



UNIVERSIDAD
NACIONAL DE
CHIMBORAZO

Unach
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CHIMBORAZO

CARRERA DE
INGENIERÍA CIVIL

ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS

Ing. Marcelo David Guerra Valladares, MSc.

Magíster en Ingeniería Civil – Mención Estructuras Sismorresistentes

Especialista Estructural



UNIDAD 3

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS
SÍSMICO

Condensación Estática de la matriz de rigidez

Definición

La condensación estática es un método que se utiliza para expresar uno o varios GDL en función de otros.

Se reduce o condensa el número de ecuaciones de resolver.

El modelo matemático a utilizar es el mismo al utilizado para realizar la partición de matrices.

En este caso se escogen grados de libertad primarios ($\text{GDL} \rightarrow t$) y grados de libertad secundarios ($\text{GDL} \rightarrow o$).

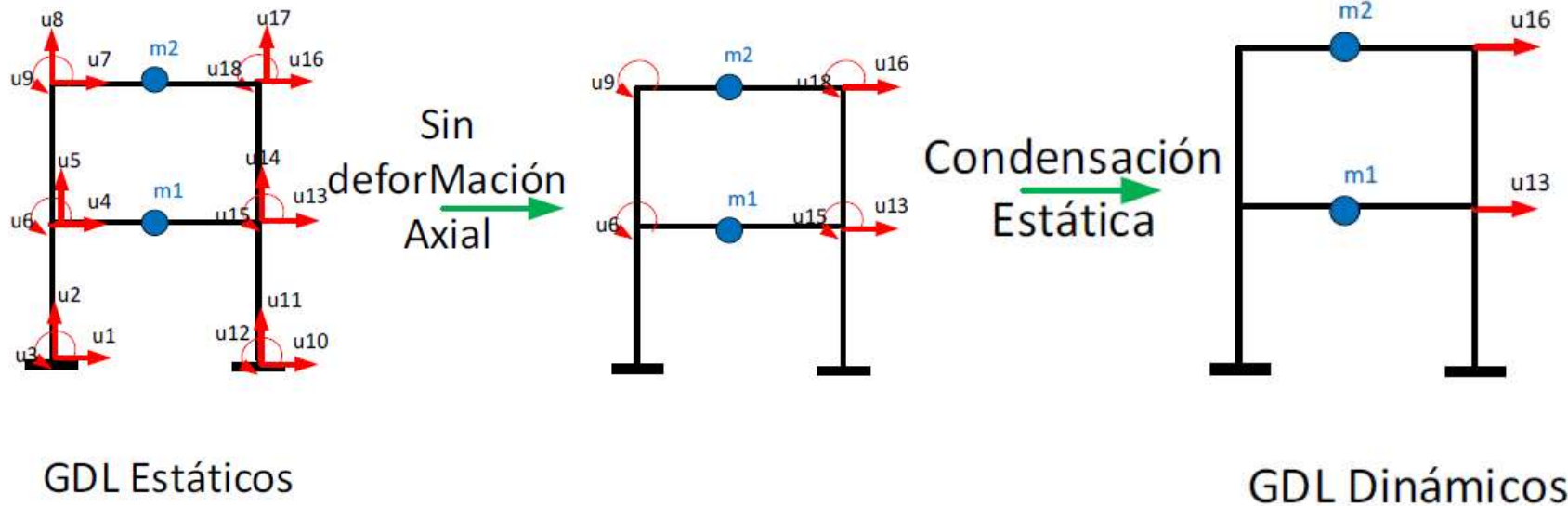
Los GDL t son los que se mantienen y los GDL o los que desaparecen.

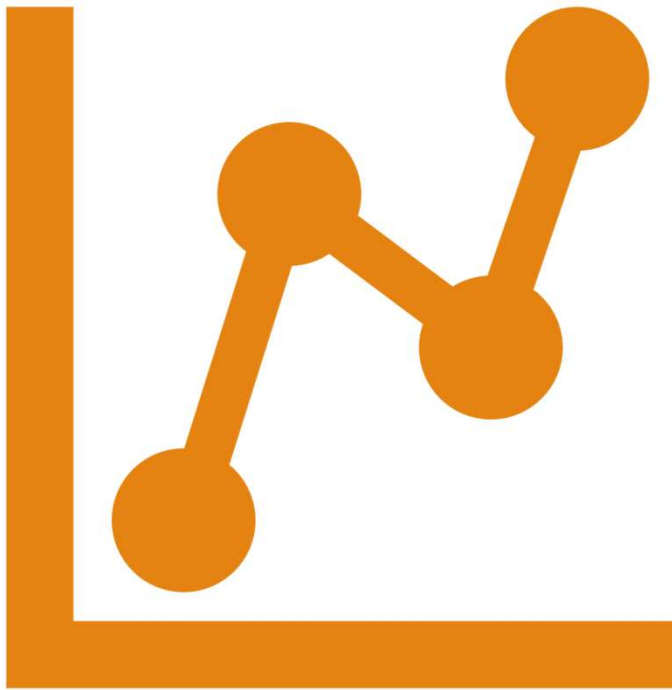
Definición

Los GDL secundarios se colocan en función de los GDL primarios.

El método se utiliza en dinámica estructural y en análisis matricial de estructuras.

En Dinámica Estructural:





Definición

En Análisis Matricial:

1. Modificar la matriz de rigidez para que tenga articulaciones.
2. Obtener la rigidez en el sentido de un GDL específico.
3. Disminuir dimensiones del problema.

