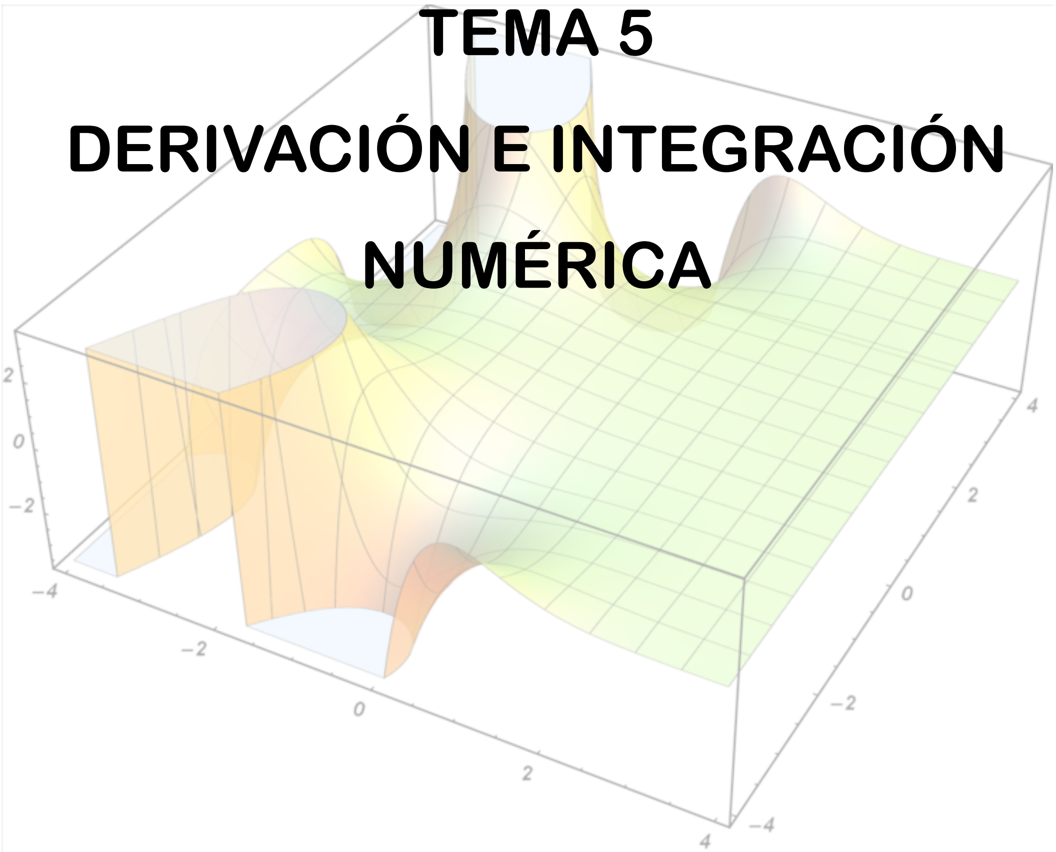
Universidad Francisco de Vitoria UFV Madrid

CÁLCULO

TEMA 5

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN NUMÉRICA



1. Conocimientos previos

Para poder seguir adecuadamente este tema, se requiere que el alumno repase:

- Límite de una función.
- Derivación y derivación n-ésima.
- Integrales indefinidas elementales
- Integral definida elemental

2. Introducción

La derivación, o diferenciación, y la integración numéricas son operaciones muy frecuentes en computación científica. Obtener analíticamente la derivada de una función puede ser complicado, incluso imposible cuando la función no es elemental, como ocurre con las funciones de Bessel[1], empleadas en propagación de ondas o potenciales electrostáticos, las ecuaciones de Airy[2], utilizada en la física de partículas, o muchas otras. Por otro lado, encontrar una primitiva que nos permita calcular su integral es, en numerosos casos, imposible. Muchas funciones se definen a través de integrales que no pueden calcularse de manera exacta, como pueden ser la función de error[3], las funciones logaritmo[4], seno integral[5] y la función gamma de Euler[6], por citar algunos ejemplos. En estos casos, es muy común emplear las técnicas de diferenciación e integración numérica que se describen en este tema.

Por otro lado, cuando únicamente conocemos el valor de la función en un conjunto de puntos (x_i, f_i), como ocurre con los resultados de un experimento, sus derivadas e

---

[1] Se conocen como funciones de Bessel a las soluciones de la ecuación, $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0$ siendo n un número real o complejo.

[2] Una ecuación de Airy tiene la forma, aparentemente simple, de $y''=xy$

[3] La función de error tiene la forma general $Erf(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$

[4] La función logaritmo tiene la forma general $li(x)=\int_0^x \frac{1}{\ln t}dt$

[5] La función seno integral tiene la forma $Si(x)=\int_0^x \frac{\text{sen }t}{t}dt$

[6] Esta función extiende el concepto de factorial a los números complejos: $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$

integrales sólo pueden obtener numéricamente, lo cual motiva aún más la necesidad de obtener derivadas e integrales a partir de conjuntos discretos de datos.

3. Concepto de Derivada

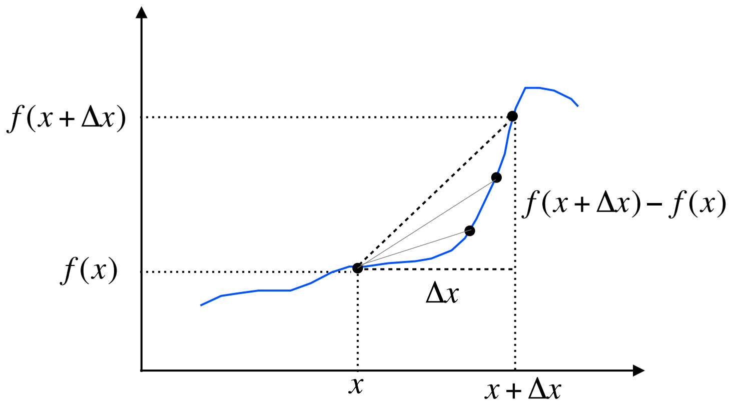


Figura 5-1. Cociente incremental

La expresión: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

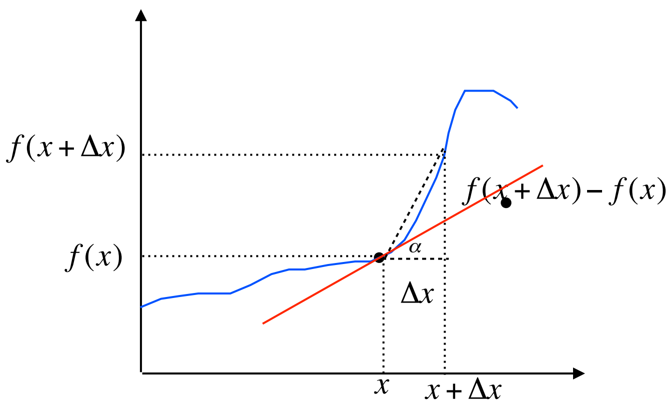
se denomina cociente incremental de f en el punto x para un valor de Δx. Esta expresión representa la pendiente de la secante a la gráfica de la función f que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

Entonces:

La *derivada de una función f(x) en un punto x es el límite del cociente incremental,*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Este valor representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$ y se denota por $f'(x)$ o $\dfrac{dy}{dx}$ o $\dfrac{df}{dx}$



$$\tan\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

Figura 5-2. Representación gráfica del concepto de derivada

Tras la definición formal de *derivada* podemos acercarnos a una definición intuitiva. La *derivada* de una función *f(x)* podemos definirla como una función *f ´(x)* que es igual a **la rapidez o velocidad de cambio** de *f(x)* con respecto a *x*. La pendiente de la tangente a la curva varía tan rápidamente como lo haga el incremento de *x* a cero. Conviene detenerse un momento e intentar visualizar dinámicamente sobre la *Figura 5-2* cómo al reducirse el incremento de *x*, es decir, al desplazarse en la figura hacia la izquierda, su correspondiente imagen sobre la figura, es decir, el valor de la función en ese punto que varía, se va acercando a la tangente a la curva en *x*. Por tanto, la variación de la pendiente de la tangente nos da la variación del cambio de la curva para los valores de *x*.

La importancia de visualizar este cambio se debe a que es aquí precisamente donde se encierra todo el valor del concepto de *derivada.* Mediante dicho concepto, tenemos una definición analítica de cómo medir el *cambio* de una función al ser recorrida. Por tanto, no es una representación gráfica más ni un artefacto matemático más o menos sofisticado, es la *representación real del cambio* que apreciamos en tantos fenómenos de la naturaleza. De ahí que el estudio de la derivada esté presente en todos los manuales y sea la base del cálculo diferencial que abre la puerta a la observación y análisis de casi todos los fenómenos físicos.

Como decimos, hay muchos fenómenos físicos en los que nos interesa medir la rapidez del cambio de una variable. Por ejemplo, la velocidad es la rapidez del cambio de la posición de un móvil, y la aceleración es la rapidez del cambio de la velocidad. También puede demostrarse que la *integral* de la aceleración es la velocidad y la *integral* de la velocidad es la posición. Por tanto la *integral* y la *derivada* tienen una relación especial en cuanto que pueden considerarse inversas la una de la otra: la integral de una derivada devuelve la función original, y la derivada de una integral devuelve la función original más o menos un valor constante.

4. Derivación numérica

Las técnicas de derivación numérica estiman la derivada de una función en un punto x_k aproximando la pendiente de la línea tangente en x_k usando valores de la función en puntos cercanos a dicho punto x_k. La aproximación a la pendiente de la recta tangente puede hacerse de diversas formas como se muestra en la *Figura 5-3*.

