

# ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

---

## PT7.1 MOTIVACIÓN

---

En el primer capítulo de este libro obtuvimos la siguiente ecuación basada en la segunda ley de Newton, para calcular la velocidad  $v$  del paracaidista en caída como una función del tiempo  $t$  [recuerde la ecuación (1.9)]:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \quad (\text{PT7.1})$$

donde  $g$  es la constante gravitacional,  $m$  es la masa y  $c$  es el coeficiente de arrastre. Tales ecuaciones, que se componen de una función desconocida y de sus derivadas, se conocen como *ecuaciones diferenciales*. A la ecuación (PT7.1) algunas veces se le llama una *ecuación de razón de cambio*, ya que expresa la razón de cambio de una variable como una función de variables y parámetros. Estas ecuaciones desempeñan un papel importante en ingeniería debido a que muchos fenómenos físicos se formulan matemáticamente mejor en términos de su razón de cambio.

En la ecuación (PT7.1), la cantidad que se está derivando,  $v$ , se conoce como *variable dependiente*. La cantidad con respecto a la cual  $v$  se está derivando,  $t$ , se conoce como *variable independiente*. Cuando la función tiene una variable independiente, la ecuación se llama *ecuación diferencial ordinaria* (o *EDO*). Esto contrasta con una *ecuación diferencial parcial* (o *EDP*) que involucra dos o más variables independientes.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican también en cuanto a su orden. Por ejemplo, la ecuación (PT7.1) se denomina como *EDO de primer orden*, ya que la derivada mayor es una primera derivada. Una *EDO de segundo orden* tiene una segunda derivada, como la mayor. Por ejemplo, la ecuación que describe la posición  $x$  de un sistema masa-resorte con amortiguamiento es la EDO de segundo orden,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (\text{PT7.2})$$

donde  $c$  es un coeficiente de amortiguamiento y  $k$  es la constante del resorte. De manera similar, una ecuación de  $n$ -ésimo orden tiene una  $n$ -ésima derivada, como la mayor.

Las ecuaciones de orden superior pueden reducirse a un sistema de ecuaciones de primer orden. Para la ecuación (PT7.2), esto se logra al definir una nueva variable  $y$ , donde

$$y = \frac{dx}{dt} \quad (\text{PT7.3})$$

que al derivar con respecto a  $t$  se obtiene

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (\text{PT7.4})$$

Las ecuaciones (PT7.3) y (PT7.4) se sustituyen después en la ecuación (PT7.2) para llegar a

$$m \frac{dy}{dt} + cy + kx = 0 \quad (\text{PT7.5})$$

o

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{cy + kx}{m} \quad (\text{PT7.6})$$

Así, las ecuaciones (PT7.3) y (PT7.6) son un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, equivalentes a la ecuación de segundo orden original. Como otras ecuaciones diferenciales de  $n$ -ésimo orden pueden reducirse en forma similar, esta parte de nuestro libro se concentra en la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden. Algunas aplicaciones de la ingeniería en el capítulo 28 tratan con la solución de EDO de segundo orden por reducción a un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden.

### PT7.1.1 Métodos para resolver EDO sin el uso de la computadora

Sin una computadora, las EDO podrían resolverse usando técnicas de integración analítica. Por ejemplo, la ecuación (PT7.1) se multiplica por  $dt$  y se integra para obtener

$$v = \int \left( g - \frac{c}{m} v \right) dt \quad (\text{PT7.7})$$

El lado derecho de esta ecuación se conoce como *integral indefinida* debido a que no se especifican los límites de integración. Esto contrasta con las integrales definidas que se analizaron en la parte seis [compare la ecuación (PT7.7) con la ecuación (PT6.6)].

Una solución analítica para la ecuación (PT7.7) se obtiene si la integral indefinida puede evaluarse en forma exacta como una ecuación. Por ejemplo, recuerde que para el problema del paracaidista en caída, la ecuación (PT7.7) se resolvió analíticamente con la ecuación (1.10) (suponga que  $v = 0$  en  $t = 0$ ):

$$v(t) = \frac{gm}{c} (1 - e^{-(c/m)t}) \quad (\text{1.10})$$

La mecánica para obtener tales soluciones analíticas se analizará en la sección PT7.2. Mientras tanto, lo relevante es que no están disponibles las soluciones exactas para muchas EDO de importancia práctica. Como sucede en la mayoría de las situaciones analizadas en otras partes de este libro, los métodos numéricos ofrecen la única alternativa viable para tales casos. Como estos métodos numéricos por lo común requieren de computadoras, antes del auge de la informática los ingenieros se veían muy limitados en el alcance de sus investigaciones.

Un método muy importante que los ingenieros y los matemáticos desarrollaron para superar este dilema fue la *linealización*. Una ecuación diferencial ordinaria lineal es aquella que tiene la forma general

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \quad (\text{PT7.8})$$

donde  $y^{(n)}$  es la  $n$ -ésima derivada de  $y$  con respecto a  $x$ , y las  $a$  y  $f$  son funciones en términos de  $x$ . Esta ecuación se conoce como *lineal* debido a que no hay productos o funciones no lineales de la variable dependiente  $y$  y no existen productos de sus derivadas. La importancia práctica de las EDO lineales es que se resuelven analíticamente. En cambio, la mayoría de las ecuaciones no lineales no pueden resolverse de manera exacta. Así, en la era anterior a la computadora, una táctica para resolver ecuaciones no lineales era linealizarlas.

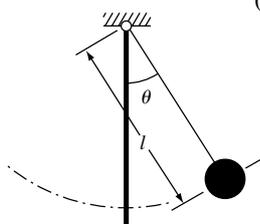
Un ejemplo simple es la aplicación de las EDO para predecir el movimiento de un péndulo oscilante (figura PT7.1). De manera similar como se hizo en el desarrollo del problema del paracaidista en caída, se utiliza la segunda ley de Newton para obtener la siguiente ecuación diferencial (véase la sección 28.4 para más detalles):

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \text{sen } \theta = 0 \quad (\text{PT7.9})$$

donde  $\theta$  es el ángulo de desplazamiento del péndulo,  $g$  es la constante gravitacional y  $l$  es la longitud del péndulo. Esta ecuación no es lineal debido al término  $\text{sen } \theta$ . Una forma de obtener la solución analítica es darse cuenta de que para pequeños desplazamientos del péndulo a partir de su condición de equilibrio (es decir, para valores pequeños de  $\theta$ ),

$$\text{sen } \theta \cong \theta \quad (\text{PT7.10})$$

Así, si suponemos que nos interesamos sólo en casos donde  $\theta$  es pequeño, la ecuación (PT7.10) se sustituye en la ecuación (PT7.9) para obtener



**Figura PT7.1**  
El péndulo oscilante.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (\text{PT7.11})$$

Tenemos, por lo tanto, transformada la ecuación (PT7.9) en una forma lineal que es fácil de resolver de manera analítica.

Aunque la linealización es una herramienta muy valiosa para resolver problemas en ingeniería, existen casos donde no se puede utilizar. Por ejemplo, suponga que nos interesa estudiar el comportamiento del péndulo con grandes desplazamientos desde el equilibrio. En tales casos, los métodos numéricos ofrecen una opción viable para obtener la solución. En la actualidad, la disponibilidad tan amplia de las computadoras coloca esta opción al alcance de todos los ingenieros.

### PT7.1.2 Las EDO y la práctica en ingeniería

Las leyes fundamentales de la física: la mecánica, la electricidad y la termodinámica con frecuencia se basan en observaciones empíricas que explican las variaciones de las propiedades físicas y los estados de los sistemas. Más que en describir directamente el estado de los sistemas físicos, las leyes a menudo se expresan en términos de los cambios del espacio y del tiempo.

En la tabla PT7.1 se muestran algunos ejemplos. Esas leyes definen mecanismos de cambio. Cuando se combinan con las leyes de conservación de la energía, masa o *momentum*, resultan ecuaciones diferenciales. La integración subsecuente de estas ecuaciones diferenciales origina funciones matemáticas que describen el estado espacial y temporal de un sistema en términos de variaciones de energía, masa o velocidad.

El problema del paracaidista en caída que se presentó en el capítulo 1 es un ejemplo de la obtención de una ecuación diferencial ordinaria, a partir de una ley fundamental. Recuerde que se utilizó la segunda ley de Newton para desarrollar una EDO que describe la razón de cambio de la velocidad de un paracaidista en caída. Al integrar esta expresión, obtenemos una ecuación para predecir la velocidad de caída como una función del tiempo (figura PT7.2). Esta ecuación se utiliza de diferentes formas, entre ellas para propósitos de diseño.

De hecho, tales relaciones matemáticas son la base para la solución de un gran número de problemas de ingeniería. Sin embargo, como se describió en la sección anterior, muchas de las ecuaciones diferenciales de importancia práctica no se pueden resolver utilizando los métodos analíticos de cálculo. Así los métodos que se estudiarán en los siguientes capítulos resultan extremadamente importantes en todos los campos de la ingeniería.

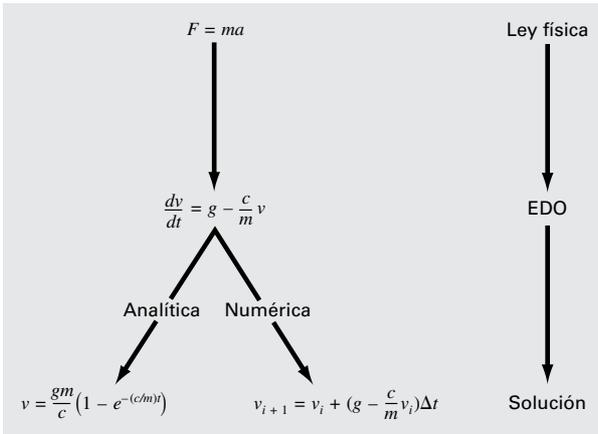
**Tabla PT7.1** Ejemplos de las leyes fundamentales que se escriben en términos de la razón de cambio de variables ( $t$  = tiempo y  $x$  = posición).