Modelo Matemático Aplicable

La condensación estática se la realiza utilizando la matriz de rigidez ya particionada K_{pp} .

La relación $F_p = K_{pp} \cdot U_p$ se condensa con los GDL primarios y secundarios:

$$\begin{bmatrix} [F_t] \\ [F_o] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{tt}] & [K_{to}] \\ [K_{ot}] & [K_{oo}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [U_t] \\ [U_o] \end{bmatrix}$$

$$[F_p] = \begin{bmatrix} [F_t] \\ [F_o] \end{bmatrix} \quad [K_{pp}] = \begin{bmatrix} [K_{tt}] & [K_{to}] \\ [K_{ot}] & [K_{oo}] \end{bmatrix}$$

Modelo Matemático Aplicable

$$\mathbf{1)} \quad [Ft] = [Ktt] \cdot [Ut] + [Kto] \cdot [Uo]$$

$$\mathbf{2)} \quad [Fo] = [Kot] \cdot [Ut] + [Koo] \cdot [Uo]$$

Despejando de la ecuación 2:

$$\mathbf{3)} \quad [Uo] = [Koo]^{-1} \cdot ([Fo] - [Kot] \cdot [Ut])$$

Modelo Matemático Aplicable

Reemplazando la ecuación 3 en 1

$$[Ft] = [Ktt] \cdot [Ut] + [Kto] \cdot ([Koo]^{-1} \cdot ([Fo] - [Kot] \cdot [Ut]))$$

$$[Ft] = [Ktt] \cdot [Ut] + [Kto] \cdot [Koo]^{-1} \cdot [Fo] - [Kto] \cdot [Koo]^{-1} \cdot [Kot] \cdot [Ut]$$

$$[Ft] - [Kto] \cdot [Koo]^{-1} \cdot [Fo] = ([Ktt] - [Kto] \cdot [Koo]^{-1} \cdot [Kot]) \cdot [Ut]$$

La relación Fuerza Deformación condensada es

$$[Fcond] = [Ft] - [Kto] \cdot [Koo]^{-1} \cdot [Fo]$$

$$[Kcond] = ([Ktt] - [Kto] \cdot [Koo]^{-1} \cdot [Kot])$$

$$[Fcond] = [Kcond] \cdot [Ut]$$

Modelo Matemático Aplicable

Una vez calculado U_t , se puede calcular los desplazamientos de los GDL U_o

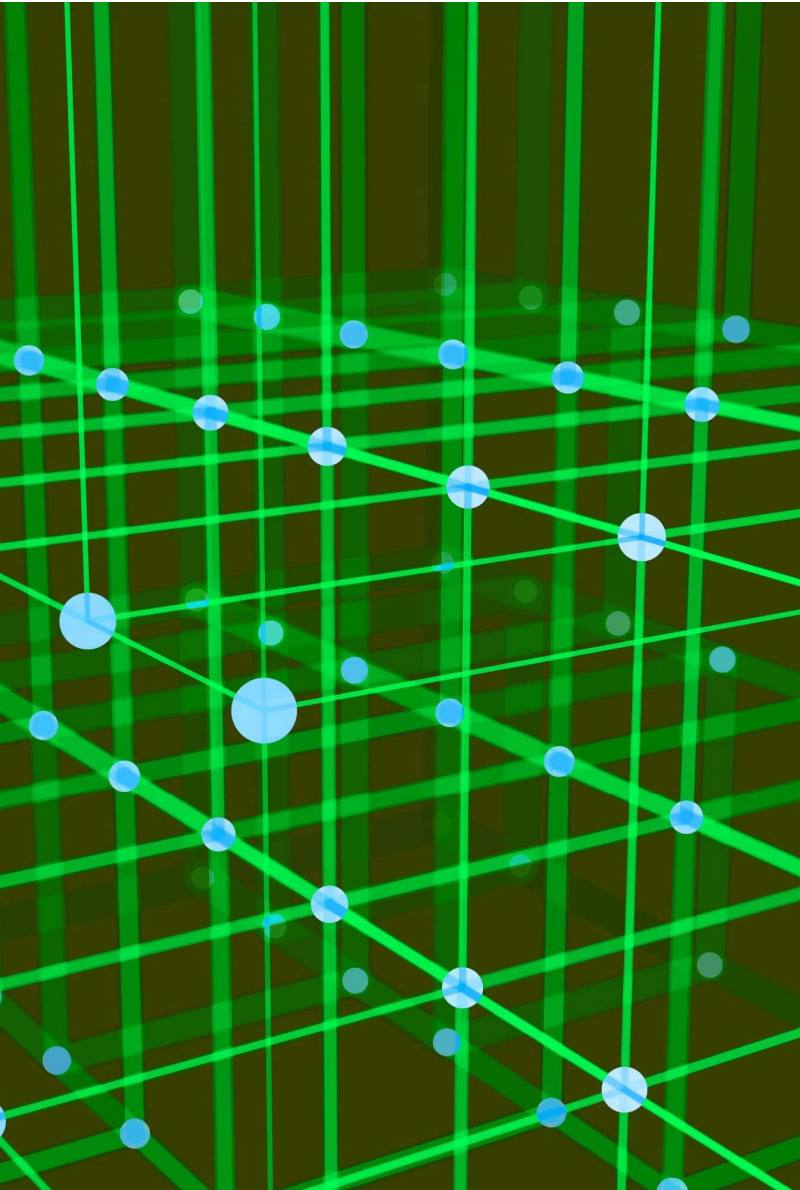
$$[U_o] = [K_{oo}]^{-1} \cdot ([F_o] - [K_{ot}] \cdot [U_t])$$