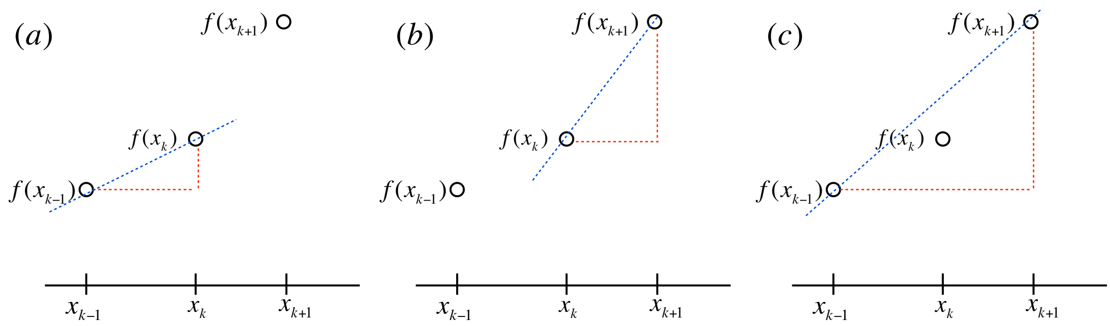


Figura 5-3

En la *Figura 5-3 (a)* se supone que la derivada en x_k se estima calculando la pendiente de la línea entre $f(x_{k-1})$ y $f(x_k)$, así:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Este tipo de aproximación a la derivada se denomina aproximación por **diferencia hacia atrás** o **diferencia regresiva.**

En la figura *Figura 5-3 (b)* se supone que la derivada en x_k se estima calculando la pendiente de la línea entre $f(x_k)$ y $f(x_{k+1})$, así:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$$

Este tipo de aproximación a la derivada se denomina aproximación por **diferencia hacia adelante o diferencia progresiva.**

En la *Figura 5-3 (c)* se supone que la derivada en x_k se estima calculando la pendiente de la línea entre $f(x_{k-1})$ y $f(x_{k+1})$, así:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}{x_{k+1} - x_{k-1}}$$

Este tipo de aproximación a la derivada se denomina aproximación por **diferencia central.**

La calidad de los resultados de estos tres tipos de cálculos depende de la distancia entre los puntos empleados para estimar la derivada; la estimación de la derivada mejora al disminuir la distancia entre los puntos a considerar.

5. Derivación numérica con MATLAB. La función `diff`

Esta función ya la vimos en capítulos anteriores trabajando sobre variables simbólicas y, por lo tanto, realizando derivadas simbólicas. En esta ocasión haremos un uso de dicha función basado en su capacidad de realizar diferencias sobre vectores y matrices y, por lo tanto, su capacidad para la derivación numérica. Puede que usted se pregunte cómo sabe la función si debe calcular diferencias o realizar una derivación simbólica. La función puede determinar lo que se desea en cada momento analizando los argumentos de entrada: si el argumento es un vector, realizará una cálculo de diferencias numéricas. Si el argumento es una expresión simbólica realiza una derivación simbólica.

La función `diff` calcula diferencias entre valores adyacentes en un vector, generando un vector con un valor menos. Si la función `diff` se aplica a una matriz, opera sobre las filas de la matriz como si cada una de ellas fuera un vector. Por tanto, la matriz devuelta tiene el mismo número de columnas pero una fila menos. Conviene, como en casos anteriores, consultar la ayuda de MATLAB para ver todas las opciones posibles.

Como ilustración, supongamos que el vector x contiene los valores [0 1 2 3 4 5] y que el vector y contiene los valores [2 3 1 5 8 10]. Entonces, el vector generado por `diff(x)` es [1 1 1 1 1], y el generado por `diff(y)` es [1 -2 4 3 2]. La derivada $f'(x) = dy/dx$ se calcula mediante la división término a término `diff(y)./diff(x)`. Cabe señalar que estos valores de $f'(x)$ son correctos tanto para la ecuación de diferencia hacia adelante como la de diferencia hacia atrás. La elección o distinción entre ambos métodos para calcular la derivada está determinada por los valores de xd que corresponden a la derivada dy. Si los valores correspondientes de xd son [1 2 3 4 5], dy se calcula como diferencia hacia atrás. Si los valores de xd son [0 1 2 3 4] los valores se calculan como diferencia hacia adelante.

Ejemplo 5.1

Supongamos que tenemos la función dada por el polinomio siguiente:

$$f(x) = x^5 - 3x^4 - 11x^3 + 27x^2 + 10x - 24$$

Dibujar la gráfica. Calcular la derivada de esta función dentro del intervalo [-4, 5] usando una ecuación de diferencia hacia atrás.

Solución

Primero dibujamos la función del enunciado. Tener en cuenta la "notación punto" que utiliza MATLAB para operar vectores componente a componente. En este caso es necesaria para elevar la variable a los exponentes del polinomio:

```
>> x = -4:0.1:5;
>> f = x.^5 - 3*x.^4 - 11*x.^3 + 27*x.^2 + 10*x - 24;
>> grid on
>> title('f(x) = x^5 - 3x^4 - 11x^3 + 27x^2 + 10x - 24')
>> plot(x, f);
```

La gráfica del polinomio se muestra en la figura siguiente:

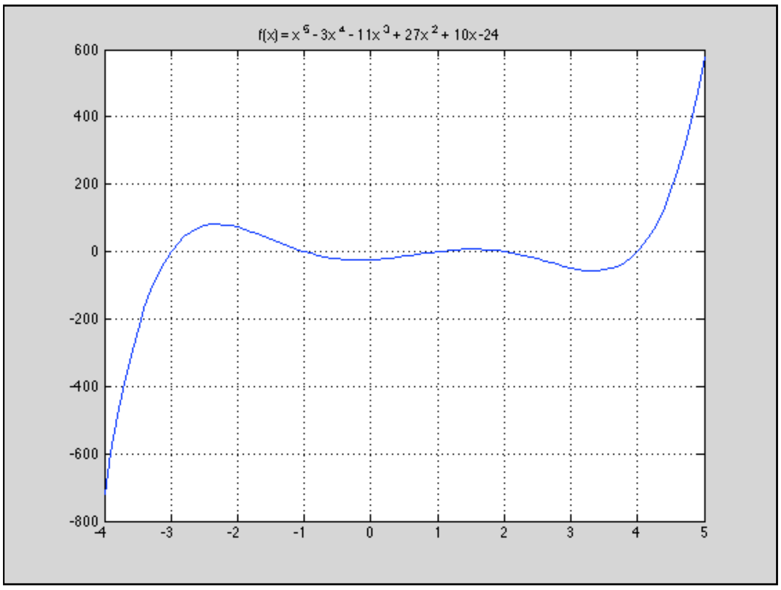


Figura 5-4. Gráfica del polinomio del Ejemplo 5.1.

Y ahora podemos calcular la derivada. En los siguientes comandos, `df` representa la derivada y `xd` son los valores de *x* que corresponden a la derivada:

```
>> df = diff(f)./diff(x);
>> xd = x(2:length(x));
>> plot(xd, df)
>> title('Derivada de f(x)')
```

Y la figura es la siguiente:

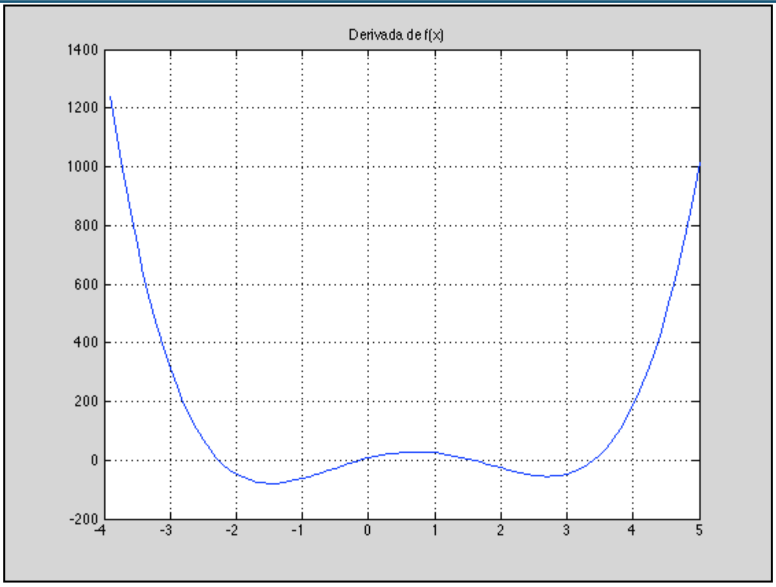


Figura 5-5. Gráfica de la derivada del polinomio del Ejemplo 5.1

Obsérvese el valor de la variable *xd*. Se ha construido un vector con un valor menos que el vector *x*, ya que como hemos dicho, al producirse las diferencias dicho vector tiene un componente menos. El comando que hemos usado se leería "crear un vector `xd` que sea igual al vector *x*, empezando en la segunda posición y hasta la longitud total del vector *x*".

Podemos aprovechar que tenemos los valores de la derivada para encontrar los puntos críticos de la función, es decir, los máximos y mínimos. Sabemos que si hay un máximo o un mínimo, su derivada se hace cero en ese punto (verificarlo en las figuras 5-4 y 5-5). Si en esos puntos la derivada es cero, antes será positiva y después será negativa. Por tanto, si nosotros calculamos el producto de las componentes de la derivada, cada una con la siguiente, aquellos productos que sean negativos nos indicarán que se ha pasado de positivo a negativo o viceversa, es decir, que se ha pasado por un punto crítico. Haremos esto con un par de líneas:

Si vemos el contenido del vector `critico` observamos que recoge los valores de los máximos y mínimos locales de la función *f(x)*: [-2.3 -0.2 1.5 3.4]. Sus correspondientes

```
>> producto = df(1:length(df)-1).*df(2:length(df));
>> critico = xd(producto < 0);
```

coordenadas y pueden ser obtenidas de la función por el mismo procedimiento:

```
>> coordenadaY = f(find(x == -2.3)), coordenadaY = f(find(x == -0.2))
>> coordenadaY = f(find(x == 1.5)), coordenadaY = f(find(x == 3.4))
```

Si quisiéramos calcular la derivada por medio de diferencias centrales usando los vectores anteriores, solo tendríamos que tener cuidado con los índices, es decir, las posiciones, de los elementos a restar, tanto en el numerador como en el denominador. Recuérdese que en

```
% Uso de diferencias centrales para el cálculo de f´(x)
numerador = f(3:length(f)) - f(1:length(f)-2);
denominador = x(3:length(x)) - x(1:length(x)-2);
dy = numerador ./ denominador;
xd = x(2:length(x)-1);
```

diferencias centrales entran en juego los elementos, posiciones, *k+1* y *k-1*:

En el ejemplo anterior, hemos supuesto que teníamos la ecuación de la función por diferenciar; esto nos ha permitido generar los puntos de la función. En muchos problemas de ingeniería los datos por diferenciar se obtienen de experimentos. Por ello, no podemos escoger que los puntos estén más cercanos entre sí para obtener una estimación más exacta de la derivada. En estos casos, podría ser conveniente usar las técnicas del Tema 3 que nos permiten determinar una ecuación que se ajuste a un conjunto de datos, y luego calcular puntos de esa ecuación para usarlos en el cálculo de la derivada.