Ley	Expresión matemática	Variables y parámetros
Segunda ley de Newton del movimiento	$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$	Velocidad ( $v$ ), fuerza ( $F$ ) y masa ( $m$ )
Ley del calor de Fourier	$q = -k' \frac{dT}{dx}$	Flujo de calor ( $q$ ), conductividad térmica ( $k'$ ) y temperatura ( $T$ )
Ley de difusión de Fick	$J = -D \frac{dc}{dx}$	Flujo másico ( $J$ ), coeficiente de difusión ( $D$ ) y concentración ( $c$ )
Ley de Faraday (caída de voltaje a través de un inductor)	$\Delta V_L = L \frac{di}{dt}$	Caída de voltaje ( $\Delta V_L$ ), inductancia ( $L$ ) y corriente ( $i$ )

## PT7.2 ANTECEDENTES MATEMÁTICOS

La solución de una ecuación diferencial ordinaria es una función en términos de la variable independiente y de parámetros que satisfacen la ecuación diferencial original. Para ilustrar este concepto, empecemos con una función dada

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1 \quad (\text{PT7.12})$$



**Figura PT7.2**

La secuencia de eventos en la aplicación de EDO para resolver problemas de ingeniería. El ejemplo mostrado es la velocidad de un paracaidista en caída.

la cual es un polinomio de cuarto grado (figura PT7.3a). Ahora, si derivamos con respecto de  $x$  a la ecuación (PT7.12), obtenemos una EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 \tag{PT7.13}$$

Esta ecuación también describe el comportamiento del polinomio, pero de una manera diferente a la ecuación (PT7.12). Más que representar explícitamente los valores de  $y$  para cada valor de  $x$ , la ecuación (PT7.13) da la razón de cambio de  $y$  con respecto a  $x$  (es decir, la pendiente) para cada valor de  $x$ . La figura PT7.3 muestra tanto la función original como la derivada graficadas contra  $x$ . Observe cómo el valor cero en la derivada corresponde al punto en el cual la función original es plana; es decir, tiene una pendiente cero. Note también que los valores absolutos máximos de la derivada están en los extremos del intervalo donde las pendientes de la función son mayores.

Como se acaba de mostrar, aunque es posible determinar una ecuación diferencial dando la función original, en esencia el objetivo es determinar la función original dada la ecuación diferencial.

La función original representa la solución. En el presente caso, esta solución se determina de manera analítica al integrar la ecuación (PT7.13):

$$y = \int (-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5) dx$$

Aplicando la regla de integración (recuerde la tabla PT6.2)

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

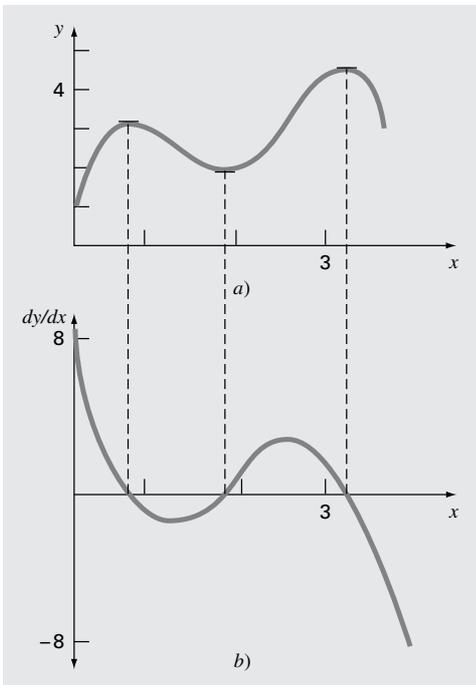
en cada término de la ecuación, se obtiene la solución

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + C \tag{PT7.14}$$

la cual es idéntica a la función original con una notable excepción. En el proceso de la diferenciación y después en la integración, se pierde el valor constante de 1 en la ecuación original y ganamos el valor  $C$ . Esta  $C$  es llamada *constante de integración*. El hecho de que aparezca esta constante arbitraria indica que la solución no es única. Es decir, es solución pero con un número infinito de funciones posibles (correspondiente al número infinito de posibles valores de  $C$ ) que satisfacen la ecuación diferencial. Por ejemplo, la figura PT7.4 muestra seis funciones posibles que satisfacen la ecuación (PT7.14).

Por lo tanto, para especificar la solución por completo, la ecuación diferencial usualmente se encuentra acompañada por *condiciones auxiliares*. Para las EDO de primer orden, se requiere un tipo de condición auxiliar, llamada *valor inicial*, para determinar la constante y obtener una solución única. Por ejemplo, la ecuación (PT7.13) se acompaña por la condición inicial definida por  $x = 0, y = 1$ . Estos valores se sustituyen en la ecuación (PT7.14):

$$1 = -0.5(0)^4 + 4(0)^3 - 10(0)^2 + 8.5(0) + C \tag{PT7.15}$$



**Figura PT7.3**

Gráficas de a)  $y$  contra  $x$ , y b)  $dy/dx$  contra  $x$  para la función  $y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$ .

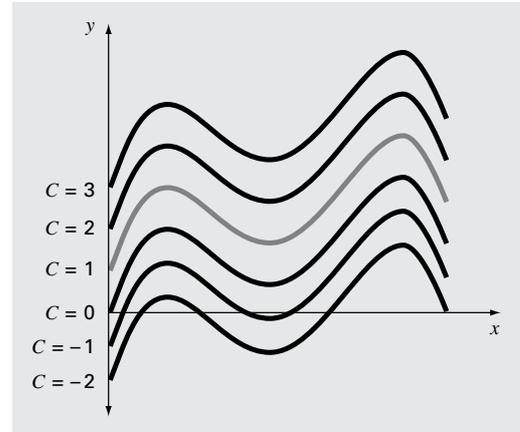
para determinar  $C = 1$ . Por consiguiente, la solución única que satisface tanto a la ecuación diferencial como la condición inicial especificada se obtiene al sustituir  $C = 1$  en la ecuación (PT7.14):

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1 \quad (\text{PT7.16})$$

De esta forma, hemos “fijado” la ecuación (PT7.14) al forzarla a pasar a través de un punto dado por la condición inicial  $y$ , al hacerlo, encontramos una solución única para la EDO y completamos un ciclo con la función original [ecuación (PT7.12)].

Las condiciones iniciales por lo común tienen interpretaciones muy tangibles para las ecuaciones diferenciales surgidas de las condiciones de problemas físicos. Por ejemplo, en el problema del paracaidista en caída, la condición inicial fue tomada del hecho físico de que en el tiempo cero la velocidad vertical es cero. Si el paracaidista hubiese estado en movimiento vertical en el tiempo cero, la solución debería haberse modificado al tomar en cuenta esta velocidad inicial.

Cuando tratamos con una ecuación diferencial de  $n$ -ésimo orden, se requiere de  $n$  condiciones para obtener una solución única. Si se especifican todas las condiciones en el mismo valor de la variable independiente (por ejemplo, en  $x$  o  $t = 0$ ), entonces se conocen como *problemas de valor inicial*. En cambio en los *problemas de valor en la frontera*, la especificación de condiciones ocurre con diferentes valores de la variable independiente. En los capítulos 25 y 26 se analizarán problemas de valor inicial. Los problemas de valor en la frontera se estudiarán en el capítulo 27, junto con los problemas sobre valores propios.



**Figura PT7.4**

Seis posibles soluciones para la integral de  $-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ . Cada una corresponde a un valor diferente de la constante de integración  $C$ .

## PT7.3 ORIENTACIÓN

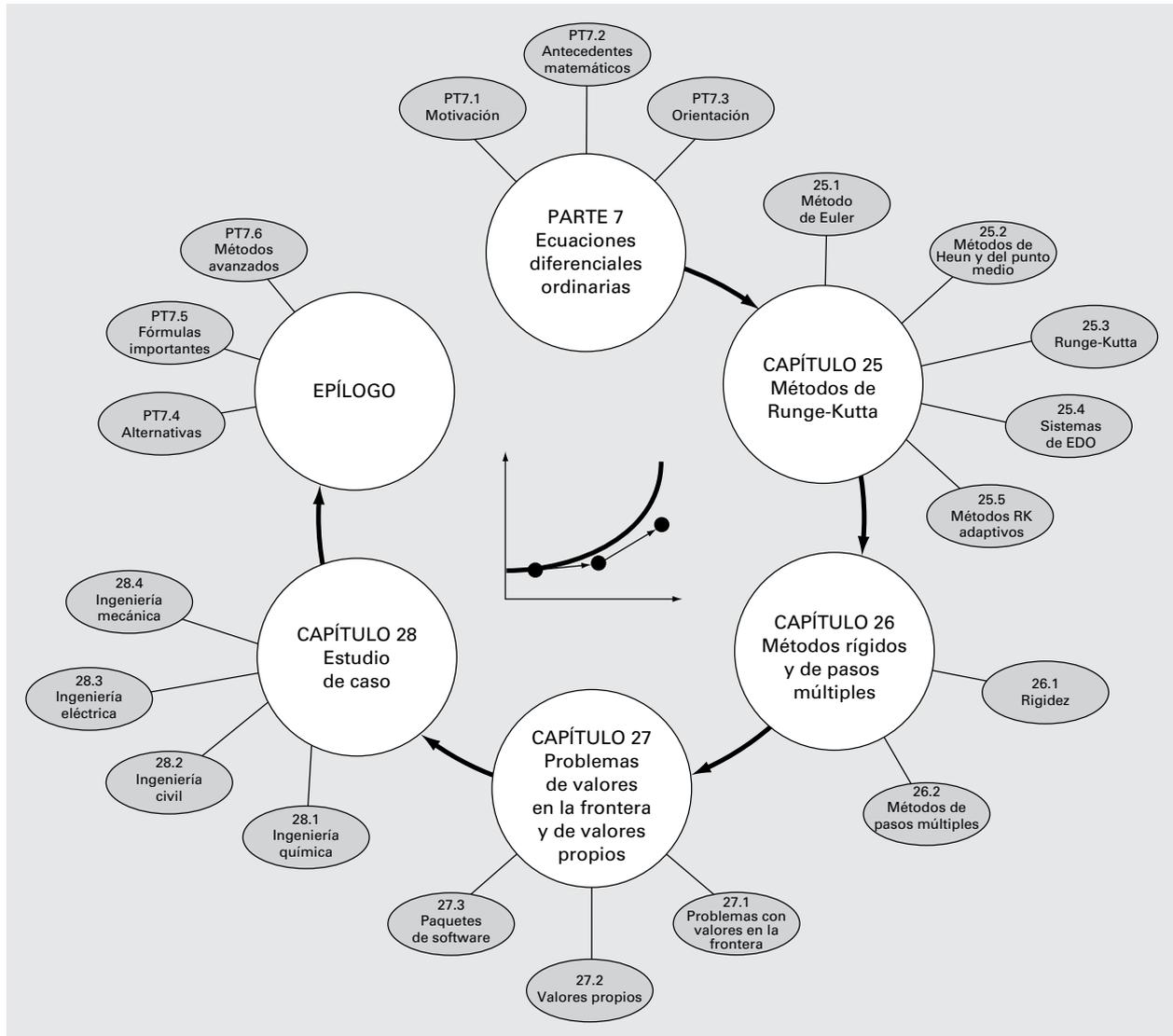
Antes de proceder con los métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, sería de utilidad tener alguna orientación. El siguiente material tiene como propósito ofrecerle una visión general del material que se estudiará en la parte siete. Además, formulamos objetivos para concentrar el análisis sobre el área de estudio.

