CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

[1]

4.7 Variación de parámetros

El método de variación de parámetros es un procedimiento útil para la obtención de una solución particular $y_p(x)$ de la ecuación diferencial ordinaria lineal (no homogénea) y se basa en el conocimiento de la solución general de la lineal homogénea asociada a dicha edo. lineal.

Haciendo referencia a las lineales de segundo orden diremos que el método de variación de parámetros es útil para obtener una solución particular $y_p(x)$ de la lineal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \tag{1}$$

a partir del conocimiento de la solución general de la lineal homogénea asociada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{2}$$

Si suponemos que la solución general de la lineal homogénea (2) está dada por la combinación lineal

$$\phi(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x),$$

debemos tener presente que $y = \phi_1(x)$ & $y = \phi_2(x)$ son soluciones de esta ecuación diferencial (2) tales que $W[\phi_1(x), \phi_2(x)] \neq 0$ en todo el intervalo (α, β) donde las funciones $p(x)$ & $q(x)$ son continuas. Es decir, $y = \phi_1(x)$ & $y = \phi_2(x)$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial (2).
Supongamos pues que $\phi(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x)$ es la solución general de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.
El método de variación de parámetros propone que la solución particular $y_p(x)$ tenga la misma forma que $\phi(x)$, pero permitiendo variar a los parámetros C_1 y C_2. Esto es, propone que $y_p(x)$ sea

$$y_p(x) = u_1\phi_1(x) + u_2\phi_2(x),$$

donde $u_1 = u_1(x)$ & $u_2 = u_2(x)$ son funciones de x, desconocidas ambas y que deben ser determinadas.
¿Cómo determinar a las funciones u_1 & u_2? De la siguiente manera.

$$y_p = u_1\phi_1 + u_2\phi_2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y_p' = u_1'\phi_1 + u_1\phi_1' + u_2'\phi_2 + u_2\phi_2'$$

[1] canek.azc.uam.mx: 15/ 1/ 2009

Aquí, antes de obtener y_p'', se supone que

$$u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 = 0.$$

Esto se hace con la finalidad de que en la expresión de y_p'' no aparezcan u_1'' & u_2'', ya que la inclusión de estas segundas derivadas en y_p'' haría mucho más compleja la obtención de las funciones u_1 & u_2.
Se tiene entonces que

$$y_p' = u_1\phi_1' + u_2\phi_2'$$

por lo cual

$$y_p'' = u_1'\phi_1' + u_1\phi_1'' + u_2'\phi_2' + u_2\phi_2''$$

Ahora bien, y_p es solución de la lineal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

si se cumple que

$$y_p'' + p(x)y_p' + q(x)y_p = g(x)$$

esto es,

$$\begin{gathered}[u_1'\phi_1' + u_1\phi_1'' + u_2'\phi_2' + u_2\phi_2''] + p(x)[u_1\phi_1' + u_2\phi_2'] + q(x)[u_1\phi_1 + u_2\phi_2] = g(x) \Rightarrow \\ \Rightarrow u_1'\phi_1' + u_1[\phi_1'' + p(x)\phi_1' + q(x)\phi_1] + u_2'\phi_2' + u_2[\phi_2'' + p(x)\phi_2' + q(x)\phi_2] = g(x)\end{gathered}$$

Pero

$$\phi_1'' + p(x)\phi_1' + q(x)\phi_1 = 0 \qquad \& \qquad \phi_2'' + p(x)\phi_2' + q(x)\phi_2 = 0,$$

por ser ϕ_1 & ϕ_2 soluciones de la homogénea. Entonces debe cumplirse que

$$u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' = g(x)$$

Concretando: las funciones u_1 & u_2 deben cumplir con el par de ecuaciones

$$u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 = 0 \quad \& \quad u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' = g(x)$$

donde las incógnitas son u_1' & u_2'.
Hemos obtenido un sistema de ecuaciones de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\begin{cases} u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 = 0 \\ u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' = g(x\,. \end{cases}$$

¿Tiene solución única este sistema para u_1' & u_2'? Veamos.
El determinante Δs del sistema es

$$\Delta s = \begin{vmatrix} \phi_1 & \phi_2 \\ \phi_1' & \phi_2' \end{vmatrix} = W(\phi_1, \phi_2)$$

Y debido a que $W(\phi_1, \phi_2)(x) \neq 0$ entonces $\Delta s \neq 0$, por lo que el sistema de ecuaciones tiene una única solución. Dicha solución única es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \phi_2 \\ g(x) & \phi_2' \end{vmatrix}}{\Delta s} = \frac{-g(x)\phi_2}{W(\phi_1, \phi_2)} \Rightarrow u_1'(x) = -\frac{g(x)\phi_2(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \phi_1 & 0 \\ \phi_1' & g(x) \end{vmatrix}}{\Delta s} = \frac{g(x)\phi_1}{W(\phi_1, \phi_2)} \Rightarrow u_2'(x) = \frac{g(x)\phi_1(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))}$$

De donde obtenemos u_1 & u_2 mediante integración

$$u_1 = -\int \frac{g(x)\phi_2(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))}\,dx \quad \& \quad u_2 = \int \frac{g(x)\phi_1(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))}\,dx$$

Sustituyendo $u_1(x)$ & $u_2(x)$ en $y_p(x)$ se tiene que la solución particular de la lineal es

$$y_p(x) = \phi_1(x)\int \frac{-g(x)\phi_2(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))}\,dx + \phi_2(x)\int \frac{g(x)\phi_1(x)}{W(\phi_1(x), \phi_2(x))}\,dx$$

Finalmente, podemos escribir la solución general de la lineal como

$$\begin{aligned} y(x) &= y_p(x) + \phi(x) \\ y(x) &= y_p(x) + [C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x)] \end{aligned}$$

con la $y_p(x)$ obtenida.

Ejemplo 4.7.1

Utilizando el método de variación de parametros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial ordinaria.