Ejemplo 5.2

Los siguientes datos representan valores de telemetría (tiempo y altura) para un cohete sonda que está realizando investigaciones atmosféricas en la ionosfera:

Tiempo (s)	Altura (m)	Tiempo (s)	Altura (m)
0	60	130	100878
10	2926	140	103422
20	10170	150	104986
30	21486	160	106193
40	33835	170	110246
50	45151	180	119626
60	55634	190	136106
70	65038	200	162095

Tiempo (s)	Altura (m)	Tiempo (s)	Altura (m)
80	73461	210	199506
90	80905	220	238775
100	87368	230	277065
110	92852	240	314375
120	97355	250	350705

La función velocidad es la derivada de la función altura. Usando derivación numérica, calcular los valores de velocidad a partir de estos datos usando diferencia hacia atrás. Dibujar los gráficos de altura y velocidad en dos gráficos distintos. (Cabe señalar que se trata de un cohete en dos etapas).

```
% Introducimos los valores de tiempo y altura según los datos en tabla

t = 0:10:250;
h = [60 2926 10170 21486 33835 45151 55634 65038 73461 ...
    80905 87368 92852 97355 100878 103422 104986 106193 ...
    110246 119626 136106 162095 199506 238775 277065 314375 350705];

% Dibujamos la gráfica t/h

subplot(2, 1, 1), plot(t, h);
title('Cohete-Sonda: gráfico Tiempo-Altura')
xlabel('Tiempo')
ylabel('Altura')
grid on

% Cálculo de la derivada numérica (con diferencias hacia atrás)

dh = diff(h)./diff(t);
td = t(2:length(t));

% Dibujo de la gráfica de la velocidad

subplot(2, 1, 2),plot(td, dh);
title('Cohete-Sonda: gráfico Tiempo-Velocidad')
xlabel('Tiempo')
ylabel('Velocidad')
grid on
```

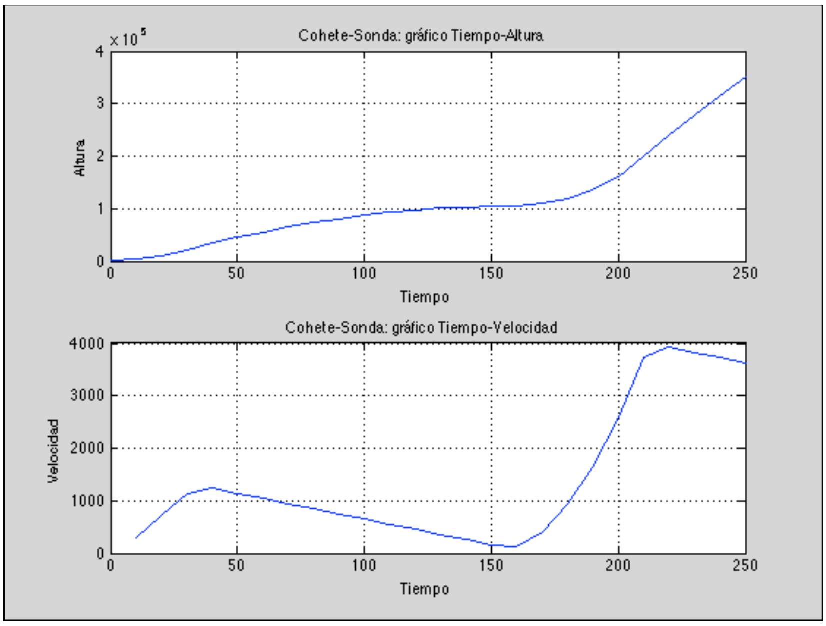


Figura 5-6. Gráficas de Altura y velocidad del Ejemplo 5.2.

Ejemplo 5.3

Considere la siguiente ecuación:

$$y = f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 3$$

Definir un vector x desde -5 hasta +5 y usarlo para aproximar la derivada de y con respecto a x. La derivada de y con respecto a x que se encuentra analíticamente es:

$$y' = f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$$

Evaluar esta función con el vector x previamente definido. ¿Cómo difieren los resultados?

Solución

```
% Comparación entre derivada simbólica y numérica

% Derivación numérica

x = -5:.5:5;
y = x.^3 + 2*x.^2 - x + 3;
dy = diff(y)./diff(x);
dx = x(2:length(x));

subplot(1, 3, 1),
     plot(x, y), grid on, title('y = x^3 + 2x^2 - x + 3'), xlabel('x'),
```

```
     gtext('y')
subplot(1, 3, 2),
    plot(dx, dy, '-or'), grid on, title('dy = 3x1^2 + 4x1 - 1'),
xlabel('x'),
     gtext('dy/dx (Num)')

% Derivación simbólica

syms x1 y1
y1 = x1^3 + 2*x1^2 - x1 + 3;
dy1 = diff(y1);
subplot(1, 3, 3),
    ezplot(dy1, [-5 5]), grid on, gtext('dy/dx (Sym)')
```

Obsérvese en la figura siguiente que ambas derivadas, numérica y simbólica, coinciden siempre y cuando el número de puntos de recorrido de la variable *x* sea suficientemente grande. En el ejemplo, *Figura 5-7*, segunda gráfica, se han considerado 20 puntos. La derivada simbólica se calcula con un paso de .1, es decir, superior a 100 puntos. Nótese también que se ha utilizado la función `gtext` que nos permite poner un título en tiempo de ejecución para hacer más legible y clara la figura.

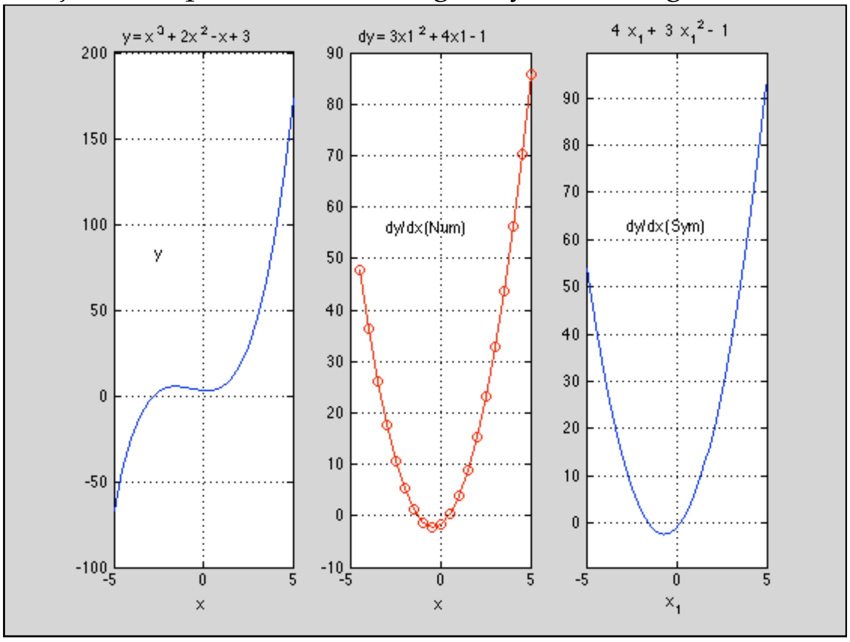


Figura 5-7. Comparación entre derivadas numéricas y simbólicas

La diferenciación numérica es muy sensible a los datos. Esto quiere decir que al tratar con datos experimentales, la distancia entre los mismos o los errores que hayan podido producirse por ruido o redondeo, afectan directamente al valor de la pendiente de la curva, es decir, de la derivada. Por este motivo, normalmente no se usa de derivación numérica si no se está muy seguro de los datos experimentales recogidos y del número insuficiente de datos para representar con cierta garantía la función. Lo que suele hacerse es utilizar alguna técnica de las estudiadas en el Tema 3 para obtener un polinomio del grado suficiente que nos permita representar la función con precisión. Con dicho polinomio ya se puede calcular la derivada simbólica como lo hemos hecho hasta ahora con una mayor seguridad de que los resultados obtenidos no están sujetos a los errores comentados anteriormente.

Podemos analizar este error cometido entre la derivación numérica y la derivación simbólica dibujando el valor absoluto del error con el siguiente código (sobre el ejemplo anterior):

```
% Calculamos el valor de la función en la derivada simbólica...

d_error = subs(dy1, x1, [-4.5:.5:5])

% Hallamos el error por diferencia entre la derivada numérica y
% simbólica…

Ey = dy - d_error

% Dibujamos la figura del error (en valor absoluto)...

plot([-4.5:.5:5], abs(Ey)), grid on, title('Error entre la...
     derivada numérica y simbólica'), xlabel('X'), ylabel('Error...
     absoluto')
```

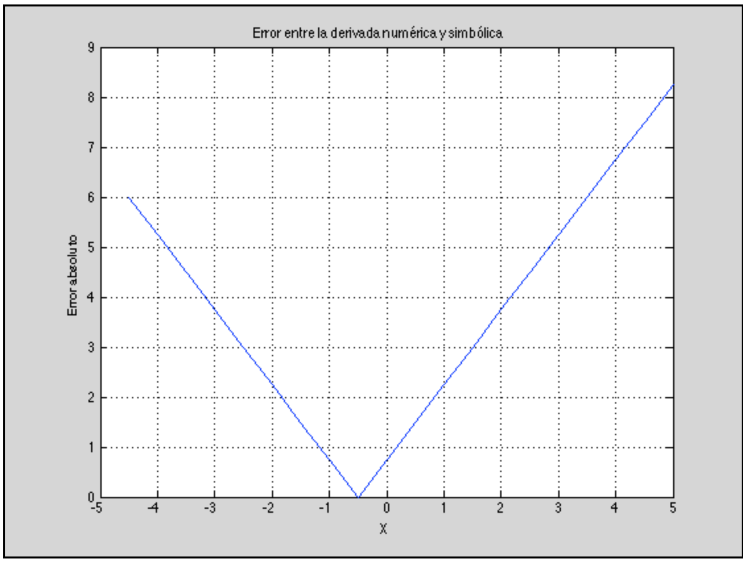


Figura 5-8. Error en el cálculo de la derivada numérica y simbólica

Si analizamos la *Figura 5-8* y la ponemos en comparación con la segunda gráfica de la *Figura 5-7*, vemos que el error es mayor cuanto mayor sea la separación entre puntos (menor en el vértice y mayor en los extremos). Esto pone de manifiesto la sensibilidad de la derivada numérica a la separación entre los puntos en el intervalo considerado.