### PT7.3.1 Alcance y presentación preliminar

La figura PT7.5 ofrece un panorama general de la parte siete. Se analizarán en esta parte del libro dos categorías amplias de métodos numéricos, para problemas de valor inicial. Los *métodos de un paso*, los cuales se verán en el capítulo 25, permiten el cálculo  $y_{i+1}$ , dada la ecuación diferencial y  $y_i$ . Los métodos de pasos múltiples, que se estudiarán en el capítulo 26, requieren valores adicionales de  $y$  además de los de  $y_i$ .

Todos los métodos, excepto los *métodos de un paso* del capítulo 25, pertenecen a lo que se conoce como técnicas de Runge-Kutta. Aunque el capítulo podría haberse organizado alrededor de esta noción teórica, optamos por un procedimiento intuitivo, más gráfico, para presentar los métodos. De esta manera, iniciamos el capítulo con el *método de Euler*, el cual tiene una interpretación gráfica muy directa. Luego se estudian dos versiones mejoradas al método de Euler, que están desarrollados a partir de argumentos visuales (las técnicas de *Heun* y las de *punto medio*). Después de esta introducción, desarrollamos de manera formal el concepto de técnicas de *Runge-Kutta* (o *RK*) y mostramos cómo las técnicas anteriores constituyen el conjunto de métodos *RK* a partir de los de primero y segundo orden. Continuamos con las formulaciones de los métodos *RK* de orden superior que se utilizan con mayor frecuencia en la solución de problemas de ingeniería. Además, cubrimos la aplicación de los métodos de un paso en los *sistemas de EDO*. Por último, el capítulo termina con un análisis de los *métodos RK adaptativos* que automáticamente ajustan el tamaño de paso en respuesta al error de truncamiento del cálculo.

El capítulo 26 inicia con una descripción de las *EDO rígidas*, que se encuentran tanto en forma individual como en los sistemas de EDO, y para su solución ambos tienen componentes lentos y



**Figura PT7.5**

Representación esquemática de la organización de la parte siete: Ecuaciones diferenciales ordinarias.

rápidos. Presentamos la idea de una técnica de *solución implícita* como una de las soluciones más comunes para resolver este problema.

Después, estudiamos los *métodos de pasos múltiples*. Estos algoritmos requieren información de los pasos anteriores para obtener una mayor efectividad en la trayectoria de la solución. También ofrecen una estimación del error de truncamiento que se puede utilizar para implementar un control en el tamaño de paso. En esta sección, seguimos primero un procedimiento intuitivo-visual al usar un método simple (el de *Heun sin autoinicio*), para presentar todas las características esenciales de los procedimientos de pasos múltiples.

En el *capítulo 27* abordamos los problemas de *valores en la frontera* y los problemas de *valores propios* (valores característicos o eigenvalores). Para los primeros, estudiamos tanto los *métodos de disparo* como los de *diferencias finitas*. Para los segundos, analizamos diferentes procedimientos, entre ellos, los *métodos de polinomios* y los *métodos de potencias*. Por último, el capítulo concluye

con una descripción de la aplicación de varios *paquetes de software y bibliotecas* para la solución de las EDO y de los valores propios.

El *capítulo 28* se dedica a las aplicaciones en una gran gama de los campos de la ingeniería. Además, se incluye una sección con un breve repaso al final de la parte siete. Este epílogo resume y compara las fórmulas y los conceptos importantes relacionados con las EDO. La comparación incluye un análisis de las ventajas y las desventajas que son relevantes para su implementación en la práctica de la ingeniería. El epílogo también resume fórmulas importantes e incluye referencias sobre temas avanzados.

### PT7.3.2 Metas y objetivos

**Objetivos de estudio** Después de completar la parte siete, usted debe aumentar de manera notoria su capacidad para enfrentar y resolver tanto problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, como de valores propios. Las metas de estudio en general incluyen el manejo de las técnicas, y una capacidad para evaluar la confiabilidad de las respuestas; así como la posibilidad de seleccionar el “mejor” método (o métodos) para cualquier problema en particular. Además de estos objetivos generales, deberán dominar los objetivos de estudio específicos que se muestran en la tabla PT7.2.

**Objetivos de cómputo** Se le ofrecen los algoritmos para muchos de los métodos en la parte siete. Esta información le permitirá aumentar su biblioteca de software. Por ejemplo, quizá le sea útil desde un punto de vista profesional tener el software que emplea el método de Runge-Kutta de cuarto orden para más de cinco ecuaciones y resolver las EDO con un procedimiento adaptativo de tamaño de paso.

Por último, una de sus más importantes metas deberá ser el dominio de los diversos paquetes de software de propósito general que están disponibles. En particular, deberá convertirse en un entusiasta usuario de esas herramientas para implementar métodos numéricos en la solución de problemas de ingeniería.

**Tabla PT7.2** Objetivos específicos de estudio de la parte siete.

- 
1. Comprender las representaciones visuales de los métodos de Euler, de Heun y del punto medio.
  2. Conocer la relación del método de Euler con la expansión de la serie de Taylor y la implicación que esto tiene con respecto al error del método.
  3. Reconocer la diferencia entre los errores de truncamiento local y global, y cómo se relacionan con la selección de un método numérico para un problema específico.
  4. Entender el orden y la dependencia del tamaño de paso respecto de los errores de truncamiento global, para todos los métodos descritos en la parte siete; entender cómo dichos errores tienen que ver con la exactitud de las técnicas.
  5. Comprender la base de los métodos predictor-corrector; en particular, percatarse que la eficiencia del corrector es dependiente de la exactitud del predictor.
  6. Conocer la forma general de los métodos de Runge-Kutta; entender la deducción del método RK de segundo orden y cómo se relaciona con la expansión de la serie de Taylor; darse cuenta de que hay un número infinito de versiones posibles para los métodos RK de segundo orden y de orden superiores.
  7. Saber cómo aplicar cualquiera de los métodos RK a los sistemas de ecuaciones; poder reducir una EDO de  $n$ -ésimo orden a un sistema de  $n$ -EDO de primer orden.
  8. Reconocer el tipo de contexto de un problema donde es importante ajustar el tamaño de paso.
  9. Entender cómo se agrega el control del tamaño de paso adaptativo a un método RK de cuarto orden.
  10. Saber de qué modo la combinación de los componentes lentos y rápidos actúa en la solución de una ecuación o un sistema de ecuaciones rígidos.
  11. Distinguir entre esquemas de solución implícitos y explícitos para las EDO; en particular, reconocer cómo 1) se disminuye la rigidez del problema y 2) se complica la mecánica de solución.
  12. Detectar la diferencia entre problemas de valor inicial y de valores en la frontera.
  13. Saber la diferencia entre los métodos de pasos múltiples y de un paso; darse cuenta de que todos los métodos de pasos múltiples son predictor-corrector, pero no a la inversa.
  14. Comprender la relación entre fórmulas de integración y métodos predictor-corrector.
  15. Reconocer la diferencia fundamental entre las fórmulas de integración de Newton-Cotes y la de Adams.
  16. Entender la fundamentación de los métodos de polinomios y de potencias para determinar los valores propios; en particular, reconocer sus ventajas y sus limitaciones.
  17. Saber cómo la deflación de Hoteller permite que el método de potencias se utilice para calcular los valores propios intermedios.
  18. Utilizar los paquetes de software y/o bibliotecas para integrar las EDO y evaluar los valores propios.
-

# CAPÍTULO 25

## Métodos de Runge-Kutta

Este capítulo se dedica a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

En el capítulo 1 se utilizó un método numérico para resolver una ecuación como la anterior, para el cálculo de la velocidad del paracaidista en caída. Recuerde que el método fue de la forma general

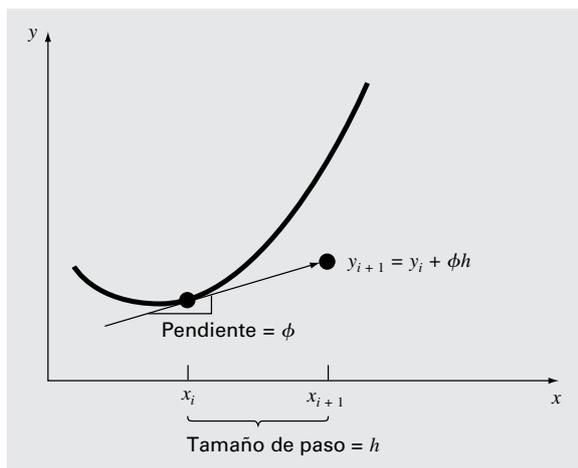
Nuevo valor = valor anterior + pendiente × tamaño de paso

o, en términos matemáticos,

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \quad (25.1)$$

De acuerdo con esta ecuación, la pendiente estimada  $\phi$  se usa para extrapolar desde un valor anterior  $y_i$  a un nuevo valor  $y_{i+1}$  en una distancia  $h$  (figura 25.1). Esta fórmula se aplica paso a paso para calcular un valor posterior  $y$ , por lo tanto, para trazar la trayectoria de la solución.