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}$$

Dado que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la EDO homogénea asociada:

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$$

▼ Sea $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ una solución particular.
Entonces:

$$y_p(x) = u_1x^2 + u_2x^3 \Rightarrow y_p' = u_1'x^2 + 2u_1x + u_2'x^3 + 3u_2x^2$$

Considerando que:

$$u_1'x^2 + u_2'x^3 = 0 \tag{A}$$

Entonces:

$$y_p' = 2u_1x + 3u_2x^2 \Rightarrow y_p'' = 2u_1'x + 2u_1 + 3u_2'x^2 + 6u_2x$$

Sustituyendo en

$$x^2y_p'' - 4xy_p' + 6y_p = \frac{1}{x}$$

Se obtiene:

$$\begin{gathered} x^2(2u_1'x + 2u_1 + 3u_2'x^2 + 6u_2x) - 4x(2u_1x + 3u_2x^2) + 6(u_1x^2 + u_2x^3) = \frac{1}{x} \\ 2x^3u_1' + u_1(2x^2 - 8x^2 + 6x^2) + 3x^4u_2' + u_2(6x^3 - 12x^3 + 6x^3) = \frac{1}{x} \\ 2x^3u_1' + 3x^4u_2' = \frac{1}{x}, \text{dividiendo por } x^2 \\ 2xu_1' + 3x^2u_2' = \frac{1}{x^3} \end{gathered} \tag{B}$$

Entonces u_1' y u_2' deben satisfacer el sistema formado por las ecuaciones (A) y (B)

$$\begin{cases} x^2u_1' + x^3u_2' = 0 \\ 2xu_1' + 3x^2u_2' = x^{-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + xu_2' = 0 \\ 2u_1' + 3xu_2' = x^{-4} \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$W = \begin{vmatrix} 1 & x \\ 2 & 3x \end{vmatrix} = 3x - 2x = x \;\Rightarrow\; W = x$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x \\ x^{-4} & 3x \end{vmatrix}}{W} = \frac{-x^{-3}}{x} = -x^{-4} \;\Rightarrow\; u_1' = -x^{-4}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & x^{-4} \end{vmatrix}}{W} = \frac{x^{-4}}{x} = x^{-5} \;\Rightarrow\; u_2' = x^{-5}$$

De aquí que

$$u_1 = -\int x^{-4}\,dx = -\frac{x^{-3}}{-3} + c_1 = \frac{1}{3}x^{-3} + c_1$$

$$u_2 = \int x^{-5}\,dx = \frac{x^{-4}}{-4} + c_2 = -\frac{1}{4}x^{-4} + c_2$$

Tomando $u_1 = \frac{1}{3}x^{-3}$ y $u_2 = -\frac{1}{4}x^{-4}$ se tiene que, una solución particular es

$$y_p = u_1x^2 + u_2x^3 = \frac{1}{3}x^{-3}x^2 - \frac{1}{4}x^{-4}x^3 = \frac{1}{3}x^{-1} - \frac{1}{4}x^{-1}$$

$$y_p(x) = \frac{1}{12}x^{-1} = \frac{1}{12x}$$

Entonces la solución general, de la edo. dada, es

$$y = y_p(x) + k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$$

$$y = \frac{1}{12}x^{-1} + k_1x^2 + k_2x^3$$

□

Ejemplo 4.7.2

Utilizando el método de variación de parametros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial ordinaria.

$$x^2y'' - xy' + y = 4x\ln x$$

Dado que $y_1 = x$ *y* $y_2 = x\ln x$ *forman un conjunto fundamental de soluciones para la EDO homogénea asociada:*

$$x^2y'' - xy' + y = 0$$

▼ Sea $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$ una solución particular

Entonces:

$$y_p = u_1x + u_2x\ln x \;\Rightarrow\; y_p' = u_1'x + u_1 + u_2'x\ln x + u_2(1 + \ln x)$$

Considerando que

$$u_1'x + u_2'x\ln x = 0 \tag{C}$$

Entonces

$$y_p' = u_1 + u_2(1 + \ln x) \;\Rightarrow\; y_p'' = u_1' + u_2'(1 + \ln x) + u_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

Sustituyendo en

$$x^2y_p'' - xy_p' + y_p = 4x\ln x$$

Se obtiene

$$x^2\left[u_1' + u_2'(1+\ln x) + u_2\frac{1}{x}\right] - x[u_1 + u_2(1+\ln x)] + u_1 x + u_2 x\ln x = 4x\ln x$$
$$x^2u_1' + u_2'(x^2 + x^2\ln x) + u_2(x - x - x\ln x + x\ln x) + u_1(-x+x) = 4x\ln x$$
$$x^2u_1' + x^2(1+\ln x)u_2' = 4x\ln x$$

Dividiendo por x^2

$$u' + (1+\ln x)u_2' = \frac{4}{x}\ln x \tag{D}$$

Entonces u_1' y u_2' deben satisfacer el sistema conformado por las ecuaciones (C) y (D).

$$\begin{cases} xu_1' + (x\ln x)u_2' = 0 \\ u_1' + (1+\ln x)u_2' = 4x^{-1}\ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1' + (\ln x)u_2' = 0 \\ u_1' + (1+\ln x)u_2' = 4x^{-1}\ln x \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$W = \begin{vmatrix} 1 & \ln x \\ 1 & 1+\ln x \end{vmatrix} = 1 + \ln x - \ln x = 1 \;\Rightarrow\; W = 1$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ln x \\ 4x^{-1}\ln x & 1+\ln x \end{vmatrix}}{W} = -4x^{-1}(\ln x)^2$$
$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4x^{-1}\ln x \end{vmatrix}}{W} = 4x^{-1}\ln x$$

De aquí que

$$u_1 = -4\int x^{-1}(\ln x)^2\,dx = -4\int (\ln x)^2\,\frac{dx}{x} = -\frac{4}{3}(\ln x)^3 + c_1$$
$$u_2 = 4\int x^{-1}\ln x\,dx = 4\int (\ln x)\,\frac{dx}{x} = 2(\ln x)^2 + c_2$$

Tomando $u_1 = -\frac{4}{3}(\ln x)^3$ y $u_2 = 2(\ln x)^2$ se tiene que, una solución particular es

$$y_p = u_1 x + u_2 x\ln x = -\frac{4}{3}(\ln x)^3 x + 2(\ln x)^2 x\ln x$$

$$y_p(x) = \frac{2}{3}x(\ln x)^3$$

Entonces la solución general es

$$y = y_p(x) + k_1y_1(x) + k_2y_2(x)$$
$$y = \frac{2}{3}x(\ln x)^3 + k_1x + k_2x\ln x$$

□

Ejemplo 4.7.3

Utilizando el método de variación de parametros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial ordinaria.

$$y'' + y = \sec^2 x.$$

▼ Primero se obtiene un conjunto fundamental de soluciones para la EDO homogénea asociada

$$y'' + y = 0$$

Luego se aplica el método de variación de parámetros para determinar una solución particular.
Resolvemos pues:

$$y'' + y = 0$$

Proponiendo $y = e^{\mu x}$ se obtiene:

$$\mu^2 + 1 = 0 \Rightarrow \mu = \pm\sqrt{-1} = 0 \pm 1i$$

Entonces:

$$\begin{cases} y_1 = e^{0x} \operatorname{sen} 1x = \operatorname{sen} x \\ y_2 = e^{0x} \cos 1x = \cos x \end{cases}$$

Funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones
Se propone como solución particular

$$y_p = u_1 \operatorname{sen} x + u_2 \cos x \Rightarrow y_p' = u_1' \operatorname{sen} x + u_1 \cos x + u_2' \cos x - u_2 \operatorname{sen} x$$

Considerando que:

$$u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = 0 \tag{E}$$

Entonces

$$y_p' = u_1 \cos x - u_2 \operatorname{sen} x \Rightarrow y_p'' = u_1' \cos x - u_1 \operatorname{sen} x - u_2' \operatorname{sen} x - u_2 \cos x$$

Sustituyendo en

$$y_p'' + y_p = \sec^2 x, \text{ se obtiene}$$
$$(u_1' \cos x - u_1 \operatorname{sen} x - u_2' \operatorname{sen} x - u_2 \cos x) + (u_1 \operatorname{sen} x + u_2 \cos x) = \sec^2 x$$
$$u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x = \sec^2 x \tag{F}$$

Entonces u_1' y u_2' deben satisfacer el sistema

$$\begin{cases} u_1' \operatorname{sen} x + u_2' \cos x = 0 \\ u_1' \cos x - u_2' \operatorname{sen} x = \sec^2 x \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$W = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \cos x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = -1 \Rightarrow W = -1$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \sec^2 x & -\operatorname{sen} x \end{vmatrix}}{W} = \frac{-\sec^2 x \cos x}{-1} = \sec x$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ \cos x & \sec^2 x \end{vmatrix}}{W} = \frac{\operatorname{sen} x \sec^2 x}{-1} = -\operatorname{sen} x \sec^2 x$$

De aquí que

$$u_1 = \int \sec x \, dx = \ln(\sec x + \tan x) + c_1$$
$$u_2 = -\int \operatorname{sen} x \sec^2 x \, dx = \int (\cos x)^{-2}(-\operatorname{sen} x) \, dx = \frac{(\cos x)^{-1}}{-1} + c_2$$
$$u_2 = -\sec x + c_2$$

Tomando $u_1 = \ln(\sec x + \tan x)$ y $u_2 = -\sec x$; se tiene que, una solución particular es

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 \operatorname{sen} x + u_2 \cos x \\ y_p &= (\operatorname{sen} x)\ln(\operatorname{sen} x + \tan x) - (\sec x)\cos x \\ y_p &= (\operatorname{sen} x)\ln(\sec x + \tan x) - 1 \end{aligned}$$

Entonces la solución general es

$$y = (\operatorname{sen} x)\ln(\sec x + \tan x) - 1 + k_1 \operatorname{sen} x + k_2 \cos x$$

□

Ejemplo 4.7.4

Utilizando el método de variación de parametros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial ordinaria.

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}.$$

▼ Primero se obtiene un conjunto fundamental de soluciones para la EDO homogénea asociada

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Luego se aplica variación de parámetros para determinar una solución particular.
Para resolver:

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Proponemos $y = e^{\mu x}$ y se obtiene:

$$\mu^2 - 3\mu + 2 = 0 \;\Rightarrow\; \mu_1 = 1,\; \mu_2 = 2, \text{ entonces}$$

$$\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = e^{2x} \end{cases} \quad \text{funciones que forman un conjunto fundamental de soluciones}$$

Se propone como solución particular

$$y_p = u_1 e^x + u_2 e^{2x} \;\Rightarrow\; y_p' = u_1' e^x + u_1 e^x + u_2' e^{2x} + 2u_2 e^{2x}$$

Considerando que

$$u_1' e^x + u_2' e^{2x} = 0 \tag{G}$$

Entonces

$$y_p' = u_1 e^x + 2u_2 e^{2x} \;\Rightarrow\; y_p'' = u_1' e^x + u_1 e^x + 2u_2' e^{2x} + 4u_2 e^{2x}$$

Sustituyendo en

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' + 2y_p &= \frac{e^{3x}}{1+e^x}, \text{ se obtiene} \\ (u_1' e^x + u_1 e^x + 2u_2' e^{2x} + 4u_2 e^{2x}) - 3(u_1 e^x + 2u_2 e^{2x}) + 2(u_1 e^x + u_2 e^{2x}) &= \frac{e^{3x}}{1+e^x} \\ u_1' e^x + u_1 e^x(1 - 3 + 2) + 2u_2' e^{2x} + u_2 e^{2x}(4 - 6 + 2) &= \frac{e^{3x}}{1+e^x} \\ u_1' e^x + 2u_2' e^{2x} &= \frac{e^{3x}}{1+e^x} \end{aligned} \tag{H}$$

Entonces u_1' y u_2' deben satisfacer el sistema

$$\begin{cases} e^x u_1' + e^{2x} u_2' = 0 \\ e^x u_1' + 2e^{2x} u_2' = \dfrac{e^{3x}}{1+e^x} \end{cases}$$

El determinante del sistema es

$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{vmatrix} = 2e^{3x} - e^{3x} = e^{3x} \;\Rightarrow\; W = e^{3x}$$

La solución del sistema es

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} \\ \dfrac{e^{3x}}{1+e^x} & 2e^{2x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{-e^{2x}\,e^{3x}}{e^{3x}(1+e^x)} = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \dfrac{e^{3x}}{1+e^x} \end{vmatrix}}{W} = \frac{e^x\,e^{3x}}{e^{3x}(1+e^x)} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

De aquí que

$$u_1 = -\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$$

Utilizando el cambio de variable $t = 1 + e^x$

$$\begin{aligned} u_1 &= \ln(1+e^x) - (1+e^x) + c_1 \\ u_2 &= \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = \ln(1+e^x) + c_2 \end{aligned}$$

Tomando $u_1 = \ln(1+e^x) - (1+e^x)$ y $u_2 = \ln(1+e^x)$
Se obtiene la solución particular

$$\begin{aligned} y_p &= u_1 e^x + u_2 e^x \\ &= [\ln(1+e^x) - (1+e^x)]e^x + [\ln(1+e^x)]e^{2x} \\ &= e^x \ln(1+e^x) + e^{2x}\ln(1+e^x) - e^x(1+e^x) \\ &= [e^x \ln(1+e^x)][1+e^x] - e^x(1+e^x) \\ y_p(x) &= e^x(1+e^x)[\ln(1+e^x) - 1] \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución general es

$$\begin{aligned} y &= y_p(x) + k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) \\ y &= e^x(1+e^x)[\ln(1+e^x) - 1] + k_1 e^x + k_2 e^{2x}. \end{aligned}$$

□

Ejercicios 4.7.1

Utilizando variación de parámetros, calcular una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial dada. Considerar que las funciones $y_1 = y_1(x)$ & $y_2 = y_2(x)$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación homogénea asociada.