6. Integración indefinida

Definición: Se dice que una función F es una primitiva[7] de f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en el intervalo I.

Teorema: Si F es una primitiva de f en un intervalo I, entonces G es una primitiva de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para todo x en I y donde C es una constante.

La primera consecuencia del teorema anterior es que podemos representar la familia completa de primitivas de una función agregando una constante a una primitiva conocida. Por ejemplo, sabiendo $[x^2]' = 2x$, es posible representar la familia de todas las primitivas de $f(x) = 2x$ por $G(x) = x^2 + C$.

La C recibe el nombre de ***constante de integración.***

Una ***ecuación diferencial*** en x e y es una ecuación que incluye las variables x e y y a las derivadas de y. Por ejemplo, $y' = 3x$ o $y' = x^2+1$ son ejemplos de ecuaciones diferenciales. La derivada y' también se puede denominar la diferencial de y con respecto a x y se escribe:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Cuando se resuelve una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

es conveniente escribirla en la forma diferencial equivalente

$$dy = f(x)dx$$

La operación para determinar todas las soluciones de esta ecuación se denomina ***integración indefinida*** y se denota mediante el símbolo integral:

$$y = \int f(x)dx = F(x) + C$$

[7] También se denomina a veces *antiderivada*

Condiciones iniciales y soluciones particulares

Se ha visto que la ecuación:

$$y = \int f(x)dx$$

tiene muchas soluciones (cada una difiriendo de otras en una constante). Esto significa que las gráficas de cualesquiera dos primitivas de *f* son traslaciones verticales una de otra.

Ejemplo 6.1

En la Figura 5-9 se muestran las gráficas de varias primitivas de la forma:

$$y = \int (3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C$$

para diversos valores enteros de C. Cada una de estas primitivas es una solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$$

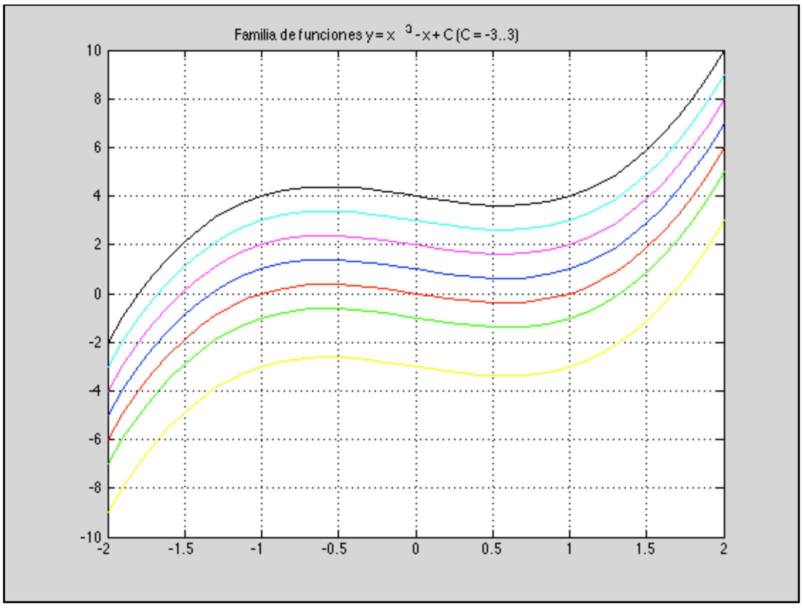


Figura 5-9. Familia de funciones dependiendo del valor de la constante de integración

En muchas aplicaciones de la integral, se da suficiente información para determinar una solución particular. Para hacer esto, sólo se necesita conocer el valor de $y = F(x)$ para un valor determinado de x. Esta información recibe el nombre de ***condición inicial***. Por ejemplo, en la *Figura 5-9*, sólo una de las curvas pasa por el punto (2, 6). Para encontrar dicha curva se utiliza la siguiente información:

$F(x) = x^3 - x + C$
$F(2) = 6$

Utilizando la condición inicial en la solución general, es posible determinar que

$$F(2) = 2^3 - 2 + C = 6 \Rightarrow C = 0$$

Y por tanto, la ***solución particular*** para esta condición inicial dada es:

$$F(x) = x^3 - x = x(x^2 - 1)$$

Otro ejemplo que nos ayudará a comprender el importante concepto de la solución particular:

Ejemplo 6.2

Encontrar la solución general de:

$$F'(x) = \frac{1}{x^2} \text{ con } x > 0$$

y determinar la solución particular que satisface la condición inicial F(1) = 0.

Solución

Para encontrar la solución general, integramos la expresión dada:

$$F(x) = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C,\ x > 0$$

Utilizando la condición inicial $F(1) = 0$, resolvemos para hallar el valor de *C:*

$$F(1) = -\frac{1}{1} + C \Rightarrow C = 1$$

De tal modo, la solución particular, como se muestra en la *Figura 5-10*, es:

$$F(x) = -\frac{1}{x} + 1 \text{ con } x > 0$$

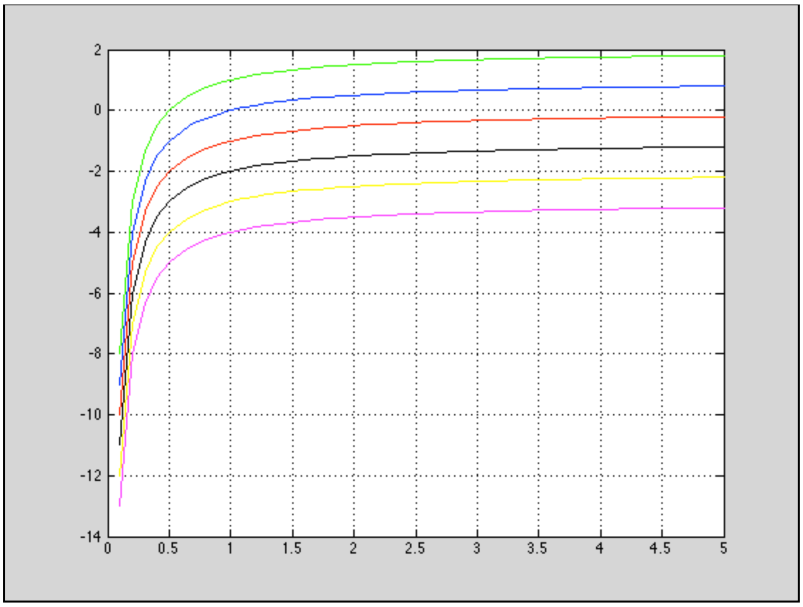


Figura 5-10. Familia de funciones dependiendo del valor de la constante de integración del Ejemplo 2

Ejemplo 6.3. Un problema de movimiento vertical

*Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 20 metros por segundo a partir de una altura de 24 metros. Encontrar la función '**posición**' que expresa la altura **s** en función del tiempo **t**. ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?*

Solución

Consideramos que el instante $t = 0$ es el instante inicial. Las dos condiciones iniciales pueden escribirse de la siguiente manera:

$$s(0) = 24$$
$$s'(0) = 20$$

Utilizando -9,8 m/s² como la aceleración de la gravedad, se tiene:

$$s''(t) = -9{,}8$$
$$s'(t) = \int s''(t)\,dt = \int -9{,}8\,dt = 9{,}8t + C_1$$

Empleando la velocidad inicial se tiene que $s'(0) = 20 = 9{,}8(0) + C_1$. De donde deducimos que $C_1 = 20$. Después, integrando $s'(t)$, se obtiene

$$s(t) = \int s'(t) = \int (-9{,}8t + 20)\,dt = -4{,}9t^2 + 20t + C_2$$

Utilizando la altura inicial como condición inicial, se encuentra que

$s(0) = 24 = -4{,}9(0) + 20(0) + C_2$

Y por tanto $C_2 = 24$. De este modo la función posición es:

$s(t) = -4{,}9t^2 + 20t + 24$

Cuando la pelota llega al suelo, $s(t) = 0$,

$-4{,}9t^2 + 20t + 24 = 0$

Resolviendo, las soluciones son -0,9 y 5. Como el tiempo no puede ser negativo, la pelota llega al suelo a los 5 segundos de ser lanzada. En la *Figura 5-11* vemos la parábola descrita.

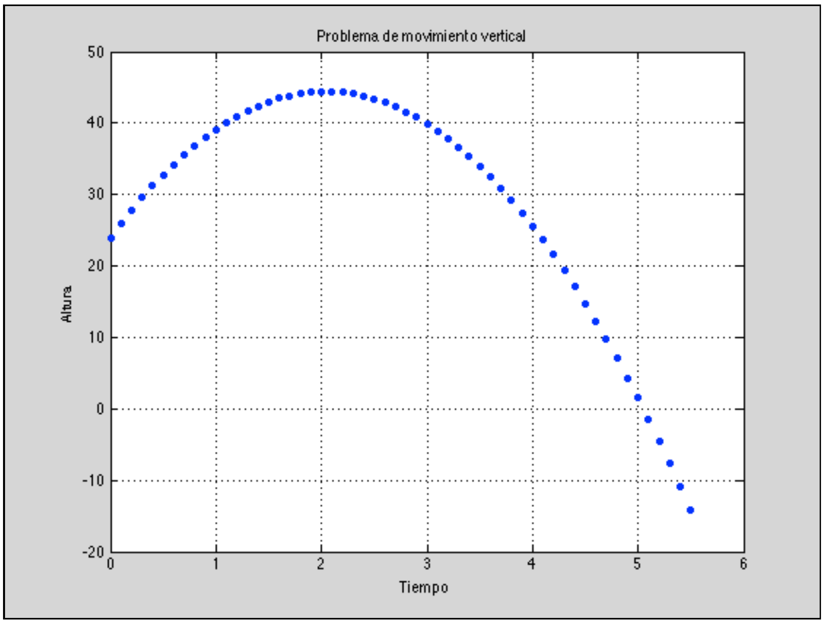


Figura 5-11. Gráfica del movimiento vertical de la pelota del Ejemplo 3

7.- Integración definida

Definición.- Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

existe, entonces f es integrable en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

Este límite recibe el nombre de **Integral Definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, y el número b es el **límite superior** de integración.