Todos los métodos de un paso que se expresen de esta forma general, tan sólo van a diferir en la manera en la que se estima la pendiente. Como en el problema del paracaidista en caída, el procedimiento más simple consiste en usar la ecuación diferencial, para estimar la pendiente, en la forma de la primera derivada en  $x_i$ . En otras palabras, se toma la pendiente al inicio del intervalo como una aproximación de la pendiente promedio sobre todo el intervalo. Tal procedimiento, llamado *método de Euler*, se analiza en la primera parte de este capítulo. Después se revisan otros métodos de un paso que emplean otras formas de estimar la pendiente que dan como resultado predicciones más exactas. Todas estas técnicas en general se conocen como métodos de *Runge-Kutta*.



**Figura 25.1**  
Ilustración gráfica del método de un paso.

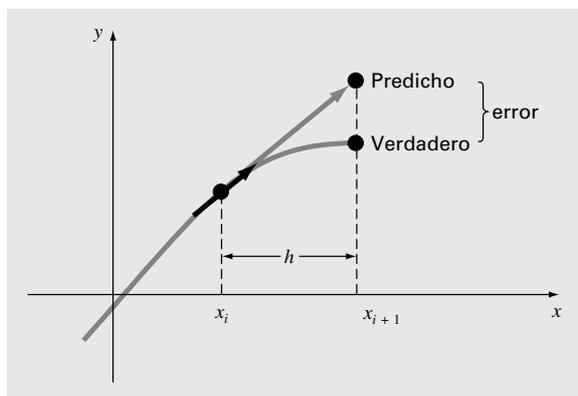
### 25.1 MÉTODO DE EULER

La primera derivada ofrece una estimación directa de la pendiente en  $x_i$  (figura 25.2):

$$\phi = f(x_i, y_i)$$

donde  $f(x_i, y_i)$  es la ecuación diferencial evaluada en  $x_i$  y  $y_i$ . La estimación se sustituye en la ecuación (25.1):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (25.2)$$



**Figura 25.2**  
Método de Euler.

Esta fórmula se conoce como *método de Euler* (o de *Euler-Cauchy* o de *punto pendiente*). Se predice un nuevo valor de  $y$  usando la pendiente (igual a la primera derivada en el valor original de  $x$ ) para extrapolar linealmente sobre el tamaño de paso  $h$  (figura 25.2).

### EJEMPLO 25.1 Método de Euler

**Planteamiento del problema** Con el método de Euler integre numéricamente la ecuación (PT7.13):

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

desde  $x = 0$  hasta  $x = 4$  con un tamaño de paso 0.5. La condición inicial en  $x = 0$  es  $y = 1$ . Recuerde que la solución exacta está dada por la ecuación (PT7.16):

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1$$

**Solución** Se utiliza la ecuación (25.2) para implementar el método de Euler:

$$y(0.5) = y(0) + f(0, 1)0.5$$

donde  $y(0) = 1$  y la pendiente estimada en  $x = 0$  es:

$$f(0, 1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5$$

Por lo tanto,

$$y(0.5) = 1.0 + 8.5(0.5) = 5.25$$

La solución verdadera en  $x = 0.5$  es:

$$y = -0.5(0.5)^4 + 4(0.5)^3 - 10(0.5)^2 + 8.5(0.5) + 1 = 3.21875$$

Así, el error es:

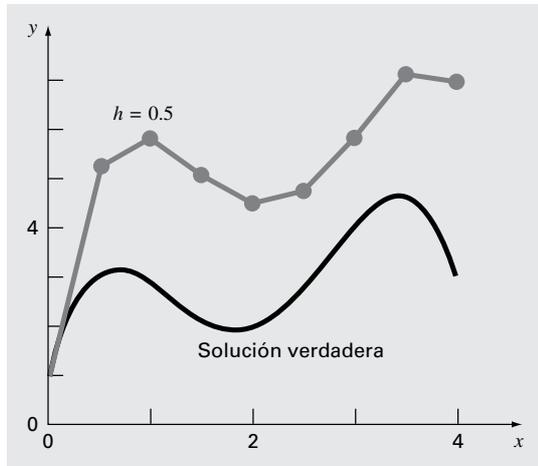
$$E_t = \text{valor verdadero} - \text{valor aproximado} = 3.21875 - 5.25 = -2.03125$$

o, expresada como error relativo porcentual,  $\epsilon_t = -63.1\%$ . En el segundo paso,

$$\begin{aligned} y(1) &= y(0.5) + f(0.5, 5.25)0.5 \\ &= 5.25 + [-2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5]0.5 \\ &= 5.875 \end{aligned}$$

**Tabla 25.1** Comparación de los valores verdadero y aproximado de la integral de  $y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ , con la condición inicial de que  $y = 1$  en  $x = 0$ . Los valores aproximados se calcularon empleando el método de Euler con un tamaño de paso de 0.5. El error local se refiere al error en que se incurre sobre un solo paso. Éste se calcula con una expansión de la serie de Taylor como en el ejemplo 25.2. El error global es la discrepancia total debida a los pasos anteriores y presentes.

x	Yverdadero	Y <sub>Euler</sub>	Error relativo porcentual	
			Global	Local
0.0	1.00000	1.00000		
0.5	3.21875	5.25000	-63.1	-63.1
1.0	3.00000	5.87500	-95.8	-28.1
1.5	2.21875	5.12500	131.0	-1.4
2.0	2.00000	4.50000	-125.0	20.3
2.5	2.71875	4.75000	-74.7	17.2
3.0	4.00000	5.87500	46.9	3.9
3.5	4.71875	7.12500	-51.0	-11.3
4.0	3.00000	7.00000	-133.3	-53.1

**Figura 25.3**

Comparación de la solución verdadera con una solución numérica usando el método de Euler, para la integral de  $y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 4$  con un tamaño de paso de 0.5. La condición inicial en  $x = 0$  es  $y = 1$ .

La solución verdadera en  $x = 1.0$  es 3.0 y, entonces, el error relativo porcentual es  $-95.8\%$ . El cálculo se repite y los resultados se dan en la tabla 25.1 y en la figura 25.3. Observe que aunque el cálculo capta la tendencia general de la solución verdadera, el error resulta considerable. Como se explica en la siguiente sección, es posible reducir tal error usando un tamaño de paso menor.

El ejemplo anterior usa un polinomio simple como ecuación diferencial con el objetivo de facilitar el siguiente análisis de error. De esta forma,

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

En efecto, un caso más general (y más común) implica EDO, donde aparece una función que depende tanto de  $x$  como de  $y$ ,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Conforme avancemos en esta parte del texto, nuestros ejemplos comprenderán EDO que dependen de variables independientes y dependientes.

### 25.1.1 Análisis del error para el método de Euler

La solución numérica de las EDO implica dos tipos de error (recuerde los capítulos 3 y 4):

1. Errores de *truncamiento*, o de discretización, originados por la naturaleza de las técnicas empleadas para aproximar los valores de  $y$ .
2. Errores de *redondeo*, causados por el número limitado de cifras significativas que una computadora puede retener.

Los errores de truncamiento se componen de dos partes. La primera es un *error de truncamiento local* que resulta de una aplicación del método considerado, en un solo paso. La segunda es un *error de truncamiento propagado* que resulta de las aproximaciones producidas durante los pasos previos. La suma de los dos es el *error de truncamiento global* o *total*.

Al adquirir cierta comprensión de la magnitud y de las propiedades del error de truncamiento, puede desarrollarse el método de Euler directamente de la expansión de la serie de Taylor. Para ello, observe que la ecuación diferencial que se va a integrar será de la forma general:

$$y' = f(x, y) \tag{25.3}$$

donde  $y' = dy/dx$ ,  $x$  y  $y$  son las variables independiente y dependiente, respectivamente. Si la solución (es decir, la función que describe el comportamiento de  $y$ ) tiene derivadas continuas, se representa por una expansión de la serie de Taylor respecto a un valor inicial  $(x_i, y_i)$ , como sigue [recuerde la ecuación (4.7)]

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \dots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + R_n \quad (25.4)$$

donde  $h = x_{i+1} - x_i$  y  $R_n =$  término remanente, definido como:

$$R_n = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad (25.5)$$

donde  $\xi$  está en algún lugar en el intervalo de  $x_i$  a  $x_{i+1}$ . Es posible desarrollar una forma alternativa, sustituyendo la ecuación (25.3) en las ecuaciones (25.4) y (25.5) para obtener:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!} h^n + O(h^{n+1}) \quad (25.6)$$

donde  $O(h^{n+1})$  especifica que el error de truncamiento local es proporcional al tamaño de paso elevado a la potencia  $(n+1)$ .

Al comparar las ecuaciones (25.2) y (25.6), se advierte que el método de Euler corresponde a la serie de Taylor, hasta el término  $f(x_i, y_i)h$  inclusive. Además, la comparación indica que el error de truncamiento se debe a que aproximamos la solución verdadera mediante un número finito de términos de la serie de Taylor. Así, truncamos, o dejamos fuera, una parte de la solución verdadera. Por ejemplo, el error de truncamiento en el método de Euler se atribuye a los términos remanentes en la expansión de la serie de Taylor, que no se incluyeron en la ecuación (25.2). Al restar la ecuación (25.2), que es una aproximación de la (25.6) se llega a

$$E_i = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \dots + O(h^{n+1}) \quad (25.7)$$

donde  $E_i =$  error de truncamiento local verdadero. Para  $h$  suficientemente pequeña, los errores en los términos de la ecuación (25.7) normalmente disminuyen, en tanto aumenta el orden (recuerde el ejemplo 4.2 y el análisis que lo acompaña) y el resultado se representa como:

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 \quad (25.8)$$

o

$$E_a = O(h^2) \quad (25.9)$$

donde  $E_a =$  error de truncamiento local aproximado.