1. $x^2 y'' - 6y' + 10y = -8x^3$; $y_1 = x^2$ & $y_2 = x^5$
2. $x^2 y'' - xy' - 3y = -30\sqrt{x}$; $y_1 = x^3$ & $y_2 = \dfrac{1}{x}$

3. $-x^2y'' + xy' + 8y = \dfrac{65}{\sqrt[3]{x}}$; $\quad y_1 = x^4$ & $y_2 = x^{-2}$

4. $x^2y'' + 8xy' + 12y = \dfrac{6}{x^2}$; $\quad y_1 = x^{-3}$ & $y_2 = x^{-4}$

5. $x^2y'' - 6xy' + 10y = 4x\ln x - 5x$; $\quad y_1 = x^5$ & $y_2 = x^2$

   Utilizando variación de parámetros, determinar una solución particular y escribir la solución general de la ecuación diferencial dada.

6. $y'' - y = e^x$

7. $y'' - y = e^{-x}$

8. $y'' + y = \operatorname{sen} x$

9. $y'' + y = \cos x$

10. $y'' - 2y' + y = 6xe^x$

11. $y'' + 2y' + y = 12xe^{-x}$

12. $y'' + y = \tan x$

13. $y'' + 4y = 4\sec 2x$

14. $y'' + 9y = 9\sec 3x \tan 3x$

15. $y'' - y = e^{-2x}\operatorname{sen} e^{-x}$

16. $y'' + 4y = \operatorname{sen}^2 2x$

17. $y'' + 4y = \cos^2 2x$

18. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$

19. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$

20. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$

Respuestas a los ejercicios

1. $y_p(x) = 4x^3$; $\quad y = 4x^3 + C_1x^2 + C_2x^5$

2. $y_p(x) = 8\sqrt{x}$; $\quad y = 8\sqrt{x} + C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x}$

3. $y_p(x) = \dfrac{9}{\sqrt[3]{x}}$; $\quad y = \dfrac{9}{\sqrt[3]{x}} + C_1x^4 + \dfrac{C_2}{x^2}$

4. $y_p(x) = \dfrac{3}{x^2}$; $\quad y = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{C_1}{x^3} + \dfrac{C_2}{x^4}$

5. $y_p(x) = x\ln x$; $\quad y = x\ln x + C_1x^5 + C_2x^2$

6. $y_p(x) = \dfrac{1}{2}xe^x - \dfrac{1}{4}e^x$; $\quad y = \dfrac{1}{4}(2x - 1)e^x + C_1e^x + C_2e^{-x}$

7. $y_p(x) = \dfrac{1}{4}e^{-x} - \dfrac{1}{2}xe^{-x}$; $\quad y = \dfrac{1}{4}(1 - 2x)e^{-x} + C_1e^x + C_2e^{-x}$

8. $y_p(x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - x\cos x)$; $\quad y = -\frac{1}{2}x\cos x + C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

9. $y_p(x) = \frac{1}{2}(x \operatorname{sen} x + \cos x)$; $\quad y = \frac{1}{2}x \operatorname{sen} x + C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x$

10. $y_p(x) = x^3e^x$; $\quad y = (x^3 + C_2x + C_1)e^x$

11. $y_p(x) = x^4e^{-x}$; $\quad y = (x^4 + C_2x + C_1)e^{-x}$

12. $y_p(x) = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$; $\quad y = C_1\cos x + C_2 \operatorname{sen} x - (\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$

13. $y_p(x) = (\cos 2x)\ln(\cos 2x) + 2x \operatorname{sen} 2x$; $\quad y = (C_1 + \ln\cos 2x)\cos 2x + (C_2 + 2x)\operatorname{sen} 2x$

14. $y_p(x) = 3x\cos 3x - \operatorname{sen} 3x - (\operatorname{sen} 3x)\ln(\cos 3x)$; $\quad y = 3x\cos 3x - (\operatorname{sen} 3x)\ln(\cos 3x) + C_1 \operatorname{sen} 3x + C_2\cos 3x$

15. $y_p(x) = -e^x\cos e^{-x} - \operatorname{sen} e^{-x}$; $\quad y = -(e^x\cos e^{-x} + \operatorname{sen} e^{-x}) + C_1e^x + C_2e^{-x}$

16. $y_p(x) = \frac{1}{6}\cos^2 2x + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^2 2x$; $\quad y = \frac{1}{6}\cos^2 2x + \frac{1}{12}\operatorname{sen}^2 2x + C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$

17. $y_p(x) = \frac{1}{6}\operatorname{sen}^2 2x + \frac{1}{12}\cos^2 2x$; $\quad y = \frac{1}{6}\operatorname{sen}^2 2x + \frac{1}{12}\cos^2 2x + C_1\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x$

18. $y_p(x) = xe^x(\ln x - 1)$; $\quad y = (C_1 + C_2x)e^x + xe^x\ln x$

19. $y_p(x) = xe^{-x}(\ln x - 1)$; $\quad y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + xe^{-x}\ln x$

20. $y_p(x) = e^{-x}\arctan e^x - \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1 + e^{2x})$; $\quad y = e^{-x}\arctan e^x - \frac{1}{2}e^{-2x}\ln(1 + e^{2x}) + C_1e^{-2x} + C_2e^{-x}$

4.7.1 Variación de parámetros para ecuaciones diferenciales de orden n

Descripción del método general

Una vez discutido el método de variación de parámetros para ecuaciones diferenciales de orden 2, en esta sección extenderemos dicho método a ecuaciones diferenciales de orden n para $n > 2$. Así, consideraremos el caso de la edo. lineal no homogénea:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x) \tag{1}$$

Asumimos que ya conocemos una base del espacio de soluciones de la ecuación homogénea asociada:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = 0 \tag{2}$$

De esta manera, suponemos conocido el conjunto fundamental de soluciones:

$$\{\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)\}$$

a través del cual podemos formar la solución general de la ecuación (2).

$$\phi(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) \tag{3}$$

En lo que sigue, supondremos también que las funciones $a_{n-1}(x), \cdots, a_0(x)$ & $g(x)$ son continuas en el intervalo (α, β) donde el conjunto de funciones $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)\}$ satisface:

$$W[\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)] = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \neq 0, \text{ para todo } x \in (\alpha, \beta)$$