Propiedades de las integrales definidas

1. Si f está definida en $x = a$ entonces

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

2. Si f es integrable en el intervalo $[a, b]$, entonces

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

3. Si f es integrable en los dos intervalos definidos por a, b y c, de manera que $a < c < b$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

4. *Si* f y g son integrables entre $[a, b]$ y k es una constante, entonces

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

Teorema fundamental del cálculo: Si una función f es continua en el intervalo $[a, b]$, y F es una primitiva de f en dicho intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 7.1

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 20$$

Gráficamente, el valor de la integral definida nos proporciona el área de la zona delimitada entre la función *f(x)* con el eje *OX* en el intervalo $[a, b]$. Por ejemplo:

Ejemplo 7.2

Encontrar el área de la región delimitada por la función:

$$y = 2x^2 - 3x + 2$$

el eje OX y las rectas verticales definidas por x = 0 y x = 2.

El área será igual a,

$$A = \int_0^2 (2x^2 - 3x + 2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_0^2$$

$$= \left(\frac{16}{3} - 6 + 4\right) - (0 - 0 + 0)$$

$$= \frac{10}{3}$$

La gráfica de la curva se muestra a continuación:

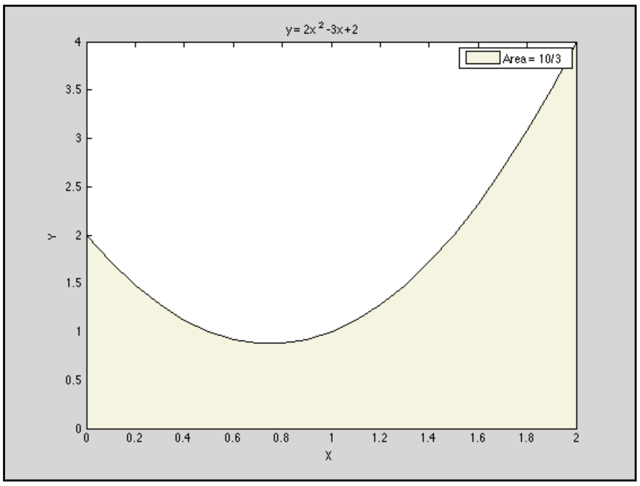


Figura 5-12. Representación del área de la curva del Ejemplo 7.2

Ejemplo 7.3

Calcular el área de la función en el intervalo que se indica

$$\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx$$

$$A = \int_1^4 3\sqrt{x}\,dx =$$

$$= 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx$$

$$= 3\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4$$

$$= 2(4)^{3/2} - 2(1)^{3/2} = 14$$

Y su representación gráfica es:

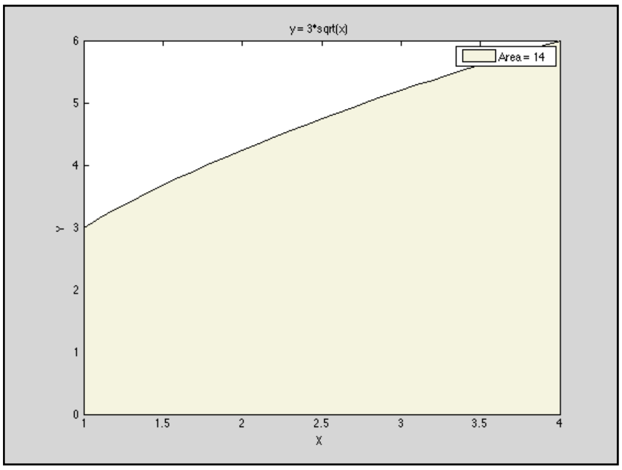


Figura 5-13. Representación del área de la curva del Ejemplo 7.3

Ejemplo 7.4

Calcular el área de la función en el intervalo que se indica

$$\int_1^3 \frac{dx}{x}$$

$$A = \int_1^3 \frac{dx}{x}$$

$$= [\ln x]_1^3 =$$

$$= \ln 3 - \ln 1$$

$$= \ln 3$$

Y la figura que muestra el área es la siguiente:

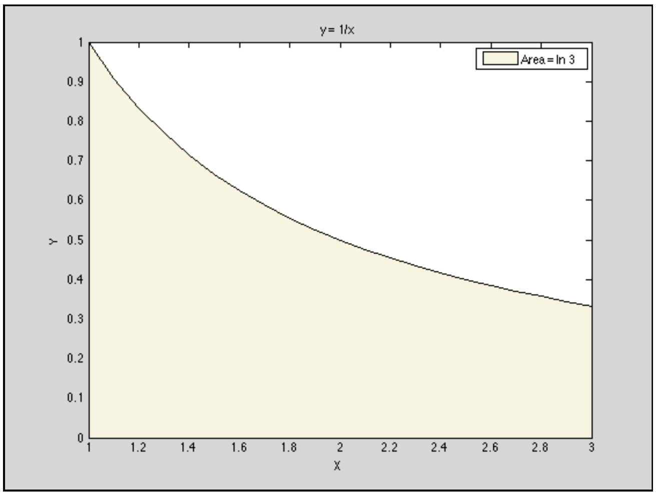


Figura 5-14. Representación del área de la curva del Ejemplo 7.4

Ejemplo 7.5: Integral definida de un valor absoluto. Calcular la integral:

$$\int_0^2 |2x-1|dx$$

Si nos fijamos en la *Figura 5-15* y la definición de valor absoluto, se puede reescribir el integrando como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}\int_0^2 |2x-1|dx &= \int_0^{1/2} -(2x-1)\,dx + \int_{1/2}^2 (2x-1)\,dx \\ &= \left[-x^2-x\right]_0^{1/2} + \left[x^2+x\right]_{1/2}^2 \\ &= \left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-(0+0)+(4-2)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

A partir de esto, es posible reescribir la integral en dos partes como se indica a continuación:

$$|2x-1| = \begin{cases} -(2x-1) \text{ para } x<\dfrac{1}{2} \\ 2x-1 \text{ para } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

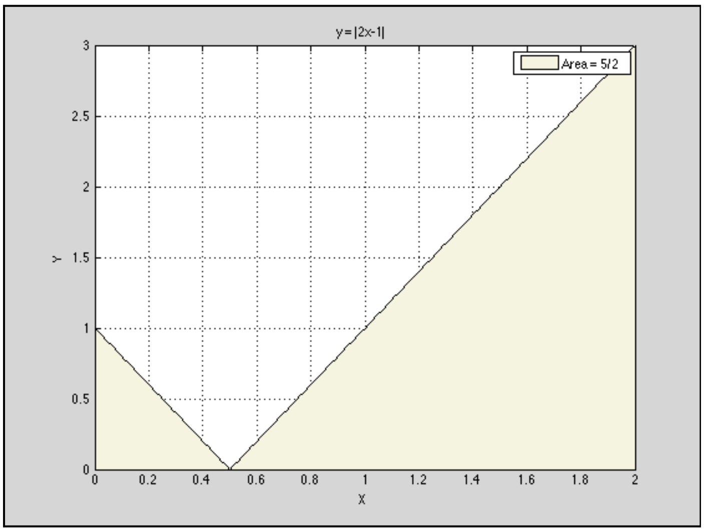


Figura 5-15. Representación del área de la función en valor absoluto del Ejemplo 7.5

***Definición del valor medio de una función en un intervalo**:* Si f es integrable en el intervalo cerrado [a, b], entonces el **valor medio de f** en el intervalo es:

$$\text{Valor medio} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Ejemplo 7.6: Determinación del valor medio de una función

Determinar el valor medio de la función:

$$f(x) = 3x^2 - 2x$$

en el intervalo [1, 4].

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x^3 - x^2\right]_1^4 = \frac{1}{3}\left[64 - 16 - (1-1)\right] = \frac{48}{3} = 16$$

Ejercicio propuesto

La velocidad del sonido

A diferentes alturas de la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a diferentes velocidades. La velocidad del sonido s(x) (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x)=\begin{cases} -4x+431 & \text{para } 0\le x<11.5\\ 295 & \text{para } 11.5\le x<22\\ \frac{3}{4}x+278.5 & \text{para } 22\le x<32\\ \frac{3}{2}x+254.5 & \text{para } 32\le x<50\\ -\frac{3}{2}x+404.5 & \text{para } 50\le x<80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros. ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo [0, 80]? Dibujar la gráfica de la función s(x) con el valor medio obtenido.

8.- Aplicaciones de la Integral definida

Curva en explícitas

1. El área limitada entre $y = f(x)$, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$ es

$$A=\int_a^b |f(x)|dx$$

2. El área entre dos curvas f y g en el intervalo $[a, b]$ se calcula como:

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$

Nota: para resolver estas integrales se debe calcular primero el valor absoluto de la diferencia de funciones, es decir, cuál de las dos funciones es la mayor en el intervalo $[a, b]$.