### EJEMPLO 25.2 Estimación de la serie de Taylor para el error del método de Euler

**Planteamiento del problema** Con la ecuación (25.7) estime el error en el primer paso del ejemplo 25.1. Úsela también para determinar el error debido a cada uno de los términos de orden superior en la expansión de la serie de Taylor.

**Solución** Como tenemos un polinomio, se aplica la serie de Taylor para obtener estimaciones exactas del error en el método de Euler. La ecuación (25.7) se escribe como:

$$E_i = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \frac{f''(x_i, y_i)}{3!} h^3 + \frac{f^{(3)}(x_i, y_i)}{4!} h^4 \quad (E25.2.1)$$

donde  $f'(x_i, y_i)$  es la primera derivada de la ecuación diferencial (que es la segunda derivada de la solución). En el presente caso,

$$f'(x_i, y_i) = -6x^2 + 24x - 20 \quad (E25.2.2)$$

y  $f''(x_i, y_i)$  es la segunda derivada de la EDO

$$f''(x_i, y_i) = -12x + 24 \quad (\text{E25.2.3})$$

y  $f^{(3)}(x_i, y_i)$  es la tercera derivada de la EDO

$$f^{(3)}(x_i, y_i) = -12 \quad (\text{E25.2.4})$$

Podemos omitir términos adicionales (es decir, la cuarta derivada y las superiores) de la ecuación (E25.2.1), ya que en este caso específico son iguales a cero. Se debe observar que para otras funciones (por ejemplo, funciones trascendentes como senoides o exponenciales) esto no necesariamente es cierto, y los términos de orden superior llegan a tener valores diferentes de cero. Sin embargo, en el caso presente, las ecuaciones (E25.2.1) a la (E25.2.4) definen por completo el error de truncamiento en una sola aplicación del método de Euler.

Por ejemplo, el error debido al truncamiento del término de segundo orden se calcula como sigue:

$$E_{t,2} = \frac{-6(0.0)^2 + 24(0.0) - 20}{2} (0.5)^2 = -2.5 \quad (\text{E25.2.5})$$

Para el término de tercer orden:

$$E_{t,3} = \frac{-12(0, 0) + 24}{6} (0.5)^3 = 0.5$$

y para el término de cuarto orden:

$$E_{t,4} = \frac{-12}{24} (0.5)^4 = -0.03125$$

Se suman los tres resultados para obtener el error total de truncamiento:

$$E_t = E_{t,2} + E_{t,3} + E_{t,4} = -2.5 + 0.5 - 0.03125 = -2.03125$$

que es exactamente el error en que se incurrió en el paso inicial del ejemplo 25.1. Observe cómo  $E_{t,2} > E_{t,3} > E_{t,4}$ , lo cual justifica la aproximación representada por la ecuación (25.8).

Como se ilustra en el ejemplo 25.2, la serie de Taylor ofrece un medio de cuantificar el error en el método de Euler. Aunque existen limitaciones asociadas con su empleo para tal propósito:

1. La serie de Taylor permite sólo una estimación del error de truncamiento local; es decir, el error generado durante un solo paso del método. No ofrece una medida del error propagado, por lo tanto, ni del error de truncamiento global. En la tabla 25.1 se incluyen los errores de truncamiento local y global para el ejemplo 25.1. El error local se calculó en cada paso con la ecuación (25.2), pero usando el valor verdadero de  $y_i$  (la segunda columna de la tabla) para calcular  $y_{i+1}$  y no el valor aproximado (la tercera columna), como se hizo con el método de Euler. Como se esperaba, el error de truncamiento local absoluto promedio (25%) es menor que el error global promedio (90%). La única razón por la que es posible realizar estos cálculos de error exactos es que conocemos *a priori* el valor verdadero. Obviamente éste no será el caso en un problema real. En consecuencia, como lo analizaremos después, usted a menudo debe aplicar técnicas como el método de Euler, usando varios tamaños de paso, para obtener una estimación indirecta de los errores.
2. Como se mencionó anteriormente, en problemas reales por lo común se tienen funciones más complicadas que simples polinomios. En consecuencia, las derivadas que se necesitan para obtener la expansión de la serie de Taylor no siempre serán fáciles de calcular.

Aunque estas limitaciones impiden el análisis exacto del error en la mayoría de los problemas prácticos, la serie de Taylor brinda una valiosa ayuda en la comprensión en el comportamiento del método de Euler. De acuerdo con la ecuación (25.9), se advierte que el error local es proporcional al cuadrado del tamaño de paso y a la primera derivada de la ecuación diferencial. También se puede demostrar que el error de truncamiento global es  $O(h)$ ; es decir, es proporcional al tamaño de paso (Carnahan y colaboradores, 1969). Estas observaciones permiten establecer las siguientes conclusiones útiles:

1. Se puede reducir el error disminuyendo el tamaño del paso.
2. El método dará como resultado predicciones sin error si la función que se analiza (es decir, la solución de la ecuación diferencial) es lineal, debido a que en una línea recta la segunda derivada es cero.

Esta última conclusión tiene un sentido intuitivo, puesto que el método de Euler usa segmentos de línea recta para aproximar la solución. De ahí que al método de Euler se le conozca como un *método de primer orden*.

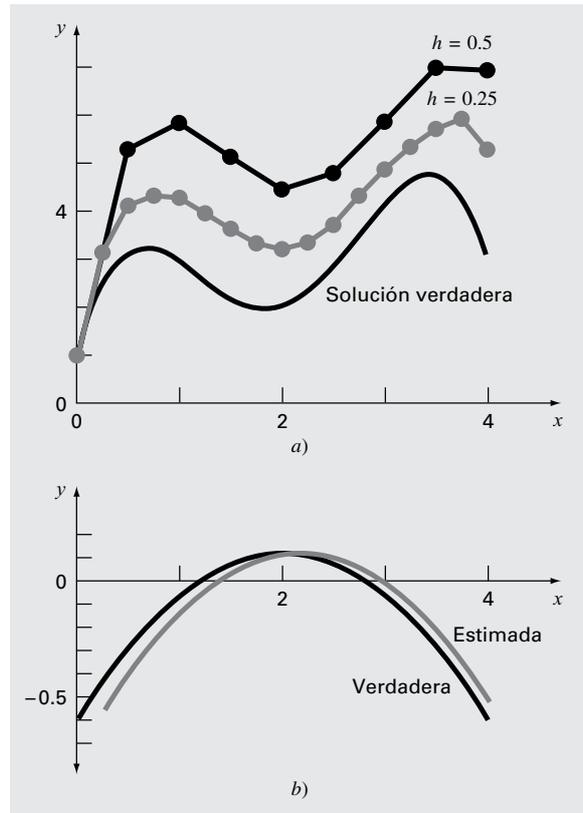
También deberá observarse que este patrón general rige a los métodos de orden superior de un paso, que se describen en las siguientes páginas. Es decir, un método de  $n$ -ésimo orden dará resultados perfectos si la solución de la EDO es un polinomio de  $n$ -ésimo grado. Además, el error de truncamiento local será  $O(h^{n+1})$ ; y el error global,  $O(h^n)$ .

**EJEMPLO 25.3** Efecto de un tamaño de paso reducido en el método de Euler

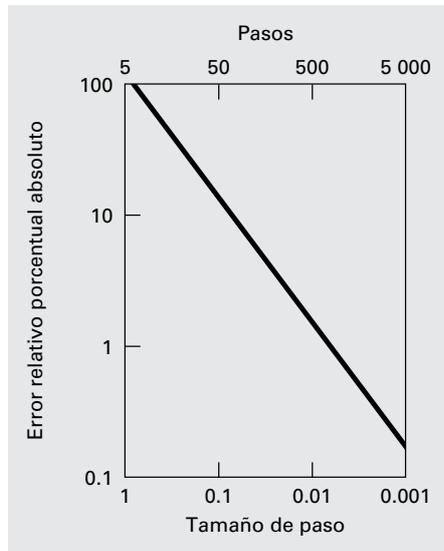
**Planteamiento del problema** Repita el cálculo del ejemplo 25.1, pero ahora use un tamaño de paso igual a 0.25.

**Solución** Los cálculos se repiten, y los resultados se recopilan en la figura 25.4a). Al reducir el tamaño de paso a la mitad, el valor absoluto del error global promedio disminuye al 40%, y el valor absoluto del error local al 6.4%. Esto se compara con los errores global y local del ejemplo 25.1, 90 y 24.8%, respectivamente. Así, como se esperaba, el error local disminuye a un cuarto y el error global a la mitad.

Observe también cómo el error local cambia de signo en valores intermedios a lo largo del intervalo, lo cual se debe principalmente a que la primera derivada de la ecuación diferencial es una parábola que cambia de signo [recuerde la ecuación (E25.2.2) y examine la figura 25.4b)]. Debido a que el error local es proporcional a esta función, el efecto total de la oscilación en el signo es evitar un crecimiento continuo del error global conforme se ejecuta el cálculo. Así, desde  $x = 0$  hasta  $x = 1.25$ , todos los errores locales son negativos y, en consecuencia, el error global aumenta en este intervalo. En la sección intermedia del intervalo, los errores locales positivos comienzan a reducir el error global. Cerca del extremo, se invierte el proceso y, de nuevo, aumenta el error global. Si el error local continuamente cambia de signo sobre el intervalo de cálculo, normalmente el efecto total es reducir el error global. No obstante, si los errores locales son del mismo signo, entonces la solución numérica puede diverger cada vez más de la solución verdadera, en tanto se ejecuta el cálculo. Se dice que tales resultados son *inestables*.