Incluyendo Fuerzas aplicadas en los elementos

$$[F_{cond}] = [F_t] - [F_{emp_t}] - [K_{to}] \cdot [K_{oo}]^{-1} \cdot [F_o] + [K_{to}] \cdot [K_{oo}]^{-1} \cdot [F_{emp_o}]$$

$$[K_{cond}] = ([K_{tt}] - [K_{to}] \cdot [K_{oo}]^{-1} \cdot [K_{ot}])$$

$$[F_{cond}] = [K_{cond}] \cdot [U_t]$$



Matriz de Rigidez Aplicando Deformaciones Unitarias

Matriz de Rigidez Aplicando Deformaciones Unitarias

Se considera la matriz de rigidez de elementos sometidos a flexión y corte.

$$\begin{bmatrix} \frac{12 EI}{L^3} & \frac{6 EI}{L^2} & -\left(\frac{12 EI}{L^3}\right) & \frac{6 EI}{L^2} \\ \frac{6 EI}{L^2} & \frac{4 EI}{L} & -\left(\frac{6 EI}{L^2}\right) & \frac{2 EI}{L} \\ -\left(\frac{12 EI}{L^3}\right) & -\left(\frac{6 EI}{L^2}\right) & \frac{12 EI}{L^3} & -\left(\frac{6 EI}{L^2}\right) \\ \frac{6 EI}{L^2} & \frac{2 EI}{L} & -\left(\frac{6 EI}{L^2}\right) & \frac{4 EI}{L} \end{bmatrix}$$

Con este método, se puede obtener la matriz de rigidez de pórticos reticulares en el plano sin considerar la deformación axial.

Traslación Nodo Inicial	Giro Nodo Inicial	Traslación Nodo Final	Giro Nodo Final
			
$12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3}$	$6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$-\left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3}\right)$	$6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$
$6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$4 \cdot \frac{E \cdot I}{L}$	$-\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right)$	$2 \cdot \frac{E \cdot I}{L}$
$-\left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3}\right)$	$-\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right)$	$12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3}$	$-\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right)$
$6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}$	$2 \cdot \frac{E \cdot I}{L}$	$-\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right)$	$4 \cdot \frac{E \cdot I}{L}$

	Traslación Nodo Inicial
	Giro Nodo Inicial
	Traslación Nodo Final
	Giro Nodo Final

Matriz de Rigidez Aplicando Deformaciones Unitarias

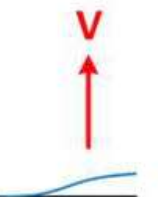
Asumiendo las siguientes reglas, se puede utilizar la matriz de rigidez de elementos sometidos a corte y momento para obtener la matriz de rigidez de cualquier estructura:

1. Los elementos son horizontales o verticales
2. No se incluyen deformaciones axiales
3. **Los nodos inicial y final van siempre de izq a der y de arriba-abajo**

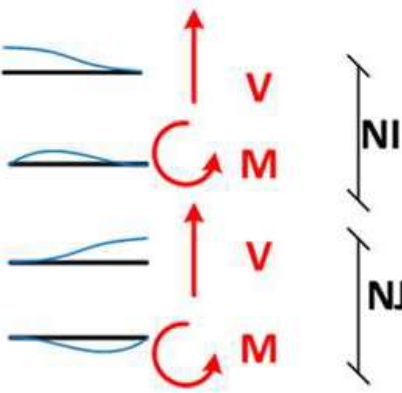
NI



NJ



$$\begin{bmatrix} 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} & 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} & -\left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3}\right) & 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \\ 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} & 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right) & 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \\ -\left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3}\right) & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right) & 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right) \\ 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} & 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L} & -\left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right) & 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \end{bmatrix}$$



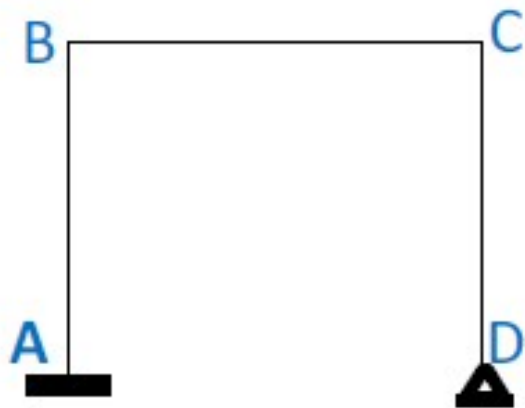
Matriz de Rigidez Aplicando Deformaciones Unitarias

Se puede aplicar deformaciones unitarias a cada GDL en una estructura y obtener las fuerzas necesarias para obtener dichas deformaciones.

Las fuerzas obtenidas son los coeficientes de la matriz de rigidez de la estructura.