Curva en paramétricas

Sea C la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$ con $t \in [t_1, t_2]$

1. El área limitada por la curva C y el eje OX es

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |y(t)x'(t)|dt$$

2. El área limitada por la curva C y el eje OY es

$$A = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)y'(t)|dt$$

Curva en polares

El área encerrada por la curva C dada por $\rho = \rho(\theta)$, para $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho(\theta)^2 d\theta$$

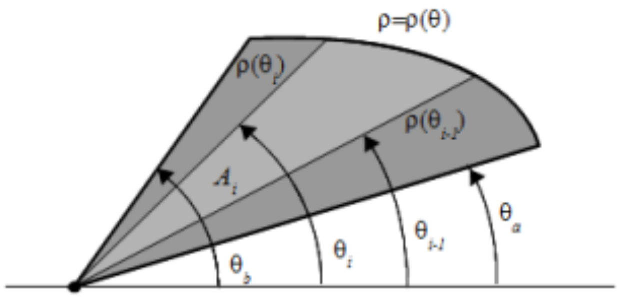


Figura 5-16. Representación del área de una función expresada en coordenadas polares

Volúmenes de sólidos de revolución

Si f es una función derivable en el intervalo $[a, b]$, entonces el volumen del sólido generado al girar el área bajo la curva $y = f(x)$ respecto del eje OX entre $x = a$ y $x = b$ es

$$V = \pi\int_a^b f(x)^2 dx$$

El volumen del sólido generado al girar dicha área respecto del eje OY es

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Área de superficies de revolución

Si f es una función derivable con derivada continua en el intervalo [a, b], entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

Longitudes

Si f es una función derivable con derivada continua en el intervalo [a, b], la longitud de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$$

9. Integrales indefinidas con MATLAB

Aunque aquí trataremos las funciones que dispone Matlab para la resolución de integrales tanto indefinidas como definidas, es preciso hacer una advertencia previa. Realizar una integral de forma analítica puede convertirse en casi un arte. Es cierto que existen métodos muy estudiados para resolver integrales, pero también es cierto que hace falta mucha práctica y habilidad para dominar la resolución de las mismas y en muchos casos, la resolución dependerá de lo que comúnmente se ha denominado "idea feliz", que no es más que un determinado cambio de variable o manipulación que no es trivial y que requiere muchas horas de esfuerzo para llegar a él. Sin pretender llegar a conseguir que el alumno sea un experto en la resolución de integrales, también es cierto que es necesario que se adiestre en la resolución manual de las mismas para conocer su complejidad, repasar técnicas de manipulación algebraica, trigonométrica y otras que le vendrán muy bien para futuras tareas y le acostumbrarán a preparar su mente para la resolución de problemas más complejos. Para conseguir este fin, en el ***Apéndice 1 "Tabla de integrales inmediatas… y más"*** se ofrece una tabla de integrales inmediatas, y no tan inmediatas, que pueden ayudar al alumno en sus primeros pasos en la resolución analítica de integrales.

MATLAB ofrece una función específica para calcular integrales indefinidas. Dicha función es `int(función,variable)`, donde `función` es la función que queremos integrar y `variable` es la variable con respecto a la cual queremos realizar la integral.

A continuación resolvemos algunos ejemplos con Matlab.

Ejemplo 9.1

Resolver la integral $I = \int \ln(x + \frac{1}{x})dx$

```
>> syms x

>> int(log(x +1/x))

ans =

2*atan(x) - x + x*log(x + 1/x)
```

Recordemos que hay que declarar como simbólica la variable x antes de usar `int`.

Ejemplo 9.2

Resolver la integral: $I = \int (\sec^2 x - \mathrm{sen} x)dx$

```
>> int((sec(x))^2 - sin(x))

ans =

cos(x) + sin(x)/cos(x)
```

Ejemplo 9.3

Resolver la integral: $I = \int \sec x(\tan x - \sec x)\, dx$

```
>> int(sec(x)*(tan(x)-sec(x)))

ans =

2/(tan(x/2) + 1)
```

Ejemplo 9.4

Resolver la integral: $I = \int x^2 y^2 \sqrt{xy} dx$

(En la integral, la variable que no interviene se comporta como una constante)

```
>> int((x^2)*(y^2)*sqrt(x*y), x)
ans =
```

```
(2*(x*y)^(7/2))/(7*y)
>> pretty(ans)
          7/2
  2 (x y)
  ----------
     7 y
```

Ejemplo 9.5

Resolver la integral: $I = \iint xy\,dx\,dy$

```
>>int(int((x*y), x), y)
ans =
(x^2*y^2)/4
>> pretty(ans)
   2  2
  x  y
  -----
    4
```

Ejemplo 9.6

Resolver la integral: $I = \int \text{sen}\,(ax)\cos(bx)\,dx$

```
>> syms a b
>> int(sin(a*x)*cos(b*x))
ans =
piecewise([a + b == 0, cos(2*b*x)/(4*b)],
          [a == b and b ~= 0, -cos(2*b*x)/(4*b)],
          [a ~= b and a + b ~= 0, - cos(x*(a - b))/(2*a - 2*b) -
          cos(x*(a + b))/(2*a + 2*b)])
```

Merece la pena que nos detengamos a estudiar el ejemplo anterior. MATLAB no nos proporciona una única solución, ya que esta dependerá de los valores de a y b. En el primer caso, si $a + b = 0$, entonces la solución es:

$$I = \frac{\cos(2bx)}{4b} + C$$

En el segundo caso, si $a = b$ y b distinto de 0:

$$I = \frac{-\cos(2bx)}{4b} + C$$

Y en el tercer caso, si *a* es distinto de *b* y (*a* + *b)* es distinto de 0:

$$I = \frac{-\cos[(a-b)x]}{(2a-2b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{(2a+ab)} + C$$

Ejemplo 9.7

En versiones anteriores de MATLAB, la siguiente integral no tenía solución:

$$I = \int \cos(\ln x)\,dx$$

Y devolvía el mensaje: "*Explicit integral could not be found*"

Actualmente, con el cambio de motor de matemática simbólica (de Maple a MuPad), la solución puede encontrarse.

Primero, resolveremos la integral por medio de un cambio de variable y dos aplicaciones de la integral por partes:

$$\left.\begin{array}{l} I = \int \cos(\ln x)\,dx \\ \ln x = t; x = e^t; dx = e^t dt \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} I = \int \cos(t) e^t dt \\ e^t = u; e^t dt = du \\ \cos(t) dt = dv; v = \operatorname{sen}(t) \end{array}\right\}$$

$$I = \int \cos(t) e^t dt = e^t \operatorname{sen}(t) - \int \operatorname{sen}(t) e^t dt \}$$

$$\left.\begin{array}{l} \int \operatorname{sen}(t) e^t dt \\ e^t = u; e^t dt = du \\ \operatorname{sen}(t) dt = dv; -\cos(t) = v \end{array}\right\} = -e^t\cos(t) + \int \cos(t) e^t dt$$

$$I = e^t \operatorname{sen}(t) - \left[-e^t\cos(t) + \int \cos(t) e^t dt\right] = e^t \operatorname{sen}(t) - \left[-e^t \cos(t) + I\right]$$

$$2I = e^t(\operatorname{sen}(t) + \cos(t));\ \text{como}\ \ln x = t,\ \text{entonces}\ e^t = x$$

$$I = x\frac{\text{sen(lnx)+cos(lnx)}}{2}$$

Con MATLAB lo resolveremos del siguiente modo:

```
>> syms x
>> f=cos(log(x));
>> integral = int(f,x);
>> pretty(integral)
 x (cos(log(x)) + sin(log(x)))
 -----------------------------
               2
```

10. Integrales definidas con MATLAB

La función en MATLAB que resuelve las integrales definidas es la misma que resuelve las integrales indefinidas pero con una sintaxis especial para introducir los límites de integración. Lo vemos con un ejemplo:

Ejemplo 10.1

(del Ejemplo 7.6) Determinar el valor medio de la función:

$$f(x) = 3x^2 - 2x$$

en el intervalo [1, 4].

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}\int_1^4 (3x^2 - 2x)dx$$

```
>> syms x
>> f = 3*x^2-2*x;
>> valorMedio=(1/3)*int(f, 1, 4);
valorMedio =
16
```

Ejemplo 10.2

Calcular el area limitada por las curvas:

$$f(x) = xe^{-x}$$
$$g(x) = x^2e^{-x}$$

Ambas curvas se cortan formando un recinto cerrado, cuya área queremos determinar. Para verlo, primero dibujamos las curvas:

```
>> x = 0:0.01:1;
>> f = x.*exp(-x);
>> g = (x.^2).*exp(-x);
>> plot(x,f)
>> hold on
>> plot(x,g, 'r')
>> grid on
```

Y la figura es la siguiente:

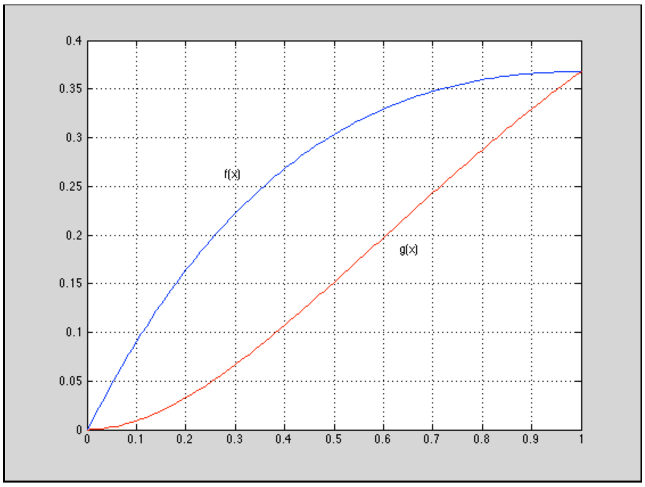


Figura 5-17 Área encerrada entre las curvas f(x) y g(x) del ejemplo 10.2

En la figura se ven los puntos de corte de ambas funciones pero, ¿cuáles son? Para determinarlos resolvemos el sistema de ecuaciones con $y = f(x)$ e $y = g(x)$, para lo cual empleamos la función `solve` que ya es conocida:

```
>> solucion = solve(y == x.*exp(-x), y ==(x.^2).*exp(-x))
solucion =

    x: [2x1 sym]
    y: [2x1 sym]
>> solucion.x
ans = 0, 1
>> solucion.y
ans = 0, exp(-1)
```

Por tanto en los puntos (0, 0) y (1, e^{-1}) están los puntos de corte.