Como hemos dicho, el método se apoya en la idea de que los parámetros $c_1, c_2, \cdots, c_n$ de la ecuación (3) pueden variar constituyéndose en un conjunto de funciones indeterminadas $\{u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)\}$ por conocer, que permiten generar una solución particular

$$y_p(x) = u_1(x)\phi_1(x) + u_2(x)\phi_2(x) + \cdots + u_n(x)\phi_n(x) \tag{4}$$

de la ecuación (1). Como queremos determinar n funciones, es de esperarse que debemos imponer n condiciones a las funciones $u_j(x),\ j = 1, 2, \ldots, n$.
Es claro, que una de las condiciones debe ser sin lugar a dudas el cumplimiento de la ecuación (1).
Respecto a las $n-1$ condiciones restantes, es un mérito del ingenio del descubridor de este método (el matemático D'Alembert) haberse dado cuenta de la piedra angular del método. **La idea central de la que hablamos radica en no resolver para las funciones $u_j(x)$ ecuaciones diferenciales que sean de orden mayor que** 1, es decir, buscaremos las restantes $n-1$ condiciones de manera que nunca tengamos que considerar ninguna relación en la que intervenga alguna derivada $u_j^{(k)}(x)$ para $k > 1$.
Con esto en mente, a partir de (4) obtenemos:

$$y_p' = u_1\phi_1' + u_2\phi_2' + \cdots + u_n\phi_n' + u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 + \cdots + u_n'\phi_n$$

(hemos omitido la dependencia funcional de x para simplificar la escritura)
Para tener la seguridad de que no aparezca ninguna $u_j''(x)$ requerimos que:

$$u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 + \cdots + u_n'\phi_n = 0 \text{ en el intervalo } (\alpha, \beta) \tag{5}$$

Entonces, tenemos ahora:

$$y_p' = u_1\phi_1' + u_2\phi_2' + \cdots + u_n\phi_n'$$

Por lo tanto,

$$y_p'' = u_1\phi_1'' + u_2\phi_2'' + \cdots + u_n\phi_n'' + u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' + \cdots + u_n'\phi_n'$$

Por la misma razón que expusimos anteriormente, ahora planteamos la condición:

$$u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' + \cdots + u_n'\phi_n' = 0 \text{ en el intervalo } (\alpha, \beta) \tag{6}$$

De donde se desprende que:

$$y_p'' = u_1\phi_1'' + u_2\phi_2'' + \cdots + u_n\phi_n'' \tag{7}$$

Si proseguimos de la misma manera, determinaremos que se deben cumplir las relaciones:

$$u_1'\phi_1^{(h)} + u_2'\phi_2^{(h)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(h)} = 0 \text{ en el intervalo } (\alpha, \beta) \text{ para } h = 0, 1, 2, \ldots, n-2 \tag{8}$$

y

$$y_p^{(k)} = u_1\phi_1^{(k)} + u_2\phi_2^{(k)} + \cdots + u_n\phi_n^{(k)} \text{ para } k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \tag{9}$$

Finalmente, si para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ sustituimos las relaciones (9) en (1), hallamos:

$$\begin{aligned}&\underbrace{u_1\phi_1^{(n)} + \cdots + u_n\phi_n^{(n)} + u_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)}}_{y_p^{(n)}} + a_{n-1}\underbrace{[u_1\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n\phi_n^{(n-1)}]}_{y_p^{(n-1)}} + \cdots + \\ &+ a_0\underbrace{[u_1\phi_1 + \cdots + u_n\phi_n]}_{y_p} = g(x)\end{aligned} \tag{10}$$

Ecuación última en la que hemos omitido la dependencia de "x" en las funciones u_s y ϕ_s para simplificar nuestra escritura.
Si ahora reacomodamos la ecuación (10) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}&u_1[\phi_1^{(n)} + a_{n-1}\phi_1^{(n-1)} + \cdots + a_0\phi_1] + \cdots + u_n[\phi_n^{(n)} + a_{n-1}\phi_n^{(n-1)} + \cdots + a_0\phi_n] \\ &u_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)} = g(x)\end{aligned} \tag{11}$$

Observamos que como cada una de las funciones del conjunto $\{\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)\}$ satisface la ecuación (2), todos los términos en (11) son iguales a cero con excepción del último; esto permite arribar a la conclusión de que:

$$u_1'\phi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)} = g(x) \tag{12}$$

Al reunir todas las condiciones indicadas en (8) junto con la (12), concluimos que las funciones incógnitas $u_1', \ldots, u_n'$ satisfacen las condiciones:

$$\begin{cases} u_1'\phi_1 + u_2'\phi_2 + \cdots + u_n'\phi_n = 0 \\ u_1'\phi_1' + u_2'\phi_2' + \cdots + u_n'\phi_n' = 0 \\ \vdots \\ u_1'\phi_1^{(n-2)} + u_2'\phi_2^{(n-2)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-2)} = 0 \\ u_1'\phi_1^{(n-1)} + u_2'\phi_2^{(n-1)} + \cdots + u_n'\phi_n^{(n-1)} = g(x) \end{cases} \tag{13}$$

Ahora bien, como indicamos anteriormente:

$$W[\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)] \neq 0 \text{ , para todo } x \in (\alpha, \beta)$$

Por lo tanto, considerando (13) como un sistema de n ecuaciones con n incógnitas $u_1', \ldots, u_n'$, podemos utilizar la regla de Cramer para obtener la solución única para $u_1', \ldots, u_n'$. Obtenemos:

$$u_k' = \frac{W_k}{W[\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)]} = \frac{W_k}{W};\ k = 1, 2, \ldots, n \tag{14}$$

Donde W_k difiere de $W[\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)] = W$ en que tiene, como columna k-ésima, a la columna:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x) \end{pmatrix}$$

Las funciones $W = W(x)$ y $W_k = W_k(x)$ son continuas, así que las expresiones $u_k' = \dfrac{W_k}{W}$ son integrables, del cálculo de la integral se determinan las funciones incógnitas $u_1(x), \ldots, u_n(x)$.

1. Dado que las n constantes arbitrarias requeridas para la solución general de la ecuación (1) están contenidas en la solución general de la ecuación homogénea asociada, no será necesario sumar constante alguna en ninguna de las n integrales de las expresiones (14).
2. Si en lugar de la ecuación diferencial (1), tuviéramos:

   $$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y = g(x)$$

   (es decir, si $a_n(x)$ no es idénticamente igual a 1)

   Entonces hay que poner $\dfrac{g(x)}{a_n(x)}$ en lugar de $g(x)$.

4.7.2 Ejemplos sobre variación de parámetros

Ejemplo 4.7.5 *Resolver la ecuación* $y^{(3)} + 4y' = \cot(2x)$.

▼ Primero hacemos dos observaciones:

1. Esta ecuación diferencial no puede ser resuelta por medio del método de coeficientes indeterminados (dada la presencia de la función cotangente).