Ejercicio de Aplicación

Aplicando deformaciones unitarias y utilizando la matriz de rigidez de corte y flexión, encontrar la matriz de rigidez de la siguiente estructura:



$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \text{NI} & \text{NJ} \\
 \begin{array}{c} \uparrow V \\ \text{[Diagram of shear deformation]} \end{array} & \begin{array}{c} \curvearrowright M \\ \text{[Diagram of bending deformation]} \end{array} & \begin{array}{c} \uparrow V \\ \text{[Diagram of shear deformation]} \end{array} & \begin{array}{c} \curvearrowright M \\ \text{[Diagram of bending deformation]} \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} & 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} & -12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} & 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \\
 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} & 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L} & -6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} & 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \\
 -12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} & -6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} & 12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} & -6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \\
 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} & 2 \cdot \frac{E \cdot I}{L} & -6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} & 4 \cdot \frac{E \cdot I}{L}
 \end{bmatrix}$$

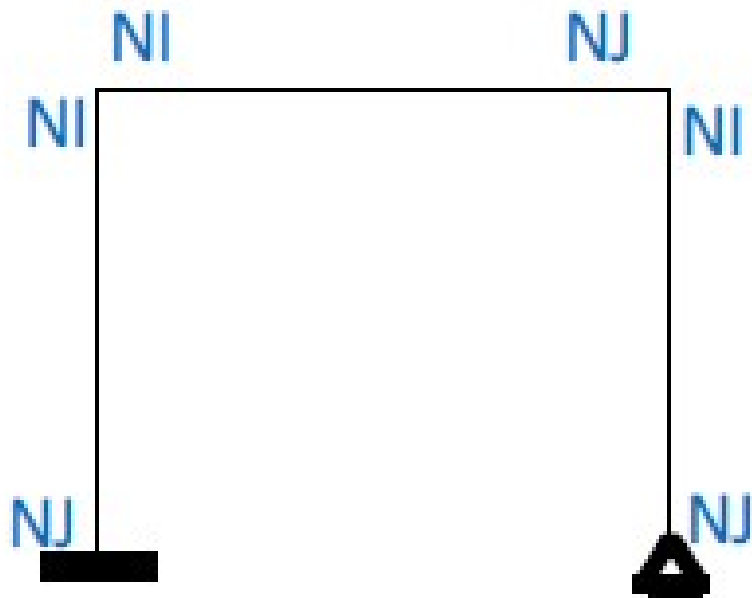
$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \text{[Diagram of shear deformation]} \\ \text{[Diagram of bending deformation]} \\ \text{[Diagram of shear deformation]} \\ \text{[Diagram of bending deformation]} \end{array}
 \begin{array}{c} \uparrow V \\ \curvearrowright M \\ \uparrow V \\ \curvearrowright M \end{array}
 \begin{array}{c} \text{NI} \\ \text{NJ} \end{array}
 \end{array}$$

Ejercicio de Aplicación



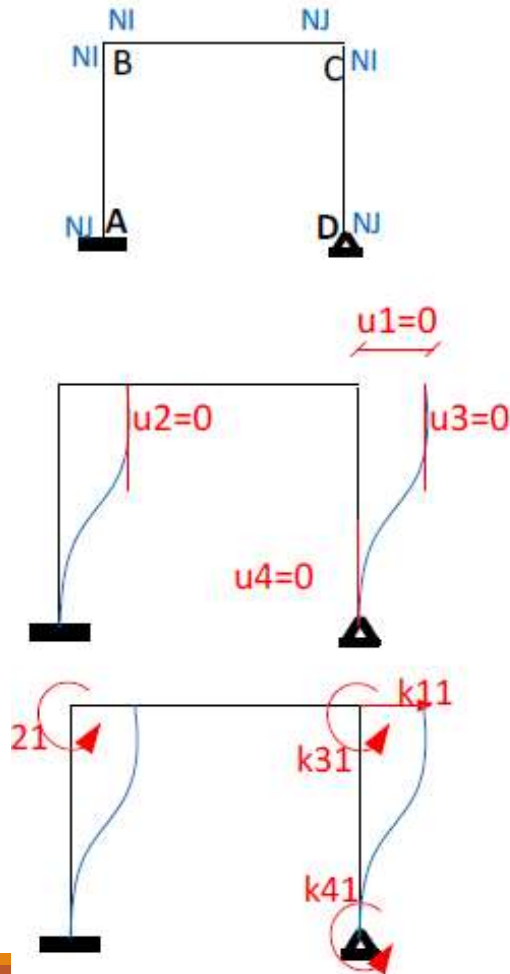
Se debe aplicar deformaciones unitarias a cada grado de libertad

Ejercicio de Aplicación



NI: Nudo inicial
NJ: Nudo final

1) $u_1=1, u_2=u_3=u_4=0$



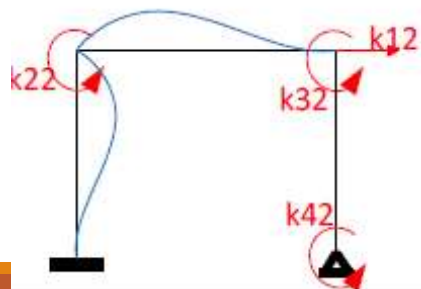
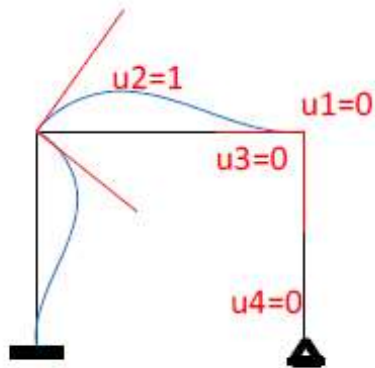
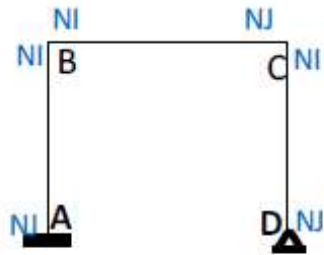
$$k_{11} = \left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} \right)_{AB} + \left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} \right)_{CD}$$