**Figura 25.4**  
 a) Comparación de dos soluciones numéricas con el método de Euler usando tamaños de paso 0.5 y 0.25. b) Comparación del error de truncamiento local verdadero y estimado donde el tamaño de paso es 0.5. Observe que el error "estimado" se basa en la ecuación (E25.2.5).



**Figura 25.5**

Efecto del tamaño de paso sobre el error de truncamiento global en el método de Euler para la integral de  $y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ . La gráfica muestra el error global relativo porcentual absoluto en  $x = 5$  en función del tamaño de paso.

El efecto de algunas reducciones del tamaño de paso sobre el error de truncamiento global del método de Euler se ilustra en la figura 25.5, esta gráfica muestra el error relativo porcentual absoluto en  $x = 5$  en función del tamaño de paso para el problema que se estudió en los ejemplos 25.1 a 25.3. Observe que aun cuando  $h$  se reduce a 0.001, el error todavía es mayor de 0.1%. Ya que este tamaño de paso corresponde a 5 000 pasos para ir desde  $x = 0$  hasta  $x = 5$ , la gráfica sugiere que una técnica de primer orden, como el método de Euler, requiere de muchos cálculos para obtener niveles de error aceptables. Más adelante en este capítulo, se presentarán técnicas de orden superior que dan mucha mayor exactitud con el mismo trabajo de cálculo. Sin embargo, deberá observarse que, a pesar de su ineficiencia, la simplicidad del método de Euler lo hace una opción extremadamente atractiva para muchos problemas de ingeniería. Puesto que es muy fácil de programar, en particular la técnica es útil para llevar a cabo análisis rápidos. En la próxima sección se desarrolla un algoritmo computacional para el método de Euler.

### 25.1.2 Algoritmo para el método de Euler

Los algoritmos para las técnicas de un paso como el método de Euler son muy simples de programar. Como se especificó al inicio de este capítulo, todos los métodos de un paso tienen la forma general

$$\text{Nuevo valor} = \text{valor anterior} + \text{pendiente} \times \text{tamaño de paso} \quad (25.10)$$

En lo único que difieren los métodos es en el cálculo de la pendiente.

Suponga que usted quiere realizar el cálculo simple expuesto en la tabla 25.1. Es decir, a usted le gustaría utilizar el método de Euler para integrar  $y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ , con la condición inicial de que  $y = 1$  en  $x = 0$ . Usted quiere integrarla hasta  $x = 4$  usando un tamaño de paso de 0.5, y desplegar todos los resultados. Un pseudocódigo simple para realizar esto será como el de la figura 25.6.

Aunque este programa “hará el trabajo” de duplicar los resultados de la tabla 25.1 no está muy bien diseñado. Primero, y ante todo, no es muy modular. Aunque esto no es muy importante para un programa así de pequeño, podría resultar crítico si deseamos modificar y mejorar el algoritmo.

Además, existen algunos detalles relacionados con la forma en que se establecen las iteraciones. Por ejemplo, suponga que el tamaño de paso se volviese muy pequeño para obtener mayor exactitud. En tales casos, debido a que se despliega cada valor calculado, la cantidad de valores de salida podría

ser muy grande. Asimismo, el algoritmo supone que el intervalo de cálculo es divisible entre el tamaño de paso. Por último, la acumulación de  $x$  en la línea  $x = x + dx$  puede estar sujeta a la cuantificación de errores analizada en la sección 3.4.1. Por ejemplo, si  $dx$  se cambiara a 0.01 y se usara la representación estándar IEEE de punto flotante (cerca de siete cifras significativas), el resultado al final del cálculo sería 3.999997 en lugar de 4. Para  $dx = 0.001$ , ¡sería 3.999892!

En la figura 25.7 se muestra un algoritmo mucho más modular que evita esas dificultades. El algoritmo no despliega todos los valores calculados. En lugar de eso, el usuario especifica un intervalo de salida,  $x_{out}$ , que indica el intervalo en el cual los resultados calculados se guardan en arreglos,  $xp_m$  y  $yp_m$ . Dichos valores se guardan en arreglos, de tal modo que se puedan desplegar de diferentes formas una vez que termine el cálculo (por ejemplo, impresos graficados, escritos en un archivo).

**Figura 25.6**

Pseudocódigo para una primera versión del método de Euler.

```
'intervalo de integración
xi = 0
xf = 4
'variables iniciales
x = xi
y = 1
'establece el tamaño de paso y determina el
'número de pasos de cálculo
dx = 0.5
nc = (xf - xi)/dx
'condiciones de salida inicial
PRINT x, y
'ciclo para implementar el método de Euler
'y despliegue de resultados
DOFOR i = 1, nc
  dydx = -2x3 + 12x2 - 20x + 8.5
  y = y + dydx * dx
  x = x + dx
  PRINT x, y
END DO
```

**a) Programa principal o "manejador"**

```

Asigna valores para
y = valor inicial variable dependiente
xi = valor inicial variable independiente
xf = valor final variable independiente
dx = cálculo del tamaño de paso
xout = intervalo de salida

x = xi
m = 0
xpm = x
ypm = y
DO
  xend = x + xout
  IF (xend > xf) THEN xend = xf
  h = dx
  CALL Integrator (x, y, h, xend)
  m = m + 1
  xpm = x
  ypm = y
  IF (x ≥ xf) EXIT
END DO
DISPLAY RESULTS
END

```

**b) Rutina para tomar un paso de salida**

```

SUB Integrator (x, y, h, xend)
DO
  IF (xend - x < h) THEN h = xend - x
  CALL Euler (x, y, h, ynew)
  y = ynew
  IF (x ≥ xend) EXIT
END DO
END SUB

```

**c) Método de Euler para una EDO sola**

```

SUB Euler (x, y, h, ynew)
  CALL Derivs(x, y, dydx)
  ynew = y + dydx * h
  x = x + h
END SUB

```

**d) Rutina para determinar la derivada**

```

SUB Derivs (x, y, dydx)
  dydx = ...
END SUB

```

**Figura 25.7**

Pseudocódigo para una versión modular "mejorada" del método de Euler.

El programa principal toma grandes pasos de salida y llama a una rutina denominada Integrator que hace los pasos de cálculo más pequeños. Observe que los ciclos o *loops* que controlan tanto los pasos grandes como los pequeños terminan basándose en condiciones lógicas. Así, los intervalos no tienen que ser divisibles entre los tamaños de paso.

La rutina Integrator llama después a la rutina Euler que realiza un solo paso con el método de Euler. La rutina Euler llama a una rutina Derivate que calcula el valor de la derivada.

Aunque parecería que tal forma modular es demasiada para el presente caso, facilitará en gran medida la modificación del programa posteriormente. Por ejemplo, aunque el programa de la figura 25.7 está diseñado específicamente para implementar el método de Euler, el módulo de Euler es la única parte que es específica para el método. Así, todo lo que se requiere para aplicar este algoritmo a otros métodos de un paso es modificar esta rutina.

**EJEMPLO 25.4 Solución de una EDO con la computadora**

**Planteamiento del problema** Es factible desarrollar un programa computacional a partir del pseudocódigo de la figura 25.7. Este software también sirve para resolver otro problema relacionado con la caída del paracaidista. Usted recordará de la parte uno que nuestro modelo matemático para la velocidad se basaba en la segunda ley de Newton, escrita en la forma:

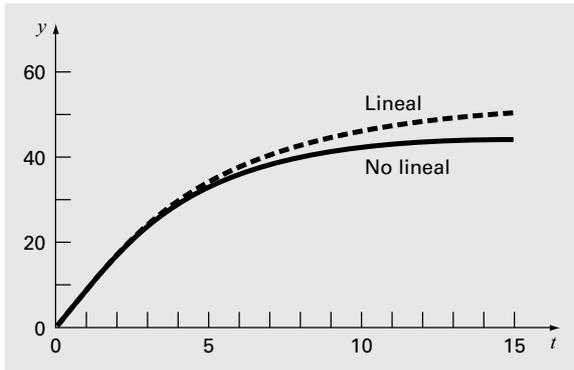
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \quad (\text{E25.4.1})$$

Esta ecuación diferencial se resolvió tanto de manera analítica (ejemplo 1.1) como numérica usando el método de Euler (ejemplo 1.2). Las soluciones fueron para el caso donde  $g = 9.81$ ,  $c = 12.5$ ,  $m = 68.1$  y  $v = 0$  en  $t = 0$ .

El objetivo del presente ejemplo es repetir esos cálculos numéricos empleando un modelo más complicado para la velocidad con base en una descripción matemática más completa de la fuerza de arrastre causada por la resistencia del viento. Este modelo se obtiene como:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} \left[ v + a \left( \frac{v}{v_{\text{máx}}} \right)^b \right] \quad (\text{E25.4.2})$$

donde  $g$ ,  $m$  y  $c$  son las mismas que en la ecuación (E25.4.1),  $a$ ,  $b$  y  $v_{\text{máx}}$  son constantes empíricas, las cuales, en este caso, son iguales a 8.3, 2.2 y 46, respectivamente. Observe que con este modelo se puede ajustar con exactitud las mediciones empíricas de fuerzas de arrastre contra la velocidad, mejor que el modelo lineal simple del ejemplo 1.1. Sin embargo, esta flexibilidad mayor se gana a expensas de evaluar tres coeficientes en lugar de uno. Además, el modelo matemático resultante es más difícil de resolver en forma analítica. En este caso, el método de Euler ofrece una alternativa conveniente para obtener una solución numérica aproximada.



**Figura 25.8**

Resultados gráficos para la solución de la EDO no lineal [ecuación (E25.4.2)]. Observe que la gráfica también muestra la solución para el modelo lineal [ecuación (E25.4.1)] con propósitos de comparación.

**Solución** Los resultados para ambos modelos, lineal y no lineal, se muestran en la figura 25.8 con un tamaño de paso de integración de 0.1 s. La gráfica de la figura presenta también una coincidencia de la solución del modelo lineal con propósitos de comparación.