2. El coeficiente de la mayor derivada de la ecuación es igual a 1.

Para la solución, determinamos en primer lugar la ecuación característica correspondiente a la ecuación diferencial homogénea asociada, ésta es:

$$r^3 + 4r = r(r^2 + 4) = 0$$

Las raíces de esta ecuación algebraica son: $r_1 = 0$; $r_{2,3} = \pm 2i$. Por lo tanto, el conjunto fundamental de soluciones está integrado por las funciones:

$$\phi_1 = 1;\ \phi_2 = \cos(2x);\ \phi_3 = \operatorname{sen}(2x)$$

El Wronskiano $W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ es:

$$W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{vmatrix} 1 & \cos(2x) & \operatorname{sen}(2x) \\ 0 & -2\operatorname{sen}(2x) & 2\cos(2x) \\ 0 & -4\cos(2x) & -4\operatorname{sen}(2x) \end{vmatrix} = 8\operatorname{sen}^2(2x) + 8\cos^2(2x) =$$
$$= 8(\operatorname{sen}^2(2x) + \cos^2(2x)) = 8$$

De acuerdo a lo discutido en el procedimiento general, requerimos hallar W_1, W_2 y W_3. Tenemos:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos(2x) & \operatorname{sen}(2x) \\ 0 & -2\operatorname{sen}(2x) & 2\cos(2x) \\ \cot(2x) & -4\cos(2x) & -4\operatorname{sen}(2x) \end{vmatrix} = \cot(2x)[2\cos^2(2x) + 2\operatorname{sen}^2(2x)] = 2\cot(2x)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \operatorname{sen}(2x) \\ 0 & 0 & 2\cos(2x) \\ 0 & \cot(2x) & -4\operatorname{sen}(2x) \end{vmatrix} = -\cot(2x)[2\cos(2x)] = -2\cot(2x)\cos(2x)$$

y

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(2x) & 0 \\ 0 & -2\operatorname{sen}(2x) & 0 \\ 0 & -4\cos(2x) & \cot(2x) \end{vmatrix} = -2\operatorname{sen}(2x)\cot(2x) = -2\cos(2x)$$

De esta manera, obtenemos para u_1, u_2 y u_3 las siguientes expresiones:
Para u_1:

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W}dx = \int \frac{2\cot(2x)}{8}dx = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)\ln|\operatorname{sen}(2x)| = \frac{1}{8}\ln|\operatorname{sen}(2x)|$$

Para u_2:

$$\begin{aligned} u_2 &= \int \frac{W_2}{W}dx = \int \frac{-2\cot(2x)\cos(2x)}{8}dx = \\ &= -\frac{1}{4}\int \frac{\cos^2(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{1-\operatorname{sen}^2(2x)}{\operatorname{sen}(2x)}dx = \\ &= -\frac{1}{4}\left[\int \csc(2x)dx - \int \operatorname{sen}(2x)dx\right] = \\ &= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\ln|\csc(2x) - \cot(2x)| + \frac{1}{2}\cos(2x)\right] = \\ &= -\frac{1}{8}\ln|\csc(2x) - \cot(2x)| - \frac{1}{8}\cos(2x) \end{aligned}$$

Finalmente para u_3:

$$u_3 = \int \frac{W_3}{W}dx = \int \frac{-2\cos(2x)}{8}dx = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)\operatorname{sen}(2x) = -\frac{1}{8}\operatorname{sen}(2x)$$

Estamos ahora listos para dar la solución general la cual, como sabemos, está formada con la suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada y la particular que formaremos a través del método de variación de parámetros . De esta manera la solución general es:

$$\begin{aligned}
y &= k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + k_3\phi_3 + u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3 \\
&= k_1 + k_2\cos(2x) + k_3\,\mathrm{sen}(2x) + \\
&+ \frac{1}{8}\ln|\,\mathrm{sen}(2x)\,| - \frac{1}{8}\ln|\csc(2x)-\cot(2x)\,|\cos(2x) \quad \underbrace{-\frac{1}{8}\cos^{2}(2x) - \frac{1}{8}\,\mathrm{sen}^{2}(2x)}_{=-\frac{1}{8}} \\
&= k_1 + k_2\cos(2x) + k_3\,\mathrm{sen}(2x) + \frac{1}{8}\ln|\,\mathrm{sen}(2x)\,| - \frac{1}{8}\ln|\csc(2x)-\cot(2x)\,|\cos(2x)
\end{aligned}$$

Donde, por abuso de lenguaje, hemos identificado la constante $k_1 - \dfrac{1}{8}$ con la constante k_1.

□

El ejemplo anterior mostró cómo generar una solución particular y la consecuente solución general de la ecuación diferencial (por el método de variación de parámetros) si tan sólo se conoce el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial homogénea asociada. Hay que decir que tuvimos a nuestro favor el hecho de que la ecuación homogénea era de coeficientes constantes, característica que facilitó la determinación del conjunto fundamental.
Si los coeficientes no son constantes, la tarea puede resultar mucho más compleja con excepción de algunos casos particulares tal y como se muestra en lo que sigue.
Consideremos la ecuación de Cauchy-Euler cuya forma general es la siguiente:

$$a_n x^n\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x\frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x); \quad \text{donde } a_0, a_1, \ldots, a_n \text{ son constantes.}$$

Este tipo de ecuaciones pueden reducirse a coeficientes constantes si se realiza el siguiente cambio de variable:

$$x = e^t$$

Ilustraremos la técnica en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.7.6 *Resolver la ecuación* $x^3y^{(3)} + 3x^2y'' - 3xy' = x\ln(x)$.

▼ Primero hacemos el cambio de variable $x = e^t$. Entonces, por la regla de la cadena:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{d}{dt}(e^t)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

La segunda derivada, un poco más compleja, termina con una expresión sumamente cómoda:

$$\begin{aligned}
y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{d}{dt}(e^t)} = \\
= \frac{e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Para la tercera derivada encontramos que:

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dy''}{dx} = \frac{\dfrac{dy''}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left[e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right)\right]}{\dfrac{d}{dt}(e^t)} =$$

$$= \frac{e^{-2t}\left(\dfrac{d^3y}{dt^3} - \dfrac{d^2y}{dt^2}\right) - 2e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right)}{e^t} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right).$$

Cabe decir que las expresiones anteriores son completamente generales. Si sustituimos todo lo anterior en la ecuación $x^3y^{(3)} + 3x^2y'' - 3xy' = x\ln(x)$, hallamos:

$$e^{3t}\left[e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)\right] + 3e^{2t}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] - 3e^t\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right] = e^t\ln(e^t).$$