$$k_{21} = \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \right)_{AB}$$

$$k_{31} = \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \right)_{CD}$$

$$k_{41} = \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \right)_{CD}$$

1) $u_2=1, u_1=u_3=u_4=0$



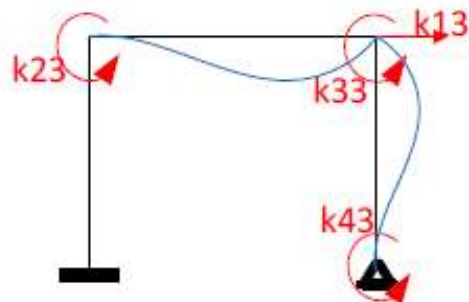
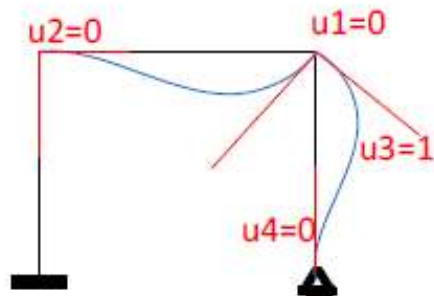
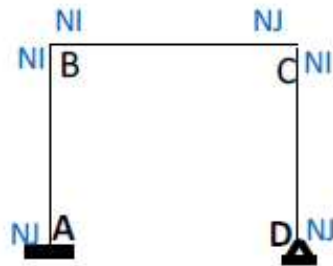
$$k_{12} = \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \right)_{AB}$$

$$k_{22} = \left(4 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \right)_{AB} + \left(4 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \right)_{BC}$$

$$k_{32} = \left(2 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \right)_{BC}$$

$$k_{42} = 0$$

1) $u_3=1, u_1=u_2=u_4=0$



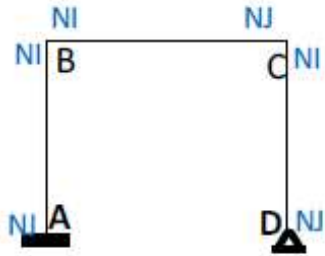
$$k_{13} = \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \right)_{CD}$$

$$k_{23} = \left(2 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \right)_{BC}$$

$$k_{33} = \left(4 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \right)_{BC} + \left(4 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \right)_{CD}$$

$$k_{43} = \left(2 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \right)_{CD}$$

1) $u_4=1, u_1=u_2=u_3=0$

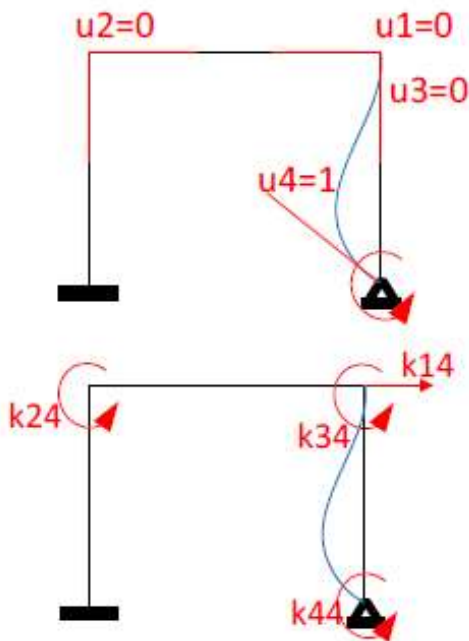


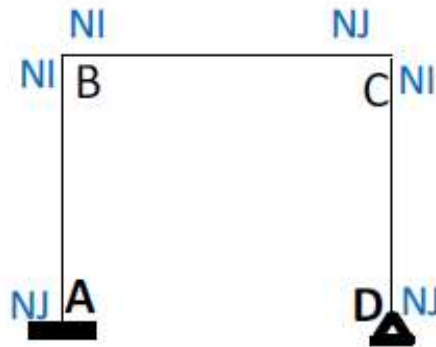
$$k_{14} = \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \right)_{CD}$$

$$k_{24} = 0$$

$$k_{34} = \left(2 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \right)_{CD}$$

$$k_{44} = \left(4 \cdot \frac{E \cdot I}{L} \right)_{CD}$$





$$K = \begin{bmatrix} \left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3}\right)_{AB} + \left(12 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3}\right)_{CD} & \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right)_{AB} & \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right)_{CD} & \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right)_{CD} \\ \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right)_{AB} & \left(4 \cdot \frac{E \cdot I}{L}\right)_{AB} + \left(4 \cdot \frac{E \cdot I}{L}\right)_{BC} & \left(2 \cdot \frac{E \cdot I}{L}\right)_{BC} & 0 \\ \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right)_{CD} & \left(2 \cdot \frac{E \cdot I}{L}\right)_{BC} & \left(4 \cdot \frac{E \cdot I}{L}\right)_{BC} + \left(4 \cdot \frac{E \cdot I}{L}\right)_{CD} & \left(2 \cdot \frac{E \cdot I}{L}\right)_{CD} \\ \left(6 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2}\right)_{CD} & 0 & 2 \cdot \left(\frac{E \cdot I}{L}\right)_{CD} & 4 \cdot \left(\frac{E \cdot I}{L}\right)_{CD} \end{bmatrix}$$

