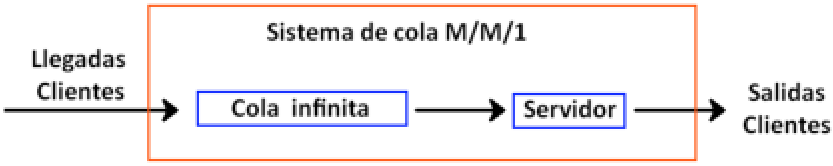
MODELO DE COLA SIMPLE M/M/1

Este Sistema de espera se cracteriza porque los tiempos de llegadas y los tiempos de servicio se distribuyen de manera exponencial (M) y tienen un único servidor.

Según sus características, la disciplina de la cola es FIFO y el tamaño de la población de entrada es infinito, es decir, el número de clientes en el sistema no afecta a la tasa de llegadas.



En el modelo M/M/1 se verifica:

El tiempo de llegadas se distribuye según Exp(λ)

El tiempo de servicio se distribuye según Exp(μ)

Un único servidor s =1

Factor de utilización: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \longrightarrow P = \rho$

coincide con la probabilidad de que un cliente nuevo tenga que esperar para ser servido $\Rightarrow \rho = \frac{\lambda}{\mu}$

Probabilidad de que ningún cliente se encuentre en el sistema de colas:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Probabilidad de que *n* clientes se encuentren en el sistema de colas:

$$P_n = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Número promedio de clientes en el sistema:

$$L_s = \lambda W_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Tiempo promedio de estancia en el sistema:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad ; \quad W_s = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Número promedio de clientes en cola:

$$L_q = \rho W_q = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \quad ; \quad L_q = \rho L_s$$

Tiempo promedio de espera en cola:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

Número de clientes servidos:

$$L = L_s + L_q$$

Probabilidad de tiempo de espera nulo en cola:

$$P_0 = P(W_q = 0) = 1 - \rho$$

Probabilidad de tiempo de espera en cola > t:

$$P(W_q > t) = \rho\, e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t > 0$$

Probabilidad de tiempo de estancia en el sistema > t:

$$P(W_s > t) = e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t > 0$$

Ejemplo:

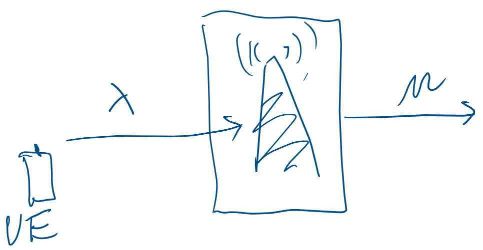
A una estación base llega un promedio de 45 peticiones por hora, cuando su capacidad media es de 60 peticiones por hora. Si un petición espera una media de 3 minutos en la cola, se pide calcular:

a) Tiempo medio que una petición pasa en la estación base.

b) Número medio de peticiones en la cola.

c) Número medio de peticiones en el sistema en un momento dado.

Una petición se puede considerer como un requerimiento de un cliente para uso de voz o datos en el Sistema.



a) Información disponible

Media de llegada de peticiones

$\lambda = 45$ peticiones$/h = 45/60$

$= 0.75$ peticiones$/min$

Media de servicio por petición

$\mu = 60$ peticiones$/h$

$= 1$ petición$/min$

Tiempo promedio de espera en la cola:

$W_q = 3$ min

El tiempo promedio que una petición pase en el Sistema (estación base)

$$W_s = W_q + 1/\mu = 3\,min + 1\,min = 4\,min$$

b) Número promedio de peticiones en la cola (L_q)

$$L_q = \lambda W_q = 0.75\,pet/min \times 3\,min = 2{,}25\ peticiones$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{0.75^2}{1(1-0.75)} = 2{,}25\ peticiones$$

Conclusión: Puede haber + de 2 peticiones en la cola.

c) Número promedio de peticiones en el sistema (L_s)

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{0.75}{1-0.75} = 3\ peticiones$$

$$L_s = \lambda W_s = 0.75\,pet/min \times 4\,min = 3\ peticiones$$

Hay un promedio de 3 peticiones en el sistema, al haber una sola estación base (servidor) sólo una petición puede estar en servicio, teniendo las demás peticiones que estar en la cola, lo que indica que hay 2 peticiones en espera.

Ejercicio:

A una oficina de telecomunicaciones llega una media de 90 personas a la hora, cuando tiene disponibilidad de dar servicio a 120 clientes a la hora. Sabiendo que los clientes esperan una media de 2 minutos en la cola, se pide:

a) Probabilidad que el sistema se encuentre sin ocupar.

b) Probabilidad que un cliente tenga que esperar al encontrarse el Sistema ocupado.

c) Número medio de clientes en la cola.

d) Probabilidad de que haya 4 clientes en la cola.

a) Información disponible

Media de llegada de clientes: $\lambda = 90\ cl/h = 1{,}5\ cl/min$

Media de tasa de servicio: $\mu = 120\ cl/h = 2\ cl/min$

Tiempo promedio de espera en la cola: $W_q = 2\ min$

Factor de utilización: $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1.5}{2} = 0.75$

M/M/1 $\Rightarrow$ Prob. de que el sistema esté ocupado

$P_0 = 1 - \rho = 0.25$

b) La probabilidad de que un cliente llegue y tenga que esperar => se interpreta como la probabilidad de que sea el primer cliente en la cola

$$P_n(t) = (1-\rho)\,\rho^n \quad , \text{ siendo } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Si $n=1$

$$P_1(t) = (1-\rho)\,\rho^1 = (1-0.75)(0.75) = 0.1875$$

Existe un 18.75% de probabilidad de que haya un cliente en la cola a la espera de ser atendido

c) Número medio de clientes en la cola: $L_q = \lambda W_q = 1.5 \times 2 = 3$ clientes

d) Probabilidad de que haya 4 clientes en la cola:

$$P_n(t) = P(l_s = n) = (1-\rho)\rho^n$$

Si $n = 4$:

$$P_4(t) = P(l_s = 4) = (1-0.75)(0.75)^4$$

$$P_4(t) = 0.079$$