Que al simplificarse produce:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 3\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} - 3\frac{dy}{dt} = te^t,$$

o bien

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{dy}{dt} = te^t.$$

Una ecuación diferencial con coeficientes constantes a la cual le podemos aplicar un procedimiento conocido. De esta manera, encontramos las raíces de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial homogénea, ésta es:

$$r^3 - 4r = r(r^2 - 4) = r(r-2)(r+2) = 0$$

Deducimos que el conjunto fundamental de soluciones está integrado por las funciones:

$$\phi_1 = 1;\ \phi_2 = e^{2t};\ \phi_3 = e^{-2t}$$

Ahora consideramos el Wronskiano correspondiente, obtenemos:

$$W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & 2e^{2t} & -2e^{-2t} \\ 0 & 4e^{2t} & 4e^{-2t} \end{vmatrix} = 8 + 8 = 16$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-2t} \\ 0 & 0 & -2e^{-2t} \\ 0 & te^t & 4e^{-2t} \end{vmatrix} = 2te^{-t}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2t} & e^{-2t} \\ 0 & 2e^{2t} & -2e^{-2t} \\ te^t & 4e^{2t} & 4e^{-2t} \end{vmatrix} = te^t[-2-2] = -4te^t$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 4e^{2t} & te^t \end{vmatrix} = 2te^{3t}$$

Por último, para hallar las funciones incógnitas u_1, u_2 y u_3 sólo requerimos integrar, de esta manera:

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W}dt = \int \frac{-4te^t}{16}dt = -\frac{1}{4}\int te^t dt = -\frac{1}{4}e^t(t-1)$$

$$u_2 = \int \frac{W_2}{W}dt = \int \frac{2te^{-t}}{16}dt = \frac{1}{8}\int te^{-t} dt = -\frac{1}{8}e^{-t}(t+1)$$

$$u_3 = \int \frac{W_3}{W}dt = \int \frac{2te^{3t}}{16}dt = \frac{1}{8}\int te^{3t} dt = \frac{1}{72}e^{3t}(3t-1)$$

En conclusión, obtenemos:

$$\begin{aligned}
y &= k_1\phi_1 + k_2\phi_2 + k_3\phi_3 + u_1\phi_1 + u_2\phi_2 + u_3\phi_3 \\
&= k_1 + k_2e^{2t} + k_3e^{-2t} - \frac{1}{4}e^t(t-1) - \frac{1}{8}e^{-t}(t+1)e^{2t} + \frac{1}{72}e^{3t}(3t-1)e^{-2t} \\
&= k_1 + k_2e^{2t} + k_3e^{-2t} + e^t\left[-\frac{1}{4}t + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{8} + \frac{1}{24}t - \frac{1}{72}\right] \\
&= k_1 + k_2e^{2t} + k_3e^{-2t} + \frac{1}{9}e^t(1-3t)
\end{aligned}$$

Sin embargo en la ecuación inicial, x es la variable independiente, no t.
De $x = e^t$, hallamos que $t = \ln(x)$, por lo tanto, sustituyendo en el resultado anterior, encontramos:

$$y = k_1 + k_2x^2 + k_3x^{-2} + \frac{1}{9}x(1 - 3\ln(x))$$

□

Ejemplo 4.7.7 *Resolver el siguiente problema de valores iniciales*

$$x^2y^{(3)} - xy'' + y' = \frac{\ln(x)}{x};\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = -1$$

▼ Primero multiplicamos la ecuación por x a fin de llevarla a una ecuación tipo Cauchy-Euler, obtenemos:

$$x^3y^{(3)} - x^2y'' + xy' = \ln(x)$$

Si hacemos ahora el cambio de variable $x = e^t$ e incorporamos los resultados $(15) - (17)$ del ejemplo 4.5.2, encontramos:

$$e^{3t}\left[e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)\right] - e^{2t}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] + e^t\left[e^{-t}\frac{dy}{dt}\right] = t$$

Al simplificar, hallamos:

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} = t$$

ó

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} = t$$

Una ecuación diferencial con coeficientes constantes. La ecuación característica correspondiente a la ecuación diferencial homogénea asociada es:

$$r^3 - 4r^2 + 4r = r(r^2 - 4r + 4) = r(r-2)^2 = 0$$

Por lo tanto las raíces de la ecuación son $r_1 = 0$ y $r_2 = r_3 = 2$. En consecuencia, las funciones que integran el conjunto fundamental de soluciones son:

$$\phi_1 = 1,\ \phi_2 = e^{2t},\ \phi_3 = te^{2t}$$

Con ellas podemos calcular el Wronskiano $W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, éste es:

$$W = W(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ 0 & 4e^{2t} & (4t+4)e^{2t} \end{vmatrix} = (8t+8)e^{4t} - (8t+4)e^{4t} = 4e^{4t}$$

De manera similar:

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ t & 4e^{2t} & (4t+4)e^{2t} \end{vmatrix} = t[(2t+1)e^{4t} - 2te^{4t}] = te^{4t}$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & te^{2t} \\ 0 & 0 & (2t+1)e^{2t} \\ 0 & t & (4t+4)e^{2t} \end{vmatrix} = -t(2t+1)e^{2t} = (-2t^2 - t)e^{2t}$$

$$W_3 = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 4e^{2t} & t \end{vmatrix} = 2te^{2t}$$

Así, por el método de variación de parámetros, las funciones incógnitas u_1, u_2 y u_3 son:

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W} dt = \int \frac{te^{4t}}{4e^{4t}} dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^2}{2}\right) = \frac{1}{8}t^2$$

$$u_2 = \int \frac{W_2}{W} dt = \int \frac{(-2t^2 - t)e^{2t}}{4e^{4t}} dt = -\frac{1}{4}\int (2t^2 + t)e^{-2t} dt$$

Si en la última integral aplicamos integración por partes, hallamos que:

$$u_2 = \frac{1}{16}e^{-2t}(3 + 6t + 4t^2)$$

También (integrando por partes):

$$u_3 = \int \frac{W_3}{W} dt = \int \frac{2te^{2t}}{4e^{4t}} dt = \frac{1}{2}\int te^{-2t} dt = -\frac{1}{8}e^{-2t}(2t+1)$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\begin{aligned} y &= k_1 + k_2e^{2t} + k_3te^{2t} + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}e^{-2t}(3 + 6t + 4t^2)e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t}(2t+1)te^{2t} \\ &= k_1 + k_2e^{2t} + k_3te^{2t} + \frac{1}{8}t^2 + \frac{3}{16} + \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t \\ &= k_1 + k_2e^{2t} + k_3te^{2t} + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{4}t \end{aligned}$$