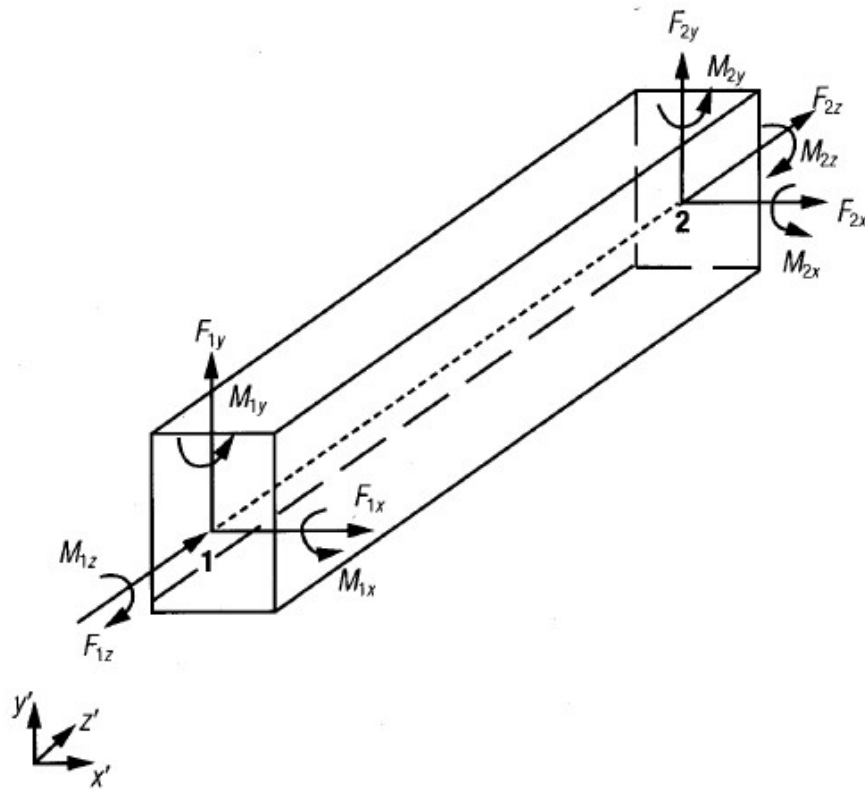


Matriz de rigidez para el análisis sísmico espacial de pórticos de edificación



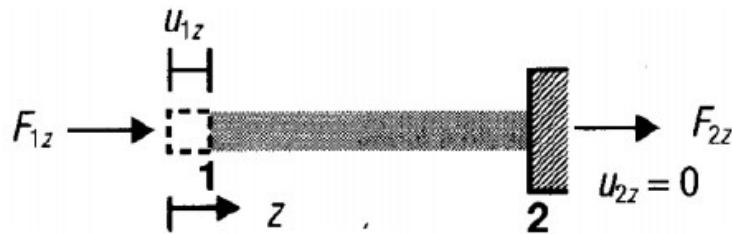
Matriz de Rigidez de un elemento tridimensional

La matriz de rigidez de la estructura o global se puede obtener mediante el ensamblaje de las matrices de cada elemento, esto es equivalente a formar las ecuaciones de equilibrio en cada grado de indeterminación. Los términos de la matriz de rigidez de un elemento k_{ij} representan la fuerza F_i asociada a un desplazamiento unitario en u_j cuando todos los demás desplazamientos son iguales a cero.



Matriz de
Rigidez de un
elemento
tridimensional

Fuerza Axial



$$2) C1 = F1_z L$$

$$EA \frac{du}{dz} = -q \rightarrow EA \frac{du}{dz} = -F1_z$$

$$1) F1_z z = -EAu + C1$$

$$\text{Cuando } z = 0 \rightarrow u = u1_z$$

$$\text{Cuando } z = L \rightarrow u = 0$$

$$F1_z = -F2_z$$

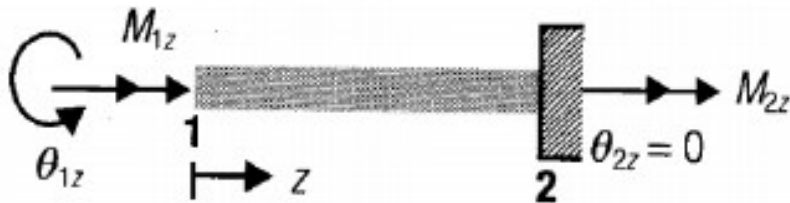
Cuando $z = 0$; Reemplazar 2) en 1)

$$0 = -EAu1_z + F1_z L$$

$$\rightarrow F1_z = \frac{EA}{L} u1_z$$

$$\rightarrow k_{11} = -k_{21} = \frac{EA}{L}$$

Torsión



$$2) C1 = M1_z L$$

$$GJ \frac{d\theta}{dz} = -t \rightarrow GJ \frac{d\theta}{dz} = -M1_z$$

$$1) M1_z z = -GJ\theta + C1$$

$$\text{Cuando } z = 0 \rightarrow \theta = \theta1_z$$

$$\text{Cuando } z = L \rightarrow \theta = 0$$

$$M1_z = -M2_z$$

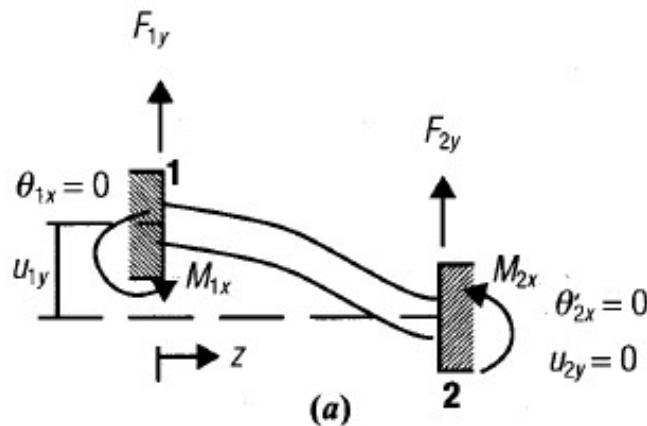
Cuando $z = 0$; Reemplazar 2) en 1)