Si calculamos la integral de *f(x)* en el intervalo [0, 1] tendremos el área bajo dicha curva. Si le restamos el área de la función *g(x)* en el mismo intervalo, tendremos el área pedida. Lo vemos con MATLAB:

```
>> Afx = int(x*exp(-x), 0, 1)
Afx =
1 - 2*exp(-1)
>> Agx = int((x^2)*exp(-x), 0, 1)
Agx =
2 - 5*exp(-1)
>> Area = Afx - Agx
Area =
3*exp(-1) - 1
```

Por tanto, el área pedida es (3/e) - 1.

Ejemplo 10.3

Determinar el área de la región limitada por las curvas:

$$f(x) = -x^2 + 3x - 1$$
$$g(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

Dibujamos las funciones:

```
>> x = -2:0.01:3;
>> f = -x.^2 + 3.*x -1;
>> g = x.^3 -2.*x.^2 + x -1;
>> plot(x, f)
>> grid on
>> hold on
>> plot(x, g, 'r')
```

Y obtenemos la siguiente figura:

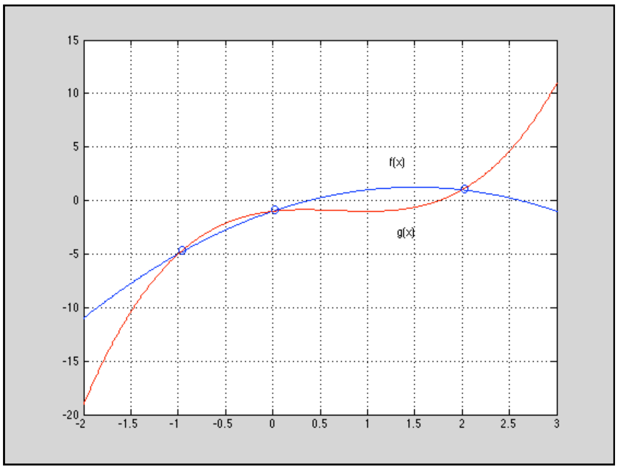


Figura 5-18 Área encerrada entre las curvas f(x) y g(x) del ejemplo 10.3

Calculamos los puntos de corte:

```
>> syms x y
>> Cortes = solve(y == -x^2 + 3*x -1, y == x^3 -2*x^2 + x -1)
Cortes =

    x: [3x1 sym]
    y: [3x1 sym]
>> Cortes.x
ans = 2 0 -1
>> Cortes.y
ans = 1 -1 -5
```

Por tanto los puntos de corte encontrados son (2, 1), (0, -1) y (-1, -5).

Ahora hay que fijarse bien en la figura y tener en cuenta que no existen las áreas negativas. Si nos fijamos en el primer sector del área, la que va desde el punto -1 al punto 0, el área sería *f(x) - g(x),* pero para que sea un área positiva debemos hacer *-(f(x) - g(x))* o lo que es lo mismo *g(x) - f(x).* En el segundo sector del área pedida, entre los puntos 0 y 2, pasa lo mismo siendo el sentido correcto *f(x) - g(x)*. Dejamos que lo resuelva MATLAB:

```
>> area1 = int((x^3 -2*x^2 + x -1) - (-x^2 + 3*x -1), -1, 0)
area1 = 5/12
>> area2 = int((-x^2 + 3*x -1) - (x^3 -2*x^2 + x -1), 0, 2)
area2 = 8/3
>> Area = area1 + area2
Area = 37/12
```

Ejemplo 10.4

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por la gráfica de $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ *y el eje x (* $0 \leq x \leq \pi$ *) alrededor del eje OX.*

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} (\sqrt{\operatorname{sen} x})^2\, dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx$$

$$= \pi\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \pi(1+1) = 2\pi$$

Resolviendo con MATLAB:

```
>> syms x
>> volumen = pi * int(sin(x), 0, pi)
volumen =
 2*pi
```

Ejemplo 10.5

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por

$f(x) = 2 - x^2$

y g(x) = 1 alrededor de la recta y = 1, como se muestra en la Figura 5-19

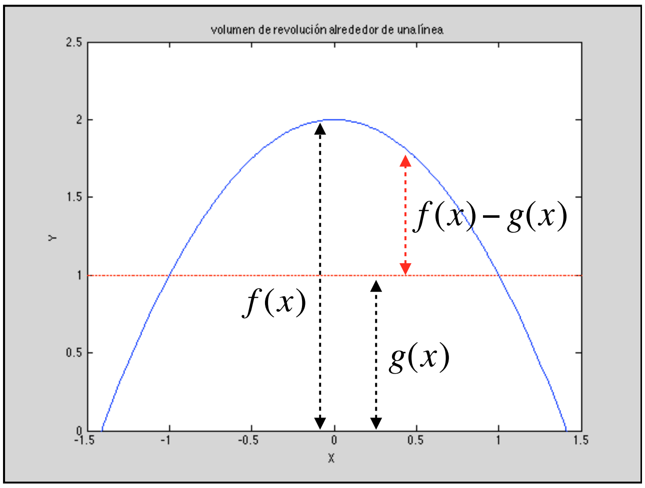


Figura 5-19 Área de revolución alrededor de la recta y = 1

Igualando ambas funciones encontramos los puntos de corte que son $x = \pm 1$.

Para encontrar la porción de curva que generará el volumen de revolución, restamos *f(x)* y *g(x)* como se muestra en la figura, dando como resultado $1 - x^2$.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2\, dx \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4) dx \\
&= \pi \left[x - \frac{2x^2}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{16\pi}{15}
\end{aligned}$$

Y con MATLAB:

```
>> syms x y
>> f = 2-x^2;
>> g = 1;
>> cortes = solve(y==f, y==g)
cortes =
    x: [2x1 sym]
    y: [2x1 sym]
>> cortes.x
ans = 1 -1
>> cortes.y
ans = 1 1
>> Volumen = pi*int((f - g)^2, -1, 1)
Volumen =
(16*pi)/15
```

Ejemplo 10.6

Encontrar el volumen del sólido formado al girar la región acotada por las gráficas de

$y = \sqrt{x}$ $\qquad$ $y = x^2$

alrededor del eje x, como se muestra en la figura 5-20. Integrando entre 0 y 1 produce

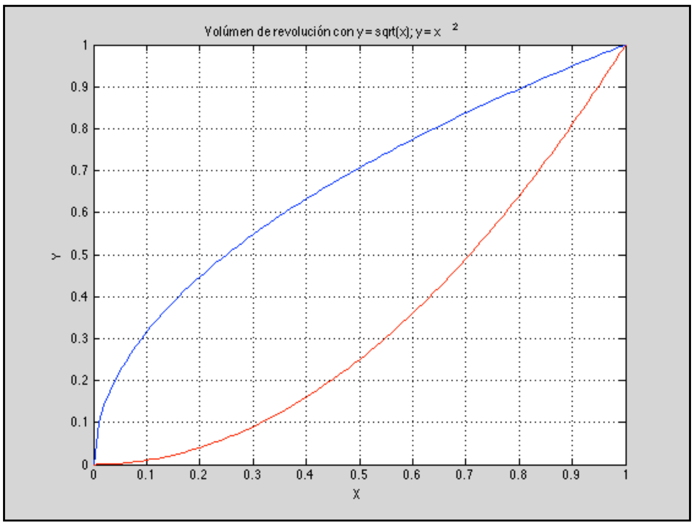


Figura 5-20 Volumen de revolución generado por dos curvas alrededor del eje OX

$$
\begin{aligned}
V = \pi\int_0^1 \left[f(x)^2 - g(x)^2\right]dx \\
= \pi\int_0^1 \left[(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\right]dx \\
= \pi\int_0^1 (x - x^4)dx \\
= \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 \\
= \frac{3\pi}{10}
\end{aligned}
$$

Suponiendo que se han calculado los puntos de corte con `solve`[8], la resolución de la integral con MATLAB se presenta a continuación:

```
>> syms x y
>> f = sqrt(x);
>> g = x^2;
>> Volumen = pi*int((f^2 - g^2), 0, 1)
Volumen = (3*pi)/10
```

[8] Si tiene problemas con el cálculo de los puntos de corte, puede consultar el ejemplo 10.3.

Ejemplo 10.7

Encontrar la longitud del arco de la función:

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$$

en el intervalo [$^1/_2$, 2].

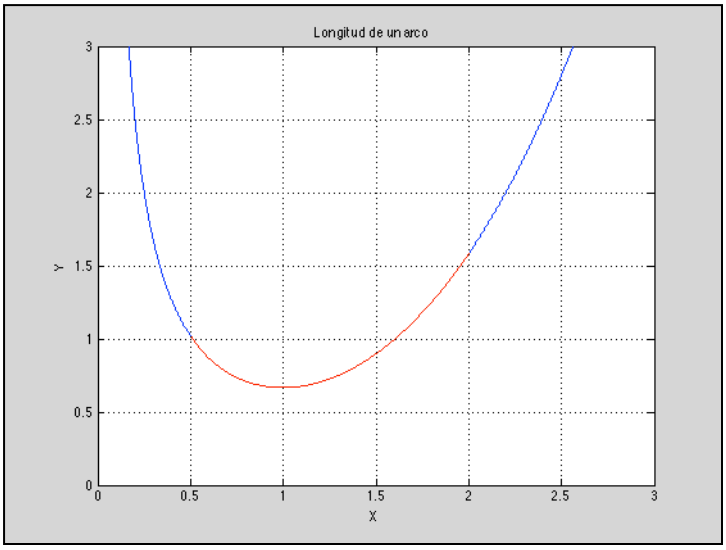


Figura 5-21 Longitud del arco (en rojo) de una curva dada (en azul)

$$y' = \frac{3x^2}{6} - \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{1/2}^{2} \sqrt{1+\left[\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\right]^2}\,dx$$

$$= \int_{1/2}^{2} \sqrt{\left[\frac{1}{4}\left(x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}\right)\right]}dx$$

$$= \int_{1/2}^{2} \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{13}{6} + \frac{47}{24}\right)$$

$$= \frac{33}{16}$$

```
>> syms x y
>> y = (x^3/6)+ 1/(2*x);
>> dx = diff(y)
dx =
x^2/2 - 1/(2*x^2)
>> L = int(sqrt(1+(dx)^2), 0.5, 2)
L = 33/16
```