Los resultados de las dos simulaciones indican cómo el aumento en la complejidad de la formulación para la fuerza de arrastre afecta la velocidad del paracaidista. En este caso, la velocidad terminal disminuye debido a la resistencia causada por los términos de orden superior agregados en la ecuación (E25.4.2).

En forma similar es posible utilizar modelos alternativos. La combinación de una solución generada con la computadora vuelve esto una tarea fácil y eficiente. Tales beneficios le permitirán dedicar más tiempo a considerar alternativas creativas y aspectos holísticos del problema, en lugar de los tediosos cálculos a mano.

### 25.1.3 Métodos para la serie de Taylor de orden superior

Una manera de reducir el error con el método de Euler sería incluir términos de orden superior en la expansión de la serie de Taylor para la solución. Por ejemplo, al incluir el término de segundo orden en la ecuación (25.6) resulta:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 \quad (25.11)$$

con un error de truncamiento aproximado de:

$$E_a = \frac{f''(x_i, y_i)}{6}h^3$$

Aunque la incorporación de términos de orden superior es simple para implementarse en los polinomios, su inclusión no es tan trivial cuando la EDO es más complicada. En particular, las EDO que están en función tanto de la variable dependiente como de la independiente requieren de la derivación usando la regla de la cadena. Por ejemplo, la primera derivada de  $f(x, y)$  es:

$$f'(x_i, y_i) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

La segunda derivada es:

$$f''(x_i, y_i) = \frac{\partial[\partial f/\partial x + (\partial f/\partial y)(dy/dx)]}{\partial x} + \frac{\partial[\partial f/\partial x + (\partial f/\partial y)(dy/dx)]}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

Las derivadas de orden superior se van haciendo cada vez más complicadas.

En consecuencia, como se describe en las próximas secciones, se han desarrollado métodos alternativos de un paso. Estos esquemas son comparables en eficiencia con los procedimientos de la serie de Taylor de orden superior, aunque requieren sólo del cálculo de las primeras derivadas.

## 25.2 MEJORAS DEL MÉTODO DE EULER

Un motivo fundamental de error en el método de Euler es suponer que la derivada al inicio del intervalo es la misma durante todo el intervalo. Hay dos modificaciones simples para evitar esta consideración. Como se demostrará en la sección 25.3, de hecho, ambas modificaciones pertenecen a una clase superior de técnicas de solución llamadas métodos de Runge-Kutta. Debido a que tienen una interpretación gráfica muy directa, los presentaremos antes de una deducción formal como los métodos de Runge-Kutta.

### 25.2.1 Método de Heun

Un método para mejorar la estimación de la pendiente emplea la determinación de dos derivadas en el intervalo (una en el punto inicial y otra en el final). Las dos derivadas se promedian después con la finalidad de obtener una mejor estimación de la pendiente en todo el intervalo. Este procedimiento, conocido como *método de Heun*, se presenta en forma gráfica en la figura 25.9.

Recuerde que en el método de Euler, la pendiente al inicio de un intervalo

$$y'_i = f(x_i, y_i) \quad (25.12)$$

se utiliza para extrapolar linealmente a  $y_{i+1}$ :

$$y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h \quad (25.13)$$

En el método estándar de Euler se debería parar aquí. Sin embargo, en el método de Heun la  $y_{i+1}^0$  calculada en la ecuación (25.13) no es la respuesta final, sino una predicción intermedia. Por consiguiente, la distinguimos con un superíndice 0. La ecuación (25.13) se llama *ecuación predictor* o simplemente predictor. Da una estimación de  $y_{i+1}$  que permite el cálculo de una estimación de la pendiente al final del intervalo:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^0) \quad (25.14)$$

Así, se combinan las dos pendientes [ecuaciones (25.12) y (25.14)] para obtener una pendiente promedio en el intervalo:

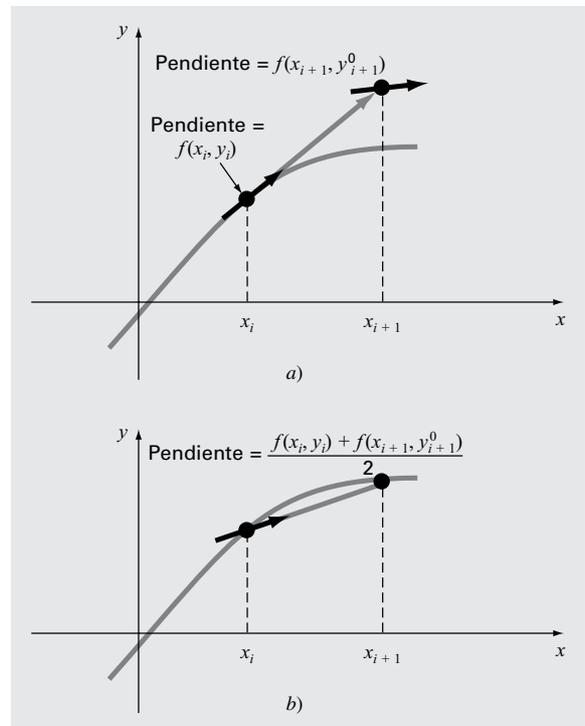
$$\bar{y}' = \frac{y'_i + y'_{i+1}}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}$$

Esta pendiente promedio se utiliza después para extrapolar linealmente desde  $y_i$  hasta  $y_{i+1}$  con el método de Euler:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h$$

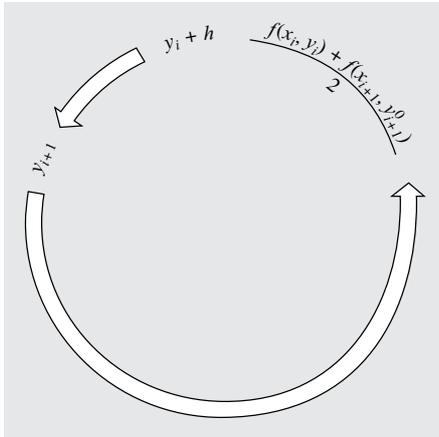
que se conoce como *ecuación correctora* o simplemente *corrector*.

El método de Heun es un *procedimiento predictor-corrector*. Todos los métodos de pasos múltiples que se analizarán más adelante en el capítulo 26 son de este tipo. El método de Heun es el único método predictor-corrector de un solo paso que se describe en este libro. Como se desarrolló antes, se expresa en forma concisa como:



**Figura 25.9**

Representación gráfica del método de Heun. a) Predictor y b) corrector.



**Figura 25.10**  
Representación gráfica de la forma iterativa del método corrector de Heun para obtener una mejor estimación.

Predictor (figura 25.9a)  $y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$  (25.15)

Corrector (figura 25.9b)  $y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h$  (25.16)

Observe que debido a que en la ecuación (25.16) aparece  $y_{i+1}$  a ambos lados del signo igual, entonces se puede aplicar en una forma iterativa. Es decir, una estimación anterior se utilizará de manera repetida para proporcionar una estimación mejorada de  $y_{i+1}$ . El proceso se ilustra en la figura 25.10. Deberá entenderse que este proceso iterativo no necesariamente converge a la respuesta verdadera, sino que lo hará a una estimación con un error de truncamiento finito, como se mostrará en el siguiente ejemplo.

Como en los métodos iterativos similares analizados en secciones anteriores de este libro, un criterio de terminación para la convergencia del corrector está dado por [recuerde la ecuación (3.5)]

$$|\epsilon_a| = \left| \frac{y_{i+1}^j - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^j} \right| 100\% \quad (25.17)$$

donde  $y_{i+1}^{j-1}$  y  $y_{i+1}^j$  resultan de las iteraciones anterior y actual del corrector, respectivamente.

**EJEMPLO 25.5** Método de Heun

**Planteamiento del problema** Con el método de Heun integre  $y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$  desde  $x = 0$  hasta  $x = 4$ , con un tamaño de paso igual a 1. La condición inicial es en  $x = 0, y = 2$ .

**Solución** Antes de resolver el problema numéricamente, se utiliza el cálculo para determinar la siguiente solución analítica:

$$y = \frac{4}{1.3}(e^{0.8x} - e^{-0.5x}) + 2e^{-0.5x} \quad (E25.5.1)$$

**Tabla 25.2** Comparación de los valores verdadero y aproximado para la integral de  $y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$ , con la condición inicial  $y = 2$  en  $x = 0$ . Los valores aproximados se calcularon utilizando el método de Heun con un tamaño de paso igual a 1. Se muestran dos aplicaciones que corresponden a números diferentes de iteraciones del corrector, junto con el error relativo porcentual absoluto.

x	y <sub>verdadero</sub>	Iteraciones del método de Heun			
		1		15	
		y <sub>Heun</sub>	ε <sub>d</sub> (%)	y <sub>Heun</sub>	ε <sub>d</sub> (%)
0	2.0000000	2.0000000	0.00	2.0000000	0.00
1	6.1946314	6.7010819	8.18	6.3608655	2.68
2	14.8439219	16.3197819	9.94	15.3022367	3.09
3	33.6771718	37.1992489	10.46	34.7432761	3.17
4	75.3389626	83.3377674	10.62	77.7350962	3.18

Esta fórmula sirve para generar los valores de la solución verdadera en la tabla 25.2.

Primero, se calcula la pendiente en  $(x_0, y_0)$  como

$$y'_0 = 4e^0 - 0.5(2) = 3$$

Este resultado difiere mucho de la pendiente promedio real en el intervalo de 0 a 1.0, que es igual a 4.1946, como se calculó de la ecuación diferencial usando la ecuación (PT6.4).

La solución numérica se obtiene al usar el predictor [ecuación (25.15)] para llegar a un estimado de  $y$  en 1.0:

$$y_1^0 = 2 + 3(1) = 5$$

Observe que éste es el resultado obtenido con el método estándar de Euler. El valor verdadero en la tabla 25.2 muestra que corresponde a un error relativo porcentual del 19.3%.