$$0 = -GJ\theta1_z + M1_z L$$

$$\rightarrow M1_z = \frac{GJ}{L} \theta1_z$$

$$\rightarrow k_{11} = -k_{21} = \frac{GJ}{L}$$

Fuerza Cortante y Momento Flector: Cortante en el plano principal de flexión



$$EI_x \frac{d^2 v_b}{dz^2} = F1_y z - M1_x$$

$$1) EI_x \frac{dv_b}{dz} = F1_y \frac{z^2}{2} - M1_x z + C2$$

$$2) EI_x v_b = F1_y \frac{z^3}{6} - M1_x \frac{z^2}{2} + C2z + C3$$

$$v = v_s + v_b$$

$$\frac{dv_s}{dz} = \frac{V}{GA_c} = \frac{-F1_y}{GA_c} \rightarrow EI_x v_s = \frac{-EI_x F1_y}{GA_c} z + C1$$

Fuerza Cortante y Momento Flector: Cortante en el plano principal de flexión

$$EI_x v = F1_y \frac{z^3}{6} - M1_x \frac{z^2}{2} + C2z - \frac{EI_x F1_y}{GA_c} z + C1 + C3$$

$$3) EI_x v = F1_y \frac{z^3}{6} - M1_x \frac{z^2}{2} + \left(C2 - \frac{EI_x F1_y}{GA_c} \right) z + C4$$

$$4) EI_x \frac{dv}{dz} = F1_y \frac{z^2}{2} - M1_x z + C2 - \frac{EI_x F1_y}{GA_c}$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv_s}{dz} = \frac{-F1_y}{GA_c} \text{ (en } z = 0) \text{ Reemplazar en 4) } \rightarrow C2 = 0$$

$$\text{Reemplazar } C2 = 0, z = L \text{ y } \frac{dv_b}{dz} = 0 \text{ en 1) } \rightarrow M1_x L = F1_y \frac{L^2}{2} \rightarrow M1_x = \frac{F1_y L}{2}$$

Fuerza Cortante y Momento Flector: Cortante en el plano principal de flexión

$$\text{Reemplazar } M1_x, v = 0 \text{ y } z = L \text{ en 3) } \rightarrow 0 = F1_y \frac{L^3}{6} - \frac{F1_y L^3}{4} - \left(\frac{EI_x F1_y L}{GA_c} \right) + C4$$

$$C4 = F1_y \frac{L^3}{12} + \left(\frac{12EI_x F1_y L^3}{12GA_c L^2} \right) = F1_y \frac{L^3}{12} (1 + \Phi) \quad \Phi = \frac{12EI_x}{GA_c L^2}$$

$$F2_y = -F1_y$$

$$M2_x = -M1_x + F1_y L$$

Fuerza Cortante y Momento Flector: Cortante en el plano principal de flexión

Reemplazar $C4, v = u1_y$ y $z = 0$ en 3) $\rightarrow EI_x u1_y = F1_y \frac{L^3}{12} (1 + \Phi)$

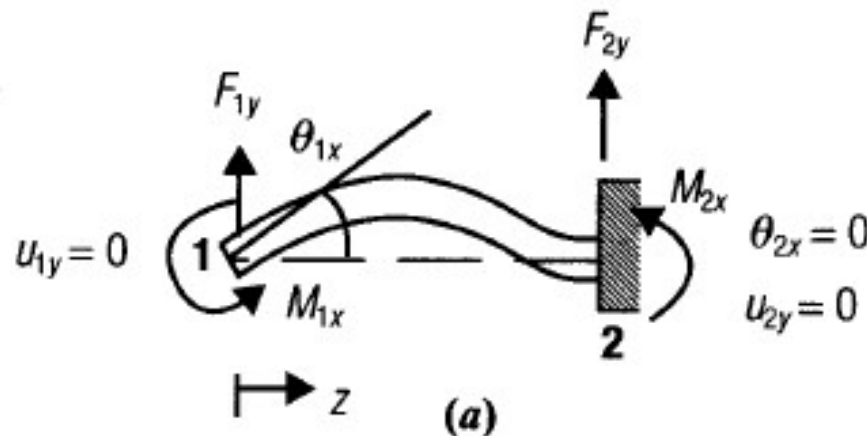
$$\rightarrow k11 = \frac{F1_y}{u1_y} = \frac{12EI_x}{L^3(1 + \Phi)} \quad \rightarrow k31 = -\frac{F2_y}{u1_y} = -\frac{12EI_x}{L^3(1 + \Phi)}$$

$$\rightarrow k21 = \frac{M1_x}{u1_y} = \frac{F1_y L}{2u1_y} = \frac{6EI_x}{L^2(1 + \Phi)}$$

$$\rightarrow k41 = \frac{-M1_y + F1_y L}{u1_y} = \frac{-\frac{F1_y L}{2} + F1_y L}{u1_y} = \frac{6EI_x}{L^2(1 + \Phi)}$$

Fuerza Cortante y Momento Flector:

Momento flector en el plano principal de flexión



$$1) EI_x v = F_{1y} \frac{z^3}{6} - M_{1x} \frac{z^2}{2} + \left(C_2 - \frac{EI_x F_{1y}}{GA_c} \right) z + C_4$$

Reemplazar $v = 0$ y $z = 0$ en 1) $\rightarrow C_4 = 0$

Fuerza Cortante y Momento Flector: Momento flector en el plano principal de flexión