Ejemplo 10.8

Encontrar la longitud de arco de la función

$y = \ln(\cos x)$

en el intervalo [0, π/4] como se muestra en la figura 5-22

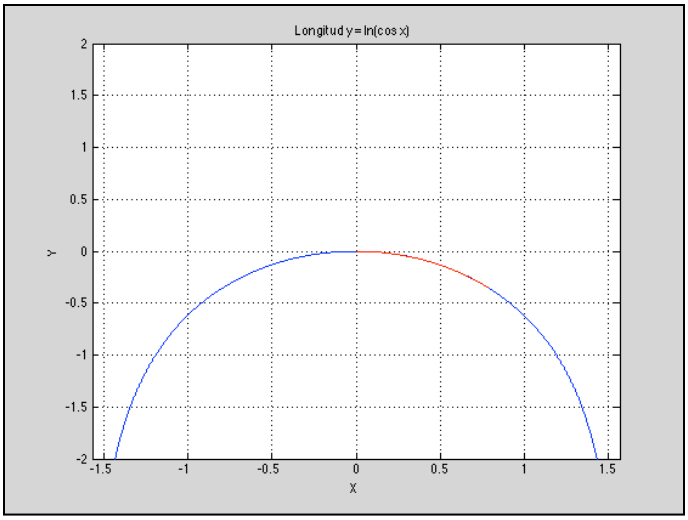


Figura 5-22 Cálculo de la longitud de arco de la función $y = \ln(\cos x)$

$$y' = -\frac{\text{sen}\, x}{\cos x} = -\tan x$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sqrt{\sec^2 x}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \sec x\,dx$$

$$= \left[\ln\left|\sec x + \tan x\right|\right]_0^{\pi/4}$$

$$= \ln(\sqrt{2}+1) - \ln 1 \approx 0{,}881$$

```
>> dx = diff(log(cos(x)))
dx =
-sin(x)/cos(x)
>> L = int(sqrt(1+(dx)^2), 0, pi/4)
L =
log(2^(1/2) + 1)
```

Ejemplo 10.9

Un cable eléctrico cuelga entre dos torres que están separadas 200 metros de distancia. El cable toma la forma de una catenaria cuya ecuación es:

$$y = 75(e^{x/150} + e^{-x/150}) = 150\cosh\frac{x}{150}$$

Encontrar la longitud del arco del cable entre las dos torres.

$$y' = \frac{1}{2}(e^{x/150} - e^{-x/150})$$

$$(y')^2 = \frac{1}{4}(e^{x/75} + e^{-x/75} - 2)$$

$$1 + (y')^2 = \frac{1}{4}(e^{x/75} + e^{-x/75} + 2) = \left[\frac{1}{2}(e^{x/150} + e^{-x/150})\right]^2$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-100}^{100} (e^{x/150} + e^{-x/150})dx$$

$$= 75\left[e^{x/150} + e^{-x/150}\right]_{-100}^{100}$$

$$150(e^{2/3} + e^{-2/3}) \approx 215 \text{ metros}$$

```
>> y = 75*(exp(x/150) + exp(-x/150))
y = 75*exp(-x/150) + 75*exp(x/150)
>> dx = diff(y)
dx = exp(x/150)/2 - exp(-x/150)/2
>> L = int(sqrt(1 + (dx)^2), -100, 100)
L = 150*exp(-2/3)*(exp(4/3) - 1)
>> eval(L)
ans = 215.1475
```

Ejemplo 10.10

Encontrar el área de la superficie formada al girar la gráfica de:

$$f(x) = x^3$$

en el intervalo [0, 1] al girar alrededor del eje OX.

$$f'(x) = 3x^2$$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x^3 \sqrt{1+(3x^2)^2}\,dx$$

$$= \frac{2\pi}{36} \int_0^1 36x^3 (1+9x^4)^{1/2}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{18}\left[\frac{(1+9x^4)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{27}\left[10^{3/2} - 1\right]$$

$$\approx 3.563$$

```
>> syms x y
>> y = x^3;
>> dy = diff(y)
dy = 3*x^2
>> S = 2*pi*int(y*sqrt(1+(dy)^2), 0, 1)
S = 2*pi*((5*10^(1/2))/27 - 1/54)
>> eval(S)
ans = 3.5631
```

11. Integración numérica con MATLAB

Muchos problemas de ingeniería requieren el cálculo de la integral definida

$$\int_a^b f(x)dx,$$

limitada al intervalo [*a, b*]. A menudo es muy dificultoso, o incluso imposible, calcular esta integral analíticamente. En tales casos podemos aproximar la integral definida por medio de una suma ponderada de una serie de valores de función,

$$f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$$

evaluadas, o medidas, en n puntos x_i del intervalo [*a, b*]. Esto es:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} a_i f(x_i)$$

Los coeficientes a_i se llaman **multiplicadores** o **pesos**. A continuación se citan algunos casos donde no tendremos más remedio que utilizar esta aproximación:

(1) El integrando nos es dado por una expresión matemática pero dicho integrando no puede ser expresado como una combinación de funciones elementales. Por ejemplo

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \qquad \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx \qquad \int \frac{\cos x}{x} dx \qquad \int \frac{dx}{\ln x} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

(2) Integrales que sí pueden ser expresadas por funciones elementales pero su evaluación es muy tediosa. En esta categoría incluimos numerosos casos en los cuales no podemos conocer si existe o no una forma más sencilla de la integral. La búsqueda de esa integral más sencilla requiere tiempo y esfuerzo y el éxito no está asegurado y es, por tanto, mucho más práctico recurrir a la integración numérica.

(3) Integrales de funciones definidas por tablas u obtenidas mediante evaluaciones o medidas en cierto número de puntos y no por expresiones matemáticas. En este caso se utiliza el término de integral dada en forma tabular.

MATLAB utiliza dos funciones para calcular estos tipos de integrales. La primera `trapz`, aproxima el área de la función buscada entre los límites definidos mediante trapecios. La segunda función es `integral` y la veremos más adelante. Veamos en el ejemplo 11.1: Sabemos que el área de las siguientes integrales definidas es 1.

$$\int_0^{90} \operatorname{sen} x \, dx \qquad \int_0^{90} \cos x \, dx$$

Veamos cómo se calcula con MATLAB:

```
>> angulo = 0:15:90;        % Evaluamos en [0 15 30 45 60 75 90]
>> x = (pi*angulo/180)';    % Cálculo en radianes
>> y = [sin(x) cos(x)];     % Calculamos de una vez el seno y coseno
>> trapz(x, y)
ans =
    0.9943    0.9943
```

Vemos que el error cometido por la aproximación a trapecios es del 0,57%. Podemos mejorar el resultado aumentando el número de trapecios evaluados, es decir, evaluando más puntos en el recorrido del ángulo:

```
>> angulo = 0:5:90; % Evaluamos en [0 5 10 15..45..75 80 85 90]
>> x = (pi*angulo/180)';
>> y = [sin(x) cos(x)];
>> trapz(x, y)
ans =
    0.9994    0.9994
```

La función anterior, `trapz`, utiliza una descomposición en trapecios para calcular la integral por aproximación. Existe otra función, `integral`, que calcula el área de forma más sofisticada y además es capaz de trabajar con funciones que tienen singularidades. Además, permite expresar la tolerancia, es decir, el error máximo con el que se quiere obtener la solución. Veámoslo con en el ejemplo 11.2:

$$\int_{0.5}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx$$

Esta integral no tiene solución analítica y debemos, por tanto, utilizar formas de integración numérica:

```
>> format long;
>> fun = @(x) sin(x)/x;
>> S = integral(fun, 0.5, pi, 'ArrayValued',true, 'AbsTol',1e-9)
S = 1.358829633939399
```

Merece la pena detenerse un momento en el análisis del código anterior. Primero de todo, la función `integral` no admite directamente la expresión del integrando dentro de la función. Necesita para operar que le pasemos un "manejador" (handle). Esto lo hacemos mediante la definición de una función anónima que es definida en la primera línea mediante la instrucción `@(x)`. En segundo lugar, observamos el parámetro `'ArrayValued'` establecido a `'true'`. Esto es necesario para indicarle a la función `integral` que la entrada y la salida serán evaluadas como una lista de valores que se irán calculando y aproximando a la tolerancia expresada por `'AbsTol'`, que expresa la tolerancia absoluta o el error con el que se quiere obtener el resultado. Por último, hemos introducido el comando `'format long'` para que el resultado pueda ser expresado con los decimales que indica la tolerancia.

Ejemplo 11.3: cálculo de trabajo de frontera móvil

En este ejemplo se utilizarán las técnicas de integración numéricas de MATLAB para encontrar el trabajo producido en un pistón al resolver la ecuación:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} P\,dV$$

Con base en la suposición de que $PV = n\,R\,T$

donde

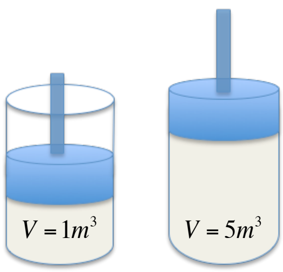


Figura 5-23 Expansión de un pistón para producir trabajo (W)

P = Presión en Ka,

V = Volumen en m^3*,*

n = número de moles, kmol,

R = constante universal de los gases 8,314 Ka m^3*/K kmol*

T = temperatura, K (grados Kelvin)

También se supone que el pistón contiene 1 mol de gas a 300 K y que la temperatura permanece constante en todo el proceso.

Encontrar el trabajo producido por el pistón que se muestra en la figura 5.23

Resolvemos el problema con MATLAB:

```
% Cálculo de trabajo de frontera móvil
clear, clc, format short                    % Se limpia pantalla y variables
% Definición de las constantes
n = 1;                                      % número de moles del gas
R = 8.314;                                  % constante universal de los gases
T = 300;                                    % temperatura en ºK
% Definición de la función anónima para la presión
Presion = @(V) n*R*T./V;            % Creamos la función anónima Presión
% Uso de la función integral
Trabajo = integral(Presion, 1, 5)
Trabajo = 4.0143e+03
```

o0o