Ahora, para mejorar el estimado de  $y_{i+1}$ , se emplea el valor  $y_1^0$  para predecir la pendiente al final del intervalo:

$$y_1' = f(x_1, y_1^0) = 4e^{0.8(1)} - 0.5(5) = 6.402164$$

que se combina con la pendiente inicial para obtener una pendiente promedio en el intervalo desde  $x = 0$  hasta 1:

$$y' = \frac{3 + 6.402164}{2} = 4.701082$$

que está más cerca a la pendiente promedio verdadera, 4.1946. Dicho resultado se sustituye en el corrector [ecuación (25.16)] para obtener la predicción en  $x = 1$ :

$$y_1 = 2 + 4.701082(1) = 6.701082$$

que representa un error relativo porcentual de  $-8.18\%$ . Así, el método de Heun sin iteración del corrector reduce el valor absoluto del error en un factor de 2.4 en comparación con el método de Euler.

Ahora dicho estimado se utiliza para mejorar o corregir la predicción de  $y_1$  sustituyendo el nuevo resultado en el lado derecho de la ecuación (25.16):

$$y_1 = 2 + \frac{[3 + 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.701082)]}{2} = 6.275811$$

que representa un error relativo porcentual absoluto del 1.31%. El resultado, a su vez, se sustituye en la ecuación (25.16) para corregir aún más:

$$y_1 = 2 + \frac{[3 + 4e^{0.8(1)} - 0.5(6.275811)]}{2} = 6.382129$$

que representa un  $|\epsilon_i|$  de 3.03%. Observe cómo los errores algunas veces crecen conforme se llevan a cabo las iteraciones. Tales incrementos pueden ocurrir especialmente con grandes tamaños de paso, y nos previenen de llegar a una conclusión general errónea de que siempre una iteración más mejorará el resultado. No obstante, con tamaños de paso lo suficientemente pequeños, las iteraciones, a la larga, deberán converger a un solo valor. En nuestro caso, 6.360865, que representa un error relativo de 2.68%, que se obtiene después de 15 iteraciones. La tabla 25.2 presenta los resultados del resto de los cálculos usando el método con 1 y 15 iteraciones por paso.

En el ejemplo anterior, la derivada es una función tanto de la variable dependiente  $y$  como de la variable independiente  $x$ . En situaciones como los polinomios, donde la EDO es únicamente función de la variable independiente, no se requiere el paso predictor [ecuación (25.16)] y el corrector se aplica sólo una vez en cada iteración. En tales casos, la técnica se expresa en forma concisa como sigue:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}h \quad (25.18)$$

Observe la similitud entre el lado derecho de la ecuación (25.18) y la regla del trapecio [ecuación (21.3)]. La relación entre los dos métodos se puede demostrar formalmente empezando con la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

De esta ecuación se obtiene y por integración:

$$\int_{y_i}^{y_{i+1}} dy = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (25.19)$$

cuyo resultado es:

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (25.20)$$

o

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \quad (25.21)$$

Ahora, del capítulo 21 recuerde que la regla del trapecio [ecuación (21.3)] se define como:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \cong \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h \quad (25.22)$$

donde  $h = x_{i+1} - x_i$ . Sustituyendo la ecuación (25.22) en la (25.21) se tiene:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} h \quad (25.23)$$

que es equivalente a la ecuación (25.18).

Como la ecuación (25.23) es una expresión directa de la regla del trapecio, el error de truncamiento local está dado por [recuerde la ecuación (21.6)]:

$$E_t = -\frac{f''(\xi)}{12} h^3 \quad (25.24)$$

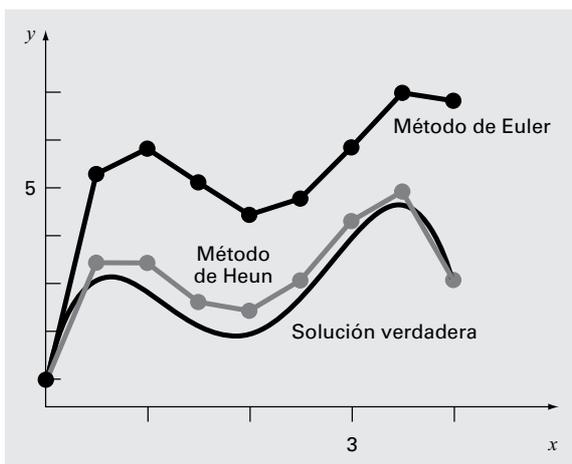
donde  $\xi$  está entre  $x_i$  y  $x_{i+1}$ . Así, el método es de segundo orden porque la segunda derivada de la EDO es cero mientras que la solución verdadera es una cuadrática. Además, los errores local y global son  $O(h^3)$  y  $O(h^2)$ , respectivamente. Entonces, al disminuir el tamaño de paso se disminuye el error más rápido que en el método de Euler. La figura 25.11, que muestra el resultado usando el método de Heun para resolver el polinomio del ejemplo 25.1, demuestra dicho comportamiento.

### 25.2.2 Método del punto medio (o del polígono mejorado)

La figura 25.12 ilustra otra modificación simple del método de Euler. Conocida como *método del punto medio* (o *del polígono mejorado* o *el modificado de Euler*), esta técnica usa el método de Euler para predecir un valor de  $y$  en el punto medio del intervalo (figura 25.12a):

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i) \frac{h}{2} \quad (25.25)$$

Después, este valor predicho se utiliza para calcular una pendiente en el punto medio:



**Figura 25.11**

Comparación de la solución verdadera con la solución numérica usando los métodos de Euler y de Heun para la integral de  $y' = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$ .

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}) \tag{25.26}$$

que se supone representa una aproximación válida de la pendiente promedio en todo el intervalo. Dicha pendiente se usa después para extrapolar linealmente desde  $x_i$  hasta  $x_{i+1}$  (figura 25.12b):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h \tag{25.27}$$

Observe que como  $y_{i+1}$  no está en los dos lados, el corrector [ecuación (25.27)] no puede aplicarse de manera iterativa para mejorar la solución.

Como en la sección anterior, este procedimiento también se relaciona con las fórmulas de integración de Newton-Cotes. Recuerde de la tabla 21.4 que la fórmula más simple de integración abierta de Newton-Cotes, la cual se denomina el método del punto medio, se puede representar como:

$$\int_a^b f(x) dx \cong (b-a)f(x_1)$$

donde  $x_1$  es el punto medio del intervalo  $(a, b)$ . Usando la nomenclatura del caso actual, lo anterior se expresa como:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx \cong hf(x_{i+1/2})$$

La sustitución de esta fórmula en la ecuación (25.21) dará la ecuación (25.27). De esta manera, así como al método de Heun se le puede llamar la regla del trapecio, el *método del punto medio* obtiene su nombre de la fórmula de integración correspondiente sobre la cual se basa.

El método del punto medio es mejor que el método de Euler debido a que utiliza una estimación de la pendiente en el punto medio del intervalo de predicción. Recuerde que, como vimos en la diferenciación numérica de la sección 4.1.3, las diferencias divididas finitas centradas son mejores aproximaciones de las derivadas, que las versiones hacia adelante o hacia atrás. Una aproximación centrada, como la de la ecuación (25.26) tiene un error de truncamiento local de  $O(h^2)$  en comparación con la aproximación hacia adelante del método de Euler, que tiene un error de  $O(h)$ . En consecuencia, los errores local y global del método del punto medio son  $O(h^3)$  y  $O(h^2)$ , respectivamente.

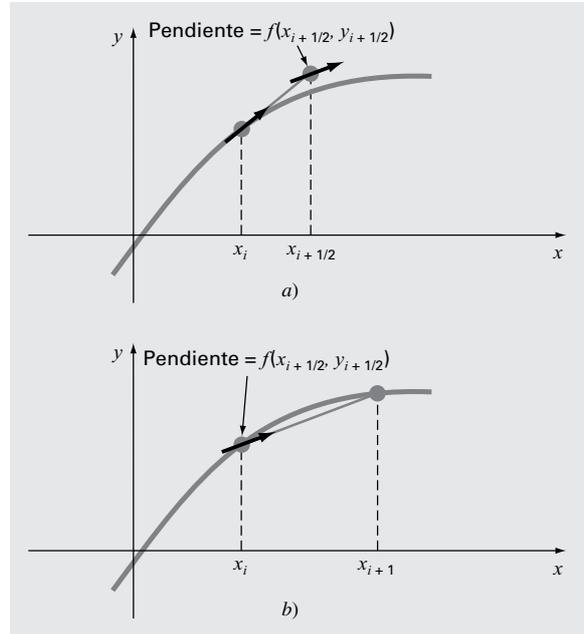
### 25.2.3 Algoritmos computacionales para los métodos de Heun y del punto medio

Ambos métodos, el de Heun con un solo corrector y el del punto medio, se programan fácilmente con la estructura general mostrada en la figura 25.7. Como en las figuras 25.13a y 25.13b, es posible escribir rutinas simples en lugar de la rutina de Euler en la figura 25.7.

No obstante, cuando se va a implementar la versión iterativa del método de Heun, las modificaciones son un poco más complicadas (aunque se localicen dentro de un solo módulo). Hemos desarrollado el pseudocódigo para este propósito en la figura 25.13c. Este algoritmo se combina con la figura 25.7 con el objetivo de desarrollar el software para el método iterativo de Heun.

### 25.2.4 Resumen

Al mejorar el método de Euler desarrollamos dos nuevas técnicas de segundo orden. Aun cuando esas versiones requieren más cálculos para determinar la pendiente, la reducción que se obtiene del error nos permitirá concluir, en una sección próxima (sección 25.3.4), que usualmente una mejor exactitud vale el esfuerzo. Aunque existen ciertos casos donde técnicas fácilmente programables, como el método de Euler, pueden aplicarse con ventaja, los métodos de Heun y del punto medio por lo común son superiores y se deberán implementar si son consistentes con los objetivos del problema.



**Figura 25.12** Representación gráfica del método del punto medio. a) Ecuación (25.25) y b) ecuación (25.27).