Reemplazar $v = 0, z = L$, y C4 en 1)

$$0 = F1_y \frac{L^3}{6} - M1_x \frac{L^2}{2} + \left(C2L - \frac{EI_x F1_y L}{GA_c} \right)$$

$$C2 = -F1_y \frac{L^2}{6} + M1_x \frac{L}{2} + \frac{EI_x F1_y}{GA_c} \quad \Phi = \frac{12EI_x}{GA_c L^2}$$

$$C2 = -F1_y \frac{L^2}{6} + M1_x \frac{L}{2} + F1_y \frac{L^2}{12} \Phi$$

Fuerza Cortante y Momento Flector: Momento flector en el plano principal de flexión

$$2) EI_x \frac{dv}{dz} = F1_y \frac{z^2}{2} - M1_x z + C2 - \frac{EI_x F1_y}{GA_c}$$

$$\frac{dv}{dz} = \frac{dv_s}{dz} = \frac{-F1_y}{GA_c} \text{ (en } z = L \text{) Reemplazar y } C2 \text{ en 2)}$$

$$-EI_x \frac{F1_y}{GA_c} = F1_y \frac{L^2}{2} - M1_x L + \left(-F1_y \frac{L^2}{6} + M1_x \frac{L}{2} + F1_y \frac{L^2}{12} \Phi \right) - \frac{EI_x F1_y}{GA_c}$$

$$0 = F1_y \frac{L^2}{2} - M1_x L - F1_y \frac{L^2}{6} + M1_x \frac{L}{2} + F1_y \frac{L^2}{12} \Phi$$

Fuerza Cortante y Momento Flector: Momento flector en el plano principal de flexión

$$0 = F1_y \frac{L^2}{3} - M1_x \frac{L}{2} + F1_y \frac{L^2}{12} \Phi$$

$$0 = F1_y \frac{4L^2}{12} - M1_x \frac{L}{2} + F1_y \frac{L^2}{12} \Phi$$

$$0 = F1_y \frac{L^2}{12} (4 + \Phi) - M1_x \frac{L}{2} \rightarrow F1_y = \frac{6M1_x}{L(4 + \Phi)}$$

$$M1_x = \frac{F1_y L (4 + \Phi)}{6}$$

Fuerza Cortante y Momento Flector: Momento flector en el plano principal de flexión

$$F2_y = -F1_y \quad M2_x = -M1_x + F1_y L \quad \theta1_x = \frac{M1_x L(1 + \Phi)}{EI_x(4 + \Phi)}$$

$$\rightarrow k22 = \frac{M1_x}{\theta1_x} = \frac{EI_x(4 + \Phi)}{L(1 + \Phi)} \quad \rightarrow k12 = \frac{F1_y}{\theta1_x} = \frac{\frac{6M1_x}{L(4 + \Phi)}}{\frac{M1_x L(1 + \Phi)}{EI_x(4 + \Phi)}} = \frac{6EI_x}{L^2(1 + \Phi)}$$

$$\rightarrow k32 = \frac{F2_y}{\theta1_x} = -\frac{F1_y}{\theta1_x} = -\frac{6EI_x}{L^2(1 + \Phi)}$$

$$\rightarrow k42 = \frac{M2_x}{\theta1_x} = \frac{-M1_x + \frac{6M1_x}{L(4 + \Phi)}L}{\frac{M1_x L(1 + \Phi)}{EI_x(4 + \Phi)}} = \frac{EI_x(2 - \Phi)}{L(1 + \Phi)}$$

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{EA}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 EIx}{(1+\phi) L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 EIx}{(1+\phi) L^2} & 0 & -\left(\frac{12 EIx}{(1+\phi) L^3}\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{6 EIx}{(1+\phi) L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12 EIy}{(1+\phi) L^3} & 0 & -\left(\frac{6 EIy}{(1+\phi) L^2}\right) & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{12 EIy}{(1+\phi) L^3}\right) & 0 & -\left(\frac{6 EIy}{(1+\phi) L^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{GJ}{L}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{6 EIy}{(1+\phi) L^2}\right) & 0 & \frac{(4+\phi) EIy}{(1+\phi) L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 EIy}{(1+\phi) L^2} & 0 & \frac{(2-\phi) EIy}{(1+\phi) L} & 0 \\ 0 & \frac{6 EIx}{(1+\phi) L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi) EIx}{(1+\phi) L} & 0 & -\left(\frac{6 EIx}{(1+\phi) L^2}\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi) EIx}{(1+\phi) L} \\ -\left(\frac{EA}{L}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{12 EIx}{(1+\phi) L^3}\right) & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{6 EIx}{(1+\phi) L^2}\right) & 0 & \left(\frac{12 EIx}{(1+\phi) L^3}\right) & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{6 EIx}{(1+\phi) L^2}\right) \\ 0 & 0 & -\left(\frac{12 EIy}{(1+\phi) L^3}\right) & 0 & \frac{6 EIy}{(1+\phi) L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12 EIy}{(1+\phi) L^3} & 0 & \frac{6 EIy}{(1+\phi) L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{6 EIy}{(1+\phi) L^2}\right) & 0 & \frac{(2-\phi) EIy}{(1+\phi) L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6 EIy}{(1+\phi) L^2} & 0 & \frac{(4+\phi) EIy}{(1+\phi) L} & 0 \\ 0 & \frac{6 EIx}{(1+\phi) L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-\phi) EIx}{(1+\phi) L} & 0 & -\left(\frac{6 EIx}{(1+\phi) L^2}\right) & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+\phi) EIx}{(1+\phi) L} \end{bmatrix}$$