Donde hemos identificado (por abuso de lenguaje) $k_1 + \dfrac{3}{16}$ con k_1. De $x = e^t$, obtenemos $t = \ln(x)$, por lo tanto, la solución general de la ecuación en la variable "x" es:

$$y = k_1 + k_2x^2 + k_3x^2\ln(x) + \frac{1}{8}\ln^2(x) + \frac{1}{4}\ln(x)$$

De las condiciones iniciales obtenemos:

$$y(1) = 0: \quad k_1 + k_2 = 0$$

Para aplicar la segunda condición requerimos la primera derivada, ésta es:

$$y' = 2k_2x + k_3[x + 2x\ln(x)] + \frac{1}{4}\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{4x}$$

Por lo tanto, $y'(1) = -1$ produce:

$$1 = 2k_2 + k_3 + \frac{1}{4} \quad \text{ó} \quad 2k_2 + k_3 = \frac{3}{4}$$

Finalmente, para usar la tercera condición requerimos la segunda derivada, al calcularla encontramos:

$$y'' = 2k_2 + k_3[3 + 2\ln(x)] + \frac{1}{4}\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right) - \frac{1}{4x^2}$$

De donde, de la condición $y''(1) = -1$, hallamos:

$$-1 = 2k_2 + 3k_3 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \quad \text{ó} \quad -1 = 2k_2 + 3k_3$$

Al resolver el sistema:

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ 2k_2 + k_3 = \dfrac{3}{4} \\ 2k_2 + 3k_3 = -1 \end{cases}$$

Se determina fácilmente que $k_1 = -\frac{13}{16}$, $k_2 = \frac{13}{16}$ y $k_3 = -\frac{7}{8}$. Al sustituir estos valores en la solución general, hallamos la siguiente solución particular:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{13}{16} + \frac{13}{16}x^2 - \frac{7}{8}x^2\ln(x) + \frac{1}{8}\ln^2(x) + \frac{1}{4}\ln(x) \\ &= \frac{1}{16}[-13 + 13x^2 - 14x^2\ln(x) + 2\ln^2(x) + 4\ln(x)] \end{aligned}$$

□

Ejercicios 4.7.2

Utilice el método de variación de parámetros para proporcionar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales. Si se indica, utilice la información proporcionada.

1. $y^{(3)} - y'' = 12x^2 + 6x$
2. $y^{(4)} + y'' = x^2 + x$
3. $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = e^{-x}$
4. $y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$
5. $y''' = 2y'' + 1$
6. $y^{(4)} + 16y'' = 64\cos(4x)$
7. $y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 12e^{2x} + 24x^2$
8. $y^{(4)} - 2y'' + y = 100\cos(3x)$
9. $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = e^x$
10. $y^{(3)} = \dfrac{24(x+y)}{x^3}$
11. $x^3y^{(3)} - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3$
12. $x^3y^{(3)} + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^4$
13. $x^3y^{(3)} - 4x^2y'' + 8xy' - 8y = 4\ln(x)$
14. $x^3y^{(3)} + x^2y'' - 6xy' + 6y = 30x$

15. $xy^{(3)} + 2xy'' - xy' - 2xy = 1$, si el conjunto fundamental de soluciones está integrado por: $\phi_1 = e^x, \phi_2 = e^{-x}, \phi_3 = e^{-2x}$

16. $x^2y^{(3)} - 2xy' = 5\ln(x)$, si el conjunto fundamental de soluciones está integrado por: $\phi_1 = 1, \phi_2 = \ln(x), \phi_3 = x^3$

17. $y^{(3)} - y' = -2x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 2$

18. $y^{(4)} - y = 8e^x; \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0$

19. $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 12e^{-x}; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -3$

20. $y^{(4)} - y = \cos(x); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = y'''(0) = 0$

Respuestas a los ejercicios 4.5.1

1. $y = k_1 + k_2x + k_3e^x - x^4 - 5x^3 - 15x^2$

2. $y = k_1 + k_2x + k_3\cos(x) + k_4\operatorname{sen}(x) + \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^3}{6} - x^2$

3. $y = k_1e^{-x} + k_2xe^{-x} + k_3x^2e^{-x} + \dfrac{1}{6}x^3e^{-x}$

4. $y = k_1e^x + k_2e^{-x} + k_3e^{2x} + \dfrac{1}{x}$

5. $y = k_1e^{2x} + k_2x + k_3 - \dfrac{1}{4}x$

6. $y = k_1x + k_2 + k_3\cos(4x) + k_4\operatorname{sen}(4x) + \dfrac{1}{2}x\operatorname{sen}(4x)$

7. $y = k_1e^{2x} + k_2xe^{2x} + k_3 + 3x^2e^{2x} + 2x^3 + 6x^2 + 9x$

8. $y = k_1e^x + k_2xe^x + k_3e^{-x} + k_4xe^{-x} + \cos(3x)$

9. $y = k_1e^x + k_2e^{2x} + k_3e^{3x} + \dfrac{1}{2}xe^x$

10. $y = k_1x^4 + x^{-\frac{1}{2}}\left[k_2\cos\left(\dfrac{\sqrt{23}}{2}\ln(x)\right) + k_3\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{23}}{2}\ln(x)\right)\right] - x$

11. $y = k_1x + k_2x\ln(x) + k_3x^2 + \dfrac{x^3}{4}$

12. $y = k_1x + k_2x^{-1} + k_3x^{-3} + \dfrac{x^4}{90}$

13. $y = k_1x + k_2x^2 + k_3x^4 - \dfrac{1}{2}\ln(x) - \dfrac{7}{8}$

14. $y = k_1x + k_2x^3 + k_3x^{-2} - \dfrac{5}{6}x - 5x\ln(x)$

15. $y = k_1e^x + k_2e^{-x} + k_3e^{-2x} + \dfrac{e^x}{6}\int\dfrac{e^{-x}}{x}dx - \dfrac{e^{-x}}{2}\int\dfrac{e^x}{x}dx + \dfrac{e^{-2x}}{3}\int\dfrac{e^{2x}}{x}dx$

16. $y = k_1 + k_2\ln(x) + k_3x^3 - \dfrac{5}{2}x\ln(x) + \dfrac{15}{4}x$

17. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} + x^2 = \sinh(x) + x^2$

18. $y = \cos(x) + 2\operatorname{sen}(x) + e^{-x} - 3e^{x} + 2xe^{x}$
19. $y = e^{-x}(1 + x - x^2 + 2x^3)$
20. $y = \frac{1}{4}\cos(x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{8}e^{x} + \frac{5}{8}e^{-x} - \frac{1}{4}x\operatorname{sen}(x)$